

# Lois d'échelle de la marche descendante

Olivier Cadot, Romain Monchaux\*

July 4, 2018

Dans le but de mettre en évidence les deux modes de transport de la quantité de mouvement mis en jeu dans les équations de Navier-Stokes, nous présentons une étude dimensionnelle simple de l'écoulement le long d'une marche descendante. Rappelons tout d'abord ces équations:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} = -\frac{1}{\rho} \vec{\nabla}(p - p_0) + \nu \Delta \vec{v}, \quad (1)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0, \quad (2)$$

avec  $\vec{v}$  la vitesse de l'écoulement,  $p$  la pression et  $\nu$  et  $\rho$  la viscosité cinématique et la masse volumique du fluide considéré. Nous allons nous intéresser à deux cas limites de cette équation.

## 1 Deux modes de transport de la quantité de mouvement

### 1.1 Transport diffusif

Nous commencerons par rappeler que la diffusion moléculaire est à la base un processus purement aléatoire d'événements indépendants. Chaque molécule du fluide

est en interaction avec les autres (soit par chocs, pour les gaz, soit par forces de type van der Waals pour les liquides ou les solides) de telle sorte que les molécules sont des vecteurs d'échanges de grandeurs physiques (énergie ou chaleur, quantité de mouvement, masse). C'est l'agitation thermique de l'ensemble des molécules qui assure l'incohérence à l'échelle moléculaire. Il en résulte un transport macroscopique statistiquement très cohérent de cette grandeur au travers du système. L'exemple le plus parlant est le transport de la température au travers d'un barreau métallique initialement chauffé d'un côté. La structure de l'équation de transport par diffusion s'écrit pour une grandeur  $X$  quelconque:

$$\frac{\partial X}{\partial t} = D \nabla^2 X, \quad (3)$$

où  $D$  est le coefficient de diffusion pour la quantité  $X$  transportée. Le coefficient de diffusion ne dépend que du fluide. Dimensionnellement, on a  $[D] = L^2 T^{-1}$ . On prend maintenant l'équation de la dynamique 2 en posant égal à 0 le terme non-linéaire. Prenons le cas d'un écoulement initialement parallèle  $\vec{v} = u(y) \vec{e}_x$  sans gradient de pression suivant  $\vec{e}_x$ . L'équation de la dynamique s'écrit alors :

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \nu \nabla^2 \vec{v}. \quad (4)$$

C'est une équation de diffusion comme l'équation 3. La grandeur vectorielle qui est transportée par diffusion moléculaire est la quantité de mouvement par unité

---

\*Email address for correspondence: monchaux@ensta.fr

de masse (i.e. la vitesse). Le coefficient de diffusion  $D$  est la viscosité cinématique  $\nu$ . Puisque l'équation est linéaire, l'écoulement restera parallèle tout au long de sa dynamique. En évaluant l'ordre de grandeur des termes de cette équation on peut estimer le temps caractéristique de transport diffusif. Considérons des vitesses de l'ordre de  $U$ , une échelle caractéristique des gradients de l'ordre de  $L$  et un temps caractéristique que nous noterons ici  $\tau_\nu$ .

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} \simeq \frac{U}{\tau_\nu} \quad \text{et} \quad \nu \nabla^2 \vec{v} \simeq \frac{\nu U}{L^2}, \quad \text{soit} \quad \tau_\nu \simeq \frac{L^2}{\nu}. \quad (5)$$

$\tau_\nu$  est le temps caractéristique correspondant à la durée nécessaire pour diffuser sur une distance  $L$ . Il est important de noter que le temps caractéristique de transport par diffusion moléculaire ne dépend pas de l'intensité de la vitesse  $U$  qui est transportée, et que ce transport est d'autant plus efficace que la viscosité cinématique est grande.

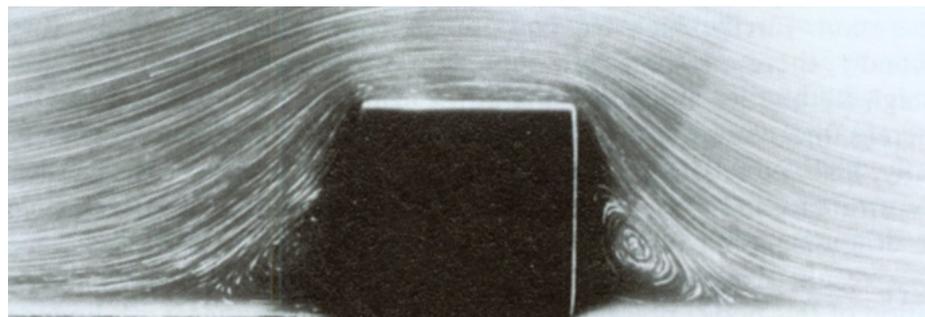


Figure 1: Illustration d'un mode de transport diffusif, l'écoulement est laminaire, les filets de fluide restent bien parallèles les uns aux autres malgré la présence de l'obstacle.

## 1.2 Transport convectif

Dans le cas du transport convectif, c'est la vitesse elle-même qui transporte la quantité de mouvement. Cette fois-ci, on considère l'équation de la dynamique sans le

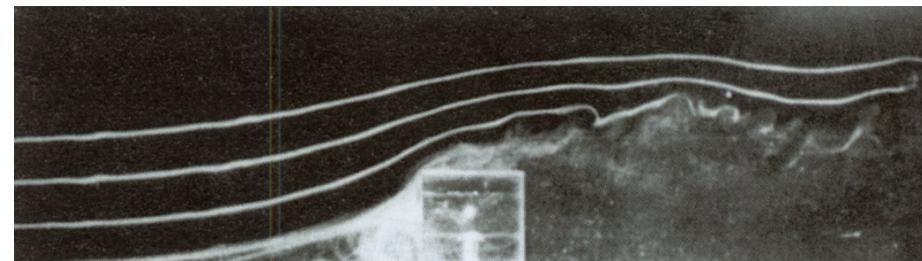


Figure 2: Illustration d'un mode de transport convectif, l'écoulement n'est plus laminaire.

terme diffusif. Dans ce cas l'équation est non-linéaire (équation d'Euler):

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} = -\frac{1}{\rho} \vec{\nabla}(p - p_0). \quad (6)$$

Evaluons l'ordre de grandeur des termes mis en jeu dans cette équation en omettant le gradient de pression et en considérant à nouveau des vitesses de l'ordre de  $U$ , une échelle caractéristique des gradients de l'ordre de  $L$  et un temps caractéristique que nous noterons ici  $\tau_c$ . Il vient:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} \simeq \frac{U}{\tau_c}, \quad \text{et} \quad (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} \simeq \frac{U^2}{L}, \quad \text{soit} \quad \tau_c \simeq \frac{L}{U}. \quad (7)$$

On remarque que le transport convectif dépend de la vitesse et qu'il est d'autant plus efficace que l'intensité de la vitesse  $U$  qui est transportée est grande. une illustration est donnée à la figure 2 où l'écoulement autour du bloc est maintenant turbulent et donc dominé par la convection.

## 2 Lois d'échelle de la marche descendante

Nous allons illustrer les deux mécanismes fondamentaux de transport dans les fluides par une expérience de laboratoire réalisée dans un tunnel hydrodynamique : l'écoulement de la marche descendante. Le nombre de Reynolds pour cet écoulement est calculé à partir de la vitesse de l'écoulement amont  $U$ , la hauteur de la marche  $h = 1$  cm, et la viscosité cinématique de l'eau  $\nu = 10^{-2}$  cm<sup>2</sup>/s. L'injection de colorant nous permet de visualiser la zone de recirculation derrière la marche. Voir la figure 3.

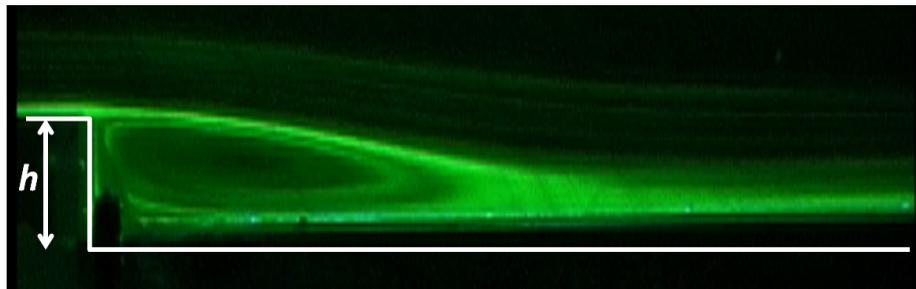


Figure 3: recirculation en aval d'une marche descendante. Notations utilisées.

Nous avons reporté dans la *figure 5* la longueur  $X_R$  de cette zone de recirculation en fonction de  $U$ . Pour des nombres de Reynolds inférieurs à 350, l'écoulement est stationnaire et la longueur de la zone de recirculation croît assez linéairement avec  $U$ . Au dessus de  $Re = 350$ , l'écoulement devient instationnaire et la longueur moyenne de la zone de recirculation décroît jusqu'à atteindre une valeur constante de saturation. Le changement brutal qui s'opère correspond au passage du mode de transport diffusif dominant au mode de transport convectif dominant dans la direction verticale. On peut d'ailleurs, à partir des temps caractéristiques des transports, retrouver simplement les comportements asymptotiques de la *figure 5*. Pour le transport diffusif, la vitesse  $U$  au dessus de la marche est transportée verticalement vers le sol derrière la marche pendant un temps  $\tau_\nu \propto \frac{h^2}{\nu}$  et atteindra donc le sol à

l'abscisse  $X_R \propto \frac{h^2}{\nu} U$  (pendant la diffusion verticale vers le bas, il y a un transport convectif vers l'aval à une vitesse que l'on suppose être  $U$ ). Avec cet argument simple on trouve que le mode diffusif impose une augmentation linéaire de  $X_R$  avec  $U$ , ce qui est effectivement confirmé par l'expérience tant que  $Re < 350$ . Au dessus de  $Re = 350$ , il y a des tourbillons (clairement observables à  $Re = 1500$ ) qui vont transporter la vitesse  $U$  au dessus de la marche vers le sol derrière la marche. Si on suppose que la vitesse périphérique de rotation des tourbillons est proportionnelle à  $U$  et qu'ils ont une taille proportionnelle à  $h$ , alors le temps pour transporter la vitesse  $U$  verticalement vers le sol derrière la marche est  $\tau_C \propto \frac{h}{U}$ . Avec le transport convectif vers l'aval à la vitesse  $U$ , la vitesse  $U$  qui était au dessus de la marche atteindra le sol en une abscisse  $X_R \propto \frac{h}{U} U = h$ . On trouve ici que la longueur de recirculation est indépendante de la vitesse de l'écoulement, c'est ce qu'on trouve expérimentalement puisque pour les grandes vitesses, la longueur de la recirculation sature à une valeur constante.

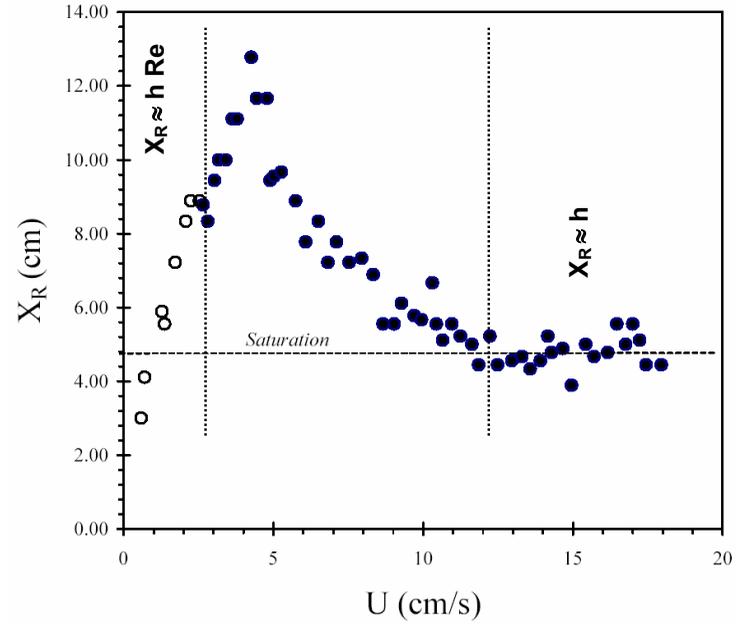


Figure 4: Mesure de la longueur de recirculation  $X_R$  en fonction de la vitesse  $U$ . Les cercles blancs correspondent à l'écoulement stationnaire, et les ronds noirs à l'écoulement instationnaire. On passe d'un mode de transport diffusif associé à la loi linéaire à bas nombre de Reynolds à un mode de transport convectif associé à la loi constante aux plus hauts nombres de Reynolds. La figure 5 présente des visualisation tout au long de la transition.

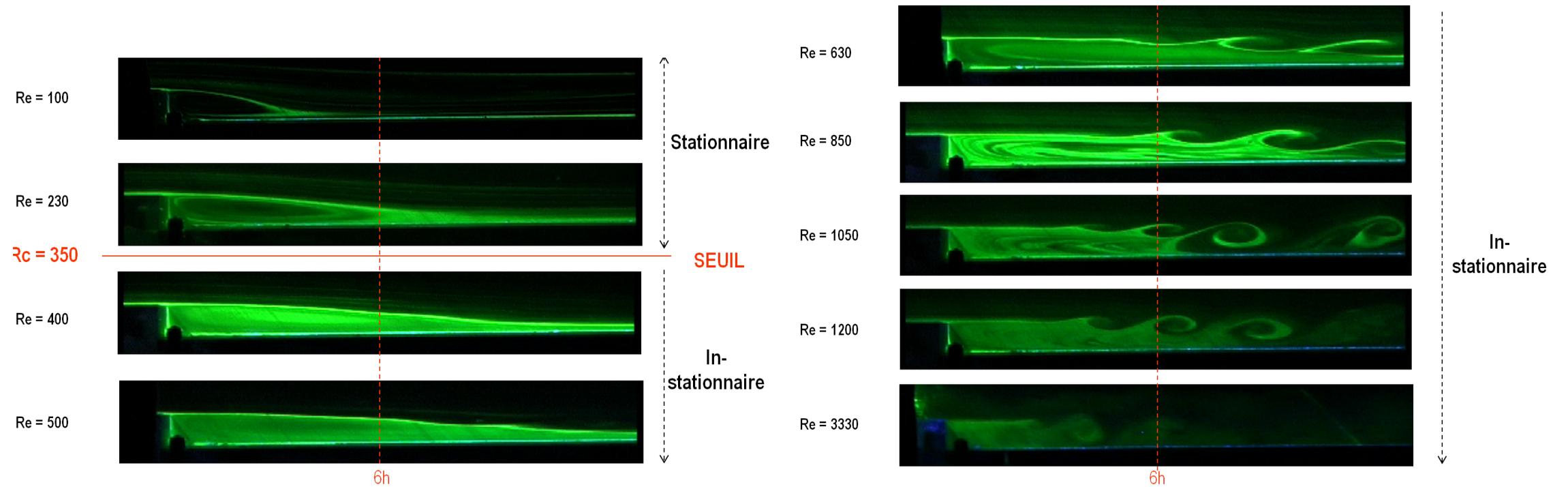


Figure 5: Visualisations de la transition à mesure que le nombre de Reynolds augmente.