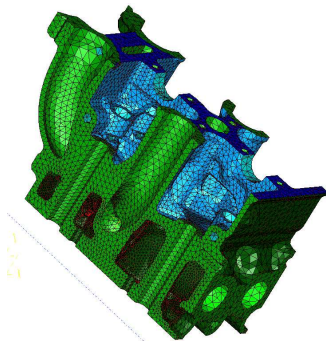


Analyse des structures mécaniques par la méthode des éléments finis



© PSA Peugeot Citroën

www.lms.polytechnique.fr/users/bonnet/enseignement.html

Département de Mécanique, Ecole Polytechnique, 2009–2010

Plan du cours

Concepts fondamentaux et leur application en élasticité linéaire statique

- ▶ Amphi 1 – Résolution approchée de problèmes d'équilibre en élasticité
- ▶ Amphi 2 – La notion d'élément fini isoparamétrique
- ▶ Amphi 3 – La méthode des éléments finis en élasticité linéaire
- ▶ Amphi 4 – Application à la mécanique linéaire de la rupture

Régime non-linéaire quasistatique, application aux solides élastoplastiques

- ▶ Amphi 5 – Calcul de solides à comportement non-linéaire
- ▶ Amphi 6 – Calcul de solides élastoplastiques 1 : aspects locaux
- ▶ Amphi 7 – Calcul de solides élastoplastiques 2 : aspects globaux

Régime linéaire, avec évolution temporelle

- ▶ **Amphi 8 – Evolution thermique et thermoélasticité linéaire quasistatique**
- ▶ Amphi 9 – Analyse dynamique des structures élastiques

Evolution thermique et thermoélasticité linéaire quasistatique

1. Thermoélasticité linéaire : rappels
2. Conduction thermique instationnaire : semi-discrétisation en espace
3. Conduction thermique instationnaire : intégration en temps discret
 - Formulation discrétisée en espace et en temps
 - Stabilité du schéma d'intégration en temps
 - Cohérence du schéma d'intégration en temps
 - Précision du schéma d'intégration en temps
 - Exemple : illustration de la stabilité
4. Calcul de la réponse thermoélastique
5. Exemple d'application

Plan

1. Thermoélasticité linéaire : rappels
2. Conduction thermique instationnaire : semi-discrétisation en espace
3. Conduction thermique instationnaire : intégration en temps discret
 - Formulation discrétisée en espace et en temps
 - Stabilité du schéma d'intégration en temps
 - Cohérence du schéma d'intégration en temps
 - Précision du schéma d'intégration en temps
 - Exemple : illustration de la stabilité
4. Calcul de la réponse thermoélastique
5. Exemple d'application

Thermoélasticité linéaire : rappels

- ▶ Cadre : HPP et **thermoélasticité découplée** :
 - Température $T(\underline{x}, t)$ **indépendante de l'état mécanique** ;
 - Etat thermique **évolutif** (par conduction) ;
 - Etat mécanique **évolutif, quasistatique**.

- ▶ Dilatation thermique : $\underline{\underline{\varepsilon}}^{\text{th}} = \alpha T \underline{\underline{1}}$

- ▶ Relation de comportement thermoélastique :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \mathcal{A} : (\underline{\underline{\varepsilon}} - \alpha T \underline{\underline{1}})$$

- ▶ Calcul de l'état thermoélastique d'une structure :
 - (i) Calcul de **l'histoire** $T(\underline{x}, t)$ par résolution des éqs. de la thermique ;
 - (ii) Calcul **à chaque instant** t de $\underline{u}(\underline{x}, t), \underline{\underline{\sigma}}(\underline{x}, t), \dots$ induit par $\underline{\underline{\varepsilon}}^{\text{th}}(\underline{x}, t)$.
- ▶ Simplification : $\underline{\underline{\varepsilon}}^{\text{th}}(\underline{x}, t)$ **est l'unique sollicitation considérée**
 - Sinon, il suffit d'opérer une **superposition**.

Equations du problème thermoélastique linéaire

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \frac{1}{2}(\underline{\underline{\nabla}}\underline{\underline{u}} + \underline{\underline{\nabla}}^T\underline{\underline{u}}) \quad \text{dans } \Omega \times [0, t^F] \quad \text{compatibilité}$$

$$\operatorname{div} \underline{\underline{\sigma}} = 0 \quad \text{dans } \Omega \times [0, t^F] \quad \text{équilibre}$$

$$\underline{\underline{\sigma}} = \mathcal{A} : (\underline{\underline{\varepsilon}} - \alpha T \underline{\underline{1}}) \quad \text{dans } \Omega \times [0, t^F] \quad \text{comportement}$$

$$\underline{\underline{u}} = \underline{\underline{0}} \quad \text{sur } S_\xi \times [0, t^F] \quad \text{déplacements imposés}$$

$$\underline{\underline{T}} = \underline{\underline{0}} \quad \text{sur } S_T \times [0, t^F] \quad \text{efforts imposés}$$

Principes du minimum pour le problème thermoélastique

Minimisation de l'énergie potentielle (extension amphi 1)

- Ecriture équivalente du problème d'équilibre thermoélastique :

$$\text{trouver } (\underline{u}, \underline{\sigma}) \in \mathcal{C}(\underline{0}) \times \mathcal{S}(\underline{0}, \underline{0}) \quad \text{tels que } \underline{\sigma} = \mathcal{A} : (\underline{\varepsilon}[\underline{u}] - \alpha T \underline{\mathbb{1}}) \quad \text{dans } \Omega$$

- Erreur en relation de comportement

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{\text{th}}(\underline{v}, \underline{\tau}) &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left(\underline{\tau} - \mathcal{A} : (\underline{\varepsilon}[\underline{v}] - \alpha T \underline{\mathbb{1}}) \right) : \mathcal{S} : \left(\underline{\tau} - \mathcal{A} : (\underline{\varepsilon}[\underline{v}] - \alpha T \underline{\mathbb{1}}) \right) dV \\ &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left(\underline{\varepsilon}[\underline{v}] - \alpha T \underline{\mathbb{1}} \right) : \mathcal{A} : \left(\underline{\varepsilon}[\underline{v}] - \alpha T \underline{\mathbb{1}} \right) dV \quad \longrightarrow \mathcal{P}(\underline{v}) \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_{\Omega} \underline{\tau} : \mathcal{S} : \underline{\tau} dV + \int_{\Omega} (\alpha T \underline{\mathbb{1}}) : \underline{\tau} dV \quad \longrightarrow \mathcal{P}^*(\underline{\tau}) \\ &\quad - \int_{\Omega} (\underline{\tau} : \underline{\varepsilon}[\underline{v}]) dV \quad = 0 \end{aligned}$$

- Forme faible des conditions d'équilibre (PPV) :

$$(\underline{v}, \underline{\tau}) \in \mathcal{C}(\underline{0}) \times \mathcal{S}(\underline{0}, \underline{0}) \implies \int_{\Omega} (\underline{\tau} : \underline{\varepsilon}[\underline{v}]) dV = 0$$

Principes du minimum pour le problème thermoélastique

- ▶ Energies potentielle et complémentaire

$$\mathcal{E}_{\text{th}}(\underline{v}, \underline{\tau}) = \mathcal{P}_{\text{th}}(\underline{v}) + \mathcal{P}_{\text{th}}^*(\underline{\tau})$$

$$\mathcal{P}_{\text{th}}(\underline{v}) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\underline{\underline{\varepsilon}}[\underline{v}] - \alpha T \underline{\underline{1}}) : \mathcal{A} : (\underline{\underline{\varepsilon}}[\underline{v}] - \alpha T \underline{\underline{1}}) dV$$

$$\mathcal{P}_{\text{th}}^*(\underline{\tau}) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \underline{\underline{\tau}} : \mathcal{S} : \underline{\underline{\tau}} dV + \int_{\Omega} \alpha T \text{Tr}(\underline{\underline{\tau}}) dV$$

- ▶ Minimisation de l'énergie potentielle

$$\underline{u} = \arg \min_{\underline{v} \in \mathcal{C}(\Omega)} \mathcal{P}_{\text{th}}(\underline{v})$$

- ▶ Expression de l'énergie potentielle dans le cas isotrope

$$\mathcal{P}_{\text{th}}(\underline{v}) = \mu \int_{\Omega} \left[\frac{\nu}{1-2\nu} (\text{Tr}(\underline{\underline{\varepsilon}}[\underline{v}]))^2 + \underline{\underline{\varepsilon}}[\underline{v}] : \underline{\underline{\varepsilon}}[\underline{v}] \right] dV - 3\kappa\alpha \int_{\Omega} T \text{Tr}(\underline{\underline{\varepsilon}}[\underline{v}]) dV + \frac{9\kappa\alpha^2}{2} \int_{\Omega} T^2 dV$$

Formulation variationnelle et approximation par éléments finis

- **Formulation variationnelle** : $\langle \mathcal{P}'_{\text{th}}(\underline{u}), \underline{w} \rangle = 0 \quad \forall \underline{w} \in \mathcal{C}(\underline{0})$, soit
trouver $\underline{u} \in \mathcal{C}(\underline{0})$ tel que

$$\int_{\Omega} \underline{\underline{\varepsilon}}[\underline{u}] : \mathcal{A} : \underline{\underline{\varepsilon}}[\underline{w}] dV - \int_{\Omega} (\alpha T \underline{\underline{1}}) : \mathcal{A} : \underline{\underline{\varepsilon}}[\underline{w}] dV = 0 \quad \forall \underline{w} \in \mathcal{C}(\underline{0})$$

- Approximation par éléments finis (amphis 2 et 3) :

$$[\mathbb{K}] \{\mathbf{U}(t)\} = \{\mathbf{F}(t)\}$$

avec $\{\mathbf{W}\}^T \{\mathbf{F}(t)\} = \int_{\Omega} (\alpha T(\cdot, t) \underline{\underline{1}}) : \mathcal{A} : \underline{\underline{\varepsilon}}[\underline{w}_h] dV$ (élasticité, cas général)

$$= 3\alpha\kappa \int_{\Omega} T(\cdot, t) \text{Tr}(\underline{\underline{\varepsilon}}[\underline{w}_h]) dV$$
 (élasticité isotrope)

- **La température est une donnée**
→ forces généralisées $\{\mathbf{F}(t)\}$ (« thermoélasticité découplée »);
- **Calcul de l'histoire de température nécessaire** comme **préalable** au calcul thermoélastique

Plan

1. Thermoélasticité linéaire : rappels
2. Conduction thermique instationnaire : semi-discrétisation en espace
3. Conduction thermique instationnaire : intégration en temps discret
 - Formulation discrétisée en espace et en temps
 - Stabilité du schéma d'intégration en temps
 - Cohérence du schéma d'intégration en temps
 - Précision du schéma d'intégration en temps
 - Exemple : illustration de la stabilité
4. Calcul de la réponse thermoélastique
5. Exemple d'application

Equations locales de la conduction thermique

► Equation de champ :

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} - \operatorname{div}(k \underline{\nabla} T) = g \quad (\underline{x} \in \Omega, t \in [0, t^F])$$

Résulte de

$$\operatorname{div} \underline{q} + \rho c \frac{\partial T}{\partial t} = g \quad (\text{équilibre}) \quad \underline{q} = -k \underline{\nabla} T \quad (\text{loi de Fourier})$$

► Conditions aux limites (exemples) :

$$-k \underline{\nabla} T \cdot \underline{n} = q^D \quad \text{sur } S_q \times [0, t^F] \quad T = T^D \quad \text{sur } S_{th} \times [0, t^F]$$

Autres possibilités (non traitées) : condition d'échange $q = C(T^{\text{ext}} - T), \dots$

► Condition initiale :

$$T(\underline{x}, 0) = T_0(\underline{x}) \quad (\underline{x} \in \Omega)$$

Formulation faible du problème thermique

- ▶ Forme faible de l'équation de champ :

$$\int_{\Omega} \left[\rho c \frac{\partial T}{\partial t}(\cdot, t) - \operatorname{div}(k \underline{\nabla} T)(\cdot, t) - g(\cdot, t) \right] w \, dV = 0 \quad \forall w \in \mathcal{T}(0)$$

- ▶ Intégration par parties (formule de la divergence) :

$$\int_{\Omega} \operatorname{div}(k \underline{\nabla} T)(\cdot, t) w \, dV = - \int_{S_q} q^D(\cdot, t) w \, dS - \int_{\Omega} k \underline{\nabla} T(\cdot, t) \cdot \underline{\nabla} w \, dV$$

Formulation faible du problème de conduction thermique instationnaire :

trouver $T(\cdot, t) \in \mathcal{T}(T^D)$ tel que $T(\cdot, 0) = T_0(\cdot)$ et

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \rho c \frac{\partial T}{\partial t}(\cdot, t) w \, dV + \int_{\Omega} k \underline{\nabla} T(\cdot, t) \cdot \underline{\nabla} w \, dV \\ = \int_{\Omega} g(\cdot, t) w \, dV - \int_{S_q} q^D(\cdot, t) w \, dS \quad (\forall t \in [0, t^F], \forall w \in \mathcal{T}(0)) \end{aligned}$$

$$\mathcal{T}(T^D) = \{ w \mid w \text{ continu et régulier sur } \Omega \text{ et } w = T^D \text{ sur } S_{th} \}$$

$$\mathcal{T}(0) = \{ w \mid w \text{ continu et régulier sur } \Omega \text{ et } w = 0 \text{ sur } S_{th} \}$$

Semi-discrétisation par éléments finis

Interpolation isoparamétrique :

$$\underline{x} = \sum_{n=1}^{N_N} \tilde{N}_n(\underline{x}) \underline{x}^{(n)}$$

$$T_h(\underline{x}, t) = \underbrace{\sum_{n|\mathcal{I}_{th}(n) < 0} \tilde{N}_n(\underline{x}) T^D(\underline{x}^{(n)}, t)}_{T_h^D(\underline{x}, t)} + \underbrace{\sum_{n|\mathcal{I}_{th}(n) > 0} \tilde{N}_n(\underline{x}) T^{(n)}(t)}_{T_h^{(0)}(\underline{x}, t)}$$

$\mathcal{I}_{th}(n) > 0$ ($T(\underline{x}^{(n)}, t)$ libre),

$\mathcal{I}_{th}(n) < 0$ ($T(\underline{x}^{(n)}, t)$ imposé).

Vecteur $\{\mathbb{T}\}$ des inconnues thermiques ; table `dof_th` des inconnues thermiques :

$$\{\mathbb{T}\} = \{T_1, \dots, T_N\}^T \quad T_I(t) = T(\underline{x}^{(n)}, t) \text{ avec } I = \text{dof_th}(n)$$

Semi-discrétisation par éléments finis

Formulation faible écrite pour tous $w(\underline{x}) = \sum_{n \in \mathcal{I}} \tilde{N}_n(\underline{x}) w^{(n)}$:

$$[\mathbf{C}]\{\mathbf{T}(t)\} + [\mathbf{M}]\{\dot{\mathbf{T}}(t)\} - \{\mathbf{F}(t)\} = 0 \quad (t \in [0, t^F])$$

$$\int_{\Omega} k \underline{\nabla} \hat{T}_h(\cdot, t) \cdot \underline{\nabla} w \, dV \longrightarrow \{\mathbf{W}\}^T [\mathbf{C}]\{\mathbf{T}(t)\}$$

$$\int_{\Omega} \rho c \frac{\partial \hat{T}_h}{\partial t}(\cdot, t) w \, dV \longrightarrow \{\mathbf{W}\}^T [\mathbf{M}]\{\dot{\mathbf{T}}(t)\}$$

$$\int_{\Omega} g(\cdot, t) w \, dV - \int_{S_q} q^D(\cdot, t) w \, dS - \int_{\Omega} k \underline{\nabla} T_h^D(\cdot, t) \cdot \underline{\nabla} w \, dV \longrightarrow \{\mathbf{W}\}^T \{\mathbf{F}(t)\}$$

$[\mathbf{C}]$: **matrice de conductivité** (analogue thermique de la matrice de rigidité) ;

$[\mathbf{M}]$: **matrice de capacité** (analogue thermique de la matrice de masse, amph 9)

Plan

1. Thermoélasticité linéaire : rappels

2. Conduction thermique instationnaire : semi-discrétisation en espace

3. Conduction thermique instationnaire : intégration en temps discret

Formulation discrétisée en espace et en temps

Stabilité du schéma d'intégration en temps

Cohérence du schéma d'intégration en temps

Précision du schéma d'intégration en temps

Exemple : illustration de la stabilité

4. Calcul de la réponse thermoélastique

5. Exemple d'application

Plan

1. Thermoélasticité linéaire : rappels
2. Conduction thermique instationnaire : semi-discrétisation en espace
- 3. Conduction thermique instationnaire : intégration en temps discret**
 - Formulation discrétisée en espace et en temps
 - Stabilité du schéma d'intégration en temps
 - Cohérence du schéma d'intégration en temps
 - Précision du schéma d'intégration en temps
 - Exemple : illustration de la stabilité
4. Calcul de la réponse thermoélastique
5. Exemple d'application

Formulation discrétisée en espace et en temps

- Discrétisation temporelle



- **Intégration en temps** : résolution **pas à pas** aux instants discrets successifs :

$$\{\mathbb{T}_0\} = \{\mathbb{T}(t_0)\} = \{\mathbb{T}(0)\},$$

...

$$\{\mathbb{T}_n\} = \{\mathbb{T}(t_n)\},$$

...

$$\{\mathbb{T}_M\} = \{\mathbb{T}(t_M)\} = \{\mathbb{T}(t^F)\}$$

- **Composant principal du schéma d'intégration en temps** :

algorithme réalisant la **transition** $\{\mathbb{T}_n\} \rightarrow \{\mathbb{T}_{n+1}\}$

- **Famille de schémas d'intégration en temps** :

approximation de $\{\dot{\mathbb{T}}(t)\}$ par **différence finie**

$$\theta \{\dot{\mathbb{T}}_{n+1}\} + (1 - \theta) \{\dot{\mathbb{T}}_n\} \approx \frac{\{T_{n+1} - T_n\}}{\Delta t} \quad \theta \in [0, 1]$$

Formulation discrétisée en espace et en temps

$$\theta\{\dot{\mathbb{T}}_{n+1}\} + (1-\theta)\{\dot{\mathbb{T}}_n\} \approx \frac{\{\mathbb{T}_{n+1} - \mathbb{T}_n\}}{\Delta t} \quad \theta \in [0, 1]$$

- **Formulation de la transition** $\{\mathbb{T}_n\} \rightarrow \{\mathbb{T}_{n+1}\}$:

$$[\mathbb{C}]\{\mathbb{T}_n\} + [\mathbb{M}]\{\dot{\mathbb{T}}_n\} - \{\mathbb{F}_n\} = 0 \quad \times (1-\theta)$$

$$[\mathbb{C}]\{\mathbb{T}_{n+1}\} + [\mathbb{M}]\{\dot{\mathbb{T}}_{n+1}\} - \{\mathbb{F}_{n+1}\} = 0 \quad \times \theta$$

conduit à

$$[\mathbb{C}]\{\theta\mathbb{T}_{n+1} + (1-\theta)\mathbb{T}_n\} + \frac{1}{\Delta t}[\mathbb{M}]\{\mathbb{T}_{n+1} - \mathbb{T}_n\} = \{\theta\mathbb{F}_{n+1} + (1-\theta)\mathbb{F}_n\}$$

soit, après regroupement :

$$\left(\frac{1}{\Delta t}[\mathbb{M}] + \theta[\mathbb{C}]\right)\{\mathbb{T}_{n+1}\} = \left(\frac{1}{\Delta t}[\mathbb{M}] + (\theta-1)[\mathbb{C}]\right)\{\mathbb{T}_n\} + \{\theta\mathbb{F}_{n+1} + (1-\theta)\mathbb{F}_n\}$$

- **Théorème d'équivalence de Lax :**

Le schéma d'intégration converge si et seulement s'il est **stable** et **cohérent**

Formulation discrétisée en temps : versions explicite et implicite

Cas particuliers limites :

$$([\mathbf{M}] + \Delta t[\mathbf{C}])\{\mathbf{T}_{n+1}\} = \Delta t\{\mathbf{F}_{n+1}\} + [\mathbf{M}]\{\mathbf{T}_n\} \quad (\theta = 1)$$

$$[\mathbf{M}]\{\mathbf{T}_{n+1}\} = \Delta t\{\mathbf{F}_n\} + ([\mathbf{M}] - \Delta t[\mathbf{C}])\{\mathbf{T}_n\} \quad (\theta = 0)$$

Schéma **implicite** ($\theta = 1$) (vitesse $\dot{\mathbb{T}}$ affectée à instant final) :

- ▶ Donnée $\{\mathbf{F}\}$ à l'instant final ;
- ▶ Nécessite une résolution de système linéaire de matrice $[\mathbf{M}] + \Delta t[\mathbf{C}]$;

Schéma **explicite** ($\theta = 0$) (vitesse $\dot{\mathbb{T}}$ affectée à instant initial) :

- ▶ Donnée $\{\mathbf{F}\}$ à l'instant initial ;
- ▶ Pas d'inversion si **approximation diagonale** de $[\mathbf{M}]$ (amphi 9)

Plan

1. Thermoélasticité linéaire : rappels
2. Conduction thermique instationnaire : semi-discrétisation en espace
- 3. Conduction thermique instationnaire : intégration en temps discret**
 - Formulation discrétisée en espace et en temps
 - Stabilité du schéma d'intégration en temps
 - Cohérence du schéma d'intégration en temps
 - Précision du schéma d'intégration en temps
 - Exemple : illustration de la stabilité
4. Calcul de la réponse thermoélastique
5. Exemple d'application

Stabilité du schéma d'intégration en temps

$$\left(\frac{1}{\Delta t}[\mathbf{M}] + \theta[\mathbf{C}]\right)\{\mathbf{T}_{n+1}\} = \left(\frac{1}{\Delta t}[\mathbf{M}] + (\theta - 1)[\mathbf{C}]\right)\{\mathbf{T}_n\} + \{\theta\mathbf{F}_{n+1} + (1 - \theta)\mathbf{F}_n\}$$

► **Résolution** par rapport à $\{\mathbf{T}_{n+1}\}$:

$$\{\mathbf{T}_{n+1}\} = [\mathbf{R}]\{\mathbf{T}_n\} + \{\mathbf{Y}_{n+1}\}$$

► **Formellement** (récurrence sur n) :

$$\{\mathbf{T}_{n+1}\} = [\mathbf{R}]^{n+1}\{\mathbf{T}_0\} + \sum_{k=0}^n [\mathbf{R}]^{n-k}\{\mathbf{Y}_{k+1}\}$$

► Le schéma est **instable** si une possibilité d'erreur $\{\delta\mathbf{T}\}$ **amplifiée** par $[\mathbf{R}]$ existe

Exemple : erreur sur les conditions initiales :

$$\{\delta\mathbf{T}_{n+1}\} = [\mathbf{R}]^{n+1}\{\delta\mathbf{T}_0\}$$

$$\text{Condition de stabilité : } \|[R]\{\delta T\}\| < \|\{\delta T\}\| \quad \forall \{\delta T\}$$

Stabilité du schéma d'intégration en temps

$$\left(\frac{1}{\Delta t}[\mathbf{M}] + \theta[\mathbf{C}]\right)\{\mathbf{T}_{n+1}\} = \left(\frac{1}{\Delta t}[\mathbf{M}] + (\theta - 1)[\mathbf{C}]\right)\{\mathbf{T}_n\} + \{\theta\mathbf{F}_{n+1} + (1 - \theta)\mathbf{F}_n\}$$

- **Stabilité** : analyse facilitée par **diagonalisation** selon $[\mathbf{C}]\{\mathbf{X}\} - \kappa[\mathbf{M}]\{\mathbf{X}\} = \{0\}$
 avec $\{\mathbf{X}^I\}^T[\mathbf{M}]\{\mathbf{X}^I\} = 1$ $\{\mathbf{X}^I\}^T[\mathbf{M}]\{\mathbf{X}^J\} = 0$ ($J \neq I$)
 $\{\mathbf{X}^I\}^T[\mathbf{C}]\{\mathbf{X}^I\} = \kappa^I > 0$ $\{\mathbf{X}^I\}^T[\mathbf{C}]\{\mathbf{X}^J\} = 0$ ($J \neq I$)

Développement sur la **base des vecteurs propres** $[\mathbf{M}]$ -orthonormaux :

$$\{\mathbf{T}_n\} = \sum_{1 \leq J \leq N_N} \alpha_n^J \{\mathbf{X}^J\} \quad \{\mathbf{T}_{n+1}\} = \sum_{1 \leq J \leq N_N} \alpha_{n+1}^J \{\mathbf{X}^J\}$$

- Report dans l'équation de transfert $n \rightarrow n+1$, pré-multiplication par $\{\mathbf{X}^I\}^T$:
équations scalaires découplées

$$\left(\frac{1}{\Delta t} + \theta\kappa^I\right)\alpha_{n+1}^I = \left(\frac{1}{\Delta t} + (\theta - 1)\kappa^I\right)\alpha_n^I + \{\mathbf{X}^I\}^T\{\theta\mathbf{F}_{n+1} + (1 - \theta)\mathbf{F}_n\}$$

soit :

$$\alpha_{n+1}^I = r^I \alpha_n^I + y_{n+1}^I$$

Stabilité du schéma d'intégration en temps

$$\alpha_{n+1}^I = r^I \alpha_n^I + y_{n+1}^I$$

avec

$$r^I = \frac{1 + (\theta - 1)\kappa^I \Delta t}{1 + \theta \kappa^I \Delta t}$$

► Stabilité \rightarrow condition sur les coefficients **scalaires** d'amplification r^I :

$$-1 < r^I < 1 \quad \text{pour tout } I, 1 \leq I \leq N_N$$

soit
$$-2 < -\frac{\kappa^I \Delta t}{1 + \theta \kappa^I \Delta t} < 0 \quad \text{pour tout } I, 1 \leq I \leq N_N$$

De plus, l'inégalité $\dots < 0$ est toujours satisfaite ($\theta \geq 0, \kappa^I < 0, \Delta t < 0$), donc

$$2 + (2\theta - 1)\kappa^I \Delta t > 0 \quad \text{pour tout } I, 1 \leq I \leq N_N$$

On distingue donc deux cas :

- (i) $1/2 \leq \theta \leq 1$: schémas **inconditionnellement stables** ;
- (ii) $0 \leq \theta < 1/2$: schémas **conditionnellement stables**, la condition étant

$$\Delta t < (\Delta t)_{\text{stab}} \stackrel{\text{déf}}{=} \frac{2}{1 - 2\theta} \min_I \left(\frac{1}{\kappa^I} \right)$$

Plan

1. Thermoélasticité linéaire : rappels
2. Conduction thermique instationnaire : semi-discrétisation en espace
- 3. Conduction thermique instationnaire : intégration en temps discret**
 - Formulation discrétisée en espace et en temps
 - Stabilité du schéma d'intégration en temps
 - Cohérence du schéma d'intégration en temps**
 - Précision du schéma d'intégration en temps
 - Exemple : illustration de la stabilité
4. Calcul de la réponse thermoélastique
5. Exemple d'application

Cohérence du schéma d'intégration en temps

Définition :

Un schéma de la famille considérée est **cohérent** si, pour tout $\{\mathbb{T}(t)\}$ vérifiant

$$[\mathbb{C}]\{\mathbb{T}(t)\} + [\mathbb{M}]\{\dot{\mathbb{T}}(t)\} - \{\mathbb{F}(t)\} = 0$$

l'équation (transition $n \rightarrow n+1$)

$$\left(\frac{1}{\Delta t}[\mathbb{M}] + \theta[\mathbb{C}]\right)\{\mathbb{T}_{n+1}\} = \left(\frac{1}{\Delta t}[\mathbb{M}] + (\theta - 1)[\mathbb{C}]\right)\{\mathbb{T}_n\} + \{\theta\mathbb{F}_{n+1} + (1 - \theta)\mathbb{F}_n\}$$

est vérifiée à la limite $\Delta t \rightarrow 0$ (i.e. le résidu de cette équation $\rightarrow 0$ avec Δt)

Cohérence du schéma d'intégration en temps

Définition.

Vérification : par développements autour de t_n :

$$\begin{aligned}\{\mathbb{T}_{n+1}\} &= \{\mathbb{T}_n\} + \Delta t \{\dot{\mathbb{T}}_n\} + \frac{\Delta t^2}{2} \{\ddot{\mathbb{T}}_n\} + \frac{\Delta t^3}{6} \{\dddot{\mathbb{T}}_n\} + o(\Delta t^3) \\ \{\mathbb{F}_{n+1}\} &= \{\mathbb{F}_n\} + \Delta t \{\dot{\mathbb{F}}_n\} + \frac{\Delta t^2}{2} \{\ddot{\mathbb{F}}_n\} + o(\Delta t^2)\end{aligned}$$

et report dans le résidu de l'équation de transition $n \rightarrow n+1$:

$$\begin{aligned}& \left(\frac{1}{\Delta t} [\mathbb{M}] + \theta [\mathbb{C}] \right) \{\mathbb{T}_{n+1}\} - \left(\frac{1}{\Delta t} [\mathbb{M}] + (\theta - 1) [\mathbb{C}] \right) \{\mathbb{T}_n\} - \{ \theta \mathbb{F}_{n+1} + (1 - \theta) \mathbb{F}_n \} \\ &= \underbrace{([\mathbb{C}] \{\mathbb{T}_n\} + [\mathbb{M}] \{\dot{\mathbb{T}}_n\} - \mathbb{F}_n)}_{=0} \\ &+ \underbrace{([\mathbb{C}] \{\dot{\mathbb{T}}_n\} + [\mathbb{M}] \{\ddot{\mathbb{T}}_n\} - \dot{\mathbb{F}}_n)}_{=0} \theta \Delta t + \frac{1}{2} (1 - 2\theta) [\mathbb{M}] \{\ddot{\mathbb{T}}_n\} \Delta t \\ &+ \underbrace{([\mathbb{C}] \{\ddot{\mathbb{T}}_n\} + [\mathbb{M}] \{\dddot{\mathbb{T}}_n\} - \ddot{\mathbb{F}}_n)}_{=0} \frac{\theta}{2} \Delta t^2 + \frac{1}{6} (1 - 3\theta) [\mathbb{M}] \{\dddot{\mathbb{T}}_n\} \Delta t^2 + o(\Delta t^2) \\ &= o(\Delta t) \quad \forall \theta, 0 \leq \theta \leq 1\end{aligned}$$

Schéma cohérent pour tout θ

Plan

1. Thermoélasticité linéaire : rappels

2. Conduction thermique instationnaire : semi-discrétisation en espace

3. Conduction thermique instationnaire : intégration en temps discret

Formulation discrétisée en espace et en temps

Stabilité du schéma d'intégration en temps

Cohérence du schéma d'intégration en temps

Précision du schéma d'intégration en temps

Exemple : illustration de la stabilité

4. Calcul de la réponse thermoélastique

5. Exemple d'application

Précision du schéma d'intégration en temps

Précision évaluée à l'aide de l'estimation établie pour la preuve de cohérence :

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{\Delta t} [\mathbf{M}] + \theta [\mathbf{C}] \right) \{ \mathbf{T}_{n+1} \} - \left(\frac{1}{\Delta t} [\mathbf{M}] + (\theta - 1) [\mathbf{C}] \right) \{ \mathbf{T}_n \} - \{ \theta \mathbf{F}_{n+1} + (1 - \theta) \mathbf{F}_n \} \\ & = (1 - 2\theta) [\mathbf{M}] \{ \ddot{\mathbf{T}}_n \} \Delta t / 2 + (1 - 3\theta) [\mathbf{M}] \{ \ddot{\mathbf{T}}_n \} \Delta t^2 / 6 + o(\Delta t^2) \end{aligned}$$

- Si $\theta = 1/2$: précision d'ordre $O(\Delta t^2)$ avec

$$[\mathbf{C}] \{ \mathbf{T}(t) \} + [\mathbf{M}] \{ \dot{\mathbf{T}}(t) \} - \{ \mathbf{F}(t) \} = \frac{\Delta t^2}{12} [\mathbf{M}] \{ \ddot{\mathbf{T}}_n \} + o(\Delta t^2)$$

- Si $\theta \neq 1/2$: précision d'ordre $O(\Delta t)$ seulement

Plan

1. Thermoélasticité linéaire : rappels

2. Conduction thermique instationnaire : semi-discrétisation en espace

3. Conduction thermique instationnaire : intégration en temps discret

Formulation discrétisée en espace et en temps

Stabilité du schéma d'intégration en temps

Cohérence du schéma d'intégration en temps

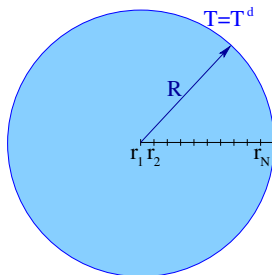
Précision du schéma d'intégration en temps

Exemple : illustration de la stabilité

4. Calcul de la réponse thermoélastique

5. Exemple d'application

Exemple : illustration de la stabilité

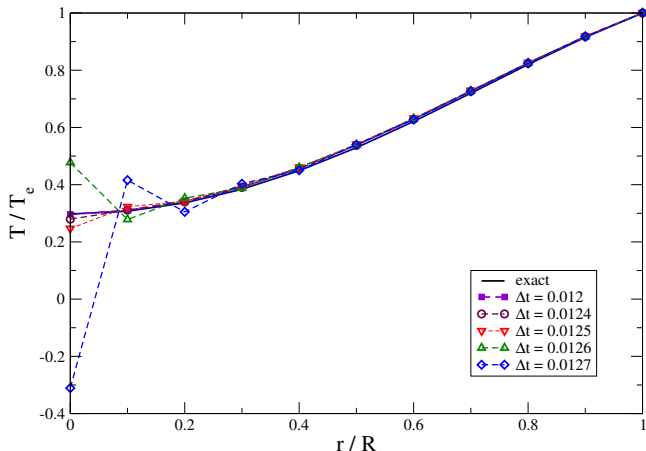


- ▶ Sphère avec température extérieure imposée (problème à symétrie sphérique)
- ▶ Equations gouvernant $T(r, t)$:

$$\boxed{\frac{a}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial T}{\partial r} \right) - \frac{\partial T}{\partial t} = 0, \quad T(r, 0) = 0, \quad T(R, t) = T^D} \quad \begin{cases} 0 \leq r \leq R \\ 0 \leq t \leq t^F \end{cases}$$

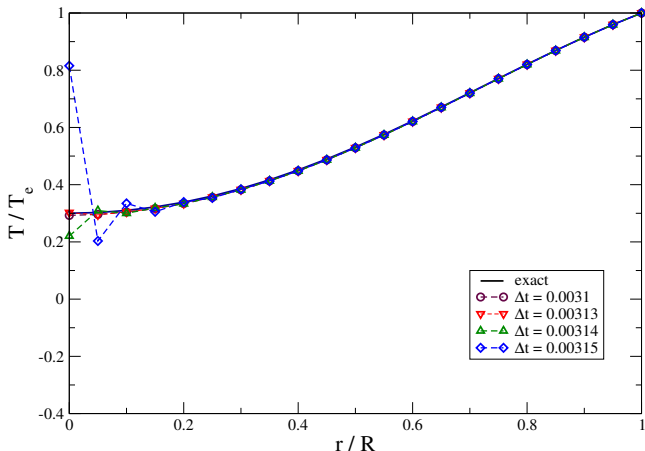
- ▶ **Solution exacte connue** (cf. livre).

Résultat (N=10, explicite)



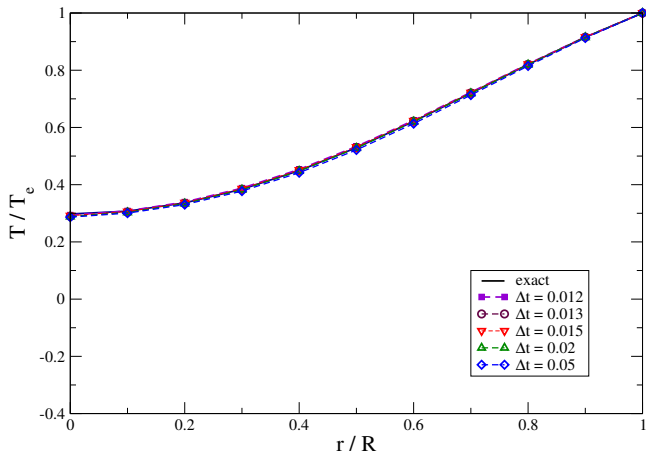
Sphère avec température extérieure imposée : température finale $T(r, t^F)$ obtenue par intégration **explicite** ($N = 10$ inconnues spatiales, $(\Delta t)_{\text{stab}} \approx 1,2433 \cdot 10^{-2}$) pour plusieurs choix de Δt autour de $(\Delta t)_{\text{stab}}$, et comparaison à la solution exacte.

Résultat (N=20, explicite)



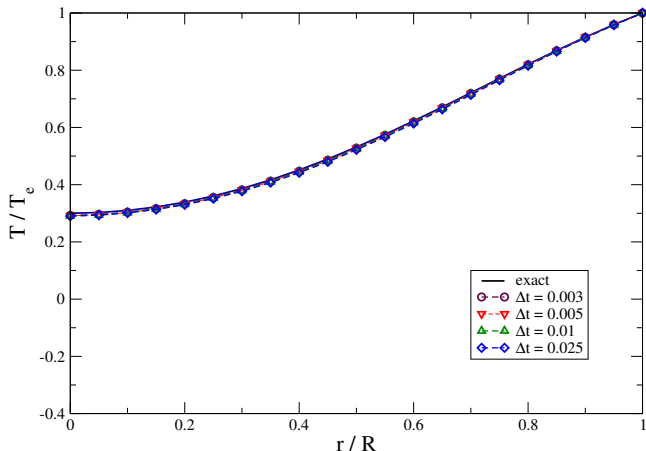
Sphère avec température extérieure imposée : température finale $T(r, t^F)$ obtenue par intégration **explicite** ($N = 20$ inconnues spatiales, $(\Delta t)_{\text{stab}} \approx 1,3086 \cdot 10^{-3}$) pour plusieurs choix de Δt autour de $(\Delta t)_{\text{stab}}$, et comparaison à la solution exacte.

Résultat (N=10, implicite)



Sphère avec température extérieure imposée : température finale $T(r, t^F)$ obtenue par intégration **implicite** ($N = 10$ inconnues spatiales) pour plusieurs choix de Δt autour et comparaison à la solution exacte. Le choix du pas de temps n'affecte pas la stabilité de la solution ($(\Delta t)_{\text{stab}} \approx 1,2433 \cdot 10^{-2}$ pour l'intégration explicite).

Résultat (N=20, implicite)



Sphère avec température extérieure imposée : température finale $T(r, t^F)$ obtenue par intégration **implicite** ($N = 20$ inconnues spatiales) pour plusieurs choix de Δt autour et comparaison à la solution exacte. Le choix du pas de temps n'affecte pas la stabilité de la solution ($(\Delta t)_{\text{stab}} \approx 1,3086 \cdot 10^{-3}$ pour l'intégration explicite).

Plan

1. Thermoélasticité linéaire : rappels
2. Conduction thermique instationnaire : semi-discrétisation en espace
3. Conduction thermique instationnaire : intégration en temps discret
 - Formulation discrétisée en espace et en temps
 - Stabilité du schéma d'intégration en temps
 - Cohérence du schéma d'intégration en temps
 - Précision du schéma d'intégration en temps
 - Exemple : illustration de la stabilité
4. Calcul de la réponse thermoélastique
5. Exemple d'application

Calcul de la réponse thermoélastique

$$\boxed{[\mathbb{K}]\{\mathbf{U}(t)\} = \{\mathbf{F}(t)\}} \quad \text{avec} \quad \{\mathbb{W}\}^T \{\mathbf{F}(t)\} = \alpha \int_{\Omega_h} T_h(\cdot, t) \underline{\underline{1}} : \mathcal{A} : \underline{\underline{\varepsilon}}[\underline{\underline{w}}_h] dV$$

Procédure d'assemblage similaire à celle développée pour les autres forces nodales (amphi 3) : peut être résumée par

$$\boxed{\underbrace{\{\mathbb{W}\}^T \{\mathbf{F}(t)\}}_{\text{global}} = \sum_{e=1}^{N_E} \underbrace{\{\mathbb{W}_e\}^T \{\mathbf{F}_e(t)\}}_{\text{local}}}$$

- ▶ Somme des intégrations sur chaque élément fini (intégrales élémentaires) ;
- ▶ Calcul des intégrales élémentaires par points de Gauss (amphi 3) ;
- ▶ $T_h(\cdot, t)$ exprimée sur chaque élément comme

$$T_h(\underline{\underline{x}}, t) = \{N(\underline{\underline{a}})\}^T \{\mathbb{T}_e(t)\} \quad \underline{\underline{x}} \in E(e), \underline{\underline{x}} = \underline{\underline{x}}(\underline{\underline{a}}), \underline{\underline{a}} \in \Delta(e)$$

- ▶ $\underline{\underline{\varepsilon}}[\underline{\underline{w}}_h](\underline{\underline{x}})$ exprimée sur chaque élément comme

$$\{\underline{\underline{\varepsilon}}[\underline{\underline{w}}_h](\underline{\underline{x}})\} = [B_e(\underline{\underline{a}})]\{\mathbb{W}_e\} \quad \underline{\underline{x}} \in E(e), \underline{\underline{x}} = \underline{\underline{x}}(\underline{\underline{a}}), \underline{\underline{a}} \in \Delta(e)$$

Calcul de la réponse thermoélastique

- **Force généralisée élémentaire :**

$$\{\mathbb{F}_e(t)\} = \int_{\Delta_e} [B(\underline{a})]^T \{A_V(\underline{a})\} \{N(\underline{a})\}^T \{\mathbb{T}_e(t)\} J(\underline{a}) dV(\underline{a})$$

soit (points de Gauss et notations de Voigt, cf. amphis 2,3) :

$$\{\mathbb{F}_e(t)\} \approx \sum_{g=1}^G w_g [B(\underline{a}_g)]^T \{A_V(\underline{a}_g)\} \{N(\underline{a}_g)\}^T \{\mathbb{T}_e(t)\} J(\underline{a}_g)$$

$$\text{avec } \{A_V(\underline{a})\} = \alpha [A(\underline{a})] \{111000\}^T$$

- **Cas de l'élasticité isotrope :** $\{A_V(\underline{a})\} = 3\alpha\kappa \{111000\}^T$.
- **Remarque :** il est souvent conseillé d'avoir

degré d'interpolation pour $\underline{u} = 1 +$ degré d'interpolation pour T

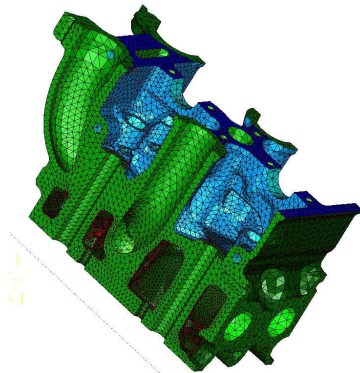
Raison : $\underline{\underline{\varepsilon}}[\underline{u}]$ et $\underline{\underline{\varepsilon}}^{\text{th}}$ représentés avec fonctions du \hat{m} degré (exemple : T6/T3).

Plan

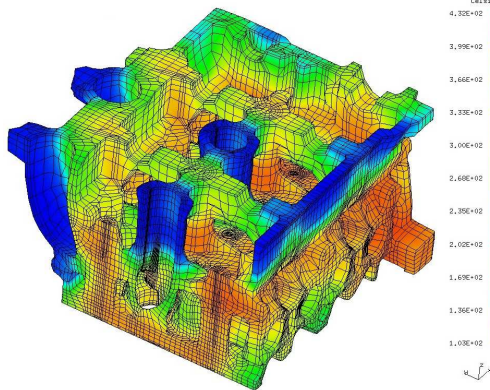
1. Thermoélasticité linéaire : rappels
2. Conduction thermique instationnaire : semi-discrétisation en espace
3. Conduction thermique instationnaire : intégration en temps discret
 - Formulation discrétisée en espace et en temps
 - Stabilité du schéma d'intégration en temps
 - Cohérence du schéma d'intégration en temps
 - Précision du schéma d'intégration en temps
 - Exemple : illustration de la stabilité
4. Calcul de la réponse thermoélastique
5. Exemple d'application

Exemple d'application

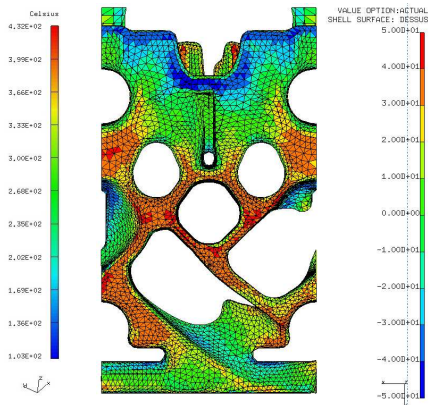
- ▶ **Analyse d'un composant de culasse de moteur diesel**
(F. Comte, thèse CIFRE LMS – PSA Peugeot Citroën)



- ▶ Procédé de fabrication comprend une trempe thermique
- ▶ Risque de fissuration par fatigue polycyclique
- ▶ Simulation de l'essai de dimensionnement



Champ de température

Distribution de $\frac{1}{3} \text{Tr}(\underline{\underline{\sigma}})$

Recherche des zones à plus forte traction (rouge) → risque de rupture.

Conclusion

- ▶ **Thermoélasticité découplée** : la température agit comme un chargement externe
- ▶ **Schémas numériques pour le calcul de l'évolution thermique** (intégration équation de la chaleur)
- ▶ **Analyse des principales caractéristiques des schémas** :
 - Stabilité (inconditionnelle ou conditionnelle selon les schémas)
 - Cohérence
 - Précision
- ▶ **Extension : thermomécanique découplée avec comportement non linéaire** :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \mathcal{A} : (\underline{\underline{\varepsilon}} - \underline{\underline{\varepsilon}}^P - \underline{\underline{\varepsilon}}^{\text{th}})$$

- ▶ **Extension : thermomécanique couplée** : par exemple, pour un matériau élastoplastique sans dilatation thermique :

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} - \text{div}(k \underline{\underline{\nabla}} T) = g + \sigma_0 \dot{p}$$