

COURS D'ANALYSE DES STRUCTURES MÉCANIQUES PAR LA MÉTHODE DES ELEMENTS FINIS
(MEC 568)

contrôle non classant (24 mars 2009, 2 heures)

Documents autorisés : livre du cours ; documents et notes de PC

Sujet proposé par Marc BONNET

Les deux exercices sont indépendants. Ils sont placés dans le cadre de l'hypothèse des petites perturbations.

Exercice 1 : élément à 3 nœuds pour la dynamique d'une barre rectiligne

On considère la réponse dynamique d'une barre élastique rectiligne, de forme cylindrique (section droite d'aire A uniforme), et on note x la coordonnée axiale. Seuls des mouvements de traction-compression de la barre sont envisagés, de sorte que tout point \underline{x} initialement situé sur la section droite $S(x)$ d'abscisse x est animé d'un déplacement

$$\underline{u}(x, t) = u(x, t)\underline{e}_x$$

(on néglige ainsi les variations de section par effet Poisson). Les efforts intérieurs associés à ces mouvements sont décrits en terme d'effort normal ressenti par la section droite d'abscisse x :

$$N(x, t) = \int_{S(x)} \sigma_{xx}(x, y, z, t) dy dz$$

On se place dans le cadre élastique linéaire HPP isotherme, de sorte que $N(x, t)$ est relié à la déformation $\partial u(x, t)/\partial x$ d'extension de la barre par

$$N(x, t) = EA \frac{\partial u}{\partial x}(x, t)$$

où E est le module de Young (constant) du matériau. On admettra que la formulation faible pour la dynamique des barres est de la forme

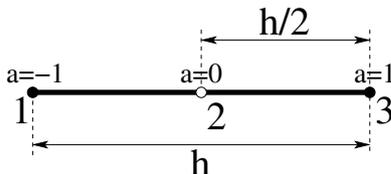
$$\forall w, \text{ trouver } u \text{ tel que } \int_{\text{barre}} \left\{ EA \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) \frac{\partial w}{\partial x}(x) + \rho A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) w(x) \right\} dx = F(w)$$

où la solution $u(x, t)$ et le champ virtuel $w(x)$ vérifient des conditions d'admissibilité cinématique en cas de liaisons cinématiques (non spécifiées pour l'instant), et $F(w)$ est la forme linéaire sur w exprimant la puissance virtuelle des efforts extérieurs appliqués (non spécifiés ici) dans le champ virtuel $w(x)$.

1. **Matrice de rigidité d'un élément de barre à 3 nœuds.** On considère l'utilisation d'**éléments linéaires à 3 nœuds**, l'élément de référence étant le segment $-1 \leq a \leq 1$ et reposant sur les fonctions d'interpolation

$$N_1(a) = \frac{1}{2}a(a-1), \quad N_2(a) = 1-a^2, \quad N_3(a) = \frac{1}{2}a(a+1) \quad (-1 \leq a \leq 1)$$

Les trois nœuds de l'élément sont supposés régulièrement espacés, deux nœuds consécutifs étant donc séparés de $h/2$ (h : longueur de l'élément considéré).



- (i) Donner le jacobien dx/da de l'élément.
(ii) Exprimer la déformation $\partial u_h/\partial x(x, t)$ sur l'élément en fonction de a, h et des valeurs nodales $u^{(1)}, u^{(2)}, u^{(3)}$ de u sur l'élément.

- (iii) Formuler la matrice de rigidité élémentaire $[\mathbb{K}_e]$ de l'élément, et calculer explicitement $[\mathbb{K}_e]$. On pourra pour cela utiliser les identités

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 N_1'^2(a) da &= \int_{-1}^1 N_3'^2(a) da = \frac{7}{6} & \int_{-1}^1 N_2'^2(a) da &= \frac{8}{3} \\ \int_{-1}^1 N_1'(a)N_2'(a) da &= \int_{-1}^1 N_2'(a)N_3'(a) da = -\frac{4}{3} & \int_{-1}^1 N_1'(a)N_3'(a) da &= \frac{1}{6} \end{aligned}$$

- (iv) Pour quelles combinaisons de valeurs nodales $\{\mathbb{U}_e^r\} = \{u^{(1)}, u^{(2)}, u^{(3)}\}$ a-t'on $[\mathbb{K}_e]\{\mathbb{U}_e\} = \{0\}$? Commenter.

- (v) Combien faudrait-il utiliser de points de Gauss pour une évaluation exacte de la rigidité élémentaire $[\mathbb{K}_e]$ par intégration numérique?

- (vi) Il est parfois avantageux (moyennant certaines précautions!) de mettre en œuvre des méthodes de *sous-intégration* consistant à utiliser délibérément un nombre a priori insuffisant de points de Gauss pour le calcul par intégration numérique de $[\mathbb{K}_e]$.

Quelle est, dans le cas présent, la valeur approchée de $[\mathbb{K}_e]$ obtenue au moyen d'un seul point de Gauss (abscisse $a_g = 0$, poids $w_g = 2$)? Montrer que $[\mathbb{K}_e]\{\mathbb{U}_e\} = \{0\}$ pour (a) $\{\mathbb{U}_e^r\}$ trouvé au (iv), et (b) une autre combinaison indépendante $\{\mathbb{U}_e^b\}$ que l'on déterminera. Montrer (au moyen de la valeur correcte de $[\mathbb{K}_e]$) que $\{\mathbb{U}_e^b\}$ a une énergie de déformation non nulle sur l'élément.

- (vii) Formuler la matrice de masse élémentaire $[\mathbb{M}_e]$ de l'élément générique, et calculer explicitement $[\mathbb{M}_e]$. On pourra pour cela utiliser les identités

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 N_1^2(a) da &= \int_{-1}^1 N_3^2(a) da = \frac{4}{15} & \int_{-1}^1 N_2^2(a) da &= \frac{16}{15} \\ \int_{-1}^1 N_1(a)N_2(a) da &= \int_{-1}^1 N_2(a)N_3(a) da = \frac{2}{15} & \int_{-1}^1 N_1(a)N_3(a) da &= -\frac{1}{15} \end{aligned}$$

- (viii) Proposer une approximation $[\tilde{\mathbb{M}}_e]$ de $[\mathbb{M}_e]$ obtenue par condensation sur la diagonale. Quelle est l'utilité pratique d'une telle condensation?

2. *Algorithme d'intégration en temps.* On considère maintenant une barre de longueur h modélisée par un **unique** élément à 3 nœuds, tel que $0 \leq x \leq h$, et encastrée en $x = 0$, soit

$$u(0, t) = 0$$

- (i) Donner en fonction des paramètres h, E, A, ρ du problème, pour ce modèle à un seul élément, la forme explicite des matrices de raideur et de masse dans l'équation du mouvement

$$[\mathbb{K}]\{\mathbb{U}\} + [\mathbb{M}]\{\ddot{\mathbb{U}}\} = \{\mathbb{F}\}$$

telle que $\{\mathbb{U}\}$ ne contienne que les déplacements nodaux restant inconnus après prise en compte de l'encastrement (le mode de sollicitation n'étant pas précisé, on ne cherchera pas à spécifier les forces nodales $\{\mathbb{F}\}$).

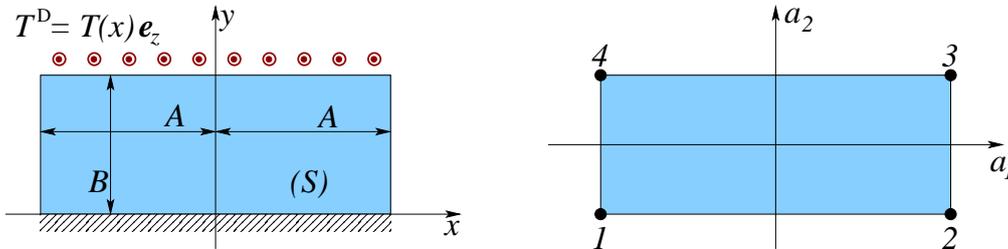
- (ii) On introduit une discrétisation temporelle de pas de temps constant Δt , à laquelle on applique le schéma de Newmark avec $\beta = 1/6$, $\gamma = 1/2$. Ce schéma, correspondant à une précision optimale, est conditionnellement stable (cf chapitre 9), le pas de temps devant vérifier $\Delta t \leq \Delta t_{\text{stab}}$. Définir précisément une procédure permettant d'évaluer la limite de stabilité Δt_{stab} de ce schéma de Newmark sur cet exemple. Donner la valeur de Δt_{stab} en fonction des divers paramètres du problème.

Exercice 2 : échantillon élastoplastique sous sollicitation antiplane

On considère un échantillon de section rectangulaire $S = \{-A \leq x \leq A, 0 \leq y \leq B\}$ dans le plan Oxy et de longueur infinie dans la direction Oz ($Oxyz$ désignant un système de coordonnées cartésiennes orthonormées). L'unique sollicitation appliquée à cet échantillon consiste en une densité d'effort $\underline{T}^D = T(x)\underline{e}_z$ imposée sur sa face $y = B$ de façon à créer un état de déformation *antiplane*, c'est-à-dire correspondant à un déplacement de la forme

$$\underline{u}(\underline{x}) = u(x, y)\underline{e}_z,$$

les seules composantes non nulles de déformation et de contrainte étant alors $\varepsilon_{xz}, \varepsilon_{yz}$ et σ_{xz}, σ_{yz} .



L'objet de cet exercice est d'examiner la recherche de solutions approchées en régime élastique puis élastoplastique, en s'appuyant sur la modélisation de la section S par un *unique* élément fini quadrangulaire à 4 nœuds (cadre de travail retenu pour la totalité de cet exercice). Les fonctions de forme pour cet élément sont données au tableau 2.1 du chapitre 2 du livre ; elles sont utilisées pour l'interpolation de la géométrie et du déplacement (élément isoparamétrique). On respectera la numérotation des nœuds définie par la figure.

1. *Interpolation géométrique.* Exprimer un point générique \underline{x} de l'élément S en fonction des coordonnées paramétriques a_1, a_2 . Donner les expressions de la matrice jacobienne \underline{J} et du déterminant jacobien $J(a_1, a_2)$ de l'élément.
2. *Sollicitation.* Donner la valeur du vecteur élémentaire $\{\mathbb{F}_e\}$ des forces généralisées associées au chargement décrit plus haut, en fonction de $T(x)$. Expliciter complètement $\{\mathbb{F}_e\}$ pour le cas d'une densité d'effort $T(x) = T$ uniforme.
3. *Régime élastique.* Le matériau est dans cette partie supposé purement élastique (propriétés isotropes caractérisées par les constantes de Lamé λ, μ).
 - (a) Exprimer les déformations $\varepsilon_{xz}, \varepsilon_{yz}$ sur l'élément, pour des valeurs quelconques des déplacements nœuds, en fonction des coordonnées paramétriques a_1, a_2 .
 - (b) Evaluer la matrice de rigidité élémentaire $[\mathbb{K}_e]$ de l'élément.
 - (c) On complète la condition précédemment introduite de densité d'effort *uniforme* $\underline{T}^D = T\underline{e}_z$ imposée sur sa face $y = B$ par les conditions aux limites suivantes : blocage en déplacement de la face $y = 0$, et faces $x = \pm A$ libres de contraintes. Donner le système d'équations vérifié par les déplacements nœuds inconnus. Calculer la solution élastique approchée.
4. *Régime élastoplastique.* On suppose maintenant que le matériau constitutif est élastique (λ, μ) et plastique avec écrouissage cinématique linéaire (limite d'élasticité en traction σ_0 , module d'écrouissage h , règle de normalité). La limite d'élasticité est définie par le critère de von Mises, qui compte tenu des hypothèses faites ici s'écrit

$$\sigma^{\text{eq}} - R(p) \leq 0, \quad R(p) = \sigma_0 + hp,$$

où p désigne la déformation plastique cumulée. Le chargement appliqué et les conditions aux limites sont définis de la même manière que précédemment.

- (a) Déterminer la valeur T_0 de la densité uniforme d'effort correspondant à l'apparition de la plasticité dans l'échantillon.
- (b) On considère, à partir du niveau de chargement $T = T_0$, un pas de chargement en régime élastoplastique tel que le chargement (uniforme) imposé en fin de pas soit $T_0 + \Delta T$ (avec $\Delta T > 0$).
 - Donner le champ de contraintes sur l'élément prédit par l'algorithme de retour radial pour un incrément de déplacement dont les valeurs nodales sont $\{0, 0, \Delta u, \Delta u\}$. Etablir l'équation vérifiée par le scalaire Δu issue de la formulation faible de l'équilibre.
 - Donner le module tangent cohérent associé à la méthode de Newton pour la résolution en Δu de l'équation d'équilibre précédemment établie.
 - Donner la valeur de Δu en fonction de ΔT et des paramètres de géométrie et de comportement.

CORRIGÉ

Exercice 1 : élément à 3 nœuds pour la dynamique d'une barre rectiligne

1. Matrice de rigidité d'un élément de barre à 3 nœuds.

- (i) Notant $x_0 - h/2$, x_0 et $x_0 + h/2$ les trois abscisses des nœuds de l'élément, la position d'un point x quelconque sur l'élément est donnée par

$$\begin{aligned} x &= \left(x_0 - \frac{h}{2}\right)N_1(a) + x_0 N_2(a) + \left(x_0 + \frac{h}{2}\right)N_3(a) \\ &= x_0(N_1(a) + N_2(a) + N_3(a)) + \frac{h}{2}(N_3(a) - N_1(a)) = x_0 + \frac{h}{2}a \end{aligned}$$

Le jacobien dx/da de l'élément vaut donc

$$\frac{dx}{da} = \frac{h}{2}$$

- (ii) Compte tenu du résultat précédent et par la règle de dérivation composée, on a :

$$\frac{\partial u}{\partial a} = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{dx}{da} = \frac{h}{2} \frac{\partial u}{\partial x} \quad \text{soit} \quad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{2}{h} \frac{\partial u}{\partial a}$$

Ecrivant u sur l'élément par interpolation isoparamétrique, on obtient donc en mettant les expressions sous forme matricielle (chapitre 2) :

$$\begin{aligned} u(x, t) &= (N_1(a)u^{(1)}(t) + N_2(a)u^{(2)}(t) + N_3(a)u^{(3)}(t)) &= [N_e(a)]\{\mathbb{U}_e(t)\} \\ \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{2}{h}[N'_e(a)]\{\mathbb{U}_e(t)\} &= [B_e(a)]\{\mathbb{U}_e(t)\} \end{aligned}$$

- (iii) La matrice de rigidité élémentaire est telle que

$$\{\mathbb{W}_e\}^T [\mathbb{K}_e] \{\mathbb{U}_e\} = \int_{\text{élément}} EA \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial x} dx$$

et est donc compte tenu de (i) et (ii) donnée par

$$\begin{aligned} [\mathbb{K}_e] &= \int_{-1}^1 \frac{4EA}{h^2} [B_e(a)]^T [B_e(a)] \frac{h}{2} da \\ &= \frac{2EA}{h} \int_{-1}^1 \begin{bmatrix} N_1'^2(a) & N_1'(a)N_2'(a) & N_1'(a)N_3'(a) \\ N_1'(a)N_2'(a) & N_2'^2(a) & N_2'(a)N_3'(a) \\ N_1'(a)N_3'(a) & N_2'(a)N_3'(a) & N_3'^2(a) \end{bmatrix} da \end{aligned}$$

A l'aide des identités données dans l'énoncé, on obtient donc :

$$[\mathbb{K}_e] = \frac{EA}{3h} \begin{bmatrix} 7 & -8 & 1 \\ -8 & 16 & -8 \\ 1 & -8 & 7 \end{bmatrix}$$

- (iv) On trouve facilement que $[\mathbb{K}_e]\{\mathbb{U}_e\} = \{0\}$ pour $\{\mathbb{U}_e\} = C\{1 \ 1 \ 1\}^T$, C étant une constante arbitraire. Ceci correspond à un mouvement de corps rigide (translation d'ensemble de l'élément le long de son axe), et était donc prévisible, un tel mouvement étant toujours représentable par interpolation isoparamétrique (chapitre 2) et étant d'énergie de déformation nulle.
- (v) L'intégrale donnant $[\mathbb{K}_e]$ en (iii) ne contenant que des termes de degré 2 au plus en a , 2 points de Gauss suffisent.
- (vi) La sous-intégration proposée conduit à écrire (avec $a_g = 0$, poids $w_g = 2$)

$$\begin{aligned} [\mathbb{K}_e] &= \int_{-1}^1 \frac{2EA}{h} [B_e(a)]^T [B_e(a)] da \\ &\approx [\mathbb{K}_e^{\text{approx}}] = w_g \frac{2EA}{h} [B_e(a_g)]^T [B_e(a_g)] = \frac{EA}{h} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

L'approximation $[\mathbb{K}_e^{\text{approx}}]$ de $[\mathbb{K}_e]$ ainsi déterminée est visiblement de rang 1. La recherche des solutions à $[\mathbb{K}_e^{\text{approx}}]\{\mathbb{U}_e\} = \{0\}$ donne

$$\{\mathbb{U}_e\} = C_r \{\mathbb{U}_e^r\} + C_b \{\mathbb{U}_e^b\} \quad \text{avec} \quad \{\mathbb{U}_e^b\} = \{0 \ 1 \ 0\}$$

$\{\mathbb{U}_e^r\}$ étant tel que trouvé au (iv) et C_r, C_b étant des constantes arbitraires. De plus, l'énergie de déformation associée à $C_b\{\mathbb{U}_e^b\}$ est

$$\frac{1}{2}C_b^2\{\mathbb{U}_e^b\}^T[\mathbb{K}_e]\{\mathbb{U}_e^b\} = \frac{8EA}{3h}C_b^2 \neq 0$$

(vii) La matrice de masse élémentaire est telle que

$$\{\mathbb{W}_e\}^T[\mathbb{M}_e]\{\ddot{\mathbb{U}}_e\} = \int_{\text{élément}} \rho A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} w \, dx$$

et est donc donnée, à l'aide des identités données dans l'énoncé, par

$$\begin{aligned} [\mathbb{M}_e] &= \int_{-1}^1 \rho A [N_e(a)]^T [N_e(a)] \frac{h}{2} \, da \\ &= \frac{\rho Ah}{2} \int_{-1}^1 \begin{bmatrix} N_1^2(a) & N_1(a)N_2(a) & N_1(a)N_3(a) \\ N_1(a)N_2(a) & N_2^2(a) & N_2(a)N_3(a) \\ N_1(a)N_3(a) & N_2(a)N_3(a) & N_3^2(a) \end{bmatrix} da = \frac{\rho Ah}{30} \begin{bmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 2 & 16 & 2 \\ -1 & 2 & 4 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

(viii) On peut formuler une approximation diagonale $[\tilde{\mathbb{M}}_e]$ de $[\mathbb{M}_e]$ en affectant à chaque coefficient diagonal la somme des coefficients de la ligne correspondante, ce qui donne ici :

$$[\tilde{\mathbb{M}}_e] = \frac{\rho Ah}{6} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Une telle condensation conduit à une approximation diagonale de la matrice de masse globale $[\mathbb{M}]$, ce qui permet d'accélérer les schémas « explicites » tels que celui des différences centrées en évitant la résolution d'un système d'équations de matrice $[\mathbb{M}]$.

2. Algorithme d'intégration en temps.

(i) Le déplacement nodal $u^{(1)}(t)$ étant imposé à zéro, on incorpore cette liaison dans les équations discrètes, et on ne conserve que celles associées aux champs virtuels de valeur nodale $w^{(1)}$ nulle. Cela revient à écrire (discrétisation avec un seul élément) l'équation $[\mathbb{K}_e]\{\mathbb{U}_e\} + [\mathbb{M}_e]\{\ddot{\mathbb{U}}_e\} = \{\mathbb{F}_e\}$ en supprimant la première ligne de l'équation et la première colonne des matrices, soit :

$$[\mathbb{K}]\{\mathbb{U}\} + [\mathbb{M}]\{\ddot{\mathbb{U}}\} = \{\mathbb{F}\} \quad \text{avec} \quad [\mathbb{K}] = \frac{EA}{3h} \begin{bmatrix} 16 & -8 \\ -8 & 7 \end{bmatrix}, \quad [\mathbb{M}] = \frac{\rho Ah}{15} \begin{bmatrix} 8 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

(ii) Pour le schéma proposé (Newmark avec $\beta = 1/6$, $\gamma = 1/2$), la limite de stabilité Δt_{stab} est donnée (chapitre 9) par

$$\Delta t_{\text{stab}} = \min_J \frac{1}{\omega_J} \frac{2}{\sqrt{2\gamma - 4\beta}} = \frac{2\sqrt{3}}{\max_J \omega_J}$$

où ω_1, ω_2 sont les racines de l'équation caractéristique

$$\text{Det}([\mathbb{K}] - \omega^2[\mathbb{M}]) = 0$$

Compte tenu des expressions de $[\mathbb{K}]$, $[\mathbb{M}]$ données en (i) et posant $\omega = \bar{\omega} \sqrt{5E/(\rho h^2)} = \bar{\omega} \sqrt{5} c/h$ ($c = \sqrt{E/\rho}$ étant la célérité des ondes de compression dans une barre élastique), $\bar{\omega}$ est solution de

$$\text{Det} \left(\begin{bmatrix} 16 & -8 \\ -8 & 7 \end{bmatrix} - \bar{\omega}^2 \begin{bmatrix} 8 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \right) = 0 \quad \text{soit} \quad 15\bar{\omega}^4 - 104\bar{\omega}^2 + 48 = 0$$

dont les racines sont

$$\bar{\omega}^2 = \frac{52 \pm 8\sqrt{31}}{15}$$

La limite de stabilité Δt_{stab} est donc donnée, tous calculs faits, par

$$c\Delta t_{\text{stab}} = \sqrt{\frac{13 - 2\sqrt{31}}{5}} h \approx 0,61h$$

Elle correspond donc au temps que met une onde de compression pour parcourir (environ) 0,61 longueur d'élément.

Exercice 2 : échantillon élastoplastique sous sollicitation antiplane

1. *Interpolation géométrique.* Les fonctions de forme de l'élément sont données (chapitre 2) par

$$\begin{aligned} N_1(\underline{a}) &= \frac{1}{4}(1-a_1)(1-a_2), & N_2(\underline{a}) &= \frac{1}{4}(1+a_1)(1-a_2), \\ N_3(\underline{a}) &= \frac{1}{4}(1+a_1)(1+a_2), & N_4(\underline{a}) &= \frac{1}{4}(1-a_1)(1+a_2) \end{aligned}$$

La position d'un point \underline{x} de l'élément est donnée par interpolation des positions nodales. En posant l'interpolation et effectuant les calculs, on trouve :

$$\begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} = N_1(\underline{a}) \begin{Bmatrix} -A \\ 0 \end{Bmatrix} + N_2(\underline{a}) \begin{Bmatrix} A \\ 0 \end{Bmatrix} + N_3(\underline{a}) \begin{Bmatrix} A \\ B \end{Bmatrix} + N_4(\underline{a}) \begin{Bmatrix} -A \\ B \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & (1+a_2)/2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A \\ B \end{Bmatrix}$$

La matrice jacobienne \underline{J} et le déterminant jacobien $J(a_1, a_2)$ de l'élément sont donc *constants* (cela résulte de la forme *rectangulaire* de l'élément), et donnés par :

$$\underline{J} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B/2 \end{bmatrix}, \quad J(a_1, a_2) = \frac{1}{2}AB$$

2. *Sollicitation.* Le vecteur élémentaire $\{\mathbb{F}_e\}$ des forces généralisées est défini ici à travers la relation

$$\{\mathbb{W}_e\}^T \{\mathbb{F}_e\} = \int_{\text{bord supérieur } y=B} w(\underline{x}) T(\underline{x}) ds_x \quad \text{avec } w(x) = [N_e(\underline{a})] \{\mathbb{W}_e\}$$

ce qui donne (en remarquant ici que $ds_x = A da_1$ sur le bord supérieur, lui-même défini par $a_2 = 1$), en exploitant les expressions des fonctions de forme :

$$\{\mathbb{F}_e\} = \int_{-1}^1 \begin{Bmatrix} N_1(a_1, 1) \\ N_2(a_1, 1) \\ N_3(a_1, 1) \\ N_4(a_1, 1) \end{Bmatrix} T(\underline{x}(a_1, 1)) A da_1 = A \int_{-1}^1 \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ (1+a_1)/2 \\ (1-a_1)/2 \end{Bmatrix} T(\underline{x}(a_1, 1)) da_1$$

Pour le cas d'une densité d'effort $T(x) = T$ uniforme, on effectue les intégrations et trouve :

$$\{\mathbb{F}_e\} = \{0 \ 0 \ AT \ AT\}^T \quad (1)$$

3. *Régime élastique.*

(a) Compte tenu du caractère diagonal et constant de la matrice jacobienne \underline{J} , on a

$$\frac{\partial}{\partial a_1} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial a_1} = A \frac{\partial}{\partial x}, \quad \frac{\partial}{\partial a_2} = \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial a_2} = \frac{B}{2} \frac{\partial}{\partial y}$$

Les déformations associées à un champ de déplacement $u(\underline{x}) = [N_e(\underline{a})] \{\mathbb{U}_e\}$ défini par interpolation de déplacements nodaux sur l'élément sont donc données par :

$$2\varepsilon_{xz} = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{A} \frac{\partial u}{\partial a_1} = \frac{1}{A} \left[\frac{\partial N_e}{\partial a_1} \right] \{\mathbb{U}_e\}, \quad 2\varepsilon_{yz} = \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{2}{B} \frac{\partial u}{\partial a_2} = \frac{2}{B} \left[\frac{\partial N_e}{\partial a_2} \right] \{\mathbb{U}_e\} \quad (2)$$

les matrices des dérivées des fonctions de forme étant données, après calcul, par

$$\begin{aligned} \left[\frac{\partial N_e}{\partial a_1} \right] &= \left[-\frac{1}{4}((1-a_2)) \quad \frac{1}{4}(1-a_2) \quad \frac{1}{4}(1+a_2) \quad -\frac{1}{4}((1+a_2)) \right] \\ \left[\frac{\partial N_e}{\partial a_2} \right] &= \left[-\frac{1}{4}((1-a_1)) \quad -\frac{1}{4}(1+a_1) \quad \frac{1}{4}(1+a_1) \quad -\frac{1}{4}((1-a_1)) \right] \end{aligned}$$

(b) La matrice de rigidité élémentaire $[\mathbb{K}_e]$ de l'élément est définie à travers la relation

$$\begin{aligned} \{\mathbb{W}_e\}^T [\mathbb{K}_e] \{\mathbb{U}_e\} &= \int_{\text{élément}} \underline{\underline{\sigma}}[u] : \underline{\underline{\varepsilon}}[w] \, dV = 2 \int_{\text{élément}} (\sigma_{xz}[u] \varepsilon_{xz}[w] + \sigma_{yz}[u] \varepsilon_{yz}[w]) \, dV \\ &= 4\mu \int_{\text{élément}} (\varepsilon_{xz}[u] \varepsilon_{xz}[w] + \varepsilon_{yz}[u] \varepsilon_{yz}[w]) \, dV \end{aligned}$$

En reportant les expressions (2) pour u et w , on trouve par identification (en remarquant que $dV = J \, da_1 \, da_2 = (AB/2) \, da_1 \, da_2$)

$$[\mathbb{K}_e] = \frac{\mu AB}{2} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left(\frac{1}{A^2} \left[\frac{\partial N_e}{\partial a_1} \right]^T \left[\frac{\partial N_e}{\partial a_1} \right] + \frac{4}{B^2} \left[\frac{\partial N_e}{\partial a_2} \right]^T \left[\frac{\partial N_e}{\partial a_2} \right] \right) da_1 \, da_2$$

En calculant les intégrales à l'aide de $\int_{-1}^1 da = 2$, $\int_{-1}^1 (1-a)^2 da = \int_{-1}^1 (1+a)^2 da = 8/3$ et $\int_{-1}^1 (1-a)(1+a) da = 4/3$, on trouve :

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left[\frac{\partial N_e}{\partial a_1} \right]^T \left[\frac{\partial N_e}{\partial a_1} \right] da_1 \, da_2 &= \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 2 & -2 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & -2 & 2 \end{bmatrix} \\ \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left[\frac{\partial N_e}{\partial a_1} \right]^T \left[\frac{\partial N_e}{\partial a_1} \right] da_1 \, da_2 &= \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & -2 & -1 \\ -1 & -2 & 2 & 1 \\ -2 & -1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

La matrice de rigidité élémentaire $[\mathbb{K}_e]$ de l'élément est donc donnée par

$$[\mathbb{K}_e] = \frac{\mu B}{24A} \begin{bmatrix} 2 & -2 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & -2 & 2 \end{bmatrix} + \frac{\mu A}{6B} \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & -2 & -1 \\ -1 & -2 & 2 & 1 \\ -2 & -1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad (3)$$

(c) Les conditions de blocage conduisent, pour ce modèle à un seul élément, à écrire l'équation $[\mathbb{K}_e] \{\mathbb{U}_e\} = \{\mathbb{F}_e\}$ dans laquelle les lignes 1 et 2, ainsi que les colonnes 1 et 2 de $[\mathbb{K}_e]$, sont supprimées. Compte tenu des expressions (1) et (3), l'équilibre de l'échantillon est gouverné par l'équation matricielle d'inconnues $u^{(3)}, u^{(4)}$

$$\left(\frac{\mu B}{6A} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} + \frac{\mu A}{3B} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} u^{(3)} \\ u^{(4)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} TA \\ TA \end{Bmatrix}$$

La solution élastique approchée (qui est en fait exacte pour T uniforme) est donnée par résolution du système ci-dessus (on cherche directement $u^{(3)} = u^{(4)}$ par symétrie) :

$$u^{(3)} = u^{(4)} = \frac{TB}{\mu} \quad (4)$$

4. *Régime élastoplastique.* Il est utile de noter pour la suite que les déformations et contraintes sont, dans le cadre antiplan considéré ici, toujours égales à leurs parties déviatoriques.

(a) La solution élastique approchée définie par (4) est telle que

$$\varepsilon_{xz} = 0, \quad \varepsilon_{yz} = \frac{T}{2\mu}, \quad \sigma_{xz} = 0, \quad \sigma_{yz} = T$$

La contrainte équivalente pour cette solution est donnée par

$$\sigma^{\text{eq}} = \sqrt{3}|T|$$

La valeur T_0 de la densité uniforme d'effort correspondant à l'apparition de la plasticité dans l'échantillon est donc donnée par :

$$\sqrt{3}T_0 = \sigma_0 \implies T_0 = \sigma_0/\sqrt{3}$$

- (b) Un incrément de déplacement $\{0, 0, \Delta u, \Delta u\}$ correspond à un incrément de déformation constant sur S donné par

$$\Delta \varepsilon_{xz} = \Delta e_{xz} = 0, \quad \Delta \varepsilon_{yz} = \Delta e_{yz} = \frac{\Delta u}{2B}$$

Le prédicteur élastique est tel que :

$$\sigma_{xz}^{\text{elas}} = s_{xz}^{\text{elas}} = 0, \quad \sigma_{yz}^{\text{elas}} = s_{yz}^{\text{elas}} = T_0 + 2\mu \Delta \varepsilon_{yz} = T_0 + \mu \frac{\Delta u}{B}$$

La contrainte équivalente associée $\sigma^{\text{elas,eq}}$ valant $\sqrt{3}(T_0 + \mu \Delta u/B) > \sqrt{3}T_0$ (pour $\Delta u > 0$), le prédicteur élastique n'est pas plastiquement admissible et l'incrément de contrainte est élasto-plastique. L'algorithme de retour radial (chapitre 6) se traduit ici par les étapes suivantes :

- Détermination de l'incrément de déformation plastique cumulée Δp par résolution de l'équation de cohérence :

$$\sigma^{\text{elas,eq}} - 3\mu \Delta p - \sigma_0 + h \Delta p = 0 \quad \text{soit} \quad \Delta p = \frac{\sqrt{3}\mu \Delta u}{(3\mu + h)B}$$

- Détermination de l'incrément de déformation plastique : on trouve

$$\Delta \varepsilon_{yz}^{\text{P}} = \frac{3\Delta p}{2\sigma^{\text{elas,eq}}} s_{yz}^{\text{elas}} = \frac{3\mu \Delta u}{2B(3\mu + h)}$$

- Actualisation des variables (valeurs en fin d'incrément) :

$$p = \Delta p, \quad \varepsilon_{yz} = \frac{T_0}{2\mu} + \frac{\Delta u}{2B}, \quad \sigma_{yz} = T_0 + 2\mu(\Delta \varepsilon_{yz} - \Delta \varepsilon_{yz}^{\text{P}}) = T_0 + \frac{\Delta u}{B} \frac{h\mu}{3\mu + h}$$

L'équation d'équilibre, écrite sous forme faible et pour le modèle constitué d'un unique élément, s'écrit (compte tenu du fait que $\sigma_{xz} = 0$ pour l'incrément de déplacement considéré ici) :

$$\int_{\text{élément}} \sigma_{yz}[u + \Delta u] \varepsilon_{yz}[w] \, dV = \{\mathbb{W}\}^T \{\mathbb{F}\} \quad \forall \{\mathbb{W}\} = \{0 \ 0 \ w^{(3)} \ w^{(4)}\} \quad (5)$$

L'inconnue principale étant le scalaire Δu , il suffit de construire une équation scalaire à partir de cette formulation faible. Prenant $w^{(3)} = w^{(4)}$, remarquant que $\sigma_{yz}[u + \Delta u]$ donné par (5) et $\varepsilon_{yz}[w]$ sont constants sur S , on obtient l'équation scalaire sur Δu :

$$R(\Delta u; w) = 2AB \frac{w^{(4)}}{B} \left(T_0 + \frac{\Delta u}{B} \frac{h\mu}{3\mu + h} \right) - 2Aw^{(4)}(T_0 + \Delta T) = 0 \quad \forall w^{(4)}$$

qui donne après simplification :

$$R(\Delta u; w) = 2Aw^{(4)} \left(\Delta u \frac{h\mu}{3\mu + h} - \Delta T \right) = 0$$

Cette équation est linéaire en Δu . Son module tangent global \mathcal{A}^{ep} est donc constant (et scalaire), il est défini par

$$\frac{dR}{d\Delta u} w^{(4)} = \mathcal{A}^{\text{ep}} w^{(4)}, \quad \text{soit} \quad \mathcal{A}^{\text{ep}} = \frac{2Ah\mu}{3\mu + h}$$

La résolution de l'équation d'équilibre donne

$$\mathcal{A}^{\text{ep}} \Delta u = 2A\Delta T, \quad \text{soit} \quad \Delta u = \Delta T \frac{3\mu + h}{h\mu}$$