# Cours « Problèmes inverses »
# Sujet 15: identification de défaut par gradient topologique

On se propose de mettre en œuvre dans ce sujet la méthode du gradient topologique (cours 10) pour l'identification d'un défaut (cavité, inclusion, fissure, au choix) situé dans un solide constitué d'un matériau élastique linéaire homogène isotrope $(\mu, \nu)$, en conditions dynamiques (régime fréquentiel), dans le cadre des déformations planes. On se place dans le cas où on connaît complètement des couples déplacement-effort $(\bar{\boldsymbol{u}}_i, \bar{\boldsymbol{t}}_i)$ sur la frontière (l'expérience $i$ consistant à exercer les efforts $\bar{\boldsymbol{t}}_i$ et à mesurer la réponse $\bar{\boldsymbol{u}}_i$). On définit la fonction-coût

$$J(B) = \frac{1}{2} \sum_i \int_{\partial\Omega} \|\boldsymbol{u}_i[B] - \bar{\boldsymbol{u}}_i\|^2 \, \mathrm{d}S$$

où $\boldsymbol{u}_i[B]$ désigne la solution du problème direct pour le solide contenant le défaut $B$ et soumis au chargement extérieur $\bar{\boldsymbol{t}}_i$.

On rappelle (cours 10) que le gradient topologique $\mathcal{T}(\boldsymbol{z})$ calculé sous l'hypothèse de l'apparition d'une petite cavité sphérique centrée en $\boldsymbol{z}$ dans un solide élastique est donné (en régime fréquentiel) par

$$\mathcal{T}(\boldsymbol{z}) = \sum_i \mathrm{Re}\big(\boldsymbol{\varepsilon}[\hat{\boldsymbol{u}}_i] : \boldsymbol{\mathcal{A}} : \boldsymbol{\varepsilon}[\boldsymbol{u}_i] - \rho\omega^2 \hat{\boldsymbol{u}}_i . \boldsymbol{u}_i\big)(\boldsymbol{z}), \qquad \boldsymbol{\mathcal{A}} = 2\mu\Big[\frac{1-\nu^2}{2(1-2\nu)^2}\mathbf{1}\otimes\mathbf{1} + \frac{15(1-\nu)}{7-5\nu}\Big(\boldsymbol{\mathcal{I}} - \frac{1}{3}\mathbf{1}\otimes\mathbf{1}\Big)\Big]$$

où $\boldsymbol{u}_i, \hat{\boldsymbol{u}}_i$ désignent les champs libre et adjoint pour le solide de référence (i.e. sans défaut), $\hat{\boldsymbol{u}}_i$ étant de plus défini relativement à la fonction coût $J$, soit ici comme réponse du solide de référence aux forces adjointes $\overline{\boldsymbol{u}_i - \bar{\boldsymbol{u}}_i}$ (où $\overline{z}$ désigne le complexe conjugué de $z$).

***Travail proposé :***

— Choisir une géométrie plane $\Omega$ et une configuration de défaut ;

— Choisir un ensemble d'excitations $\bar{\boldsymbol{t}}_i$ à appliquer sur $\partial\Omega$, et simuler les réponses $\bar{\boldsymbol{u}}_i$ pour le matériau réel $\kappa(\boldsymbol{x}), \mu(\boldsymbol{x})$ (simulation des expériences) ;

— Pour chaque expérience, calculer les champs libre et adjoint $\boldsymbol{u}_i, \hat{\boldsymbol{u}}_i$.

— Evaluer et visualiser le champ $\mathcal{T}(\boldsymbol{z})$. Commenter la capacité de $\mathcal{T}(\boldsymbol{z})$ à identifier correctement le défaut selon (par exemple) le bruit de mesure, la naturte du défaut ou le nombre d'expériences.