

CHAPITRE V: ONDES DE CHOCS OBLIQUES

Lorsqu'on place un obstacle fixe dans un écoulement de gaz en régime supersonique, l'arrêt non isentropique du fluide se caractérise par l'apparition d'une onde de choc. Le choc droit étudié au chapitre précédent est un cas particulier d'une famille beaucoup plus large, les chocs obliques. Ceux-ci peuvent revêtir différentes formes.

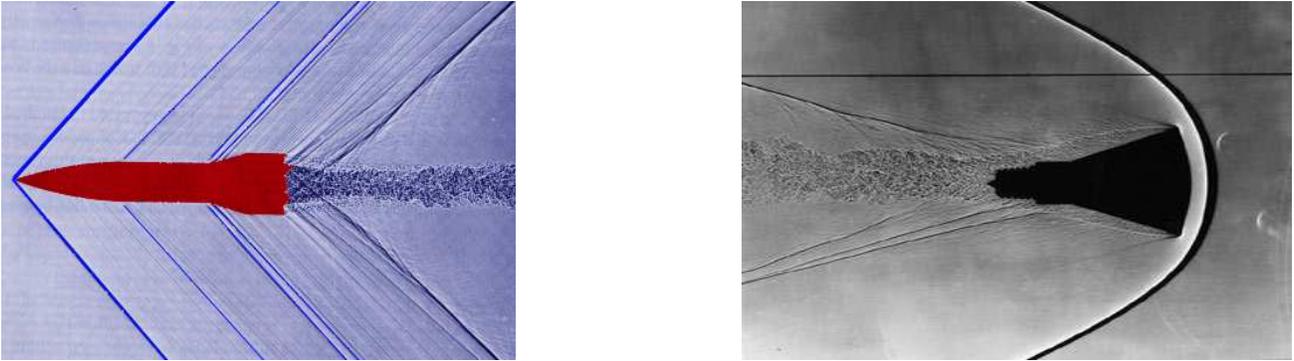


Figure 1: Ondes de chocs attachées et détachées sur des objets de forme différente.

1 Relations de saut à la traversée du choc oblique

Nous allons nous intéresser à une onde de choc, $\Sigma(t)$ créée dans l'écoulement qui contrairement au chapitre IV n'est plus perpendiculaire à l'écoulement amont, **l'onde est dite oblique**. Sur la figure (2) nous présentons les différentes notations introduites pour son étude. Ces notations nous permettent de projeter les équations de saut sur la normale \vec{N} à l'onde de choc et sur la tangente \vec{t} comme vu au chapitre IV. Nous rappelons ci-dessous les équations de saut de masse (1)(a), de

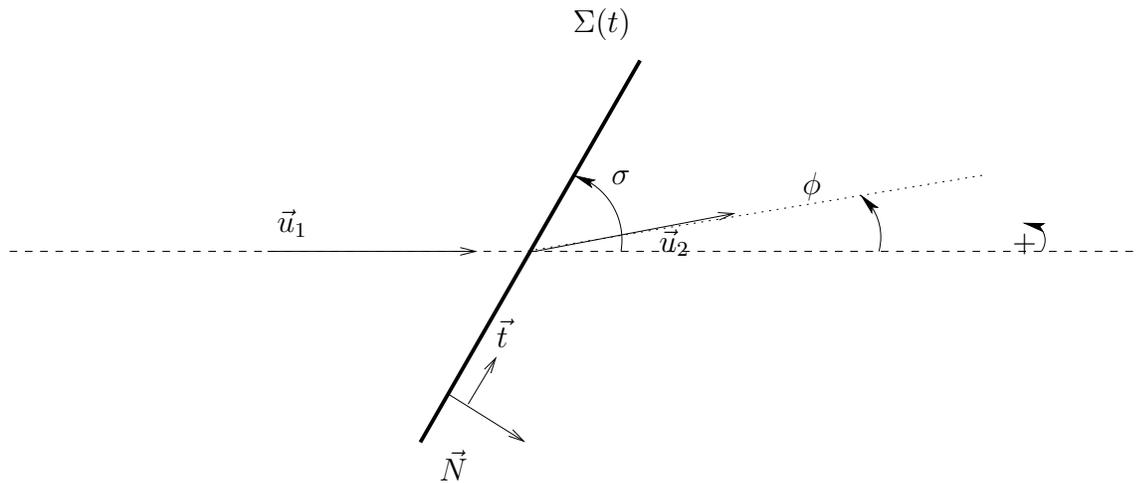


Figure 2: Notations pour le choc oblique.

quantités de mouvement (1)(b),(c) et d'énergie (1)(d) vues au chapitre IV, avec W la vitesse de la discontinuité.

$$\begin{cases} \rho_1 (u_{1n} - W) = \rho_2 (u_{2n} - W) & (a) \\ \rho_1 u_{1n} (u_{1n} - W) + p_1 = \rho_2 u_{2n} (u_{2n} - W) + p_2 & (b) \\ u_{1t} = u_{2t} & (c) \\ h_1 + \frac{(u_{1n}-W)^2}{2} = h_2 + \frac{(u_{2n}-W)^2}{2} & (d) \end{cases} \quad (1)$$

Le premier membre de (1)(b) peut être réécrit différemment compte tenu de (1)(a):

$$\rho_1 u_{1n} (u_{1n} - W) + p_1 = \rho_1 (u_{1n} - W)^2 + p_1 + \rho_1 W (u_{1n} - W) = \rho_1 (u_{1n} - W)^2 + p_1 + \rho_2 W (u_{2n} - W) \quad (2)$$

Le système (1)(a), (b), (d) devient alors:

$$\begin{cases} \rho_1 (u_{1n} - W) = \rho_2 (u_{2n} - W) & (a) \\ \rho_1 (u_{1n} - W)^2 + p_1 = \rho_2 (u_{2n} - W)^2 + p_2 & (b) \\ h_1 + \frac{(u_{1n}-W)^2}{2} = h_2 + \frac{(u_{2n}-W)^2}{2} & (c) \end{cases} \quad (3)$$

Il faut rajouter à ce système une équation d'évolution qui s'écrit:

$$s_2 > s_1 \quad (4)$$

Le système (3), (4) est formellement identique à celui étudié au chapitre IV pour le choc droit, (12),(13), (14) et (15). La résolution est donc identique en remplaçant u_1 par $u_{1n} - W$ et u_2 par $u_{2n} - W$. Pour simplifier nous allons supposer le choc oblique stationnaire $W = 0$ et nous placer dans le cas d'un gaz parfait polytropique. Ainsi tous les résultats vus au chapitre IV équations (27), (28), (29), (30), (32), (33), (34) et (35) restent valables en remplaçant dans ces expressions M_1 par $M_{1n} = \frac{u_{1n}}{c_1}$ et M_2 par $M_{2n} = \frac{u_{2n}}{c_2}$. On a donc:

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{(2 + (\gamma - 1)M_{1n}^2) (1 - \gamma + 2\gamma M_{1n}^2)}{(\gamma + 1)^2 M_{1n}^2} \quad (5)$$

$$\frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{u_2}{u_1} = \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} + \frac{2}{(\gamma + 1)M_{1n}^2} \quad (6)$$

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{1 - \gamma + 2\gamma M_{1n}^2}{1 + \gamma} \quad (7)$$

$$M_{2n}^2 = \frac{2 + (\gamma - 1) M_{1n}^2}{1 - \gamma + 2\gamma M_{1n}^2} \quad (8)$$

Avec les notations de la figure (2) on a :

$$M_{1n} = \frac{u_{1n}}{c_1} = \sin \sigma \frac{u_1}{c_1} = \sin \sigma M_1 \quad (9)$$

$$M_{2n} = \frac{u_{2n}}{c_2} = \sin(\sigma - \phi) \frac{u_2}{c_2} = \sin(\sigma - \phi) M_2 \quad (10)$$

Dans le cas du gaz parfait polytropique, le saut d'entropie Δs s'exprime (cf aussi chapitre IV):

$$\Delta s = s_2 - s_1 = C_v \ln \left(\frac{T_2}{T_1} \left(\frac{\rho_2}{\rho_1} \right)^{1-\gamma} \right) \quad (11)$$

Ce saut devant être positif (5), cela implique tout comme au chapitre IV:

$$M_{1n} > 1 \quad \text{et} \quad M_{2n} < 1 \quad (12)$$

On obtient donc le résultat suivant compte tenu des expressions (9) et (10):

$$M_{1n} > 1 \rightarrow M_1 > 1 \quad \text{et} \quad M_{2n} < 1 \rightarrow M_2 < 1 \quad \text{ou} \quad M_2 > 1 \quad (13)$$

Une onde de choc oblique ne peut apparaître qu'en écoulement supersonique, par contre l'écoulement après le choc peut être subsonique ou supersonique, il y a toutefois diminution du nombre de Mach, augmentation de la pression, de la température et de la masse volumique

2 La polaire de choc

Connaissant l'écoulement avant le choc. Nous cherchons à déterminer en outre σ ou ϕ afin de compléter la résolution. En exploitant (1)(c), avec les notations de la figure (2) on obtient :

$$u_1 \cos \sigma = u_2 \cos(\sigma - \phi) \quad (14)$$

De même l'équation (1)(a) donne:

$$\rho_1 u_1 \sin \sigma = \rho_2 u_2 \sin(\sigma - \phi) \quad (15)$$

On en déduit les relations suivantes:

$$\frac{u_1}{u_2} = \frac{\cos(\sigma - \phi)}{\cos(\sigma)} \quad (16)$$

et,

$$\frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{\tan(\sigma - \phi)}{\tan(\sigma)} \quad (17)$$

Le rapport de masse volumique est donné en (6) en fonction de M_{1n} défini en (9), on obtient alors une relation entre σ , ϕ et M_1 :

$$\frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} + \frac{2}{(\gamma + 1)M_1^2 \sin^2 \sigma} = \frac{\tan(\sigma - \phi)}{\tan(\sigma)} \quad (18)$$

Pour des raisons de symétrie, nous supposons $0 < \sigma < \pi/2$. Pour M_1 donné, compte tenu de (13), σ est supérieur à $\arcsin(\frac{1}{M_1})$. Ainsi:

$$\arcsin\left(\frac{1}{M_1}\right) \leq \sigma \leq \frac{\pi}{2} \quad (19)$$

L'expression (18) détermine les courbes $\phi = \phi(\sigma, M_1)$, représentées pour différentes valeurs de M_1 sur la figure (3), ces courbes sont appelées **polaires de choc**. La figure (3) suggère quelques commentaires:

1. L'angle ϕ est souvent fixé en pratique car on étudie l'écoulement au dessus d'un obstacle qui change brutalement de direction. Le fluide étant parfait, le fluide glisse sur la paroi et la direction de la vitesse après le choc est connu
2. Un angle limite est obtenu pour chaque valeur de M_1 , au dessus duquel il n'y a plus de solutions. Le maximum de chaque courbe est représenté par la courbe en pointillé. Si $\phi = \phi_{max}(M_1)$ une unique solution existe, si $0 < \phi < \phi_{max}(M_1)$ deux solutions existent $\arcsin(\frac{1}{M_1}) \leq \sigma^- < \sigma^+ \leq \pi/2$ sont prédites. Comme p_2/p_1 donné en (7) est une fonction croissante de $M_1 \sin(\sigma)$, $p_2(\sigma^+) > p_2(\sigma^-)$. On parle de choc fort pour la solution σ^+ , et de choc faible pour σ^- . En dehors, de conditions particulières imposées à l'aval, des considérations de stabilité favorisent la solution de choc faible

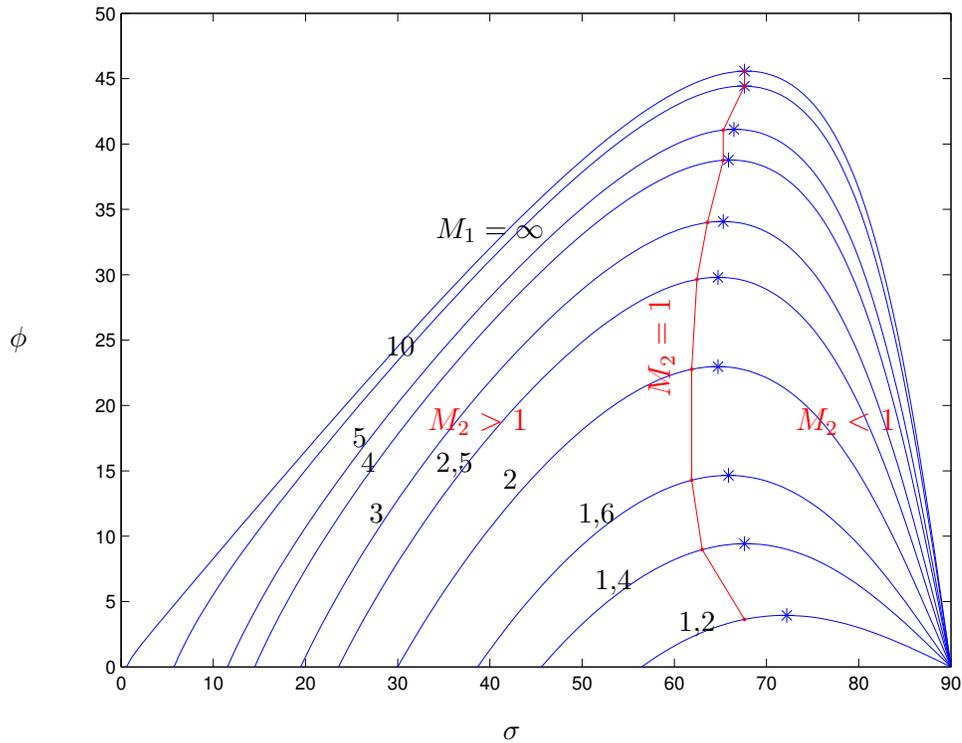


Figure 3: Polaires de choc pour le gaz parfait polytropique ($\gamma = 1.4$). Les étoiles représentent les sommets de chaque courbe paramétrée par le nombre de Mach M_1 . La courbe en trait continu représente la ligne sonique avale ($M_2 = 1$)

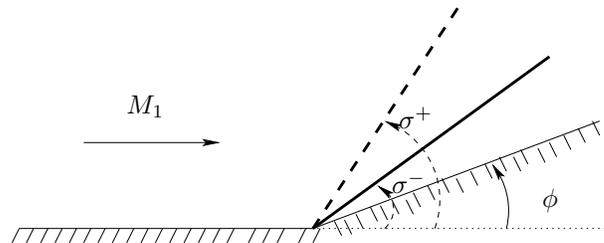


Figure 4: Choc faible en gras, choc fort en pointillé.

3 Rapport des pressions génératrices

3. Les étoiles donnent la position des sommets des polaires de choc tandis que la courbe en traits pleins correspond à un écoulement aval sonique ($M_2 = 1$) et partage toute polaire avec à gauche le cas de l'écoulement aval supersonique, à droite celui de l'écoulement aval subsonique. Les chocs forts fournissent toujours en aval un écoulement subsonique tandis que pour un choc faible les deux cas restent autorisés.

Lorsque l'angle de déviation est trop grand, le modèle du choc oblique attaché n'est plus valable. En pratique un choc courbe se forme en amont avec une poche sonique. Nous n'étudierons pas le choc détaché dans ce cours, nous représentons succinctement ce que l'on obtient sur la figure ci-dessous ¹

¹cf Modern Compressible flow, Anderson, Mac Graw Hill

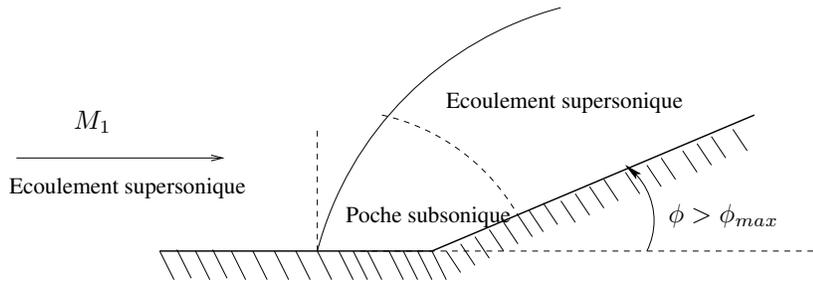


Figure 5: Cas du choc détaché en pointillé ligne sonique.

4 Rapport des pressions génératrices

Nous avons vu au chapitre IV, figure(6), que le rapport des pressions génératrices $\frac{p_{02}}{p_{01}}$ étaient une fonction d décroissante du nombre de Mach. Compte tenu de tout ce qui précède, on peut déterminer de façon analogue le rapport des pressiosns génératrices à la traversée du choc oblique, qui sera une fonction de M_{1n} . Pour un nombre de Mach amont donné compte tenu de (9), on voit que le pression des rapports génératrices sera plus grand dans le cas du choc oblique que dans le cas du choc droit.

Le rapport des pressions génératrices est directement relié au rendement d'un moteur, plus ce

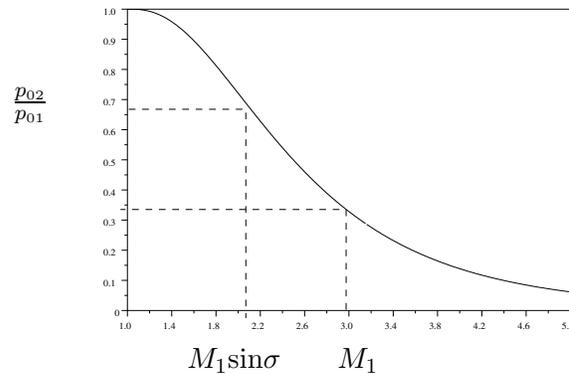


Figure 6: Pressions génératrices.

rapport est élevé, plus le rendement est fort. Cette constatation est à l'origine des structures des entrées d'air des moteurs d'avions. La prise d'air permet de capter de l'air pour alimenter la chambre de combustion, un choc est créé à l'entrée dès que l'écoulement rencontre l'entrée d'air. Le corps central du turboréacteur présente en général un ou plusieurs dièdres afin d'optimiser le rendement. Comme on peut le voir sur la figure (7), les entrées d'air supersonique sont très différentes, favorisant des chocs obliques permettant ainsi d'obtenir de meilleurs rendements.

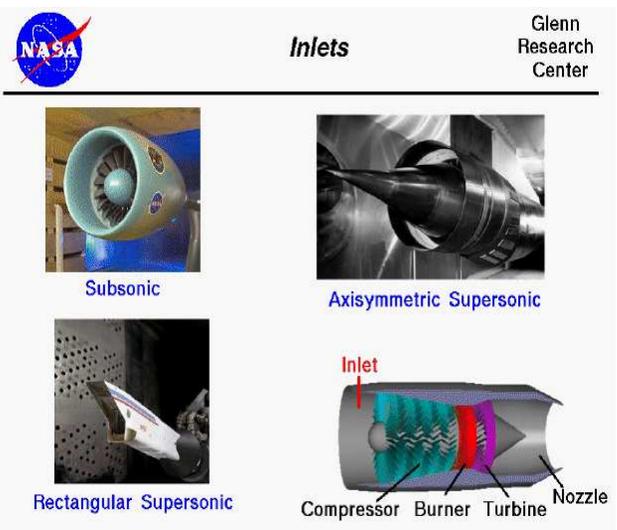


Figure 7: Différentes entrée d'air (source NASA).