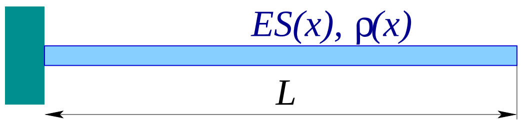
Cours « Problèmes inverses »
Sujet 6: recalage à partir de données en vibration

On considère les vibrations longitudinales (traction-compression) d'une barre (module de Young E, masse volumique ρ, section S) encastrée-libre :



$$\begin{cases} [ESu']'(x) + \omega^2 \rho S u(x) = 0 \quad (0 \le x \le L) \\ u(0) = 0, \ \ u'(L) = 0 \end{cases} \tag{1}$$

Problème inverse : on cherche à reconstruire $E(x) = E_0 + \Delta E(x)$ (avec $\Delta E(x)/E_0 \ll 1$ à partir de mesures sur ω et u. On va simplifier le problème au moyen d'une linéarisation à l'ordre 1 par rapport à $\Delta E(x)/E_0$. Cette linéarisation se fera donc autour d'une poutre de référence dont le module de Young est constant $E^{\text{ref}} = E_0$.

Discrétisation : $[0, L]$ est découpé en N éléments égaux de longueur $\Delta x = L/N$, avec interpolation linéaire par élément du déplacement u et $\Delta E(x)$ supposé constant par élément. Le problème de vibrations propres (1) prend la forme

$$Ku - \omega^2 M u = 0$$

avec les matrices de raideur K et de masse M, de taille $N \times N$ données par

$$K = K(p) = \frac{E_0 S}{\Delta x} \begin{bmatrix} p_1 + p_2 & -p_2 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ -p_2 & p_2 + p_3 & -p_3 & \ddots & & \vdots \\ 0 & -p_3 & p_3 + p_4 & -p_4 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & -p_{N-1} & p_{N-1} + p_N & -p_N \\ 0 & \dots & \dots & 0 & -p_N & p_N \end{bmatrix}$$

$$M = \frac{\rho S \Delta x}{6} \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 1 & 4 & 1 & \ddots & & \vdots \\ 0 & 1 & 4 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & 1 & 4 & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

où on a posé $p_i = E_i/E_0$ sur l'élément i (donc $p_i = 1$ pour tout i pour la poutre de référence) et $p = \{p_1, \dots, p_N\}$.

Linéarisation. Posons $p_0 = \{1, \dots, 1\}$ et $K_0 = K(p_0)$. On résout alors le problème aux valeurs propres pour la poutre de référence :

$$K_0 u - \omega^2 M u = 0 \quad \Longrightarrow \quad u_k, \omega_k \ (1 \le k \le N) \ \text{ avec } \ u_k^{\mathrm{T}} K_0 u_k = 1$$

On pose alors $\Delta p = p - p_0$. Des développements au 1er ordre par rapport à Δp conduisent alors aux approximations suivantes de la réponse modale de la poutre perturbée. La pulsation propre est donnée par

$$\omega_k^2(\Delta p) = \Big(1 + \sum_{i=1}^{N} \big[u_{k,i}^{\mathrm{T}} K_{0,i} u_{k,i}\big] \Delta p_i\Big)\omega_k^2 + o(\|\Delta p\|) \tag{a}$$

où $u_{k,i}$ est la restriction du mode u_k aux nœuds de l'élément i et $K_{0,i}$ est la rigidité élémentaire de l'élément i pour la poutre de référence [1], soit

$$K_{0,i} = \frac{E_0 S}{\Delta x} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Le mode propre correspondant est donné par

$$u_k(\Delta p) = u_k + \sum_{\ell=1}^{N} C_{k\ell} u_\ell + o(\|\Delta p\|) \qquad \text{avec} \quad \begin{cases} C_{k\ell} = \dfrac{\omega_\ell^2}{\omega_k^2 - \omega_\ell^2} \displaystyle\sum_{i=1}^{N} \big[u_{k,i}^{\mathrm{T}} K_{0,i} u_{\ell,i}\big] \Delta p_i \quad (k \neq \ell) \\ C_{kk} = -\dfrac{1}{2} \displaystyle\sum_{i=1}^{N} \big[u_{k,i}^{\mathrm{T}} K_{0,i} u_{k,i}\big] \Delta p_i \end{cases} \tag{b}$$

Avec les relations ci-dessus, on a doncpour chaque élément propre mesuré :

$$\begin{Bmatrix} \omega_k^2 \\ u_k \end{Bmatrix} (\Delta p) = \begin{Bmatrix} \omega_k^2 \\ u_k \end{Bmatrix} + R\Delta p + o(\|\Delta p\|)$$

où R est une matrice qu'on peut construire à l'aide des relations (a) et (b)

Problème inverse linéarisé : trouver $\Delta p = \{\Delta p_1, \ldots, \Delta p_N\}$ tel que

$$\begin{Bmatrix} \omega_k^2 \\ u_k \end{Bmatrix}^{\text{obs}} = \begin{Bmatrix} \omega_k^2 \\ u_k \end{Bmatrix} + R\Delta p \qquad k : \text{numéros des modes mesurés} \tag{2}$$

Travail proposé :

- Construire numériquement la relation linéaire (2) pour un choix d'information exprerimentale (numéros des modes mesurés et des nœuds capteurs pour chaque mode mesuré) ;
- Etudier numériquement le conditionnement de cette relation et l'influence des principaux paramètres ;
- Choisir une méthode d'inversion et l'appliquer ; étudier numériquement l'influenmce d'erreurs (simulées) sur les données.

1. Ici, $K_{0,i}$ est identique sur chaque élément, mais les formules de développement à l'ordre 1 données sont en fait valable pour un maillage quelconque.