

Projet 1 : Problème sur grille structurée

L'objectif de ce projet est de paralléliser un code de calcul avec la librairie MPI, et d'en étudier les performances sur le cluster *cholesky*. Le code de calcul résout un problème structuré obtenu en discrétisant l'équation de la chaleur bidimensionnelle avec une méthode de différences finies.

Note importante : Les phases de développement et de test du code se feront sur votre ordinateur personnel ou sur les stations de travail de l'ENSTA. Vous utiliserez le cluster Cholesky une fois votre code testé. L'utilisation du cluster doit se faire en respectant ses règles d'usage.

Description du problème et du schéma numérique

On cherche à calculer la solution du champ $u(x, y)$ dans le domaine $\Omega = \{(x, y) \in]0, a[\times]0, b[\}$. Ce champ est gouverné par l'équation

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) = f(x, y), \quad \text{dans } \Omega.$$

et les conditions aux limites

$$u(x, 0) = u(x, b) = u(a, y) = U_0, \quad u(0, y) = U_0 (1 + \alpha V(y)) \quad \text{avec } V(y) = 1 + \cos\left(\frac{2\pi}{b}\left(y - \frac{b}{2}\right)\right) \quad \text{sur } \partial\Omega$$

On suppose que les paramètres a , b et α sont strictement positifs, avec $\alpha < 1$ et que f est une fonction de (x, y) .

Pour résoudre ce problème, on discrétise le champ sur des grilles régulières, $u_{i,j} = u(i\Delta x, j\Delta y)$, avec $i = 0 \dots N_x + 1$ et $j = 0 \dots N_y + 1$, et on considère le schéma de différences finies

$$\left(\frac{u_{i+1,j}^n - 2u_{i,j}^n + u_{i-1,j}^n}{\Delta x^2} + \frac{u_{i,j+1}^n - 2u_{i,j}^n + u_{i,j-1}^n}{\Delta y^2} \right) = 0,$$

pour $i = 1 \dots N_x$ et $j = 1 \dots N_y$.

On se propose de résoudre le problème ci-dessus, de manière séquentielle puis parallèle, par une méthode de Jacobi puis une méthode de Gauss-Seidel. On partira initialement d'un champ $u = U_0$ et l'on supposera $f(x, y) = 0$.

Consignes

Vous pouvez effectuer ce projet seul ou en binôme. Un travail plus important est attendu des binômes (cf. question 8.).

1. Expliciter brièvement le problème physique que l'on cherche à résoudre, par exemple en supposant que u est une température.
2. Ecrire un code qui prend en entrée les paramètres a, b, U_0, α, N_x et N_y et qui résout le problème ci-dessus par la méthode de Jacobi.
3. Modifier et tester le code en adaptant les conditions aux limites et le membre de droite (i.e. f) pour que la solution du problème soit $u(x, y) = \sin(\pi(1 - \frac{y}{b}))$.
4. Tester, avec la solution du 3., la convergence du schéma numérique. Une fois la convergence testée, remettre $f = 0$ et les conditions aux limites permettant de résoudre le problème du début de l'énoncé.
5. Parallélisez le code séquentiel en utilisant une partition unidimensionnelle de la grille spatiale. Validez le code parallélisé en comparant les résultats avec le code séquentiel.

6. On considère une simulation de taille $N_x = N_y = N$ réalisée sur $N_{cœur}$ cœurs de calcul. Avec le schéma de parallélisation précédent, donnez le nombre de points de grille sur lequel un cœur doit calculer et le nombre de points de grille pour lequel il doit communiquer, en fonction de N et $N_{cœur}$. Quelles conclusions en tirez-vous ?
7. Étude de scalabilité : on analysera la scalabilité faible et forte du code parallélisé sur le cluster Cholesky, en réalisant des tests avec 1, 2, 5, 10, 20, 40 et 80 cœurs.
 - a- Étudiez la scalabilité forte du code avec une grille de 100x100 puis avec une grille de 1000x1000. Analysez les courbes en vous appuyant sur la question précédente.
 - b- Étudiez la scalabilité faible du code
8. Refaire les questions précédentes avec la méthodes Gauss-Seidel. Comparer la vitesse de convergence des deux méthodes. Les élèves travaillant seuls doivent refaire uniquement les questions 2.-4. Pour les binômes, faire également la parallélisation (5.-7.).
9. Pour aller plus loin, vous pouvez aborder l'une des questions suivantes : nous serons particulièrement attentif à la qualité du travail rendu, donc il est important d'avoir traité soigneusement les questions 1.-8. avant d'aller plus loin.
 - (a) Faire les question 5.- 7. pour la méthodes de Gauss-Seidel (élèves travaillant seuls).
 - (b) Proposez et implémentez une autre stratégie de parallélisation (utilisation des communications point-à-point non-blocantes, utilisation d'une partition bidimensionnelle de type *damier*, ...).
 - (c) Proposez un code parallèle basé sur un schéma de différences finies d'ordre plus élevé¹.
 - (d) Proposez une version tridimensionnelle parallélisée du code de calcul.

Pour l'option choisie, validez le code, étudiez les performances parallèles, et comparez avec le code développé lors des questions précédentes. *Une seule option sera considérée pour la note finale !*

Évaluation sur la base d'un rapport écrit présentant l'ensemble de vos travaux et du code qui devra être suffisamment commenté et écrire la solution du problème dans un fichier avec les routines d'écriture de matrices déjà utilisées.

Les codes et le rapport doivent être envoyés par e-mail au plus tard le **Mardi 19/10/2021** à edouard.audit@cea.fr et axel.modave@ensta-paris.fr

¹Référence pour un schéma du 4^e ordre : <http://physbam.stanford.edu/~fedkiw/papers/stanford2003-09.pdf>