

COURS D'ANALYSE DES STRUCTURES MÉCANIQUES PAR LA MÉTHODE DES
ELEMENTS FINIS (MEC 568)

contrôle non classant (25 mars 2008, 2 heures)

Documents autorisés : livre ; documents et notes de PC

Sujet proposé par Attilio FRANGI

On remarque que certains passages de ce contrôle s'appuient sur deux exemples développés dans le cours : exemple 1.A1 sur l'élasticité linéaire, et exemple 8.3.5 sur la conduction thermique instationnaire.

On envisage l'analyse très simplifiée d'une cavité souterraine profonde utilisée pour le stockage de produits fluides. On suppose que la cavité est une sphère de rayon R_I et que le solide homogène qui l'entoure occupe une région comprise entre les sphères de rayons R_I et R_E . Au temps $t = 0$ la cavité est remplie rapidement de fluide à la température T_{F0} tandis que le solide se trouve à la température uniforme $T_0 > T_{F0}$. On se propose d'étudier la réponse thermoélastique du système fluide-solide couplé avec l'hypothèse de base que toute réponse soit à symétrie sphérique. On se place dans le cadre des transformations infinitésimales.

Partie 1 : problème thermique

Formulation continue

Pour simplifier l'analyse on impose que la température soit uniforme dans le fluide et égale à $T_F(t)$ et que l'équilibre thermique de la cavité s'exprime comme :

$$\rho_F c_F V \dot{T}_F = Q, \quad (1)$$

où $Q(t)$ est le flux de chaleur qui entre dans le fluide à travers la surface $r = R_I$ et $V = 4\pi R_I^3/3$ est le volume de la cavité sphérique.

Les propriétés thermiques du matériau constitutif du milieu solide sont ρ, c, k (comportement isotrope). On suppose que la surface extérieure reste toujours à la température initiale T_0 .

1.1 Montrer que, pour le solide, la forme faible de l'équilibre thermique s'exprime comme :

$$4\pi \int_{R_I}^{R_E} \left(\rho c w \dot{T} r^2 + k r^2 \frac{\partial w}{\partial r} \frac{\partial T}{\partial r} \right) dr = -w(R_I) Q \quad \forall w : w(R_E) = 0 \quad (2)$$

On observe qu'à l'instant initial le champ de température présente une discontinuité à l'interface entre fluide et solide. La physique de la conduction thermique va faire que très rapidement la continuité du champ est rétablie. Par conséquent on prend comme hypothèse de travail que la température du solide en R_I , $T(R_I, t)$, est égale à la température du fluide $T_F(t)$ pour tout $t > 0$. On peut donc remplacer les équations (1)-(2) avec la forme faible de l'équilibre thermique global pour le système couplé solide/fluide pour $t > 0$:

$$4\pi \int_{R_I}^{R_E} \left(\rho c w \dot{T} r^2 + k r^2 \frac{\partial w}{\partial r} \frac{\partial T}{\partial r} \right) dr = -w(R_I) \rho_F c_F V \dot{T}(R_I) \quad \forall w : w(R_E) = 0 \quad (3)$$

Résolution numérique

On se propose de résoudre numériquement le problème de la conduction thermique instationnaire du système couplé en utilisant une approximation diagonale de la matrice de capacité du solide (voir exemple 8.3.5 du cours) et une intégration *implicite* par rapport au temps. On partage le segment $R_I - R_E$ en N_E élément isoparamétriques B2 (linéaires à deux noeuds). Les $N_N = N_E + 1$ noeuds ont pour coordonnées $r^{(i)}$, avec $r^{(1)} = R_I$ et $r^{(N_N)} = R_E$. On fixe la taille Δt d'un pas d'intégration et le nombre de pas N_{step} .

On dispose des fonctions Matlab qui permettent d'évaluer les matrices élémentaire (divisées par 4π) associées à l'intégrale sur l'élément des termes de conductivité (`cond_B2S`) et de capacité (`caplump_B2S`)

On dispose aussi du morceau de code Matlab suivant écrit pour faire l'assemblage des matrices et vecteurs associés aux termes de gauche de l'équation (3) (divisés par 4π) et pour effectuer ensuite l'intégration par rapport au temps de l'équation (3) comme si le terme de droite était nul (ce code permet donc de résoudre un problème similaire à celui considéré ici dans lequel le fluide est absent et le flux Q sur la paroi interne est nul).

La "traduction" Matlab des paramètres utilisés est : $N_E \rightarrow \text{NE}$, $T_0 \rightarrow \text{T0}$, $T_{F0} \rightarrow \text{TF0}$, $\Delta t \rightarrow \text{DT}$, $N_{\text{step}} \rightarrow \text{nstep}$, $\rho c \rightarrow \text{rhoc}$, $k \rightarrow \text{k}$.

```

neqT=NE; % number of equations for thermal part
temp=zeros(NE+1,1); % allocates vector for temperatures
temp(NE+1)=T0; % imposed temperature
dofT=[1:1:NE -(NE+1)]; % degrees of freedom for thermal problem

% assemblage of matrices

C=zeros(neqT,neqT); % allocates conductivity matrix
M=zeros(neqT,1); % allocates condensed capacity "matrix" (vector)
FT=zeros(neqT,1); % allocates rhs side for diffusion part

for e=1:NE, % loop over elements to assemble matrices
    S=[coor(e) coor(e+1)]; % coor contains r coordinates of nodes
    dofe=dofT(e:e+1);
    pe=find(dofe>0);
    Ie=dofe(pe); % gets value of associated DOFs
    Me=caplump_B2S(S,rhoc); % elemental diagonal capacity matrix
    M(Ie)=M(Ie)+Me(pe); % assemblage of capacity matrix
    Ce=cond_B2S(S,k); % elemental conductivity matrix
    C(Ie,Ie)=C(Ie,Ie)+Ce(pe,pe); % assemblage of conductivity matrix
    pe_De=find(dofe<0);
    Ie_De=-dofe(pe_De);
    FT(Ie)=FT(Ie)-Ce(pe,pe_De)*temp(Ie_De);
end

% time marching solution

C=C+diag(M)/Dt; % Dt is time step
RC=chol(C); % cholesky decomp. of thermal matrix
clear C

T=zeros(neqT,1); % allocates vector of unknown nodal temperatures
T(1:neqT)=T0; % initial conditions
FgT=zeros(neqT,1);

for step=1:nstep, % loop over the nstep time steps
    FgT=FT+1/Dt*M.*T; % Dt is time step
    T=RC\RC'\FgT; % solution of linear system
    temp(1:NE)=T; % actual temperatures on all nodes
end

```

Comme pour le problème continu, on admettra pour le problème discret la continuité thermique entre le fluide et le solide, au sens que $T^{(1)}(t) = T_F(t)$ pour tout $t > 0$, tandis que en $t = 0$ strictement on a $T_F = T_{F0}$ et $T(r) = T_0$, $R_I \leq r \leq R_E$.

Dans le but de pouvoir ensuite mettre en oeuvre la procédure d'intégration en temps discret dans des conditions "normales", on commence par effectuer un premier pas de temps, avec Δt choisi arbitrairement petit, afin de rétablir la continuité thermique, c'est-à-dire d'avoir $T^{(1)}(\Delta t) = T_F(\Delta t)$.

On considère donc la formulation faible (3) écrite à l'instant $t = \Delta t$ et discrétisée suivant le morceau de code présenté ci dessus.

- 1.2 *En utilisant un schéma d'intégration implicite par rapport au temps effectuer un premier pas d'intégration de $t = 0$ à $t = \Delta t$ (on rappelle encore que en $t = 0$ la température est discontinue entre fluide et solide!). En faisant ensuite tendre $\Delta t \rightarrow 0$, en déduire les valeurs nodales du champ de température à l'instant $t = \Delta t$ (que l'on notera $t = 0^+$). Commenter sur les différences avec le schéma continu.*

La suite de l'intégration numérique par rapport au temps est effectuée avec ces températures prises comme températures initiales.

- 1.3 *Détailler (sous forme Matlab) toutes les modifications à apporter au code ci dessus de manière à pouvoir effectuer l'analyse du système couplé solide/fluide.*

Partie 2 : thermoélasticité

Formulation continue

On traite le fluide comme un solide homogène fictif de module de compressibilité isotrope κ_F et pour lequel le déviateur des déformations est nul et l'état de contrainte est uniforme.

On désigne par P :

$$P = -\frac{1}{3} \text{tr} \underline{\underline{\sigma}}$$

la pression dans le fluide.

- 2.1 *Exprimer P en fonction de la variation de volume de la cavité ΔV et de la température T_F . Le comportement thermoélastique du fluide et du solide est linéaire et isotrope (utiliser l'indice F pour les propriétés du fluide ; les propriétés du solide seront notées sans indice).*
- 2.2 *Exprimer ΔV en fonction des déplacements du solide.*
- 2.3 *Écrire enfin la forme faible de l'équilibre thermoélastique pour le solide à un instant $t > 0$ en faisant l'hypothèse que les déplacements sont nuls en $R = R_E$ et que la réponse élastique est symétrique, avec $\underline{u} = u(r)\underline{e}_r$. Si w désigne la composante radiale du champ test $\underline{w} = w(r)\underline{e}_r$, montrer que les termes de couplage sont associés à l'expression :*

$$\gamma \int_{R_1}^{R_2} \left(\frac{dw}{dr} + 2\frac{w}{r} \right) \Delta T r^2 dr \quad (4)$$

avec γ coefficient constant à déterminer.

Résolution numérique

On se propose de résoudre numériquement la formulation faible thermoélastique déterminée à la question précédente.

On choisit d'interpoler les déplacements à l'aide de fonctions de forme quadratiques.

On garde la même discrétisation en éléments que pour le problème thermique, mais pour les déplacements on utilise l'élément isoparamétrique B3 (quadratique à trois noeuds) dont l'élément de référence est représentée en Figure 1. On remarque que seuls les noeuds d'extrémité de chaque élément ont été définis dans `coor` pour le problème thermique ; on supposera que les noeuds "intermédiaires" sont situés exactement au milieu des éléments.

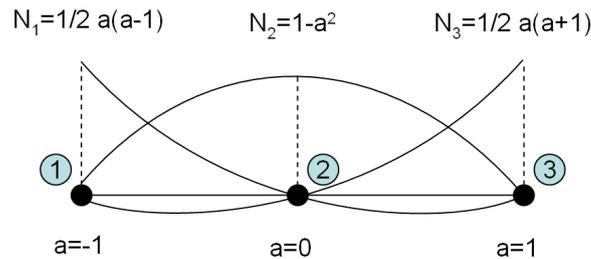


FIG. 1 – Element de référence et fonctions de forme

On considère l'élément e générique, pour lequel les noeuds d'extrémité ont pour coordonnées radiales $r^{(e)}$ et $r^{(e+1)}$.

2.4 Calculer le jacobien J de l'élément isoparamétrique.

On s'intéresse à la fonction `thermoel_B3S(S, alpha, kappa, Te)` qui évalue la contribution de l'élément aux termes de eq.(4) en sachant que $\alpha \rightarrow$ `alpha`, $\kappa \rightarrow$ `kappa` et en utilisant `S` et `Te` définis par :

```
S=[coor(e) .5*(coor(e)+coor(e+1)) coor(e+1)]';
Te=temp(e:e+1)-T0;
```

2.5 Détailler les démarches théoriques et numériques (sous forme Matlab) nécessaires pour écrire cette fonction. Utiliser la technique de l'intégration numérique et justifier le choix de la règle d'intégration.

On suppose que les inconnues nodales de déplacement radial sont numérotées de manière croissante de R_I vers R_E :

```
dofE=[1:1:2*NE -(2*NE+1)]; % degrees of freedom for elastic problem
```

On se réfère au morceau de code objet d'analyse de la première partie. On se propose de le compléter afin d'effectuer l'analyse thermoélastique et d'estimer les déplacements à la fin de chaque pas de l'intégration thermique. On suppose pour cela d'avoir déjà effectué l'assemblage de la matrice de rigidité de la structure au même moment que la matrice de conductivité et de capacité et l'on s'intéresse ici seulement aux termes de couplage.

2.6 Effectuer l'assemblage des termes de couplage thermoélastique dans eq.(4) en utilisant une notation style Matlab. Où faudrait-il placer cet assemblage dans la procédure globale ?

Partie 3 : plasticité

Formulation de la loi de comportement

Le champ de contrainte dans le solide est, par hypothèse, de la forme :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \sigma_{rr} \underline{e}_r \otimes \underline{e}_r + \sigma_{\vartheta\vartheta} \underline{e}_\vartheta \otimes \underline{e}_\vartheta + \sigma_{\varphi\varphi} \underline{e}_\varphi \otimes \underline{e}_\varphi, \quad \text{avec} \quad \sigma_{\vartheta\vartheta} = \sigma_{\varphi\varphi}$$

où r, ϑ, φ sont les coordonnées sphériques. On suppose maintenant que le solide obéit à la loi de comportement de von Mises sans écrouissage avec :

$$f = \sigma^{\text{eq}} - \sigma_0$$

3.1 Montrer que le déviateur $\underline{\underline{s}}$ devient $\underline{\underline{s}} = s \underline{\underline{\mathbb{K}}}$, avec $s = \sigma_{\vartheta\vartheta} - \sigma_{rr}$ et

$$\underline{\underline{\mathbb{K}}} = \frac{1}{3} (-2\underline{e}_r \otimes \underline{e}_r + \underline{e}_\vartheta \otimes \underline{e}_\vartheta + \underline{e}_\varphi \otimes \underline{e}_\varphi)$$

Quand la pression du fluide augmente, la solution élastique prévoit $s > 0$, avec s décroissant par rapport à r (et donc maximal en R_I). La limite d'élasticité est donc initialement atteinte en $r = R_I$. Pour des pressions croissantes au delà de la valeur d'apparition de la plastification, la frontière de la zone plastique devient un sphère de rayon $r > R_I$ croissant avec la pression. L'on admettra ici sans le démontrer que, pour des pressions du fluide croissant de manière monotone, s reste toujours positif.

3.2 Montrer que l'expression de $\underline{\underline{\dot{\epsilon}}}^P$ est :

$$\underline{\underline{\dot{\epsilon}}}^P = \frac{3}{2} \dot{p} \underline{\underline{\mathbb{K}}}$$

3.3 Formuler la loi de comportement élastoplastique pour s en fonction de la composante radiale u du déplacement et de la déformation plastique équivalente p .

3.4 Donner l'expression de $\underline{\underline{\sigma}}$ comme somme de la partie déviatorique que l'on vient de déterminer et de la partie volumique à déterminer.

Algorithme de retour radial

On s'intéresse à la formulation de l'algorithme de retour radial pour un point quelconque du solide et pour le pas de chargement $t_n \rightarrow t_{n+1}$.

3.5 Donner l'expression de s_{n+1} et Δp_n en fonction de s_n et Δu_n . Donner ensuite l'expression de $\underline{\underline{\sigma}}_{n+1}$.

Opérateur tangent local

On analyse maintenant une itération de la procédure de Newton-Raphson utilisée pour résoudre le pas de chargement $t_n \rightarrow t_{n+1}$. On cherche donc $\delta u_n^{(k)}$ tel que $\Delta u_n^{(k+1)} = \Delta u_n^{(k)} + \delta u_n^{(k)}$ soit solution de la forme faible de l'équilibre global pour la structure. On désigne par $\underline{\underline{\sigma}}_{n+1}^{(k+1)}$ le tenseur des contraintes issu de l'algorithme de retour radial à partir de l'incrément de déformations $\Delta \underline{\underline{\epsilon}}_n^{(k+1)} = \underline{\underline{\epsilon}}[\Delta u_n^{(k)} + \delta u_n^{(k)}]$.

3.6 A partir des résultats du point 3.5, effectuer la linéarisation de $\underline{\underline{\sigma}}_{n+1}^{(k+1)}$ par rapport à $\delta u_n^{(k)}$. On pourra simplifier la notation $u_n^{(k)}$ en u et $\delta u_n^{(k)}$ en δu .

3.7 Question optionnelle (bonus) : Montrer que le résultat coïncide comme attendu avec celui que donnerait l'approche de linéarisation développée dans le cadre du cours et qui fait intervenir le tenseur \mathcal{A}^{EP} .

CORRIGE

Partie 1 : problème thermique

Formulation continue

- 1.1 La seule différence par rapport à l'exemple 1.A1 du cours est la présence d'un terme de surface en $r = R_I$:

$$\begin{aligned} 4\pi \int_{R_I}^{R_E} \left(\rho c w \dot{T} r^2 + k r^2 \frac{\partial w}{\partial r} \frac{\partial T}{\partial r} \right) dr \\ = -4\pi R_I^2 k \frac{\partial T}{\partial r} \Big|_{r=R_I} w(R_I) = -w(R_I) Q \quad \forall w : w(R_E) = 0 \end{aligned}$$

avec :

$$Q = 4\pi R_I^2 k \frac{\partial T}{\partial r} \Big|_{r=R_I}$$

Résolution numérique

- 1.2 Par simplicité on appelle 0^+ la valeur du temps à la fin du premier pas de temps infinitésimal. Utiliser la technique d'intégration implicite implique d'imposer la forme faible à la fin du pas de temps et donc en $t = 0^+$ quand la continuité à été établie.

En choisissant la valeur nodale $w^{(1)}$ unitaire et les autres nulles, si l'on multiplie par Δt toute l'équation, on a :

$$\rho_F c_F V \left(T^{(1)}(0^+) - T_{F0} \right)$$

pour le termes de droite, tandis que les termes de gauches donnent (on rappelle que la matrice de masse est divisée par 4π)

$$4\pi M^{(1)} \left(T^{(1)}(0^+) - T_0 \right)$$

En effet, lorsque $\Delta t \rightarrow 0$ les seuls termes qui restent dans l'équation thermique sont ceux associés aux capacités.

Il vient, finalement :

$$\begin{aligned} T^{(1)}(0^+) &= \frac{T_{0F} \rho_F c_F V + T_0 4\pi M^{(1)}}{\rho_F c_F V + 4\pi M^{(1)}} \\ T^{(i)}(0^+) &= T_0, \quad i > 1 \end{aligned}$$

Si la taille des éléments $h \rightarrow 0$ on retrouve les conditions du schéma continu car $M^{(1)} \rightarrow 0$. Le champ T_h est par construction continu. On peut approcher la discontinuité en $r = R_I$ prévue par le schéma continue dans le solide seulement avec un maillage dont la dimension caractéristique des éléments h tend à zéro.

- 1.3 Pour adapter le code il faut simplement modifier la matrice de capacité :

$$M(1) = M(1) + \rho_F c_F V R_I^3 / 3;$$

avant d'effectuer la décomposition de Cholesky et modifier les conditions initiales avant de lancer la boucle sur les pas de temps :

```
T(1)=(M(1)*T0+rhoFcF*RI^3/3*TF0)/ ... % initial conditions on first node
      (M(1)+rhoFcF*RI^3/3);
```

On rappelle que tous les coefficients de masse et conductivité issus des fonctions élémentaires sont divisés par 4π .

Partie 2 : thermoélasticité

Formulation continue

2.1 On pose $\Delta T := T - T_0$, $\Delta T_F := T_F - T_{F0}$. La loi thermoélastique linéaire isotrope générale est :

$$\underline{\sigma} = \mathcal{A} : [\underline{\varepsilon} - \alpha \Delta T \underline{\mathbf{1}}] = \lambda (\text{Tr } \underline{\varepsilon}) \underline{\mathbf{1}} + 2\mu \underline{\varepsilon} - 3\kappa \alpha \Delta T \underline{\mathbf{1}}$$

En particulier, pour le fluide, l'intégration sur le volume de la cavité donne :

$$P = -\kappa_F \frac{\Delta V}{V} + 3\alpha_F \kappa_F \Delta T_F$$

2.2 Dans l'esprit des transformations infinitésimales :

$$\Delta V = 4\pi R_I^2 u(R_I)$$

et donc :

$$P = -\kappa_F \frac{3}{R_I} u(R_I) + 3\alpha_F \kappa_F \Delta T_F$$

2.3 Utilisant les résultats de l'exemple 1.A1, la forme faible de l'équilibre thermoélastique devient :

$$\int_{R_1}^{R_2} \left\{ (\lambda + 2\mu) \frac{du}{dr} \frac{dw}{dr} + 2\lambda \left(\frac{u}{r} \frac{dw}{dr} + \frac{w}{r} \frac{du}{dr} \right) + 4(\lambda + \mu) \frac{u}{r} \frac{w}{r} \right\} r^2 dr - 3\alpha \kappa \int_{R_1}^{R_2} \left(\frac{dw}{dr} + 2 \frac{w}{r} \right) \Delta T r^2 dr = R_I^2 P w(R_I) \quad \forall w : w(R_E) = 0$$

avec :

$$R_I^2 P w(R_I) = -3\kappa_F R_I u(R_I) w(R_I) + 3R_I^2 \alpha_F \kappa_F \Delta T_F w(R_I)$$

Résolution numérique

2.4 Si $h = r^{(e+1)} - r^{(e)}$ désigne la longueur de l'élément, le jacobien est la constante $J = h/2$. En effet :

$$r = N^{(1)}(a)r^{(e)} + N^{(2)}(a) \frac{r^{(e)} + r^{(e+1)}}{2} + N^{(3)}(a)r^{(e+1)} = \frac{1}{2}(1-a)r^{(e)} + \frac{1}{2}(1+a)r^{(e+1)}$$

2.5 La fonction à intégrer est globalement de degré 4 par rapport au paramètre a . Donc il faut utiliser au moins une règle avec 3 point de Gauss.

On présente la fonction Matlab pour évaluer la contribution d'un élément mixte B3-B2 au terme de couplage thermoélastique dans le cas plus général où les noeuds "intermédiaires" ne sont pas situés nécessairement au milieu des éléments :

```

function Fe=thermoel_B3S(S,alpha,kappa,Te)

a_gauss=sqrt(3/5)*[-1 0 1];           % Gauss abscissae
w_gauss=1/9*[5 8 5];                 % Gauss weights
Fe=zeros(3,1);
for g=1:3,                             % loop over Gauss points
    a=a_gauss(g);                       % param. coordinates for gauss point
    N=[.5*a*(a-1) (1-a^2) .5*a*(1+a)]';
    r=N'*S;
    DN=[a-.5 -2*a a+.5]';
    J=S'*DN;                             % jacobian matrix
    GN=DN/J;                             % gradient of shape functions
    T=.5*(1-a)*Te(1)+.5*(1+a)*Te(2);    % temperature at gauss point
    Fe=Fe+3*alpha*kappa*T*(GN+2/r*N) ...
        *r^2*J*w_gauss(g);
end

```

2.6 L'assemblage du vecteur de couplage thermoélastique doit être ajouté dans la boucle sur les pas de temps avant de résoudre le système linéaire :

```

FgE=zeros(neqE,1);
for e=1:NE,                             % loop over elements to compute thermoel coupling
    Te=temp(e:e+1)-T0;                   % delta temperature at element ends
    S=[coor(e) .5*(coor(e)+coor(e+1)) ...
        coor(e+1)]';
    Fe=thermoel_B3S(S,alpha,kappa,Te);    % elemental contribution to thermoel coupling
    dofe=dofE(2*e-1:2*e+1);
    pe=find(dofe>0);
    Ie=dofe(pe);                          % gets value of associated DOFs
    FgE(Ie)=FgE(Ie)+Fe(pe);              % assemblage of rhs vector
end
FgE(1)=FgE(1)+3*kappaF*alphaF*RI^2*(temp(1)-TF0);

```

Partie 3 : plasticité

Formulation de la loi de comportement

3.1 La trace de $\underline{\underline{\sigma}}$ est $\sigma_{rr} + 2\sigma_{\vartheta\vartheta}$ et, par définition de déviateur, on a :

$$\underline{\underline{s}} = \underline{\underline{\sigma}} - \frac{1}{3}\text{Tr}(\underline{\underline{\sigma}})\underline{\underline{\mathbb{1}}}$$

d'où le résultat demandé

3.2 Les déformations plastiques sont :

$$\underline{\underline{\dot{\epsilon}}}^P = \frac{3}{2} \frac{\underline{\underline{s}}}{\sigma^{eq}} \dot{p} = \frac{3}{2} \dot{p} \underline{\underline{\mathbb{K}}}$$

car :

$$\sigma^{eq} = |s| = s$$

3.3 Puisque la partie élastique du deviateur des déformations est :

$$\underline{\underline{\epsilon}}^E = \underline{\underline{\mathbb{K}}} \left(\frac{u}{r} - \frac{du}{dr} \right) - \underline{\underline{\epsilon}}^P,$$

la loi de comportement pour s devient :

$$s = 2\mu \left(\frac{u}{r} - \frac{du}{dr} \right) - 3\mu p$$

3.4 Pour $\underline{\underline{\sigma}}$ on a :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \kappa \left(\frac{du}{dr} + 2\frac{u}{r} \right) \underline{\underline{\mathbb{1}}} + s\underline{\underline{\mathbb{K}}}$$

la partie volumique étant purement élastique.

Algorithme de retour radial

3.5 Suivant les démarches de la procédure générale on obtient :

$$s_{n+1} = s_n + 2\mu \left(\frac{\Delta u_n}{r} - \frac{d\Delta u_n}{dr} \right) - 3\mu\Delta p_n$$

On commence avec l'hypothèse élastique :

$$\begin{aligned} s^{\text{elas}} &= s_n + 2\mu \left(\frac{\Delta u_n}{r} - \frac{d\Delta u_n}{dr} \right) \\ f^{\text{elas}} &= s^{\text{elas}} - \sigma_0 \end{aligned}$$

Si $f^{\text{elas}} \leq 0$ alors $s_{n+1} = s^{\text{elas}}$ et $\Delta p_n = 0$. Autrement :

$$\Delta p_n = \frac{f^{\text{elas}}}{3\mu}, \quad s_{n+1} = \sigma_0$$

Globalement :

$$\underline{\underline{\sigma}}_{n+1} = \kappa \left(\frac{du_{n+1}}{dr} + 2\frac{u_{n+1}}{r} \right) \underline{\underline{\mathbb{1}}} + s_{n+1}\underline{\underline{\mathbb{K}}}$$

et :

$$s_{n+1} = \begin{cases} \sigma_0 & \text{si } f^{\text{elas}} > 0 \\ s_n + 2\mu \left(\frac{\Delta u_n}{r} - \frac{d\Delta u_n}{dr} \right) & \text{si } f^{\text{elas}} \leq 0 \end{cases}$$

Opérateur tangent local

3.6 On définit :

$$\delta \underline{\underline{\sigma}} = \frac{\partial \underline{\underline{\sigma}}_{n+1}^{(k+1)}}{\partial \Delta \underline{\underline{\varepsilon}}} : \underline{\underline{\varepsilon}}[\delta u_n^{(k)}]$$

De l'algorithme de retour radiale on a :

$$\delta \underline{\underline{\sigma}} = \begin{cases} \kappa \left(\frac{d\delta u}{dr} + 2\frac{\delta u}{r} \right) \underline{\underline{\mathbb{1}}} & \text{si } f^{\text{elas}} > 0 \\ \kappa \left(\frac{d\delta u}{dr} + 2\frac{\delta u}{r} \right) \underline{\underline{\mathbb{1}}} + 2\mu \left(\frac{\delta u}{r} - \frac{d\delta u}{dr} \right) \underline{\underline{\mathbb{K}}} & \text{si } f^{\text{elas}} \leq 0 \end{cases} \quad (5)$$

et donc la linéarisation est simplement :

$$\underline{\underline{\sigma}}_{n+1}^{(k)} + \delta \underline{\underline{\sigma}}$$

On remarque que $\underline{\underline{\sigma}}_{n+1}^{(k+1)}$ est globalement linéaire en δu , mais ceci ne signifie pas que le problème soit globalement linéaire, à cause de l'alternative $f^{\text{elas}} \leq 0, f^{\text{elas}} > 0$.

3.7 Pour démontrer que le cas général se réduit au cas spécifique étudié ici on rappelle que, par définition :

$$\delta \underline{\underline{\sigma}} = \mathcal{A}^{\text{EP}} : \underline{\underline{\varepsilon}}[\delta u]$$

et que, dans le cas présent, $\gamma = 1$ car on n'a pas d'écrouissage.

Si l'on utilise les identités :

$$\underline{\underline{\mathbf{1}}} : \underline{\underline{\mathbf{1}}} = 3, \quad \underline{\underline{\mathbb{K}}} : \underline{\underline{\mathbb{K}}} = 2/3, \quad \underline{\underline{\mathbb{K}}} : \underline{\underline{\mathbf{1}}} = 0$$

et si l'on décompose $\underline{\underline{\varepsilon}}[\delta u]$ en parties volumique et déviatorique :

$$\underline{\underline{\varepsilon}}[\delta u] = \frac{1}{3} \left(\frac{d\delta u}{dr} + 2 \frac{\delta u}{r} \right) \underline{\underline{\mathbf{1}}} + \left(\frac{\delta u}{r} - \frac{d\delta u}{dr} \right) \underline{\underline{\mathbb{K}}}$$

on montre facilement que :

$$\begin{aligned} \mathcal{A} : \underline{\underline{\varepsilon}}[\delta u] &= \kappa \left(\frac{d\delta u}{dr} + 2 \frac{\delta u}{r} \right) \underline{\underline{\mathbf{1}}} + 2\mu \left(\frac{\delta u}{r} - \frac{d\delta u}{dr} \right) \underline{\underline{\mathbb{K}}} \\ \left(\frac{\underline{\underline{s}}^{\text{elas}}}{\sigma^{\text{elas,eq}}} \otimes \frac{\underline{\underline{s}}^{\text{elas}}}{\sigma^{\text{elas,eq}}} \right) : \underline{\underline{\varepsilon}}[\delta u] &= (\underline{\underline{\mathbb{K}}} \otimes \underline{\underline{\mathbb{K}}}) : \underline{\underline{\varepsilon}}[\delta u] = \frac{2}{3} \left(\frac{\delta u}{r} - \frac{d\delta u}{dr} \right) \underline{\underline{\mathbb{K}}} \\ \mathcal{K} : \underline{\underline{\varepsilon}}[\delta u] &= \left(\frac{\delta u}{r} - \frac{d\delta u}{dr} \right) \underline{\underline{\mathbb{K}}} \end{aligned}$$

d'où l'expression eq.(5) car :

$$\mathcal{A}^{\text{EP}} = \begin{cases} \mathcal{A} - 3\mu(1 - \beta) \left(\frac{\underline{\underline{s}}^{\text{elas}}}{\sigma^{\text{elas,eq}}} \otimes \frac{\underline{\underline{s}}^{\text{elas}}}{\sigma^{\text{elas,eq}}} \right) - 2\mu\beta\mathcal{K} & \text{si } f^{\text{elas}} > 0 \\ \mathcal{A} & \text{si } f^{\text{elas}} \leq 0 \end{cases}$$

et les termes en β s'effacent.

La matrice de rigidité tangente est donc donnée par l'assemblage des termes :

$$\begin{aligned} \underline{\underline{\varepsilon}}[\underline{w}] : \mathcal{A}^{\text{EP}} : \underline{\underline{\varepsilon}}[\delta u] &= \underline{\underline{\varepsilon}}[\underline{w}] : \mathcal{A} : \underline{\underline{\varepsilon}}[\delta u] \\ &= \kappa \left(\frac{dw}{dr} + 2 \frac{w}{r} \right) \left(\frac{d\delta u}{dr} + 2 \frac{\delta u}{r} \right) + \frac{4}{3}\mu \left(\frac{w}{r} - \frac{dw}{dr} \right) \left(\frac{\delta u}{r} - \frac{d\delta u}{dr} \right) \end{aligned}$$

si $f^{\text{elas}} \leq 0$, et de :

$$\begin{aligned} \underline{\underline{\varepsilon}}[\underline{w}] : \mathcal{A}^{\text{EP}} : \underline{\underline{\varepsilon}}[\delta u] &= \underline{\underline{\varepsilon}}[\underline{w}] : \mathcal{A} : \underline{\underline{\varepsilon}}[\delta u] - \frac{4}{3}\mu \left(\frac{w}{r} - \frac{dw}{dr} \right) \left(\frac{\delta u}{r} - \frac{d\delta u}{dr} \right) \\ &= \kappa \left(\frac{dw}{dr} + 2 \frac{w}{r} \right) \left(\frac{d\delta u}{dr} + 2 \frac{\delta u}{r} \right) \end{aligned}$$

si $f^{\text{elas}} > 0$.