

M2 - DFE - Techniques Expérimentales Avancées

Acquisition - Traitement du signal

Romain Monchaux, ENSTA-ParisTech (monchaux@ensta.fr)

1 Bruit blanc gaussien

1.1 Moyenne, écart-type et densité de probabilité

Question 1 : Les signaux bruts de signal 1 vus à différentes échelles de temps sont présentés à la figure 1. Ce signal est très fluctuant, semble stationnaire de moyenne nulle avec un écart-type proche de 1.

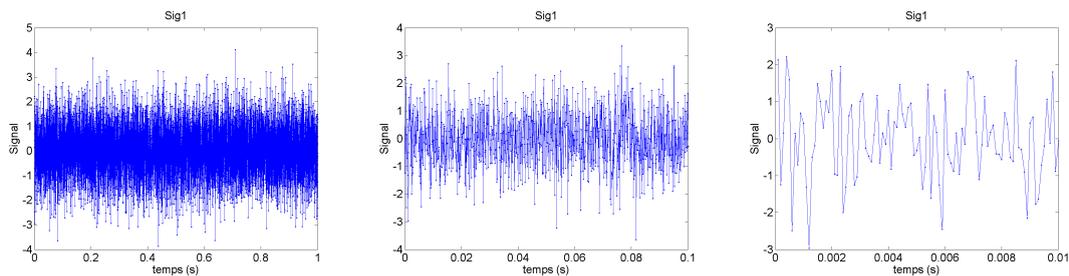


FIGURE 1 – Signal 1 vu à différentes échelles de temps.

Question 2 : La figure demandées est tracée à la figure 2. On voit clairement que moyenne et écart-type ne sont correctement estimées que pour un nombre de points assez important (de l'ordre de 10^4 au moins). On ne retrouve pas tout à fait ce qui a été dit en cours car on ne traite qu'un seul exemple alors qu'en cours, les résultats présentés rassemblaient un grand nombre de réalisations du même bruit blanc gaussien, mais la tendance est bien la même, convergence vers les premiers moment en $1/\sqrt{(N)}$.

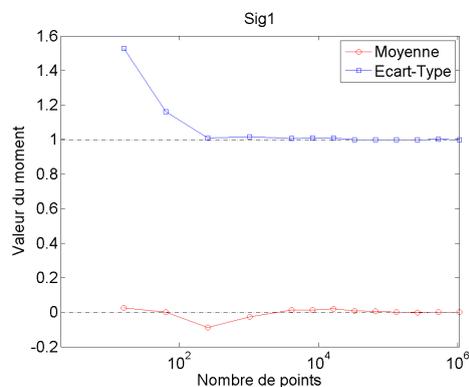


FIGURE 2 – Évolutions de la moyenne et de l'écart-type avec la longueur de signal considérée.

Question 3 : On choisit différents nombres de points, ici 2^{10} , 2^{12} , 2^{16} , 2^{18} et 2^{20} . La valeur "optimale" du nombre d'intervalles utilisés pour calculer la PDF est choisie de façon à ce que le sommet ne soit pas trop bruité en représentation linéaire et que les queues soient suivies le plus longtemps possible avec un

niveau de bruit raisonnable en représentation logarithmique. Voir la figure 3. Le nombre d'intervalles nécessaire pour avoir des PDF bien estimées augmente avec le nombre de points du signal original. La figure 4 présente les valeurs "optimales". On voit qu'elles évoluent comme la racine cubique de la longueur du signal.

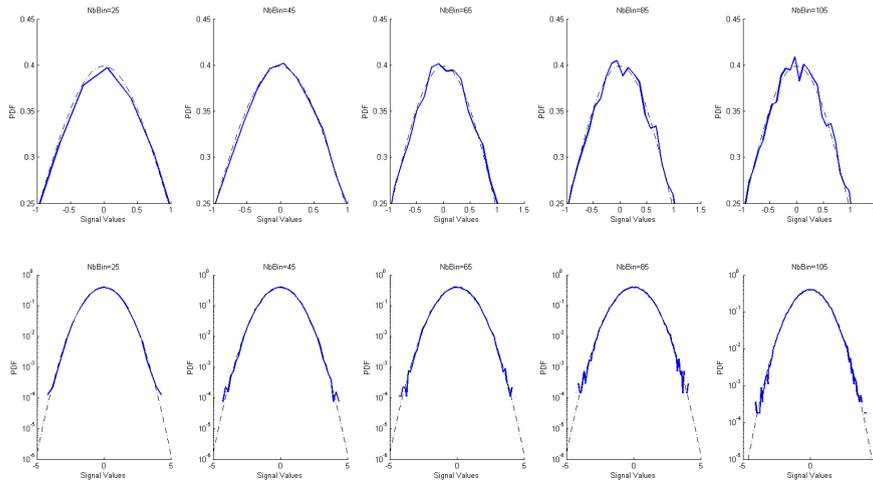


FIGURE 3 – Évolution des PDF avec le nombre d'intervalles utilisés pour les obtenir dans le cas d'un signal de longueur 2^{16} .

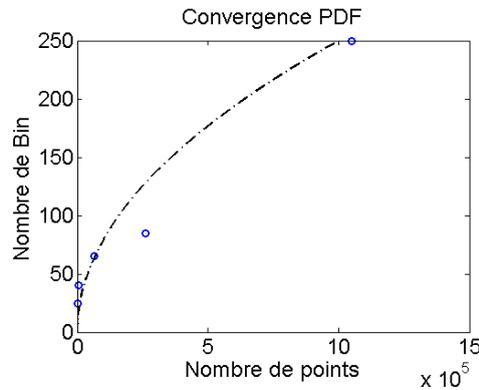


FIGURE 4 – Évolution du nombre d'intervalles utilisés pour obtenir une bonne estimation de la PDF en fonction de la longueur de signal considérée.

1.2 Spectre et autocorrélation

Question 1 : La figure, 5 présente les spectres du bruit blanc gaussien obtenus pour quatre longueurs de fenêtre différentes. Plus la longueur de fenêtre est petite, plus le spectre est lisse, moins il est bruité. C'est normal, puisque, à longueur de signal donnée, si la taille de fenêtre diminue, la fonction pwelch réalise davantage de moyennes entre les différents spectres calculés sur des intervalles de longueur N_{fft} . Dès lors qu'ils sont assez convergés, les spectres du bruit blanc gaussien sont plats. C'est la nature même de ce bruit, d'être équi-réparti sur tout le spectre de fréquences.

La résolution fréquentielle correspond à la précision que nous avons pour distinguer deux fréquences. Elle est directement liée à la fréquence d'échantillonnage et au nombre de points utilisés pour réaliser la FFT par : $\Delta f = F_s / N_{fft}$.

Quand on cherche à estimer la densité spectrale de puissance d'un signal, on va devoir choisir le nombre

de points utilisés pour réaliser la FFT. Ce choix résultera d'un compromis entre la résolution fréquentielle et le niveau de "moyennage" souhaités. Une façon d'augmenter N_{fft} et le niveau de moyennage simultanément est d'augmenter la longueur du signal. Le signal ne pouvant pas être rallongé une fois acquis, il faut penser à faire des acquisitions suffisamment longues !

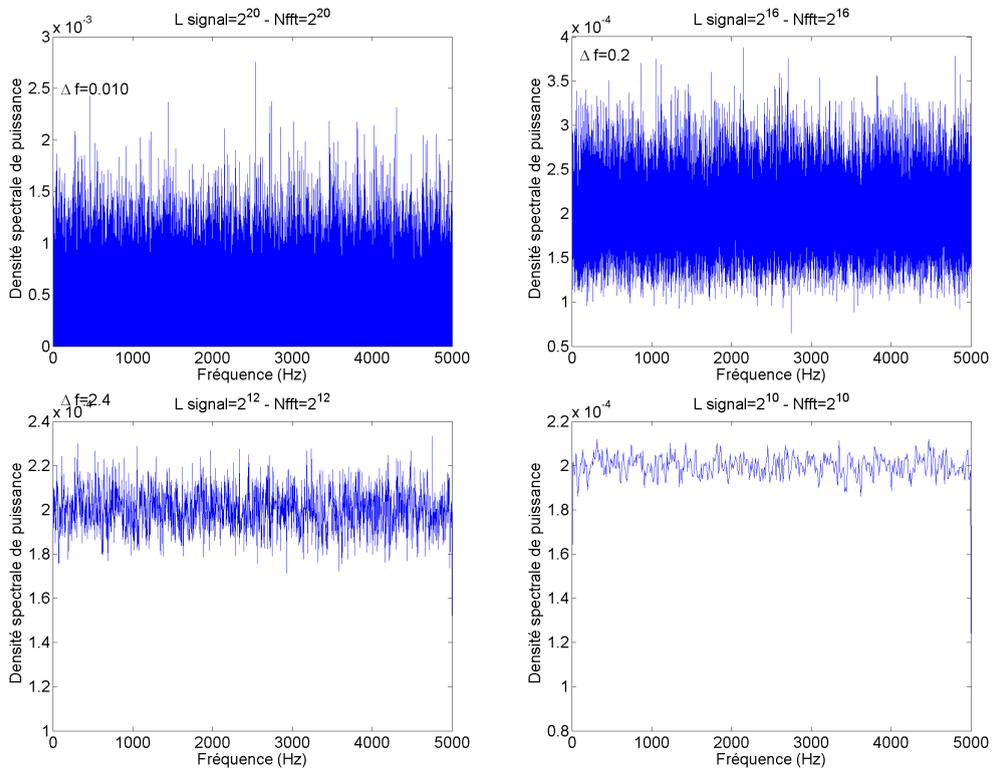


FIGURE 5 – Densité spectrale de puissance du bruit blanc gaussien estimée à partir de différentes longueurs de fenêtres.

Question 2 : L'auto-corrélation du bruit blanc gaussien est tracée à la figure 6. Cette fonction étant symétrique, on peut n'en tracer que la moitié. On voit un pic à 1 en 0 ce qui est systématique pour l'auto-corrélation normalisée, une valeur nulle partout ailleurs. Cela traduit le fait que deux échantillons successifs du bruit blanc gaussien sont décorrélés.

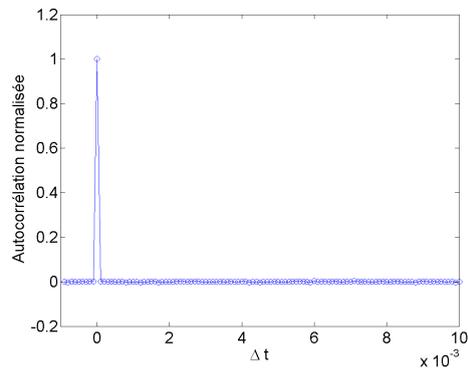


FIGURE 6 – Auto-corrélation du bruit blanc gaussien.

2 Etude de trois signaux synthétiques

Question 1 : Les traces temporelles des trois signaux étudiés sont présentées à la figure 7 pour trois valeurs de zoom temporel différentes. Ils sont tous très fluctuants, pourraient tous ressembler au bruit blanc gaussien vu précédemment, donc contenir de l'énergie à toutes les fréquences. Notons quand même que le Signal 2 doit être regardé sur une échelle de temps 10 fois plus longue que les autres pour leur ressembler. D'après ce que nous venons de dire, leur spectres devraient couvrir toutes les fréquences, le premier signal sur une plage plus restreinte manifestement. Ils ont tous la même moyenne (0) et le même écart-type (1). le signal 2 semble plus corrélé que les autres.

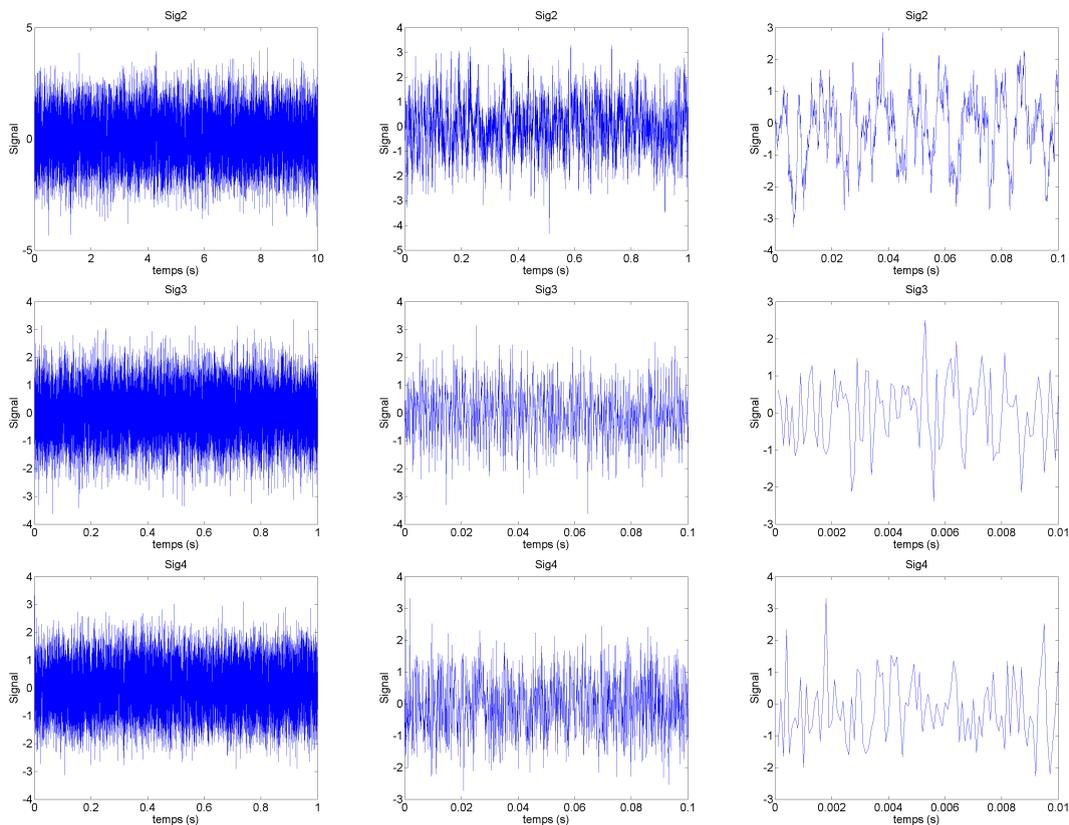


FIGURE 7 – Traces temporelles des trois signaux étudiés.

Question 2 : Les trois spectres demandés sont tracés à la figure 8.

- Signal 2 a un spectre plat aux basses fréquences, avec une chute rapide en allant vers les hautes fréquences avec une pente en loi de puissance d'exposant aux alentours de -1.7 .
- Signal 3 a un spectre plat type bruit blanc gaussien, auquel s'ajoutent deux pics bien définis à 1000 Hz et 2500 Hz. Il pourrait donc correspondre à la somme ou au produit de deux sinus bruités par un bruit blanc gaussien.
- Signal 4 a un spectre plat de type bruit blanc gaussien.

Question 3 : Les densités de probabilités obtenues à partir de 2^{12} points pour chacun des trois signaux sont présentées à la figure 9. Les trois densité de probabilités sont raisonnablement gaussienne, celle de Signal 4 semble toutefois un peu aplatie autour de 0.

Question 4 : En travaillant avec les signaux complets, voir figure 10, on retrouve bien les deux gaussiennes pour Signal 2 et Signal 3, en revanche, on voit maintenant que Signal 4 présente une distribution bi-modale avec deux maxima.

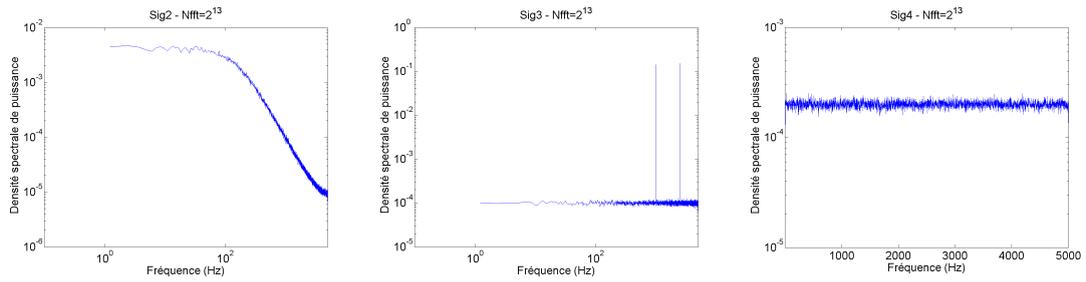


FIGURE 8 – Spectres des trois signaux étudiés.

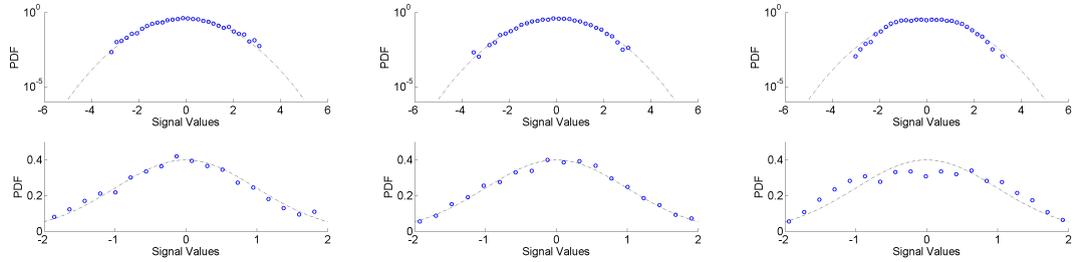


FIGURE 9 – Densité de probabilité des trois signaux étudiés obtenues à partir de 2^{12} points.

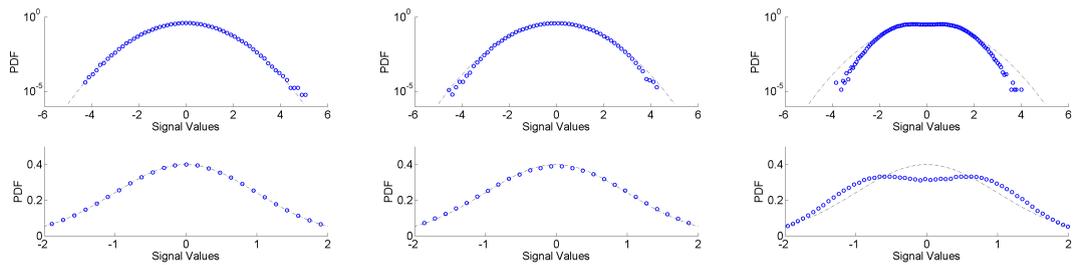


FIGURE 10 – Densité de probabilité des trois signaux étudiés obtenues à partir de 2^{20} points.

Question 5 : Les auto-corrélations des trois signaux sont présentées à la figure 11. On voit que Signal 1 est un bruit corrélé, Signal 2 est périodique, l'auto-corrélation fait bien apparaître les deux fréquences, le bruit a complètement disparu. Signal 3 est delta-corrélé en temps, comme un bruit blanc gaussien.

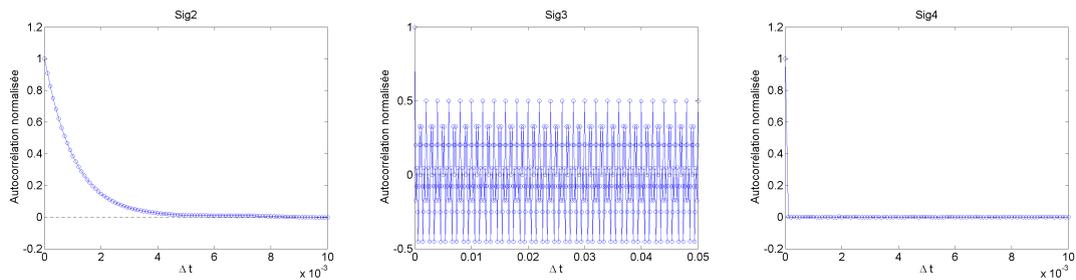


FIGURE 11 – Auto-corrélation des trois signaux étudiés obtenues à partir de 2^{20} points.

Question 6 et 7 : on a vu que des signaux très différents pouvaient avoir les mêmes moments statistiques, voire même les même PDF ou les mêmes spectres ou auto-corrélation. C'est le tracé de l'ensemble de ces grandeurs qui nous a permis de conclure sur la nature des signaux étudiés. Dans tous les

cas, il nous a fallu des signaux assez longs pour pouvoir trancher.

3 Analyse de signaux réels

Question 1 :

1. Différents zoom du signal de vitesse du jet turbulent sont présentés sur la figure 12.
2. Le signal semble stationnaire, et il semble également avoir un contenu spectral riche. En effet, au différents niveaux de zoom, il apparait toujours des fluctuations qui semblent, à ces échelles temporelles, similaires à celles observées aux échelles supérieures.

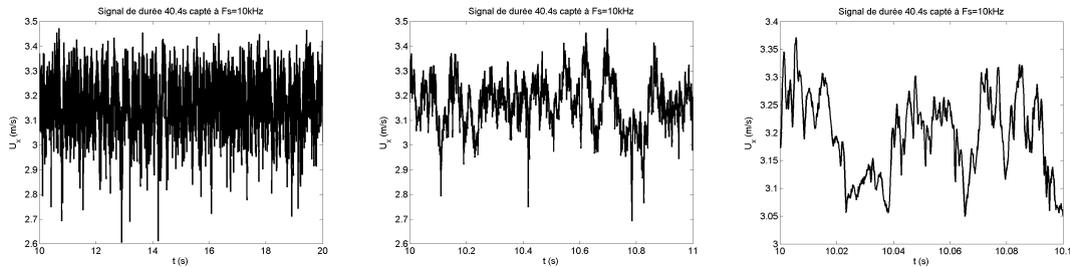


FIGURE 12 – Signal temporel du jet turbulent : trois versions zoomées.

3. La moyenne ($\overline{U_x}$) et l'écart-type ($u_{x,rms}$) de la vitesse calculés sur des intervalles temporels de différentes longueurs sont tracés à la figure 13.

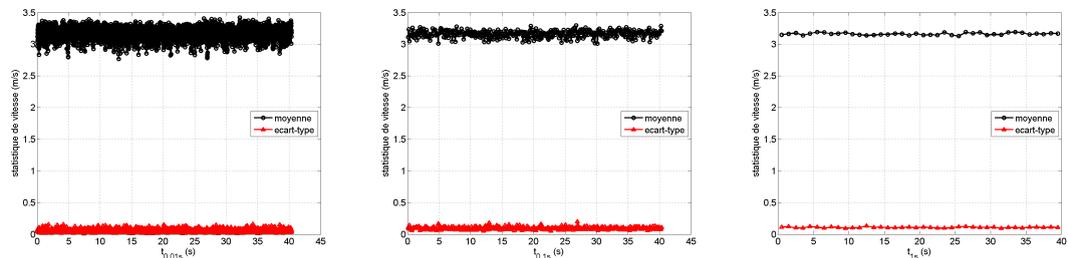


FIGURE 13 – Moyennes et écart-type glissant du signal de jet turbulent obtenus sur différents horizons de moyennage de ce signal : de gauche à droite (10 ms, 100 ms et 1000 ms).

4. Le signal semble tout à fait stationnaire, mais est très fluctuant. En effet, quand les moyennes sont réalisées sur des temps courts (≈ 0.1 s et moins), la moyenne glissante reste très fluctuante

Question 2 :

1. le spectre calculé sur le signal complet est présenté à la figure 14. Sa résolution fréquentielle est donnée par $\Delta f = F_s / N_{FFT}$ et vaut ici 0.0248 Hz.
2. Le spectre est très bruité. Ceci est normal, la transformée de Fourier contenant autant d'information que le signal temporel, comme nous n'avons réalisé aucune sorte de moyenne ici, on retrouve un signal qui présente le même niveau de bruit que le signal original. les bornes du spectre sont données : aux hautes fréquences par la fréquence de Shannon ($F_s/2$) et aux basses fréquences par la longueur du signal sur lequel la FFT est calculée ($2F_s/N_{FFT}$).

Question 3 :

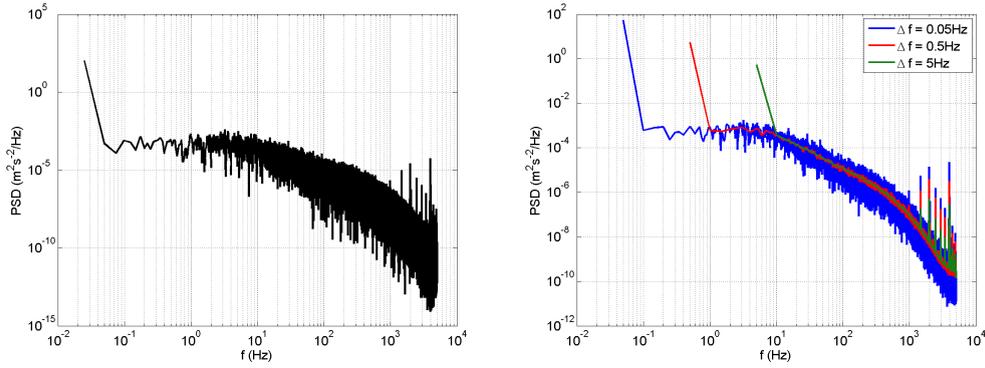


FIGURE 14 – Spectres du signal de vitesse du jet turbulent. Gauche : spectre calculé sur le signal complet à une résolution fréquentielle $\Delta f = 0.0248$ Hz. Droite : empilements de différents spectres obtenus à des résolutions fréquentielles différentes.

1. Les spectres du signal de vitesse du jet turbulent obtenus à des résolutions fréquentielles différentes allant de 0.05 Hz à 5 Hz sont empilées sur la figure de droite de la figure 14. Plus la résolution fréquentielle est grande, *i.e.* plus le nombre de spectres moyennés est grand, plus le signal est lisse et le niveau de bruit faible. La borne supérieure du spectre, toujours données par $F_s/2$ ne varie pas d'un spectre à l'autre tandis que la borne inférieure est de plus en plus grande à mesure que le niveau de moyennage augmente. La pente attendue pour un spectre de vitesse turbulente en $f^{-5/3}$ ne devient observable qu'à partir d'un certain niveau de moyennage. On observe aussi très bien la coupure visqueuse qui s'opère autour de $f \approx 800$ Hz.

Question 4 : L'auto-corrélation et la PDF du signal de jet sont tracées à la figure 15. On voit que le jet est corrélé sur des temps assez longs, ce qui explique que moyenne et écart-type convergent pour des nombres d'échantillons successifs assez importants. Cette corrélation se voit aussi sur le spectre en loi de puissance d'exposant $-5/3$ comme attendu d'après les travaux de Kolmogorov. Les densité de probabilité ne sont pas gaussiennes, les événements négatifs sont plus probables que les positifs.

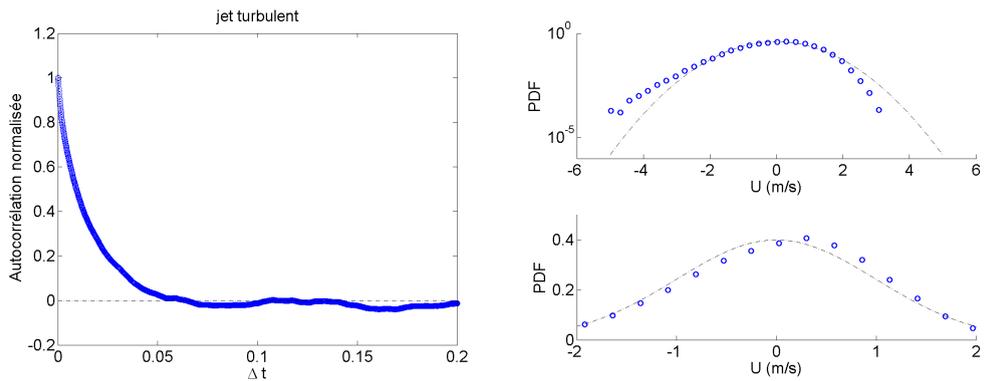


FIGURE 15 – Auto-corrélation et densité de probabilité du signal de jet.

3.1 Sillage

Nous nous intéressons maintenant au signal d'un sillage turbulent capté par un fil chaud. Celui-ci mesure donc la composante de vitesse longitudinale U_x au niveau de l'axe du sillage à environ 10 diamètres après le cylindre.

Question 1 :

1. Différents zooms temporels du signal de sillage sont présentés à la figure 16

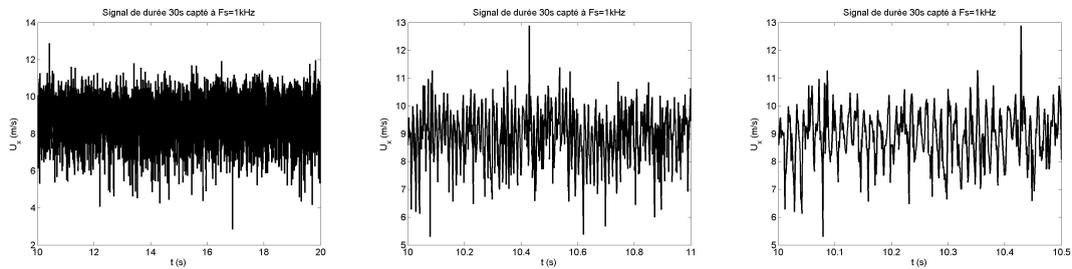


FIGURE 16 – Signal temporel du sillage turbulent : trois versions zoomées.

2. Le signal semble stationnaire. La version zoomée sur 500 ms semble présenter une période bien définie autour de 0.01 s. Le signal présente par ailleurs des fluctuations plus lentes qui ressemblent à celles observées dans le cas du jet turbulent.
3. La moyenne ($\overline{U_x}$) et l'écart-type ($u_{x,rms}$) de la vitesse calculés sur des intervalles temporels de différentes longueurs sont tracés à la figure 17.

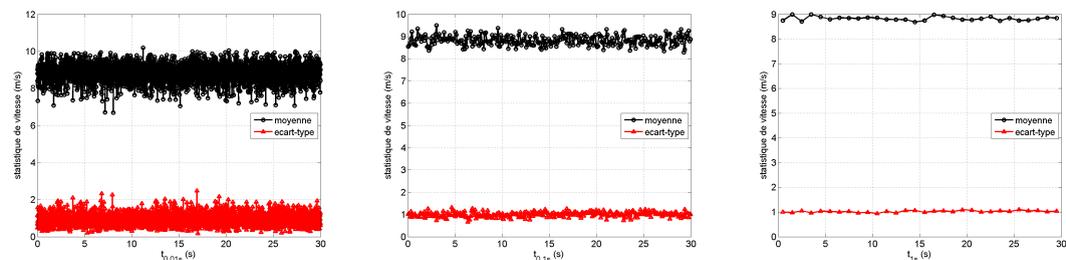


FIGURE 17 – Moyennes et écart-type glissant du signal de sillage turbulent obtenus sur différents horizons de moyennage de ce signal : de gauche à droite (10 ms, 100 ms et 1000 ms).

4. Le signal semble tout à fait stationnaire, mais est très fluctuant. En effet, quand les moyennes sont réalisées sur des temps courts (≈ 0.1 s et moins), la moyenne glissante reste très fluctuante. Signe probable de corrélations présentes à temps courts.

Question 2 Étude statistique.

1. le spectre du signal de sillage turbulent calculé sur le signal complet est présenté à la figure 18. Ses bornes sont données comme précédemment par la fréquence de Shannon et l'horizon de la FFT. Le spectre est à nouveau très bruité pour les mêmes raisons que pour le jet. Il semble en revanche présenter un pic à une fréquence bien définie autour de $F_p \approx 75$ Hz.
2. Les spectres du signal de vitesse du sillage turbulent obtenus à des résolutions fréquentielles différentes allant de 0.05 Hz à 5 Hz sont empilés sur la figure de droite de la figure 18. Plus la résolution fréquentielle est grande, *i.e.* plus le nombre de spectres moyennés est grand, plus le signal est lisse et le niveau de bruit faible. La borne supérieure du spectre, toujours donnée par $F_s/2$ ne varie pas d'un spectre à l'autre tandis que la borne inférieure est de plus en plus grande à mesure que le niveau de moyennage augmente. Sur les spectres plus lisses, la fréquence située autour de 75 Hz est bien visible et facilement mesurable. Elle correspond bien sûr au lâcher tourbillonnaire de l'instabilité de von Kármán qui s'opère ici sur un fond turbulent. La pente attendue pour un spectre de vitesse turbulente en $f^{-5/3}$ ne devient observable qu'à partir d'un certain niveau de moyennage. On ne parvient pas à observer ici la coupure visqueuse qui doit s'opérer à des fréquences supérieures à la fréquence d'échantillonnage.

3. l'auto-corrélation et la densité de probabilité du signal de jet sont présentées à la figure 19. Sur l'auto-corrélation, on retrouve la périodicité liée à l'allée de Bénard-von Kármán, la corrélation sur des temps de l'ordre de 0.2 s, plus longs que dans le cas du jet. Les PDF sont tout à fait similaire à celle du jet turbulent.
4. En conclusion, ce signal contient toutes les caractéristiques de celui du jet turbulent aux quelles s'ajoute la périodicité liée au mode instable de Bénard-von Kármán.

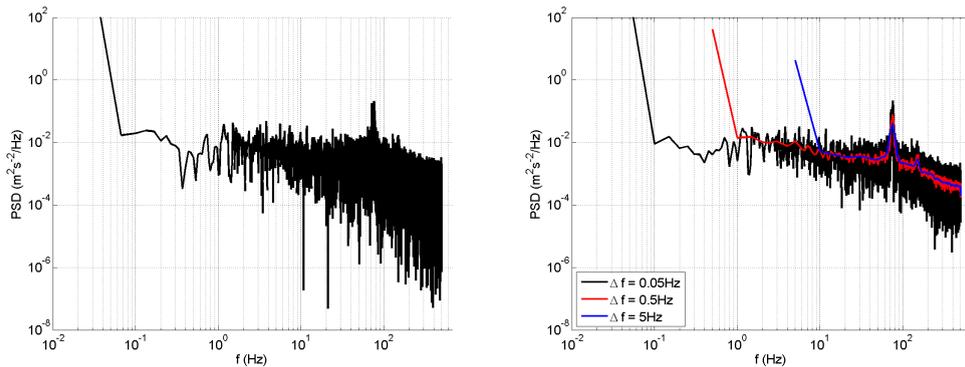


FIGURE 18 – Spectres du signal de vitesse du sillage turbulent. Gauche : spectre calculé sur le signal complet à une résolution fréquentielle $\Delta f = 0.033 \text{ Hz}$. Droite : empilements de différents spectres obtenus à des résolutions fréquentielles différentes.

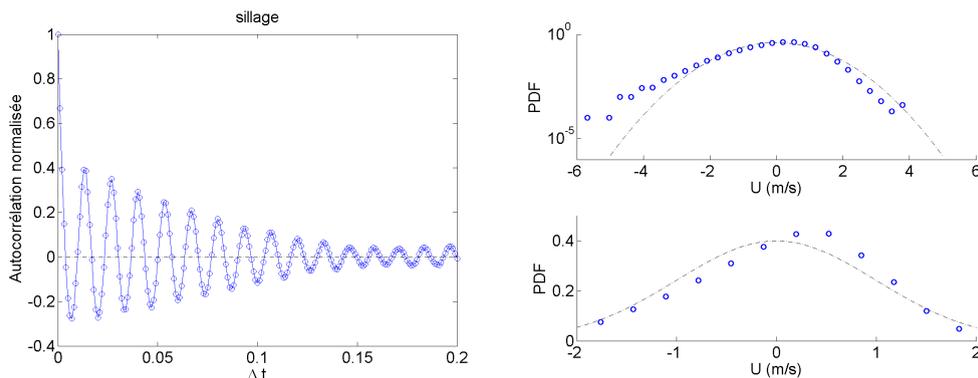


FIGURE 19 – Auto-corrélation et densité de probabilité du signal de vitesse du sillage turbulent.

3.2 Signal de gong

Question 1 :

1. Le signal de forçage ainsi que le signal de pression sont tracés à la figure 20.
2. La moyenne (\bar{p}) et l'écart-type (p_{rms}) de la pression et du forçage obtenus sur des intervalles de temps variables sont tracés à la figure 21.
3. Les signaux ne sont clairement pas stationnaires.

Question 2 :

1. Le spectre du signal de réponse en pression pour le signal complet est tracé en échelle linéaire et logarithmique à la figure 22. En échelle linéaire on voit apparaître des pics en fréquence bien définis. En échelle logarithmique, il semble se dégager une pente qui pourrait faire penser à celle des spectres turbulents observés ci-dessus. Le signal n'étant pas stationnaire, ce spectre calculé sur le signal complet doit être cependant commenté avec circonspection.

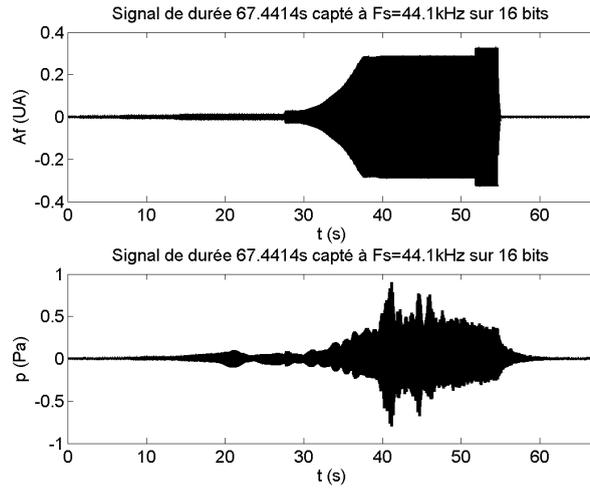


FIGURE 20 – Signaux temporels du gong : en haut le forçage, en bas la réponse en pression. Signaux complets.

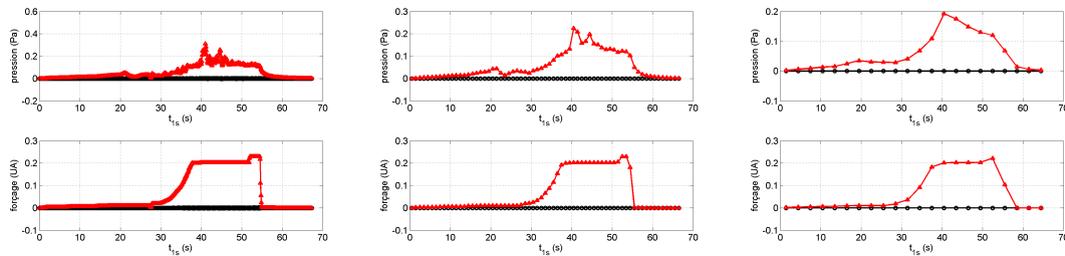


FIGURE 21 – Moyennes et écart-type glissant du signal de gong obtenus sur différents horizons de moyennage de ce signal : de gauche à droite (100 ms, 1000 ms et 3000 ms).

Question 3 : Le spectre du signal de réponse en pression et celui du forçage à une résolution de 5 Hz sans recouvrement sont présentés à la figure 23.

1. La résolution temporelle est donnée par $N_{FFT}/F_s = 1/\Delta f$ et vaut ici 0.2 s.
2. On peut augmenter la résolution temporelle, mais cela se fera au détriment de la résolution fréquentielle. Quelques essais-erreurs montrent que le choix fait ici est un bon compromis.
3. La réponse en pression montre tout d'abord deux raies spectrales bien nettes, l'une centrée sur la fréquence du forçage, l'autre étant la première harmonique. Le système répond à l'excitation de façon linéaire. A partir de $t \approx 20$ s, la réponse en pression présente de nouvelles fréquences qui ne semblent pas être des multiples ou sous-multiples de la fréquence de forçage. Le système commence à répondre de façon faiblement non-linéaire à l'excitation. A partir de $t \approx 40$ s, le spectre de la réponse en pression est presque densément peuplé, le système est dans un régime fortement non-linéaire. La figure 24 présente trois spectres représentatifs de chacune de ces trois phases. On voit bien les pics dans la première phase ainsi que le développement d'un spectre "turbulent" dans la dernière phase.
4. Le forçage est globalement constitué d'une raie unique à la fréquence de forçage, ce à quoi on s'attendait. Néanmoins, à partir de $t \approx 38$ s, le spectre du forçage se peuple avec d'autres fréquences. Ceci est dû au fait que le système gong influence un peu le système qui le met en mouvement.

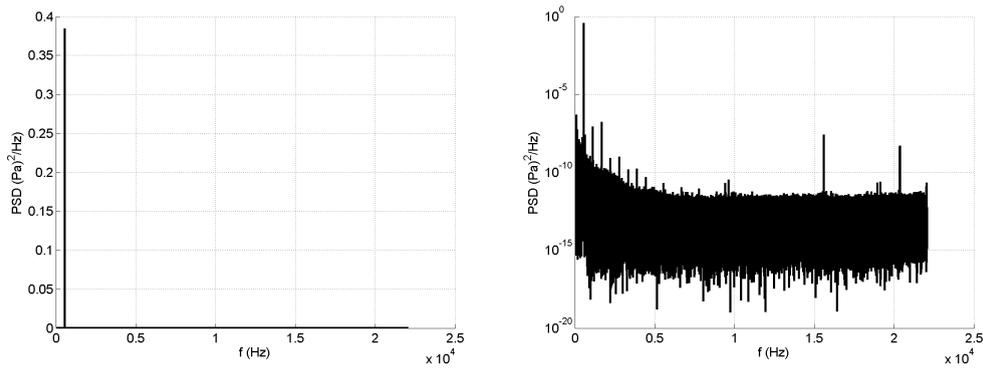


FIGURE 22 – Spectres du signal de réponse en pression du gong calculés sur le signal complet à une résolution fréquentielle $\Delta f = 0.0148$ Hz. Gauche : en échelle linéaire. Droite : en échelle logarithmique.

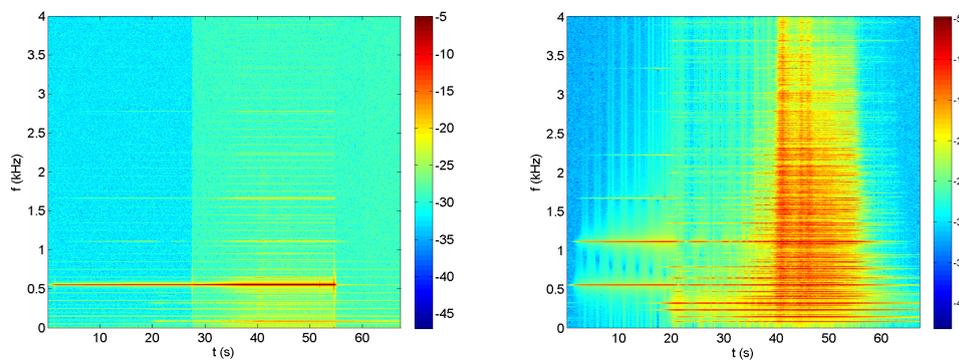


FIGURE 23 – Spectrogrammes du forçage (à gauche) et du signal de réponse en pression du gong (à droite) calculés sur des horizons temporels de 0.2 s à une résolution fréquentielle $\Delta f = 5$ Hz.

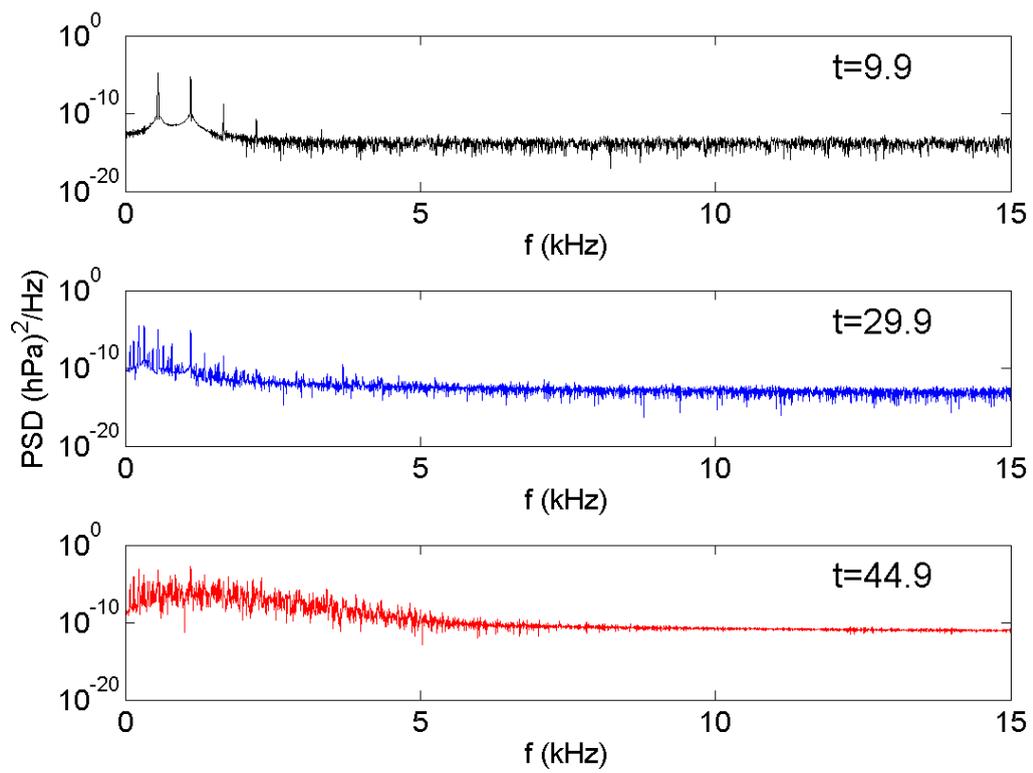


FIGURE 24 – Trois spectres tirés du spectrogramme de la figure 23 en $t = 10, 30$ et 45 s (de haut en bas).