

Cours « Problèmes inverses »

Sujet 4: identification de température en paroi interne de canalisation

Il s'agit de reconstruire la distribution de température θ en paroi interne de canalisation connaissant la température et le flux thermique en paroi externe (voir section 1.5 du polycopié).

Problème direct. On considère une section de tuyauterie comprise entre les rayons interne aR et externe R ($0 < a < 1$). Le champ de température $\theta(r, \phi)$, exprimé dans un système de coordonnées polaires (r, ϕ) , est solution du problème

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \theta}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \theta}{\partial \phi^2} &= 0 & (aR < r < R, 0 \leq \phi < 2\pi) \\ \frac{\partial \theta}{\partial r}(R, \phi) &= g(\theta) & (\text{flux thermique externe imposé}) \\ \theta(aR, \phi) &= f(\theta) & (\text{température imposée en paroi interne}) \end{aligned} \quad (1) \quad \boxed{\text{dir}}$$

Le problème direct consiste ainsi à résoudre (1) pour $f(\theta)$ et $g(\theta)$ connues.

Problème inverse. On suppose connu le flux thermique externe $g(\phi)$ imposé. Par ailleurs, la température a été mesurée en m points de la surface externe, de sorte que les valeurs $\theta_k = \theta(R, \phi_k)$ ($1 \leq k \leq m$) sont connues. On cherche à reconstruire la température $f(\phi) = \theta(aR, \phi)$ en paroi interne.

Approche : utiliser la solution générale en coordonnées polaires données en section 1.5 du polycopié. Représenter l'inconnue sous la forme

$$f(\phi) = f_0 + \sum_{n>0} f_n^c \cos n\phi + f_n^s \sin n\phi$$

On cherche alors à déterminer les coefficients f_0, f_n^c, f_n^s (tronqués à un ordre fini).

Travail proposé :

- Construire la relation linéaire entre les données θ_k et les inconnues f_0, f_n^c, f_n^s ;
- Etudier le conditionnement de cette relation ;
- Créer des « données synthétiques » θ_k ;
- Résoudre numériquement le problème inverse (par mise en œuvre d'une approche régularisée ou probabiliste), étudier numériquement l'influence d'erreurs entachant la donnée p_k , déterminer des conditions sous lesquelles l'inversion se passe « bien » ou « mal ».