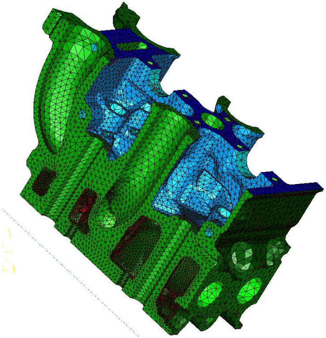
Analyse des structures mécaniques par la méthode des éléments finis



www.lms.polytechnique.fr/users/bonnet/enseignement.html

Département de Mécanique, Ecole Polytechnique, 2008–2009

Retour sur l'amphi 6

- Calcul élastoplastique d'une structure : combinaison **itérative** de :
  - **Etape locale :**
    intégration du comportement élastoplastique sur un pas de temps (amphi 6)
  - **Procédure globale :**
    incorporation dans les équations (faibles) d'équilibre et résolution (amphi 7)

  Présentation restreinte au modèle élastoplastique défini par
  (von Mises + écrouissage isotrope + règle de normalité)
- Formulation **implicite** de l'intégration en temps discret
- Intégration locale par l'**algorithme de retour radial**
- Erreur d'intégration en temps discret : **Ecart à la radialité**

Plan du cours

Concepts fondamentaux et leur application en élasticité linéaire statique

- Amphi 1 – Résolution approchée de problèmes d'équilibre en élasticité
- Amphi 2 – La notion d'élément fini isoparamétrique
- Amphi 3 – La méthode des éléments finis en élasticité linéaire
- Amphi 4 – Application à la mécanique linéaire de la rupture

Régime non-linéaire quasistatique, application aux solides élastoplastiques

- Amphi 5 – Calcul de solides à comportement non-linéaire
- Amphi 6 – Calcul de solides élastoplastiques 1 : aspects locaux
- **Amphi 7 – Calcul de solides élastoplastiques 2 : aspects globaux**

Régime linéaire, avec évolution temporelle

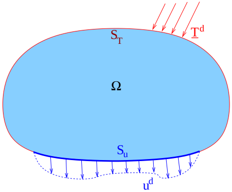
- Amphi 8 – Evolution thermique et thermoélasticité linéaire quasistatique
- Amphi 9 – Analyse dynamique des structures élastiques

Calcul de solides élastoplastiques 2 : aspects globaux

Plan

Calcul numérique d'une structure élastoplastique : équations de base (amphi 6)

- HPP, quasistatique ;
- Chargements (lentement) évolutifs ;
- S_ξ et S_T indépendantes du temps



$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{\nabla}\underline{u} + \boldsymbol{\nabla}^{\mathsf{T}}\underline{u}) \qquad \text{dans } \Omega\times[0, T] \qquad \text{(compatibilité)}$$

$$\mathrm{div}\underline{\underline{\sigma}} + \rho\underline{f} = \underline{0} \qquad \text{dans } \Omega\times[0, T] \qquad \text{(équilibre)}$$

$$\underline{\underline{\sigma}} = \kappa \mathrm{tr}(\underline{\underline{\varepsilon}})\underline{\underline{1}} + 2\mu(\underline{\underline{e}} - \underline{\underline{\varepsilon}}^{\mathsf{P}}) \qquad \text{(comportement, partie élastique)}$$

$$\dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}^{\mathsf{P}} = \dot{p}\frac{3}{2\sigma^{\mathsf{eq}}}\underline{\underline{s}}, \quad \dot{p} \geq 0, \quad \sigma^{\mathsf{eq}} - R(p) \leq 0, \quad \dot{p}[\sigma^{\mathsf{eq}} - R(p)] = 0$$
(comportement, partie plastique)

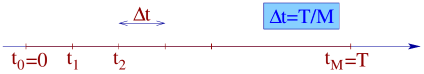
$$\underline{u}(\underline{x}, t) = \underline{u}^{\mathrm{D}}(\underline{x}, t) \qquad \text{sur } S_\xi\times[0, T] \qquad \text{(déplacements imposés)}$$

$$\underline{T}(\underline{x}, t) = \underline{T}^{\mathrm{D}}(\underline{x}, t) \qquad \text{sur } S_{\mathsf{T}}\times[0, T] \qquad \text{(efforts imposés)}$$

$$\underline{\underline{\varepsilon}}^{\mathsf{P}}(\underline{x}, 0) = 0 \qquad \text{dans } \Omega \qquad \text{(condition initiale)}$$

Principe (amphi 6) : temps discret, résolution pas à pas

Discrétisation temporelle, résolution pas à pas :



- **But de l'algorithme :**

$$\boxed{\text{calcul de } \mathcal{S}_n \overset{\text{def}}{=} \{\underline{u}_n, \underline{\underline{\varepsilon}}_n, \underline{\underline{\varepsilon}}^{\mathrm{P}}_n, \underline{\underline{\sigma}}_n \ldots\} \text{à chaque instant } t = t_n}$$

- **Approche incrémentale : calcul de $\mathcal{S}_0, \mathcal{S}_1, \ldots, \mathcal{S}_{\mathrm{M}}$ de proche en proche**
  - Construction d'un procédé algorithmique réalisant

$$\boxed{\text{Connaissant } \mathcal{S}_n \text{ et } (\underline{f}_{n+1}, \underline{u}^{\mathrm{D}}_{n+1}, \underline{T}^{\mathrm{D}}_{n+1}), \quad \text{trouver } \mathcal{S}_{n+1}}$$

Principe (amphi 6) : temps discret, résolution pas à pas

Pour traiter chaque incrément $\mathcal{S}_n \rightarrow \mathcal{S}_{n+1}$:

- Conditions d'équilibre (local + CL) : forme faible (PPV) **à l'instant final** $t = t_{n+1}$:

$$\boxed{\int_\Omega \underline{\underline{\sigma}}_{n+1} : \underline{\underline{\varepsilon}}[\underline{w}] \, \mathrm{d}V = \int_\Omega \rho \underline{f}_{n+1} . \underline{w} \, \mathrm{d}V + \int_{S_T} \underline{T}^{\mathrm{D}}_{n+1} . \underline{w} \, \mathrm{d}S \qquad \forall \underline{w} \in \mathcal{C}(\underline{0})}$$

- Comportement ($\mathcal{F}$: action de l'**algorithme de retour radial**, amphi 6) :

$$\boxed{\underline{\underline{\sigma}}_{n+1} = \mathcal{F}(\Delta \underline{\underline{\varepsilon}}_n ; \mathcal{S}_n)}$$

- Equilibre + comportement à l'instant final $t = t_{n+1}$

Inconnue principale : incrément $\Delta \underline{u}_n \overset{\text{déf}}{=} \underline{u}_{n+1} - \underline{u}_n$, solution (via une procédure **itérative**) de :

$$\boxed{\text{trouver } \Delta \underline{u}_n \in \mathcal{C}(\Delta \underline{u}^{\mathrm{D}}_n), \quad \mathcal{R}(\Delta \underline{u}_n ; \underline{w}, \mathcal{S}_n) = 0 \qquad \forall \underline{w} \in \mathcal{C}(\underline{0})}$$

$$\mathcal{R}(\Delta \underline{u}_n ; \underline{w}, \mathcal{S}_n) = \int_\Omega \mathcal{F}(\underline{\underline{\varepsilon}}[\Delta \underline{u}_n] ; \mathcal{S}_n) : \underline{\underline{\varepsilon}}[\underline{w}] \, \mathrm{d}V - \int_\Omega \rho \underline{f}_{n+1} . \underline{w} \, \mathrm{d}V - \int_{S_T} \underline{T}^{\mathrm{D}}_{n+1} . \underline{w} \, \mathrm{d}S$$

Méthode itérative pour le problème global : principe

$$\boxed{\text{trouver } \Delta\underline{u}_n \in \mathcal{C}(\Delta\underline{u}_n^{\mathrm{D}}), \quad \mathcal{R}(\Delta\underline{u}_n; \underline{w}, \mathcal{S}_n) = 0 \qquad \forall \underline{w} \in \mathcal{C}(\underline{0})}$$

- Méthode itérative : recherche de corrections successives
$$\Delta\underline{u}_n^{(k+1)} = \Delta\underline{u}_n^{(k)} + \delta\underline{u}_n^{(k)}, \qquad \text{soit} \quad \delta\underline{u}_n^{(k)} = \Delta\underline{u}_n^{(k+1)} - \Delta\underline{u}_n^{(k)}$$
à l'aide de l'équation d'équilibre linéarisée autour de $\Delta\underline{u}_n^{(k)}$:
$$\boxed{\mathcal{R}(\Delta\underline{u}_n^{(k)}; \underline{w}, \mathcal{S}_n) + \left\langle \mathcal{R}'(\Delta\underline{u}_n^{(k)}; \underline{w}, \mathcal{S}_n) \, , \, \delta\underline{u}_n^{(k)} \right\rangle = 0}$$

- Prise en compte des déplacements imposés : imposer
$$\begin{array}{ll} \delta\underline{u}_n^{(1)} \in \mathcal{C}(\Delta\underline{u}_n^{\mathrm{D}}) & \text{(Itération 1)} \\ \delta\underline{u}_n^{(k)} \in \mathcal{C}(\underline{0}) & \text{(Itérations suivantes)} \end{array}$$

Application linéaire tangente : deux possibilités

(i) Méthode de Newton avec **opérateur tangent cohérent** ;
Demande le calcul de l'application linéaire tangente $\mathcal{R}'(\Delta\underline{u}_n^{(k)}; \underline{w}, \mathcal{S}_n)$.

(ii) Méthode de Newton modifiée avec **opérateur tangent constant** ;
Approximation de $\mathcal{R}'(\Delta\underline{u}_n^{(k)}; \underline{w}, \mathcal{S}_n)$ par une application linéaire **constante**.

Méthode itérative pour le problème global : principales étapes

- **Initialisation :** $\boxed{\Delta \underline{u}_n = \underline{0}}$;

- **Itération 1 :** décomposition $\boxed{\delta \underline{u}_n^{(1)} = \underbrace{\delta \underline{u}_n^{(1,0)}}_{\in \mathcal{C}(\underline{0})} + \underbrace{\Delta \underline{u}_n^{(\mathrm{D})}}_{\in \mathcal{C}(\Delta \underline{u}_n^{\mathrm{D}})}}$

$$\boxed{\begin{aligned}&\text{Trouver} \quad \delta \underline{u}_n^{(1,0)} \in \mathcal{C}(\underline{0}),\\ &\langle \mathcal{R}'(\underline{0}; \underline{w}, \mathcal{S}_n),\, \delta \underline{u}_n^{(1,0)} \rangle = -\mathcal{R}(\underline{0}; \underline{w}, \mathcal{S}_n) - \langle \mathcal{R}'(\underline{0}; \underline{w}, \mathcal{S}_n),\, \Delta \underline{u}_n^{(\mathrm{D})} \rangle \quad \forall \underline{w} \in \mathcal{C}(\underline{0})\end{aligned}}$$

- **Itérations suivantes :**

$$\boxed{\begin{aligned}&\text{Trouver} \quad \delta \underline{u}_n^{(k)} \in \mathcal{C}(\underline{0}),\\ &\langle \mathcal{R}'(\Delta \underline{u}_n^{(k)}; \underline{w}, \mathcal{S}_n),\, \delta \underline{u}_n^{(k)} \rangle = -\mathcal{R}(\Delta \underline{u}_n^{(k)}; \underline{w}, \mathcal{S}_n) \qquad \forall \underline{w} \in \mathcal{C}(\underline{0})\end{aligned}}$$

- **Convergence et actualisation**

$$\boxed{\Delta \underline{u}_n \approx \Delta \underline{u}_n^{(k)} \quad \text{avec } k \text{ tel que} \quad \big\| \mathcal{R}(\Delta \underline{u}_n^{(k)}; \underline{w}, \mathcal{S}_n) \big\| < \epsilon \big\| \mathcal{R}(\underline{0}; \underline{w}, \mathcal{S}_n) \big\|,}$$

Méthode itérative pour le problème global : approximation par éléments finis

Maillage, approximations $\{\Delta\mathbb{U}_n^{(k)}\}$, $\{\delta\mathbb{U}_n^{(k)}\}$ (méthodes amphis 2, 3)

- **Itération générique** $(k > 1)$ **:** Equation linéarisée de la forme

$$\boxed{[\mathbb{K}_{n+1}^{(k)}]\{\delta\mathbb{U}_n^{(k)}\} = -\{\mathbb{R}_{n+1}^{(k)}\}}$$

$$\langle \mathcal{R}'(\Delta\underline{u}_n^{(k)}; \underline{w}, \mathcal{S}_n), \delta\underline{u}_n^{(k)}\rangle \overset{\text{déf}}{=} \{\mathbb{W}\}^{\mathsf{T}}[\mathbb{K}_{n+1}^{(k)}]\{\delta\mathbb{U}_n^{(k)}\}$$

$$\mathcal{R}(\Delta\underline{u}_n^{(k)}; \underline{w}, \mathcal{S}_n) \overset{\text{déf}}{=} \{\mathbb{W}\}^{\mathsf{T}}\{\mathbb{R}_{n+1}^{(k)}\}$$

$$= \{\mathbb{W}\}^{\mathsf{T}}\big(-\{\mathbb{F}_{n+1}^{\text{int}(k)}\} - \{\mathbb{F}_{n+1}^{\text{vol}}\} - \{\mathbb{F}_{n+1}^{\text{surf}}\}\big)$$

$[\mathbb{K}_{n+1}^{(k)}]$: rigidité tangente élastoplastique à l'itération k.

- **Itération initiale** $(k = 1)$ **:**

$$\boxed{[\mathbb{K}_n]\{\delta\mathbb{U}_n^{(1)}\} = -\{\mathbb{R}_{n+1}^{(1)}\} + \{\mathbb{F}_n^{\Delta u}\}}$$

$$\{\mathbb{R}_{n+1}^{(1)}\} = -\{\mathbb{F}_n^{\text{int}}\} - \{\mathbb{F}_{n+1}^{\text{vol}}\} - \{\mathbb{F}_{n+1}^{\text{surf}}\}$$

$$-\langle \mathcal{R}'(\underline{0}; \underline{w}, \mathcal{S}_n),\ \Delta\underline{u}_n^{(\mathrm{D})}\rangle \overset{\text{déf}}{=} \{\mathbb{W}\}^{\mathsf{T}}\{\mathbb{F}_n^{\Delta u}\}$$

$[\mathbb{K}_n]$: rigidité tangente élastoplastique obtenue en fin d'incrément précédent.

Plan

Méthode de Newton avec opérateur tangent cohérent

$$\mathcal{R}(\Delta\underline{u}_n;\underline{w},\mathcal{S}_n)=\int_\Omega \mathcal{F}(\underline{\underline{\varepsilon}}[\Delta\underline{u}_n];\mathcal{S}_n):\underline{\underline{\varepsilon}}[\underline{w}]\,\mathrm{d}V-\int_\Omega \rho\underline{f}_{n+1}.\underline{w}\,\mathrm{d}V-\int_{S_T}\underline{T}^{\mathrm{D}}_{n+1}.\underline{w}\,\mathrm{d}S$$

- **Application linéaire tangente globale $\mathcal{R}'$ définie par :**

$$\boxed{\mathcal{R}(\underline{v}+\underline{z};\underline{w},\mathcal{S}_n)-\mathcal{R}(\underline{v};\underline{w},\mathcal{S}_n)=\langle\mathcal{R}'(\underline{v};\underline{w},\mathcal{S}_n),\underline{z}\rangle+o(\|\underline{z}\|)}$$

- Application linéaire tangente locale associée à $\mathcal{F}$:

$$\underbrace{\mathcal{F}(\Delta\underline{\underline{\varepsilon}}+\delta\underline{\underline{\varepsilon}};\mathcal{S}_n)-\mathcal{F}(\Delta\underline{\underline{\varepsilon}};\mathcal{S}_n)}_{\langle\mathcal{F}'(\Delta\underline{\underline{\varepsilon}};\mathcal{S}_n)\,,\delta\underline{\underline{\varepsilon}}\rangle+o(|\delta\underline{\underline{\varepsilon}}\|)}=\frac{\partial\underline{\underline{\sigma}}_{n+1}}{\partial\Delta\underline{\underline{\varepsilon}}}(\Delta\underline{\underline{\varepsilon}};\mathcal{S}_n):\delta\underline{\underline{\varepsilon}}+o(|\delta\underline{\underline{\varepsilon}}\|)$$

$$\overset{\text{déf}}{=}\boldsymbol{\mathcal{A}}^{\mathrm{EP}}(\Delta\underline{\underline{\varepsilon}};\mathcal{S}_n):\delta\underline{\underline{\varepsilon}}+o(|\delta\underline{\underline{\varepsilon}}\|)$$

- Le tenseur d'ordre 4 $\boldsymbol{\mathcal{A}}^{\mathrm{EP}}(\Delta\underline{\underline{\varepsilon}}^{(k)}_n;\mathcal{S}_n)$ est appelé **opérateur tangent local**
- **Expression de l'application linéaire tangente globale :**

$$\boxed{\left\langle\mathcal{R}'(\Delta\underline{u}^{(k)}_n;\underline{w},\mathcal{S}_n)\,,\,\delta\underline{u}^{(k)}_n\right\rangle=\int_\Omega\underline{\underline{\varepsilon}}[\delta\underline{u}^{(k)}_n]:\boldsymbol{\mathcal{A}}^{\mathrm{EP}}(\Delta\underline{\underline{\varepsilon}}^{(k)}_n;\mathcal{S}_n):\underline{\underline{\varepsilon}}[\underline{w}]\,\mathrm{d}V}$$

Plan

Calcul de l'opérateur tangent local

$$\boxed{\boldsymbol{\mathcal{A}}^{\mathrm{EP}}(\Delta\underline{\underline{\varepsilon}}_n^{(k)};\mathcal{S}_n) \overset{\text{déf}}{=} \frac{\partial\mathcal{F}}{\partial\Delta\underline{\underline{\varepsilon}}}(\Delta\underline{\underline{\varepsilon}}_n^{(k)};\mathcal{S}_n)}$$

Evolution de la contrainte (amphi 6) :

$$\boxed{\underline{\underline{\sigma}}_{n+1} = \mathcal{F}(\Delta\underline{\underline{\varepsilon}}_n;\mathcal{S}_n) = \underbrace{\underline{\underline{\sigma}}_n + \boldsymbol{\mathcal{A}}:\Delta\underline{\underline{\varepsilon}}_n}_{\underline{\underline{\sigma}}_{n+1}^{\mathrm{elas}}} - 2\mu\Delta\underline{\underline{\varepsilon}}_n^{\mathrm{P}}}$$

(a) Evolution élastique de la contrainte ($\Delta\underline{\underline{\varepsilon}}_n^{\mathrm{P}} = \underline{\underline{0}}$)

$$\underline{\underline{\sigma}}_{n+1} = \underline{\underline{\sigma}}_{n+1}^{\mathrm{elas}}, \ \Delta p_n = 0, \quad \text{et donc} \quad \boxed{\frac{\partial\mathcal{F}}{\partial\Delta\underline{\underline{\varepsilon}}_n}(\Delta\underline{\underline{\varepsilon}}_n;\mathcal{S}_n) = \boldsymbol{\mathcal{A}}}$$

(b) Evolution élastoplastique de la contrainte ($\Delta\underline{\underline{\varepsilon}}_n^{\mathrm{P}} \neq \underline{\underline{0}}$)

$$\boxed{\frac{\partial\mathcal{F}}{\partial\Delta\underline{\underline{\varepsilon}}_n}(\Delta\underline{\underline{\varepsilon}}_n;\mathcal{S}_n) = \boldsymbol{\mathcal{A}} - 2\mu\frac{\partial\Delta\underline{\underline{\varepsilon}}_n^{\mathrm{P}}}{\partial\Delta\underline{\underline{\varepsilon}}_n} \overset{\text{déf}}{=} \boldsymbol{\mathcal{A}} - \boldsymbol{\mathcal{D}}}$$

Calcul de la « correction plastique » $\mathcal{D}$

$$\boxed{\frac{\partial \underline{\underline{\sigma}}_{n+1}}{\partial \Delta \underline{\underline{\varepsilon}}_n} = \boldsymbol{\mathcal{A}} - \boldsymbol{\mathcal{D}} \quad \text{avec} \quad \boldsymbol{\mathcal{D}} = 2\mu \frac{\partial \Delta \underline{\underline{\varepsilon}}^{\mathrm{P}}_n}{\partial \Delta \underline{\underline{\varepsilon}}_n} = 3\mu \frac{\partial}{\partial \Delta \underline{\underline{\varepsilon}}_n} \left(\frac{\Delta p_n}{\sigma^{\text{elas,eq}}_{n+1}} \underline{\underline{s}}^{\text{elas}}_{n+1} \right)}$$ (amphi 6)

Calcul des dérivées de (i) $\underline{\underline{s}}^{\text{elas}}_{n+1}$, (ii) $\sigma^{\text{elas,eq}}_{n+1}$ et (iii) Δp_n :

(i) $\underline{\underline{s}}^{\text{elas}}_{n+1} \overset{\text{déf}}{=} \underline{\underline{\sigma}}_n + 2\mu \Delta \underline{\underline{e}}_n \qquad \Longrightarrow \qquad \boxed{\frac{\partial}{\partial \Delta \underline{\underline{\varepsilon}}_n} \underline{\underline{s}}^{\text{elas}}_{n+1} = 2\mu \boldsymbol{\mathcal{K}}}$

avec $\boldsymbol{\mathcal{K}}$: projection sur le sous-espace des déviateurs, exemple $\Delta \underline{\underline{e}} = \boldsymbol{\mathcal{K}} : \Delta \underline{\underline{\varepsilon}}$

(ii) $\sigma^{\text{elas,eq}}_{n+1} = \sqrt{\frac{3}{2}} (\underline{\underline{s}}^{\text{elas}}_{n+1} : \underline{\underline{s}}^{\text{elas}}_{n+1})^{1/2} \qquad \Longrightarrow \qquad \boxed{\frac{\partial \sigma^{\text{elas,eq}}_{n+1}}{\partial \Delta \underline{\underline{\varepsilon}}_n} = \frac{3\mu}{\sigma^{\text{elas,eq}}_{n+1}} \underline{\underline{s}}^{\text{elas}}_{n+1}}$

(iii) $\frac{\partial}{\partial \Delta \underline{\underline{\varepsilon}}_n} \left\{ \sigma^{\text{elas,eq}}_{n+1} - 3\mu \Delta p_n - R(p_n + \Delta p_n) = 0 \right\}$

$$\Longrightarrow \qquad \boxed{\frac{\partial \Delta p_n}{\partial \Delta \underline{\underline{\varepsilon}}_n} = \frac{3\mu}{3\mu + R'_{n+1}} \frac{1}{\sigma^{\text{elas,eq}}_{n+1}} \underline{\underline{s}}^{\text{elas}}_{n+1}}$$

avec $R'_{n+1} = R'(p_{n+1}) = R'(p_n + \Delta p_n)$

Calcul de la « correction plastique » $\mathcal{D}$

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial \Delta \underline{\underline{\varepsilon}}_n} \underline{\underline{s}}^{\text{elas}}_{n+1} = 2\mu\mathcal{K}\,, \quad \frac{\partial \sigma^{\text{elas,eq}}_{n+1}}{\partial \Delta \underline{\underline{\varepsilon}}_n} = \frac{3\mu}{\sigma^{\text{elas,eq}}_{n+1}} \underline{\underline{s}}^{\text{elas}}_{n+1}\,, \quad \frac{\partial \Delta p_n}{\partial \Delta \underline{\underline{\varepsilon}}_n} = \frac{3\mu}{3\mu + R'_{n+1}} \frac{1}{\sigma^{\text{elas,eq}}_{n+1}} \underline{\underline{s}}^{\text{elas}}_{n+1}}$$

- L'application de ces identités au calcul de

$$\mathcal{D} = 3\mu \frac{\partial}{\partial \Delta \underline{\underline{\varepsilon}}_n} \left(\frac{\Delta p_n}{\sigma^{\text{elas,eq}}_{n+1}} \underline{\underline{s}}^{\text{elas}}_{n+1} \right)$$

  donne le résultat

$$\boxed{\mathcal{D} = \mathcal{D}(\Delta \underline{\underline{\varepsilon}}_n ; \mathcal{S}_n) = 3\mu(\gamma - \beta)\left(\frac{\underline{\underline{s}}^{\text{elas}}_{n+1}}{\sigma^{\text{elas,eq}}_{n+1}} \otimes \frac{\underline{\underline{s}}^{\text{elas}}_{n+1}}{\sigma^{\text{elas,eq}}_{n+1}} \right) + 2\mu\beta\mathcal{K}}$$

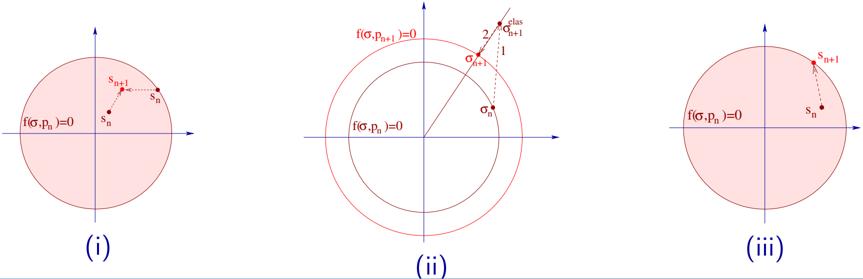
$$\beta = \frac{3\mu \Delta p_n}{\sigma^{\text{elas,eq}}_{n+1}} = 1 - \frac{R_{n+1}}{\sigma^{\text{elas,eq}}_{n+1}} \qquad \gamma = \frac{3\mu}{3\mu + R'_{n+1}}$$

- **« correction plastique » $\mathcal{D}$: tenseur d'ordre 4, mêmes symétries que $\mathcal{A}$**

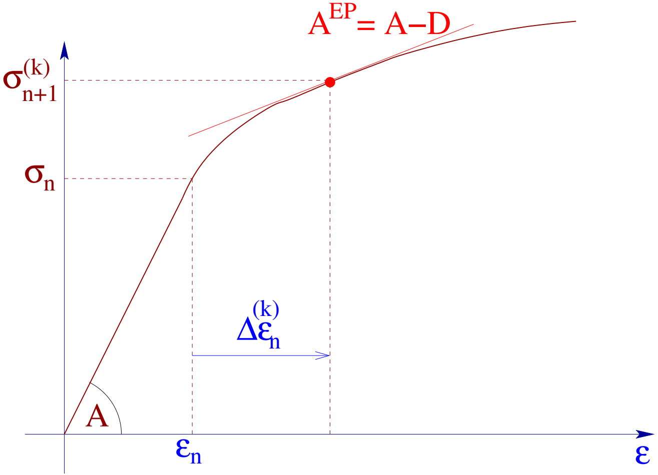
Opérateur tangent local $\mathcal{A}^{\mathrm{EP}}$: synthèse

$$\boldsymbol{\mathcal{A}}^{\mathrm{EP}}(\Delta\underline{\underline{\varepsilon}}_n, \mathcal{S}_n) = \begin{cases} \boldsymbol{\mathcal{A}} & \text{si } f^{\mathrm{elas}}_{n+1} < 0 \text{ (évolution élastique)} \\ \boldsymbol{\mathcal{A}} - \boldsymbol{\mathcal{D}}(\Delta\underline{\underline{\varepsilon}}_n^{(k)}; \mathcal{S}_n) & \text{si } f^{\mathrm{elas}}_{n+1} > 0 \text{ (évolution élastoplastique)} \end{cases}$$

- $\mathcal{F}(\Delta\underline{\underline{\varepsilon}}_n, \mathcal{S}_n)$ **différentiable** par rapport à $\Delta\underline{\underline{\varepsilon}}_n$ si
  - (i) $f^{\mathrm{elas}}_{n+1} < 0$ ($\underline{\underline{\sigma}}_{n+1}$ dans le domaine d'élasticité) ; ou
  - (ii) $f^{\mathrm{elas}}_{n+1} > 0$ (évolution élastoplastique avec $\Delta p_n \neq 0$).
- $\mathcal{F}(\Delta\underline{\underline{\varepsilon}}_n, \mathcal{S}_n)$ **non différentiable** par rapport à $\Delta\underline{\underline{\varepsilon}}_n$ si
  - (iii) $f^{\mathrm{elas}}_{n+1} = 0$ avec $\Delta p_n = 0$ (situation-limite de « charge neutre »).



Opérateur tangent local $\mathcal{A}^{\mathsf{EP}}$: interprétation



Plan

Calcul pratique de $[\mathbb{K}^{(k)}_{n+1}]$

- Utiliser procédure d'assemblage de $[\mathbb{K}]$ **avec $\mathcal{A}$ remplaçé par $\mathcal{A}-\mathcal{D}$**
- Notation de Voigt (pour la programmation) :

$$\boxed{[A^{\mathrm{EP}}] = [A] - [D] \quad \text{avec} \quad [D] = \frac{3\mu(\gamma-\beta)}{(\sigma^{\mathrm{elas,eq}})^2}\{s^{\mathrm{elas}}\}\{s^{\mathrm{elas}}\}^{\mathrm{T}} + 2\mu\beta[\mathcal{K}]}$$

avec

$$\boldsymbol{\mathcal{K}}:\underline{\underline{\varepsilon}} = [\mathcal{K}]\{\varepsilon\} \qquad \text{où} \;\; [\mathcal{K}] = \begin{bmatrix} 2/3 & -1/3 & -1/3 & 0 & 0 & 0 \\ -1/3 & 2/3 & -1/3 & 0 & 0 & 0 \\ -1/3 & -1/3 & 2/3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix}$$

$$\{s\} = \{\sigma\} - \frac{1}{3}(\sigma_{11}+\sigma_{22}+\sigma_{33})\{1\;1\;1\;0\;0\;0\}^{\mathrm{T}}$$

$$\sigma^{\mathrm{eq}} = \left[\frac{3}{2}\left(s_{11}^2+s_{22}^2+s_{33}^2\right) + 3s_{12}^2 + 3s_{13}^2 + 3s_{23}^2\right]^{1/2}$$

- $[D]$ **dépend du point** à travers $(\mathcal{S}_n, \Delta\underline{\underline{\varepsilon}}_n)$.
- $[D]=[0]$ en tout point t.q. l'évolution **déduite de $\Delta\underline{u}_n^{(k+1)}$** est **élastique**.

Plan

Algorithme pour le calcul d'une structure élastoplastique

- **Chaque itération de la méthode de Newton consiste principalement à**
  (i) Annuler le résidu linéarisé autour de $\{\mathbb{U}_{n+1}^{(k)}\}$ par rapport à $\{\delta\mathbb{U}_{n}^{(k)}\}$;
  (ii) Faire l'actualisation $\{\Delta\mathbb{U}_{n}^{(k+1)}\} = \{\Delta\mathbb{U}_{n}^{(k)}\} + \{\delta\mathbb{U}_{n}^{(k)}\}$;
  (iii) Calculer la nouvelle matrice tangente cohérente $[\mathbb{K}_{n+1}^{(k)}]$
- **Présentation de ces étapes à l'aide de quatre niveaux d'algorithmes :**

Niveau 1
Procédure complète de calcul incrémental-itératif, au niveau de la structure ;

Niveau 2 (appelé une fois par itération par l'algorithme 1) :
Calcul de grandeurs globales : rigidité tangente, forces nodales.

Niveau 3 (appelé pour chaque élément par l'algorithme 2) :
Calcul des contraintes et variables internes sur l'élément ;
Calcul des contributions élémentaires (rigidité tangente, forces nodales).

Niveau 4 (appelé pour chaque point de Gauss par l'algorithme 3) :
Intégration locale du comportement (algorithme de retour radial) ;
Calcul des modules tangents locaux.

Niveau 1 : calcul incrémental/itératif d'un solide élastoplastique

Données : maillage ; instants $t_0, \ldots, t_{\mathrm{M}}$, comportement, chargements, tolérance ϵ.

(a) **Initialisation générale ($t = 0$) :**

(i) Conditions initiales (par ex. =0) : $\{\mathbb{U}_0\}$, $\{\sigma_0\}$, $\{p_0\}$, $\{\underline{\underline{\varepsilon}}^{\mathrm{P}}_0\}$;

(ii) Initialisation : $\{\mathbb{F}^{\mathrm{int}}\} = \{0\}$

Assemblage (élasticité linéaire) : $[\mathbb{K}^{\mathrm{EP}}] = [\mathbb{K}]$, $\{\mathbb{F}^{\Delta u}\} \leftarrow \Delta\underline{u}^{\mathrm{D}}_0 = \underline{u}^{\mathrm{D}}_1 - \underline{u}^{\mathrm{D}}_0$

(b) **Incrémentation du chargement :** pour $n = 0, 1, 2, \ldots, \mathrm{M}-1$, faire

(i) Initialisation : $\{\Delta\mathbb{U}\} = \{0\}$;

(ii) Forces nodales : $\{\mathbb{F}^{\mathrm{ext}}\} = \{\mathbb{F}^{\mathrm{vol}}_{n+1}\} + \{\mathbb{F}^{\mathrm{surf}}_{n+1}\}$;

(iii) Résidu : $-\{\mathbb{R}\} = \{\mathbb{F}^{\mathrm{int}}\} + \{\mathbb{F}^{\mathrm{ext}}\} + \{\mathbb{F}^{\Delta\xi}\}$, $r^{\mathrm{ref}} = \|\{\mathbb{R}\}\|$, $r = r^{\mathrm{ref}}$;

(iv) **Itérations :** pour $k = 1, \ldots$ et tant que $r > \epsilon\, r^{\mathrm{ref}}$

(a) Résoudre $\boxed{[\mathbb{K}^{\mathrm{EP}}]\{\delta\mathbb{U}\} := -\{\mathbb{R}\}}$; actualiser : $\{\Delta\mathbb{U}\} := \{\Delta\mathbb{U}\} + \{\delta\mathbb{U}\}$;

(b) Assembler $[K^{\mathrm{EP}}(\Delta\mathbb{U})]$, $\{\mathbb{F}^{\mathrm{int}}(\Delta\mathbb{U})\}$ et $\{\mathbb{F}^{\Delta u}\} \leftarrow \Delta\underline{u}^{\mathrm{D}}_{n+1}$ **(Niveau 2)**

(c) Actualiser résidu : $\{\mathbb{R}\} := -\{\mathbb{F}^{\mathrm{int}}\} - \{\mathbb{F}^{\mathrm{ext}}\}$, $r = \|\{\mathbb{R}\}\|$.

(v) Mise à jour : $\{\mathbb{U}_{n+1}\} = \{\mathbb{U}_n\} + \{\Delta\mathbb{U}\}$, $\{\underline{\underline{\varepsilon}}^{\mathrm{P}}_{n+1}\} = \{\underline{\underline{\varepsilon}}^{\mathrm{P}}_n\} + \{\Delta\underline{\underline{\varepsilon}}^{\mathrm{P}}\}$.

Niveau 2 : matrice tangente élastoplastique globale, forces nodales internes et associées aux déplacements imposés

Entrées : Incréments de déplacements nodaux $\{\Delta\mathbb{U}_n\}$ et imposés
Sorties : Matrice tangente globale $[\mathbb{K}^{\mathsf{EP}}]$, forces nodales globales $\{\mathbb{F}^{\Delta\xi}\}$, $\{\mathbb{F}^{\mathsf{int}}\}$.

(i) Initialisation : $[\mathbb{K}^{\mathsf{EP}}] = [0]$, $\{\mathbb{F}^{\Delta\xi}\} = \{0\}$, $\{\mathbb{F}^{\mathsf{int}}\} = \{0\}$;

(ii) Pour $e = 1, 2, \ldots, \mathrm{N}_{\mathsf{E}}$ (boucle sur les éléments) :

(a) Extraire incrément de déplacements nodaux élémentaires $\{\Delta\mathbb{U}_{n,e}\}$;

(b) Calculer $[\mathbb{K}_e^{\mathsf{EP}}]$ et $\{\mathbb{F}_e^{\mathsf{int}}\}$ **(Niveau 3)** ;

(c) Assemblage : $[\mathbb{K}_e^{\mathsf{EP}}] \longrightarrow [\mathbb{K}^{\mathsf{EP}}]$, $\{\mathbb{F}^{\Delta\xi}\}$
$\{\mathbb{F}_e^{\mathsf{int}}\} \longrightarrow \{\mathbb{F}^{\mathsf{int}}\}$

Le procédé d'assemblage fonctionne comme pour l'élasticité linéaire.

Niveau 3 : contraintes et variables internes sur un élément, matrice tangente et forces nodales élémentaires

Entrées : $\{\sigma_n\}$ (champ aux points de Gauss), $\{\Delta\mathbb{U}_e\}$
Sorties : $[\mathbb{K}_e^{\mathrm{EP}}]$, $\{\mathbb{F}_e^{\mathrm{int}}\}$ (matrices élémentaires)
$\{\sigma_{n+1}\}$, $\{\Delta p\}$, $\{\Delta\underline{\underline{\varepsilon}}^{\mathrm{p}}\}$ (champs aux points de Gauss)

(i) Initialisation : $[\mathbb{K}_e^{\mathrm{EP}}] = [0]$, $\{\mathbb{F}_e^{\mathrm{int}}\} = \{0\}$;

(ii) Pour $g = 1, 2, \ldots, G$ (boucle sur les points de Gauss $\underline{a}_g$, de poids w_g, de E_e) :

(a) Incrément de déformation : $\{\Delta\varepsilon(\underline{a}_g)\} = [B(\underline{a}_g)]\{\Delta\mathbb{U}^e\}$;

(b) Calcul de $\{\sigma_{n+1}(\underline{a}_g)\}$, $\Delta p(\underline{a}_g)$ et $[A^{\mathrm{EP}}(\underline{a}_g)]$ **(Niveau 4)** ;

(c) Contribution du point de Gauss à $[\mathbb{K}_e^{\mathrm{EP}}]$:

$$[\mathbb{K}_e^{\mathrm{EP}}] := [\mathbb{K}_e^{\mathrm{EP}}] + [B(\underline{a}_g)]^{\mathrm{T}}[A^{\mathrm{EP}}(\underline{a}_g)][B(\underline{a}_g)]J(\underline{a}_g)w_g \,;$$

(d) Contribution du point de Gauss à $\{\mathbb{F}_e^{\mathrm{int}}\}$:

$$\{\mathbb{F}_e^{\mathrm{int}}\} := \{\mathbb{F}_e^{\mathrm{int}}\} + [B(\underline{a}_g)]^{\mathrm{T}}\{\sigma_{n+1}(\underline{a}_g)\}J(\underline{a}_g)w_g$$

Algorithme 4 : contraintes, modules tangents, variables internes

(a) Évaluer $\underline{\underline{s}}^{\text{elas}} = \underline{\underline{s}}_n + 2\mu\mathcal{K} : \Delta\underline{\underline{\varepsilon}}$ (prédicteur élastique) et $\sigma^{\text{elas,eq}} = \sqrt{\frac{3}{2}}\|\underline{\underline{s}}^{\text{elas}}\|$;

(b) Calculer $f^{\text{elas}} = f(\underline{\underline{\sigma}}^{\text{elas}}_{n+1}, p_n) = \sigma^{\text{elas,eq}} - R(p_n)$. Deux cas :

- Si $f^{\text{elas}} \leq 0$, **évolution élastique :** $\boxed{\begin{array}{c} \underline{\underline{\sigma}}_{n+1} = 3\kappa \text{Tr}(\Delta\underline{\underline{\varepsilon}})\underline{\underline{1}} + \underline{\underline{s}}^{\text{elas}}, \\ \Delta\underline{\underline{\varepsilon}}^{\text{P}} = \underline{\underline{0}}, \quad \boldsymbol{\mathcal{A}}^{\text{EP}} = \boldsymbol{\mathcal{A}} \end{array}}$;
- Si $f^{\text{elas}} > 0$, **évolution élastoplastique** :
  - (i) Résoudre par rapport à Δp : $\boxed{\sigma^{\text{elas,eq}} - 3\mu\Delta p - R(p_n + \Delta p) = 0}$;
  - (ii) Evaluer les constantes β, γ : $\beta = \dfrac{3\mu\Delta p}{\sigma^{\text{elas,eq}}}$ $\gamma = \dfrac{3\mu}{3\mu + R'(p_n + \Delta p)}$;
  - (iii) Actualiser $\underline{\underline{\sigma}}$ et $\underline{\underline{\varepsilon}}^{\text{P}}$: $\boxed{\begin{array}{l} \underline{\underline{\sigma}}_{n+1} = (1-\beta)\underline{\underline{s}}^{\text{elas}} + \kappa \text{Tr}(\Delta\underline{\underline{\varepsilon}})\underline{\underline{1}} \\ \Delta\underline{\underline{\varepsilon}}^{\text{P}} = (\beta/2\mu)\underline{\underline{s}}^{\text{elas}} \end{array}}$;
  - (iv) Former le tenseur des modules tangents élastoplastiques $\boldsymbol{\mathcal{A}}^{\text{EP}}$:

$$\boxed{\boldsymbol{\mathcal{A}}^{\text{EP}} = \boldsymbol{\mathcal{A}} - 3\mu(\gamma - \beta)\left(\frac{\underline{\underline{s}}^{\text{elas}}}{\sigma^{\text{elas,eq}}} \otimes \frac{\underline{\underline{s}}^{\text{elas}}}{\sigma^{\text{elas,eq}}}\right) - 2\mu\beta\mathcal{K}}.$$

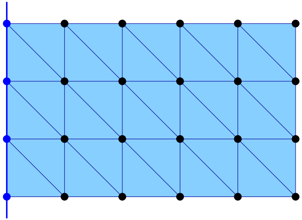
Plan

Difficultés liées à l'incompressibilité (plastique)

- Modèles de plasticité courants : $\boxed{\mathrm{Tr}(\underline{\underline{\varepsilon}}^{P}) = 0}$ (incompressibilité plastique).
- Chargements élevés : $\underline{\underline{\varepsilon}}$ dominée par la partie plastique $\underline{\underline{\varepsilon}}^{P}$ (en particulier si $R'(p) = 0$, i.e. plasticité parfaite)
- **Le traitement numérique de l'incompressibilité présente des difficultés**

Exemple : déformations planes, éléments triangulaires linéaires :

- $\mathrm{N_E}$ éléments, $\mathrm{N_N} = \mathrm{N_N^I} + \mathrm{N_N^\xi} + \mathrm{N_N^T}$ noeuds, $\mathrm{N} = 2(\mathrm{N_N^I} + \mathrm{N_N^T})$ DDLs inconnus ;
- Formule d'Euler, **pour ce type d'élément fini :** $\boxed{\mathrm{N_E} = 2\mathrm{N_N^I} + \mathrm{N_N^\xi} + \mathrm{N_N^T} - 1}$;
- $\underline{\underline{\varepsilon}}$ constant par élément, donc $\mathrm{N_E}$ **liaisons d'incompressibilité** ;
- Il reste $\boxed{\mathrm{N^{incomp}} = \mathrm{N} - \mathrm{N_E} = \mathrm{N_N^T} - \mathrm{N_N^\xi} + 1}$ inconnues effectives



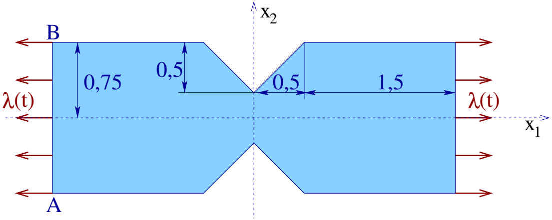
$\boxed{\mathrm{N^{incomp}} \leq 0 \text{ est possible (verrouillage)}}$

$$\mathrm{N_E} = 30$$

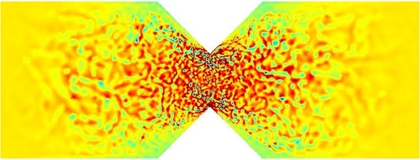
$$\mathrm{N_N^I} = 8\,, \quad \mathrm{N_N^\xi} = 4\,, \quad \mathrm{N_N^T} = 12$$

$$\mathrm{N^{incomp}} = 10$$

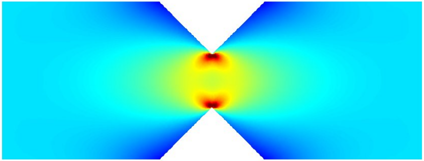
Difficultés liées à l'incompressibilité : illustration (en élasticité)



$$\boxed{\nu = 0,4999}$$



(T3)



(T6)

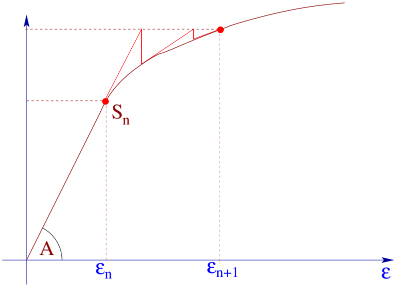
Plan

Méthode de Newton modifiée avec direction constante

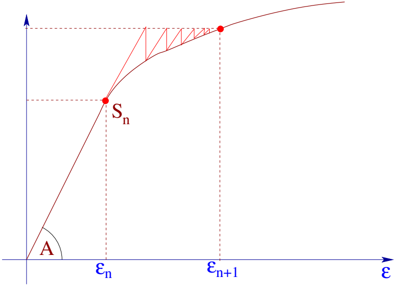
- Matrice tangente cohérente $[\mathbb{K}^{\mathsf{EP}}]$ remplacée par une matrice **constante** $[\hat{\mathbb{K}}]$
  Exemple : $[\hat{\mathbb{K}}] = [\mathbb{K}]$
- **Avantage :** simplification, réduction du temps de calcul consommé par itération
- **Inconvénient :** perte de la convergence quadratique de la méthode de Newton

Description de cette variante simplifiée d'algorithme élasto-plastique : cf. livre.

Interprétation



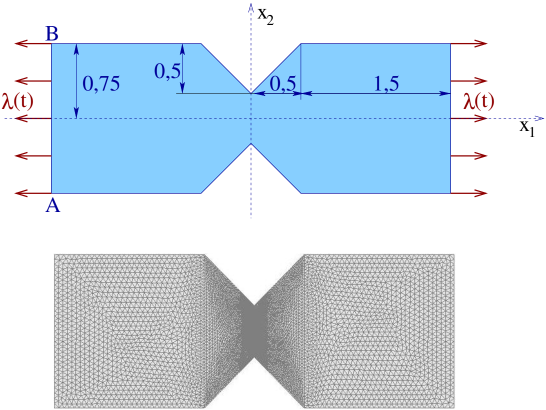
$[\mathbb{K}^{\mathsf{EP}}]$ (cohérent)



$[\hat{\mathbb{K}}]$ (constant)

Plan

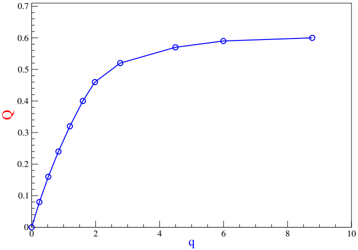
Exemple 1 : illustration des algorithmes

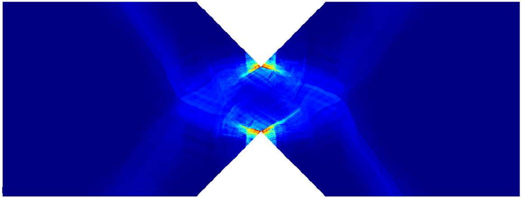


- Déformations planes
- Maillage : 8792 noeuds, 17150 éléments
- Comportement :
  $R(p) = \sigma_0 + hp$,
  $\sigma_0 = 0,88E$,
  $\nu = 0,3$,
  $h = 0$ ou $h = 0,05E$
- Liaisons :
  $\xi_1(A) = \xi_2(A) = \xi_1(B) = 0$
  (blocage des mvts. rigides)

(i) Matériau élastique – parfaitement plastique $(h = 0)$

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Q	0	0,08	0,16	0,24	0,32	0,40	0,46	0,52	0,57	0,59	0,6



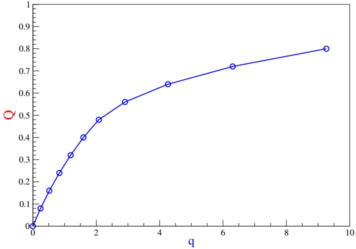


n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
(a) $[\mathbb{K}^{\text{EP}}]$	1	4	4	4	4	5	6	7	8	8
(b) $[\hat{\mathbb{K}}] = [\mathbb{K}^1_{n+1}]$	1	18	25	40	46	74	120	147	79	190
(c) $[\hat{\mathbb{K}}] = [\mathbb{K}]$	1	18	44	109	227	380	821	1259	1396	3639

Nombre d'itérations pour chaque pas de temps : méthode de Newton utilisant
(a) la matrice tangente cohérente
(b) à chaque pas de temps, la matrice tangente élastoplastique à la première itération
(c) la matrice de rigidité élastique.

(ii) Matériau élastoplastique avec écrouissage ($h = 0,05E$)

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Q	0	0,08	0,16	0,24	0,32	0,40	0,48	0,56	0,64	0,72	0,8

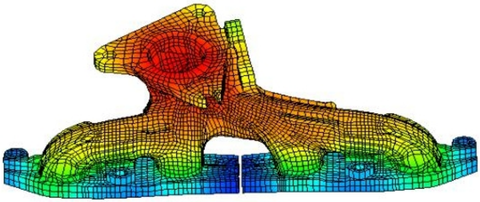


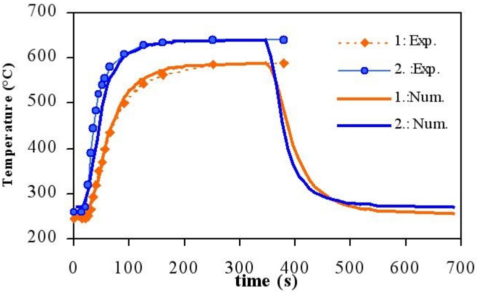
n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
(a) $[\mathbb{K}^{\mathrm{EP}}]$	1	3	3	3	4	5	5	5	5	5
(b) $[\hat{\mathbb{K}}] = [\mathbb{K}^1_{n+1}]$	1	16	18	23	27	40	74	70	44	52
(c) $[\hat{\mathbb{K}}] = [\mathbb{K}]$	1	16	34	54	59	80	102	113	128	147

Nombre d'itérations pour chaque pas de temps : méthode de Newton utilisant
(a) la matrice tangente cohérente
(b) à chaque pas de temps, la matrice tangente élastoplastique à la première itération
(c) la matrice de rigidité élastique.

Plan

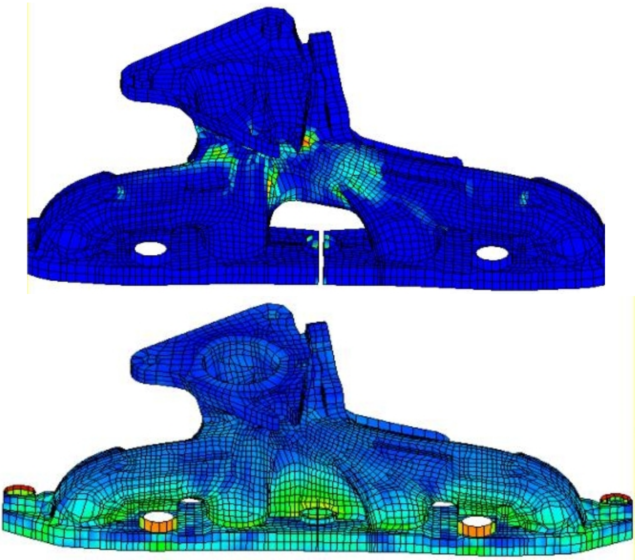
Exemple 2 : prototype de collecteur d'échappement



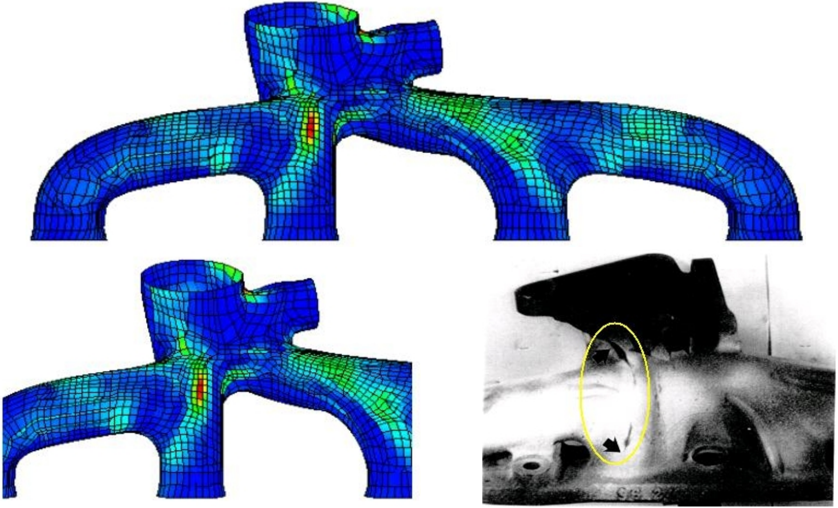


Etude PSA / LMS / LML Lille (Constantinescu, Charkaluk, Lederer, Verger 2004)

- Ecoulement gaz d'échappement chauds
  $\rightarrow$ température élevée
  $\rightarrow$ réponse thermomécanique **élastoplastique**
- Cycles thermiques démarrage / fonctionnement / arrêt
  $\rightarrow$ fatigue
  $\rightarrow$ durée de vie ($\mathrm{N}_{\mathsf{rupt}}$ cycles)
- Etat élastoplastique se stabilise après $\mathrm{N}_{\mathsf{stab}} < \mathrm{N}_{\mathsf{rupt}}$ cycles
- $\mathrm{N}_{\mathsf{rupt}}$ estimé par critère de fatigue fonction de l'état élastoplastique stabilisé à $\mathrm{N}_{\mathsf{stab}}$ cycles



Champs de déformation plastique cumulée (haut) et de contrainte équivalente de von Mises (bas) obtenus une fois l'état stabilisé atteint.



Prototype de collecteur d'échappement : distribution du critère de fatigue calculé à l'aide des champs élastoplastiques (haut et gauche), rupture observée expérimentalement sur le prototype (droite).

Conclusion amphis 6 et 7

- Calcul élastoplastique d'une structure : combinaison **itérative** de :
  - **Etape locale :**
    intégration du comportement élastoplastique sur un pas de temps (amphi 6)
  - **Procédure globale :**
    incorporation dans les équations (faibles) d'équilibre et résolution (amphi 7)

  Présentation restreinte au modèle élastoplastique défini par
  (von Mises + écrouissage isotrope + règle de normalité)
- Formulation **implicite** de l'intégration en temps discret
- Intégration locale par l'**algorithme de retour radial**
- Erreur d'intégration en temps discret : **Ecart à la radialité**
- Notion d'**opérateur tangent cohérent local** $\boldsymbol{\mathcal{A}}^{\mathsf{EP}}(\Delta \underline{\underline{\varepsilon}}_n, \mathcal{S})$
- Notion de **matrice tangente cohérente** permettant la mise en oeuvre de la méthode de Newton
- **Intégration locale + opérateur tangent cohérent :**
  cadre applicable à de nombreux autres modèles de comportement.

www.lms.polytechnique.fr/users/bonnet/enseignement.html