

COURS D'ANALYSE DES STRUCTURES MÉCANIQUES PAR LA MÉTHODE DES  
ÉLÉMENTS FINIS (MEC 568)  
contrôle non classant (30 mars 2010, 2 heures)  
Documents autorisés : livre ; documents et notes de PC

Sujet proposé par Attilio FRANGI

## Élément Q4 et problèmes de verrouillage

On considère un élément isoparamétrique quadrangulaire Q4 (Figure 1) dont l'élément de référence est défini dans l'espace paramétrique  $a_1, a_2$ .

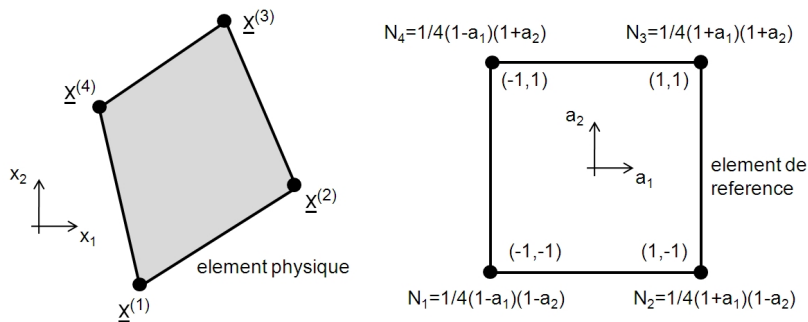


FIG. 1 – Élément Q4, élément de référence et fonctions de forme

Dans certaines situations, telles que l'analyse de structures en matériau incompressible ou presque incompressible, ou de structures élancées chargées en flexion, un modèle aux éléments finis utilisant un maillage d'éléments Q4 donne une estimation très médiocre de la réponse de la structure. En se limitant aux problèmes d'incompressibilité, on se propose de mieux comprendre ces phénomènes et d'analyser une solution disponible.

## 1 Préliminaires

**Matrice jacobienne et jacobien.** Soit  $[J(a_1, a_2)]$  la matrice jacobienne de coefficients  $J_{ij}(a_1, a_2) = \partial x_i / (\partial a_j)$  :

$$[J] = \begin{bmatrix} \partial x_1 / (\partial a_1) & \partial x_1 / (\partial a_2) \\ \partial x_2 / (\partial a_1) & \partial x_2 / (\partial a_2) \end{bmatrix} \quad (1)$$

et  $J(a_1, a_2)$  son déterminant.

- 1.1 Calculer  $[J]$  et  $J$  en  $a_1 = a_2 = 0$  (au centre de l'élément de référence) et montrer que  $J = A/4$ , ou  $A$  est l'aire du quadrangle. L'on exprimera tout en fonction des composantes des diagonales  $\underline{x}^{(31)} = \underline{x}^{(3)} - \underline{x}^{(1)}$ ,  $\underline{x}^{(42)} = \underline{x}^{(4)} - \underline{x}^{(2)}$ .

**Matrices de “service”.** On introduit les matrices  $[M]$  et  $[P_A(a_1, a_2)]$  :

$$[M] = \left[ \{1\} \quad \{x_1\} \quad \{x_2\} \quad \{h\} \right] \quad [P_A] = \left[ \{\bar{1}\} \quad \{b_A^1\} \quad \{b_A^2\} \quad \{\gamma\} \right] \quad (2)$$

dont les colonnes sont :

$$\begin{aligned} \{1\} &= \{1 \quad 1 \quad 1 \quad 1\}^T \\ \{x_i\} &= \left\{ x_i^{(1)} \quad x_i^{(2)} \quad x_i^{(3)} \quad x_i^{(4)} \right\}^T \\ \{h\} &= \{1 \quad -1 \quad 1 \quad -1\}^T \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \{b_A^i\} &= \left\{ \frac{\partial N_1}{\partial x_i} \quad \frac{\partial N_2}{\partial x_i} \quad \frac{\partial N_3}{\partial x_i} \quad \frac{\partial N_4}{\partial x_i} \right\}^T \\ \{\bar{1}\} &= \frac{1}{4} \left[ \{1\} - (\{1\}^T \{x_1\}) \{b_A^1\} - (\{1\}^T \{x_2\}) \{b_A^2\} \right] \\ \{\gamma\} &= \frac{1}{4} \left[ \{h\} - (\{h\}^T \{x_1\}) \{b_A^1\} - (\{h\}^T \{x_2\}) \{b_A^2\} \right] \end{aligned}$$

En particulier on souligne que les listes “colonne”  $\{b_A^1\}$  et  $\{b_A^2\}$  contiennent les composantes du gradient des fonctions de forme :  $b_{A_j}^i = \partial N_j / (\partial x_i)$  qui dépendent de  $a_1, a_2$ , en général.

1.2 Sans utiliser l’expression explicite des fonctions de forme, mais seulement le fait que Q4 est un élément isoparamétrique, démontrer que nécessairement,  $\forall a_1, a_2$  :

$$[M]^T [P_A] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \end{bmatrix}$$

avec  $c_i$  coefficients en général non nuls que l’on ne demande pas de calculer de manière explicite. Pour cela démontrer l’orthonormalité des colonnes de  $M$  et  $P_A$ , respectivement. Commencer par analyser les conditions associées à  $\{b_A^i\}$ , le reste étant une conséquence presque immédiate.

On fixe maintenant  $a_1 = a_2 = 0$  dans  $\{b_A^i\}$  et l’on appelle  $\{b^i\}$  les listes ainsi obtenues, et  $[P]$  la matrice  $[P_A(0, 0)]$  évaluée elle-même en  $a_1 = a_2 = 0$ .

1.3 Donner l’expression explicite de  $\{b^1\}$  et  $\{b^2\}$ .

1.4 Démontrer que :

$$[M]^T [P] = [1] \quad (3)$$

ou  $[1]$  désigne la matrice unité.

**Expression du champ de déplacement.** On introduit la fonction  $h(a_1, a_2) = a_1 a_2$  et l’on souligne que la liste  $\{h\}$  contient les valeurs de  $h$  sur les quatre sommets du Q4, d’où la notation utilisée.

1.5 Montrer que le champ de déplacement

$$\underline{v}(x_1, x_2) = \sum_k N_k(a_1, a_2) \underline{v}^{(k)} \quad (4)$$

peut être aussi exprimé sous la forme :

$$v_i(x_1, x_2) = \alpha_{i0} + \alpha_{i1}x_1 + \alpha_{i2}x_2 + \alpha_{i3}h(a_1, a_2)$$

1.6 En utilisant les relations d'orthogonalité (3) montrer que :

$$v_i = (\{\bar{1}\}^T \{V_i\}) + (\{b^1\}^T \{V_i\}) x_1 + (\{b^2\}^T \{V_i\}) x_2 + (\{\gamma\}^T \{V_i\}) h \quad (5)$$

ou  $\{V_i\}$  sont des listes avec les valeurs nodales de déplacement :

$$\{V_i\} = \{v_i^{(1)} \quad v_i^{(2)} \quad v_i^{(3)} \quad v_i^{(4)}\}^T$$

**Modes de déformation généralisés.** On remarque que les termes entre parenthèses dans l'équation (5) sont 8 combinaisons linéaires des déplacements nodaux. On définit maintenant la liste  $\{q\}$  :

$$\{q\} = \begin{bmatrix} \{\bar{1}\} & \{0\} & -\frac{1}{2}\{b^2\} & \{b^1\} & \{0\} & \frac{1}{2}\{b^2\} & \{\gamma\} & \{0\} \\ \{0\} & \{\bar{1}\} & \frac{1}{2}\{b^1\} & \{0\} & \{b^2\} & \frac{1}{2}\{b^1\} & \{0\} & \{\gamma\} \end{bmatrix}^T \begin{Bmatrix} \{V_1\} \\ \{V_2\} \end{Bmatrix} \quad (6)$$

1.7 Montrer que les composantes de  $\{q\}$  sont directement liées aux combinaisons linéaires entre parenthèses dans (5). Exprimer alors (5) en fonction des  $q_i$ .

On peut aisément vérifier, en utilisant toujours les relations d'orthogonalité (3), que la relation inverse est :

$$\begin{Bmatrix} \{V_1\} \\ \{V_2\} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \{1\} & \{0\} & -\{x_2\} & \{x_1\} & \{0\} & \{x_2\} & \{h\} & \{0\} \\ \{0\} & \{1\} & \{x_1\} & \{0\} & \{x_2\} & \{x_1\} & \{0\} & \{h\} \end{bmatrix} \{q\} \quad (7)$$

On considère maintenant un élément carré dont les cotés, de longueur  $L$ , sont alignés avec les axes  $x_1, x_2$ . Dans ce cas simple les composantes  $q_i$  de  $\{q\}$  ont une interprétation graphique immédiate, comme présenté dans la Figure 2. La configuration initiale du carré est dessinée en pointillé, tandis que la configuration déformée est en trait continu.

1.8 Associer chaque situation de la Figure 2 à une composante  $q_i$  de  $\{q\}$  en écrivant le numéro correspondant sur la figure. Commenter la signification physique des  $q_i$ .

On souligne que les modes de déformation de la colonne de droite, très connus dans la littérature sur l'élément Q4, sont appelés "hourglass modes" ou "modes en sablier".

1.9 Toujours pour le même élément carré vérifier que l'on a :

$$\begin{aligned} \{b^1\} &= \frac{1}{2L} \{-1 \quad 1 \quad 1 \quad -1\}^T \\ \{b^2\} &= \frac{1}{2L} \{-1 \quad -1 \quad 1 \quad 1\}^T \\ \{\gamma\} &= \frac{1}{4}\{h\} \end{aligned} \quad (8)$$

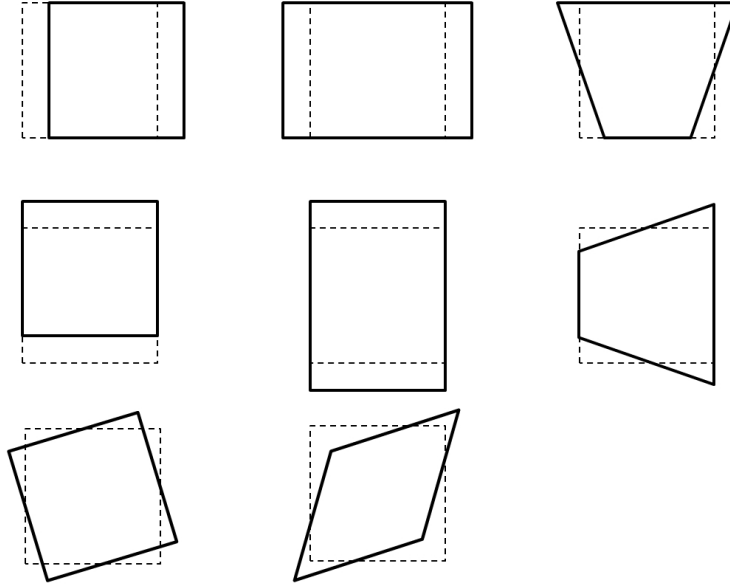


FIG. 2 – Interprétation graphique des paramètres  $q_1$  à  $q_8$

### Déformations.

1.10 Montrer que le tenseur de déformation  $\underline{\underline{\varepsilon}}$  associé à un champ  $\underline{v}$  de la forme (4) ne dépend que de 5 composantes de  $\{q\}$  à spécifier. On appelle  $\{q_D\}$  la liste de ces paramètres. Calculer la matrice  $[B]$  telle que :

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{12} \end{Bmatrix} = [B]\{q_D\}$$

Quelle sont les conditions sous lesquelles on peut obtenir des déformations constantes dans l'élément ? Est il possible de représenter les trois composantes  $\varepsilon_{ij}$  de manière complètement découplée ?

## 2 Analyse du problème de verrouillage

On considère maintenant une éprouvette en matériau à comportement isotrope linéaire incompressible assujetti à une transformation infinitésimale en déformations planes. On admet l'hypothèse que les contraintes sont bornées, c'est-à-dire qu'il existe  $M$  fini indépendant de  $\underline{v}$  tel que  $|\sigma_{ij}[\underline{v}]| < M$  dans  $\Omega$ , où  $\underline{v}$  est un champ cinématiquement admissible quelconque.

2.1 En utilisant la décomposition entre parties volumique et déviatorique du tenseur des déformations linéarisées  $\underline{\underline{\varepsilon}}$ , montrer que la condition  $\nu \rightarrow 1/2$  implique la condition d'incompressibilité  $\text{div} \underline{v} = 0$ .

On analyse un maillage constitué de  $N_E$  éléments Q4 carrés dont un détail est représenté en Figure 3. Les bords gauche et inférieur sont encastés.

2.2 Démontrer d'abord que, pour un élément Q4 carré quelconque :

$$\int_{E_e} \frac{\partial h(a_1, a_2)}{\partial x_i} dV = 0$$

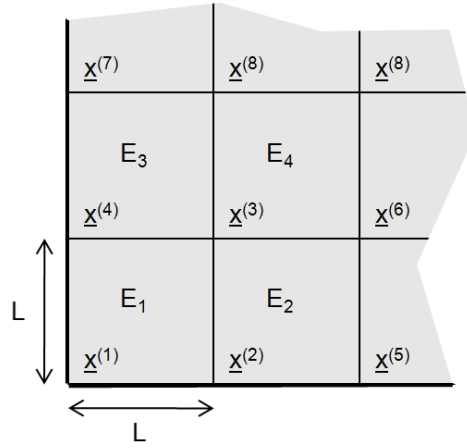


FIG. 3 – Maillage de éléments carrés

où la fonction  $h = a_1 a_2$  à été introduite en question 1.5

2.3 Quelle condition doivent respecter les déplacements nodaux afin que l'aire de l'élément  $E_1$  reste constante? Donner d'abord cette réponse sur la base de la condition d'incompressibilité  $\text{div } \underline{v} = 0$  et de l'expression (5) du champ de déplacement; vérifier après avec le calcul direct de l'aire de l'élément dans la Figure 3.

2.4 Quelle relation existe entre cette liaison et l'imposition de  $\text{div } \underline{v} = 0$  au centre de l'élément?

2.5 Cette dernière condition suffit-elle à respecter la condition d'incompressibilité partout dans l'élément? Sinon quelles sont les conséquences de la condition d'incompressibilité au niveau de l'élément 1 et au niveau du maillage global? Commenter.

**Intégration sélective.** On considère la fonctionnelle d'énergie potentielle totale  $\mathcal{P}(\underline{v}; E, \nu)$  (fonction de  $\underline{v}$  paramétrée par  $E, \nu$ ) associée à un champ  $\underline{v}$  cinématiquement admissible :

$$\mathcal{P}(\underline{v}; E, \nu) = \mathcal{W}(\underline{v}; E, \nu) - \mathcal{F}(\underline{v})$$

où  $\mathcal{W}$  désigne l'énergie élastique et  $\mathcal{F}$  le potentiel des efforts extérieurs donnés.

2.6 Montrer que  $\mathcal{W}(\underline{v}; E, \nu)$  s'exprime comme somme d'une partie déviatorique et d'une partie volumique :

$$\mathcal{W}(\underline{v}; E, \nu) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\kappa (\text{tr } \underline{\underline{\varepsilon}})^2 + 2\mu \underline{\underline{\varepsilon}} : \underline{\underline{\varepsilon}}) dV = \mathcal{W}^{\text{vol}}(\underline{v}; \kappa) + \mathcal{W}^{\text{dev}}(\underline{v}; \mu) \quad (9)$$

ou  $3\kappa = E/(1 - 2\nu)$  et  $\mu = E/(2(1 + \nu))$ . Montrer finalement que si  $\nu \rightarrow 1/2$  le premier terme s'annule, bien que  $\kappa \rightarrow \infty$ .

Notant par ailleurs que  $\mu \rightarrow E/3$  pour  $\nu \rightarrow 1/2$ , un problème complètement incompressible peut être formulé comme :

$$\text{Problème 1 : } \min_{\underline{v}} \mathcal{P}^{\text{dev}}(\underline{v}; E) \quad \text{sous la liaison } \text{div } \underline{v} = 0 \quad \forall \underline{x} \in \Omega$$

ou  $\mathcal{P}^{\text{dev}}(\underline{v}; E) = \mathcal{W}^{\text{dev}}(\underline{v}; E/3) - \mathcal{F}(\underline{v})$  et l'espace des champs  $\underline{v}$  doit donc être limité à priori aux déplacements cinématiquement admissibles tels que  $\text{div } \underline{v} = 0$ .

On préfère souvent, dans une analyse numérique par éléments finis, choisir des techniques alternatives. La plus simple, adoptée dans la suite de l'exercice, consiste à introduire une faible compressibilité fictive en choisissant un  $\nu$  légèrement inférieur à  $1/2$ . Si l'on néglige la variation de  $\mathcal{W}^{\text{dev}}$  due à la compressibilité fictive ajoutée, le problème associé devient :

$$\text{Problème 2 : } \min_{\underline{v}} \left( \mathcal{P}^{\text{dev}}(\underline{v}; E) + \mathcal{W}^{\text{vol}}(\underline{v}; \kappa) \right) \quad \text{sans liaisons}$$

Le verrouillage se présente malgré tout immédiatement dans la solution numérique en l'absence de traitement spécifique. Une solution "pratique" permettant d'éviter l'apparition du verrouillage, très utilisée dans les codes commerciaux, existe cependant. On se propose d'en donner ici une justification intuitive, une analyse complète demandant des outils mathématiques plus raffinés.

Cette solution repose sur le fait que la minimisation d'une fonctionnelle  $\mathcal{Q}(\underline{v})$  avec contraintes :

$$\min_{\underline{v}} \mathcal{Q}(\underline{v}), \quad \text{sous les liaisons } c_i(\underline{v}) = 0, i = 1, \dots, N \quad (10)$$

peut être abordée au moyen d'une technique approchée dite de "pénalisation" dans laquelle on essaie de minimiser une fonctionnelle augmentée :

$$\min_{\underline{v}} \left( \mathcal{Q}(\underline{v}) + \lambda \sum_{i=1}^N (c_i(\underline{v}))^2 \right) \quad (11)$$

où  $\lambda$  est un coefficient positif suffisamment grand et la minimisation est faite sans contraintes explicites. Les deux problèmes (10) et (11) se correspondent rigoureusement si  $\lambda \rightarrow \infty$ . Dans une approche numérique,  $\lambda$  est toujours fini et la procédure est donc nécessairement approchée. On revient maintenant sur le problème de verrouillage associé au Problème 2.

*2.7 Montrer que, pour des éléments Q4 carrés, une règle d'intégration numérique sur quatre points de Gauss permet d'intégrer les deux termes  $\mathcal{P}^{\text{dev}}(\underline{v}; E)$ ,  $\mathcal{W}^{\text{vol}}(\underline{v}; \kappa)$  de manière exacte*

On se propose maintenant, pour la création de la matrice de rigidité élémentaire, d'intégrer correctement le terme  $\mathcal{P}^{\text{dev}}(\underline{v}; E)$  et d'utiliser une règle à 1 points de Gauss pour le terme  $\mathcal{W}^{\text{vol}}(\underline{v}; \kappa)$ . Cette procédure est dite d'intégration "sélective".

*2.8 Montrer que dans ce cas le Problème 2 devient :*

$$\min_{\underline{v}} \left( \mathcal{P}^{\text{dev}}(\underline{v}; E) + \frac{\kappa}{2} \sum_{e=1}^{N_E} A_e \left( \text{tr } \underline{\underline{\varepsilon}}(0, 0) \right)^2 \right) \quad (12)$$

où la somme porte sur les éléments,  $A_e$  est l'aire de chaque élément et  $\underline{\underline{\varepsilon}}(0, 0)$  désigne le tenseur  $\underline{\underline{\varepsilon}}$  évalué en  $a_1 = a_2 = 0$  pour chaque élément.

*2.9 Montrer que l'on peut interpréter (12) comme une méthode de pénalisation pour résoudre le Problème 1 dans lequel la contrainte  $\text{div } \underline{v} = 0, \forall \underline{x}$  à été remplacée par des liaisons que l'on demande de spécifier.*

*2.10 Pourquoi cette procédure d'intégration sélective pourrait elle induire des bénéfices par rapport à une intégration complète (à 4 points de Gauss) pour tous les termes ?*

# CORRIGE

## 1 Préliminaires

### Matrice jacobienne et jacobien.

1.1 Le calcul donne, en  $a_1 = a_2 = 0$  :

$$\left\{ \frac{\partial N_i}{\partial a_1} \right\} = \frac{1}{4} \{-1 \quad 1 \quad 1 \quad -1\} \quad \left\{ \frac{\partial N_i}{\partial a_2} \right\} = \frac{1}{4} \{-1 \quad -1 \quad 1 \quad 1\}$$

d'où :

$$\begin{aligned} \frac{\partial x_1}{\partial a_1} &= \frac{1}{4} (x_1^{(31)} - x_1^{(42)}) \\ \frac{\partial x_1}{\partial a_2} &= \frac{1}{4} (x_1^{(31)} + x_1^{(42)}) \\ \frac{\partial x_2}{\partial a_1} &= \frac{1}{4} (x_2^{(31)} - x_2^{(42)}) \\ \frac{\partial x_2}{\partial a_2} &= \frac{1}{4} (x_2^{(31)} + x_2^{(42)}) \end{aligned}$$

d'où :

$$J = \frac{1}{8} (x_1^{(31)} x_2^{(42)} - x_1^{(42)} x_2^{(31)})$$

et la quantité entre parenthèses représente la composante suivant  $x_3$  du produit vectoriel  $\underline{x}^{(31)} \wedge \underline{x}^{(42)}$  entre les diagonales du quadrangle, donc  $2A$ .

### Matrices de "service".

1.2 On sait que pour un élément isoparamétrique  $\sum_k N_k = 1$ , donc :

$$\{1\}^T \{b_A^i\} = \sum_k \frac{\partial N_k}{\partial x_i} = 0$$

et :

$$\{1\}^T \{\bar{1}\} = \frac{1}{4} \{1\}^T \{1\} = 1$$

De la définition de  $\{1\}$  et  $\{h\}$  :

$$\{1\}^T \{h\} = 0$$

et donc aussi :

$$\{1\}^T \{\gamma\} = 0$$

L'élément étant isoparamétrique, on a aussi  $x_j = \sum_k N_k x_j^{(k)}$  et donc :

$$\{x_j\}^T \{b_A^i\} = \sum_k b_{Ak}^i x_j^{(k)} = \sum_k \frac{\partial N_k}{\partial x_i} x_j^{(k)} = \frac{\partial (\sum_k N_k x_j^{(k)})}{\partial x_i} = \frac{\partial x_j}{\partial x_i} = \delta_{ij}$$

Comme conséquences directes :

$$\{x_i\}^T \{\bar{1}\} = 0 \quad \{x_i\}^T \{\gamma\} = 0$$

Par contre on ne peut rien conclure à priori sur la quatrième ligne.

1.3 Puisque :

$$[J]^{-1} = \begin{bmatrix} \partial a_1 / (\partial x_1) & \partial a_1 / (\partial x_2) \\ \partial a_2 / (\partial x_1) & \partial a_2 / (\partial x_2) \end{bmatrix} = \frac{1}{J} \begin{bmatrix} \partial x_2 / (\partial a_2) & -\partial x_1 / (\partial a_2) \\ -\partial x_2 / (\partial a_1) & \partial x_1 / (\partial a_1) \end{bmatrix} \quad (13)$$

on a :

$$\begin{aligned} \{b^1\} &= \frac{1}{2A} \left\{ -x_2^{(42)} \quad x_2^{(31)} \quad x_2^{(42)} \quad -x_2^{(31)} \right\}^T \\ \{b^2\} &= \frac{1}{2A} \left\{ x_1^{(42)} \quad -x_1^{(31)} \quad -x_1^{(42)} \quad x_1^{(31)} \right\}^T \end{aligned}$$

1.4 Par calcul direct, dans ce cas on obtient aussi

$$\{h\}^T \{b^i\} = 0$$

et donc  $c_1 = c_2 = c_3 = 0$  et  $c_4 = 1$ .

### Expression du champ de déplacement.

1.5 L'élément étant isoparamétrique,  $x_1$  et  $x_2$  s'expriment en fonction des fonctions bilinéaires  $N_k$  donc :

$$x_i = \beta_{i0} + \beta_{i1}a_1 + \beta_{i2}a_2 + \beta_{i3}h(a_1, a_2) \quad (14)$$

avec  $\beta_{ij}$  coefficients constants. On peut facilement vérifier que :

$$\beta_{ij} = \frac{\partial x_i}{\partial a_j} \quad \text{en } a_1 = a_2 = 0$$

et que ces coefficients ont déjà été calculés au point 1.1. On peut donc exprimer  $a_1$  et  $a_2$  en fonction de  $x_1, x_2$  et de  $h = a_1a_2$  par inversion de l'équation (14), le déterminant étant non nul.

1.6 Si l'on évalue l'expression 5 en correspondance des quatre noeuds et l'on rassemble les résultats dans la liste  $\{V_i\}$  :

$$\{V_i\} = \alpha_{i0}\{1\} + \alpha_{i1}\{x_1\} + \alpha_{i2}\{x_2\} + \alpha_{i3}\{h\} \quad (15)$$

On rappelle que la liste  $\{h\}$  contient par définition les valeurs de  $h = a_1a_2$  aux quatre sommets. Si on fait le produit entre les colonnes transposées de  $P$  et  $\{V_i\}$  on obtient les relations demandées. Par exemple :

$$\{\bar{1}\}^T \{V_i\} = \alpha_{i0}\{\bar{1}\}^T \{1\} + \alpha_{i1}\{\bar{1}\}^T \{x_1\} + \alpha_{i2}\{\bar{1}\}^T \{x_2\} + \alpha_{i3}\{\bar{1}\}^T \{h\} = \alpha_{i0}$$

Autrement on peut remarquer, à partir de 15, que :

$$\{V_i\} = [M]\{\alpha_i\} \quad \text{avec } \{\alpha_i\} = \{\alpha_{i0} \quad \alpha_{i1} \quad \alpha_{i2} \quad \alpha_{i3}\}^T$$

et, en utilisant les relations d'orthogonalité, on arrive au même résultat.



## Modes de déformation généralisés.

1.7 A partir de l'équation (6) on déduit :

$$\begin{aligned} q_1 &= \{\bar{1}\}^T \{V_1\}, & q_2 &= \{\bar{1}\}^T \{V_2\}, & q_3 &= \frac{1}{2} \left( -\{b^2\}^T \{V_1\} + \{b^1\}^T \{V_2\} \right), \\ q_4 &= \{b^1\}^T \{V_1\}, & q_5 &= \{b^2\}^T \{V_2\}, & q_6 &= \frac{1}{2} \left( \{b^2\}^T \{V_1\} + \{b^1\}^T \{V_2\} \right), \\ q_7 &= \{\gamma\}^T \{V_1\}, & q_8 &= \{\gamma\}^T \{V_2\} \end{aligned}$$

et donc :

$$\begin{aligned} v_1 &= q_1 + q_4 x_1 + (q_6 - q_3) x_2 + q_7 h = (q_1 - q_3 x_2) + q_4 x_1 + q_6 x_2 + q_7 h \\ v_2 &= q_2 + (q_6 + q_3) x_1 + q_5 x_2 + q_8 h = (q_2 + q_3 x_1) + q_6 x_1 + q_5 x_2 + q_8 h \end{aligned} \quad (16)$$

ou l'on a séparé les mouvements rigidifiants des modes de déformation. Cette expression du champ  $v_i$  est souvent dite "naturelle".

1.8 Les colonnes de la matrice dans la relation (7) donnent les déplacements nodaux associés à chaque paramètre  $q_i$ .  $q_1$  représente un déplacement rigidifiant en direction  $x_1$ ;  $q_2$  un déplacement rigidifiant en direction  $x_2$ ;  $q_3$  une rotation rigidifiante;  $q_4$  une déformation  $\varepsilon_{11}$  pure;  $q_5$  une déformation  $\varepsilon_{22}$  pure;  $q_6$  une déformation  $\varepsilon_{12}$  pure;  $q_7$  et  $q_8$  sont les modes en sablier suivant  $x_1$  et  $x_2$ . L'association graphique est donnée en Figure 4.

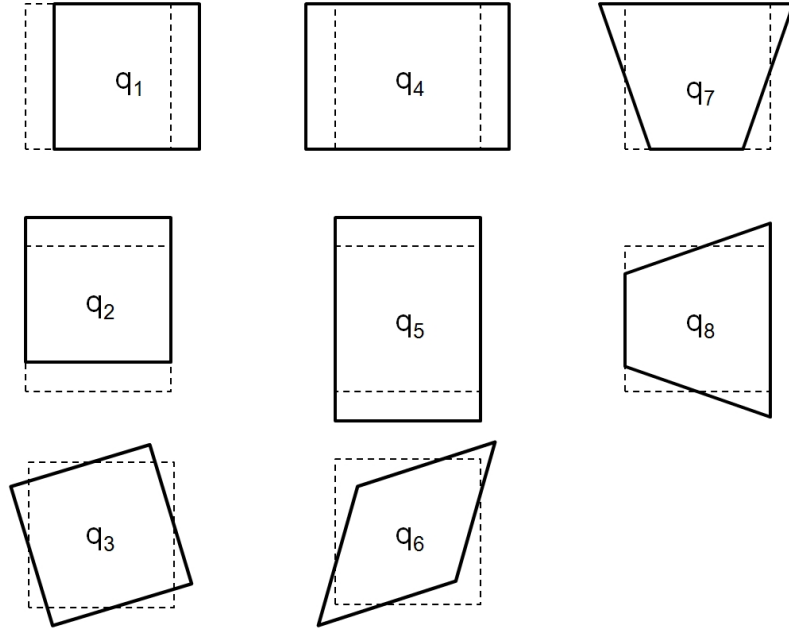


FIG. 4 – Interprétation graphique des paramètres

1.9 La vérification pour  $\{b^1\}$  et  $\{b^2\}$  découle de leurs définitions :

$$\begin{aligned} \{b^1\} &= \frac{1}{2A} \left\{ -x_2^{(42)} \quad x_2^{(31)} \quad x_2^{(42)} \quad -x_2^{(31)} \right\}^T = \frac{1}{2L^2} \{-L \quad L \quad L \quad -L\}^T \\ \{b^2\} &= \frac{1}{2A} \left\{ x_1^{(42)} \quad -x_1^{(31)} \quad -x_1^{(42)} \quad x_1^{(31)} \right\}^T = \frac{1}{2L^2} \{-L \quad -L \quad L \quad L\}^T \end{aligned}$$

D'ailleurs, pour l'élément considéré :

$$\{h\}^T \{x_1\} = 0 \quad \{h\}^T \{x_2\} = 0$$

et donc  $\{\gamma\} = (1/4)\{h\}$ .

### Déformations.

1.10 Les modes  $q_1, q_2, q_3$  sont associés à un mouvement rigidifiant et donnent déformations nulles. Donc :

$$\{q_D\} = \{q_4 \quad q_5 \quad q_6 \quad q_7 \quad q_8\}$$

Car :

$$\frac{\partial a_i}{\partial x_j} = \frac{2}{L} \delta_{ij}$$

la matrice devient :

$$[B] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & (2/L)a_2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & (2/L)a_1 \\ 0 & 0 & 1 & (1/L)a_1 & (1/L)a_2 \end{bmatrix}$$

La condition pour obtenir des déformations constantes est  $q_7 = q_8 = 0$ . Seulement sous cette condition il est aussi possible de découpler les trois composantes de déformation. Les modes en sablier introduisent sinon toujours un couplage qui est responsable, par exemple, des phénomènes de verrouillage analysés dans la deuxième partie de l'exercice.

## 2 Analyse du problème de verrouillage

2.1 La loi de comportement  $\underline{\underline{\sigma}} = \lambda(\text{tr}\underline{\underline{\varepsilon}})\underline{\underline{\mathbf{1}}} + 2\mu\underline{\underline{\varepsilon}}$  s'écrit, séparant la composante volumique de celle déviatorique dans  $\underline{\underline{\varepsilon}} = (1/3)\text{tr}\underline{\underline{\varepsilon}}\underline{\underline{\mathbf{1}}} + \underline{\underline{e}}$  :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \kappa(\text{tr}\underline{\underline{\varepsilon}})\underline{\underline{\mathbf{1}}} + 2\mu\underline{\underline{e}} = \kappa(\text{div}\underline{\underline{v}})\underline{\underline{\mathbf{1}}} + 2\mu\underline{\underline{e}}$$

avec  $3\kappa = E/(1 - 2\nu)$ . Si  $\nu \rightarrow 1/2$  et  $\underline{\underline{\sigma}}$  reste borné, alors  $\text{div}\underline{\underline{v}} \rightarrow 0$  nécessairement.

2.2 On a (voir le point 1.2) :

$$\frac{\partial a_i}{\partial x_j} = \frac{2}{L} \delta_{ij}$$

d'où :

$$\begin{aligned} \int_{E_e} \frac{\partial h(a_1, a_2)}{\partial x_1} dV &= \frac{2}{L} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 a_2 da_1 da_2 = 0 \\ \int_{E_e} \frac{\partial h(a_1, a_2)}{\partial x_2} dV &= \frac{2}{L} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 a_1 da_1 da_2 = 0 \end{aligned}$$

On souligne de plus que la relation proposée est valable pour un élément Q4 quelconque, pas nécessairement carré. Pour le démontrer on peut appliquer la formule de Green (formule de la divergence) aux vecteurs :  $h\underline{\underline{e}}_1, h\underline{\underline{e}}_2$ .

2.3 En fonction de la divergence de  $\underline{\underline{v}}$ , la condition d'aire constante impose :

$$\int_{E_e} \text{div}\underline{\underline{v}} dV = 0$$

A partir de l'expression (5) du déplacement et des résultats du point précédent on a :

$$\int_{E_e} \operatorname{div} \underline{v} dV = A_1 (\{b^1\}^T \{V_1\} + \{b^2\}^T \{V_2\})$$

où  $A_1$  désigne l'aire de l'élément  $E_1$  ; car seulement le noeud (3) peut se déplacer :

$$\{b^1\}^T \{V_1\} = \frac{1}{2L} v_1^{(3)}, \quad \{b^2\}^T \{V_2\} = \frac{1}{2L} v_2^{(3)}$$

et donc l'aire du carré reste constante seulement si  $v_1^{(3)} = -v_2^{(3)}$ .

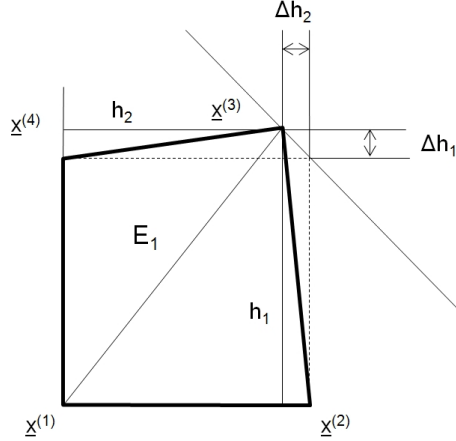


FIG. 5 – Calcul direct de l'aire

De la Figure 5 on voit que l'aire  $A_1$  peut être calculée comme la somme des aires des triangles dans lesquels le quadrangle est partagé par la diagonale  $\underline{x}^{31}$ . Car la base des triangles reste constante (les noeuds étant bloqués), la variation des hauteurs  $h_1$  et  $h_2$  doit être telle que  $\Delta h_1 = -\Delta h_2$ , d'où le résultat demandé, car  $\Delta h_1 = v_2^{(3)}$  et  $\Delta h_2 = v_1^{(3)}$ .

2.4 Puisque :

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \underline{v} &= \{b^1\}^T \{V_1\} + \{b^2\}^T \{V_2\} + \{\gamma\}^T \{V_1\} \frac{\partial h}{\partial x_1} + \{\gamma\}^T \{V_2\} \frac{\partial h}{\partial x_2} \\ &= \{b^1\}^T \{V_1\} + \{b^2\}^T \{V_2\} + \{\gamma\}^T \{V_1\} \frac{2}{L} a_2 + \{\gamma\}^T \{V_2\} \frac{2}{L} a_1 \end{aligned}$$

on remarque que imposer  $\operatorname{div} \underline{v} = 0$  au centre d'un élément équivaut à imposer que l'aire reste constante.

2.5 Par contre  $\operatorname{div} \underline{v} = 0$  partout dans l'élément entraîne, pour l'élément 1, que même si l'aire reste constante, i.e.  $v_1^{(3)} = -v_2^{(3)}$ , la divergence

$$\operatorname{div} \underline{v} = \frac{1}{2L} v_1^{(3)} (a_2 - a_1)$$

est nulle seulement sur la ligne  $a_1 = a_2$  sauf si  $v_1^{(3)} = 0$ , c'est à dire si le noeud 3 est bloqué. Mais des raisonnements similaires impliquent que tous les noeuds du maillage sont bloqués. On dit que le maillage est verrouillé (locked) par la condition d'incompressibilité. Ce sont les modes en sablier qui, couplant les différentes composantes de déformation, ne permettent pas de représenter correctement une situation parfaitement incompressible.

**Intégration sélective.**

2.6 De  $\underline{\underline{\sigma}} = \kappa(\text{tr}\underline{\underline{\varepsilon}})\underline{\underline{\mathbf{1}}} + 2\mu\underline{\underline{e}}$  on obtient :

$$\frac{1}{2}\underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\varepsilon}} = \frac{1}{2}\kappa(\text{tr}\underline{\underline{\varepsilon}})^2 + 2\mu\underline{\underline{e}} : \underline{\underline{e}}$$

En vertu du point 2.1,  $\kappa(\text{tr}\underline{\underline{\varepsilon}})$  est borné, tandis que  $\text{tr}\underline{\underline{\varepsilon}} \rightarrow 0$ , donc le premier terme s'annule.

2.7 Le jacobien de la transformation géométrique est une constante et les composantes de  $\underline{\underline{\varepsilon}}$  sont linéaires en  $a_1, a_2$ , donc les deux termes à intégrer sont des polynômes de deuxième degré en  $a_1, a_2$ . Une formule à 4 points de Gauss en 2D est le produit cartésien entre formules 1D à deux points de Gauss et permet d'intégrer exactement un polynôme complet de troisième degré en  $a_1, a_2$ .

2.8 La transformation dans l'espace des paramètres  $a_1, a_2$  donne :

$$\int_{E_e} (\text{tr}\underline{\underline{\varepsilon}})^2 dV = \frac{L^2}{4} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 (\text{tr}\underline{\underline{\varepsilon}})^2 da_1 da_2$$

et donc avec un seul point de Gauss, le poids global étant 4 :

$$\int_{E_e} (\text{tr}\underline{\underline{\varepsilon}})^2 dV \simeq A_e (\text{tr}\underline{\underline{\varepsilon}}(0, 0))^2$$

et :

$$\mathcal{W}^{\text{vol}}(\underline{v}; \kappa) \simeq \frac{\kappa}{2} \sum_{e=1}^{N_E} A_e (\text{tr}\underline{\underline{\varepsilon}}(0, 0))^2$$

2.9 Compte tenu de l'équivalence approchée entre les problèmes (10) et (11) ceci correspond à minimiser  $\mathcal{P}^{\text{dev}}(\underline{v}; E)$  sous les  $N_E$  liaisons imposant que, pour chaque élément :

$$\text{tr}\underline{\underline{\varepsilon}}(0, 0) = 0$$

En vu du point 2.4 ceci équivaut à garantir que l'aire de chaque élément reste constante.

2.10 Si par contre on utilise une règle à 4 points de Gauss :

$$\int_{E_e} (\text{tr}\underline{\underline{\varepsilon}})^2 dV \simeq \frac{L^2}{4} \sum_{g_1=1}^2 \sum_{g_2=1}^2 \left( \text{tr}\underline{\underline{\varepsilon}}(a_{g_1}, a_{g_2}) \right)^2 w_{g_1} w_{g_2}$$

et :

$$\mathcal{W}^{\text{vol}}(\underline{v}; \kappa) \simeq \frac{\kappa}{2} \sum_{e=1}^{N_E} \frac{L^2}{4} \sum_{g_1=1}^2 \sum_{g_2=1}^2 \left( \text{tr}\underline{\underline{\varepsilon}}(a_{g_1}, a_{g_2}) \right)^2 w_{g_1} w_{g_2}$$

Toujours en vertu de l'équivalence approchée entre les problèmes (10) et (11) ceci correspond à minimiser  $\mathcal{P}^{\text{dev}}(\underline{v}; E)$  sous les  $4N_E$  liaisons imposant que, pour chaque élément et pour chaque point de Gauss :

$$\text{tr}\underline{\underline{\varepsilon}}(a_{g_1}, a_{g_2}) = 0$$

Le problème est donc plus "verrouillé".