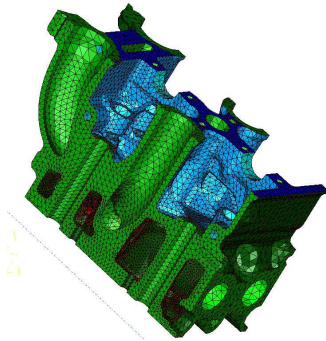


# Analyse des structures mécaniques par la méthode des éléments finis



© PSA Peugeot Citroën

[www.lms.polytechnique.fr/users/bonnet/enseignement.html](http://www.lms.polytechnique.fr/users/bonnet/enseignement.html)

Département de Mécanique, Ecole Polytechnique, 2009–2010

## Retour sur l'amphi 5

- ▶ **Types de comportements non-linéaires** et leur importance pratique :
  - Propagation de fissure, endommagement ;
  - Contact unilatéral ;
  - Non-linéarités géométriques (situations hors du cadre HPP) ;
  - Non-linéarités physiques : élasticité non-linéaire, **élastoplasticité**
- ▶ **Notion d'algorithme itératif** pour la recherche d'une position d'équilibre
  - Formulation d'un « résidu » non-linéaire  $\mathcal{R}(\underline{u}; \underline{w})$  à annuler ;
  - Méthode de Newton et variantes
  - Notion de module d'élasticité tangent (local) ;
  - Notion de rigidité tangente (global).

## Plan du cours

### Concepts fondamentaux et leur application en élasticité linéaire statique

- ▶ Amphi 1 – Résolution approchée de problèmes d'équilibre en élasticité
- ▶ Amphi 2 – La notion d'élément fini isoparamétrique
- ▶ Amphi 3 – La méthode des éléments finis en élasticité linéaire
- ▶ Amphi 4 – Application à la mécanique linéaire de la rupture

### Régime non-linéaire quasistatique, application aux solides élastoplastiques

- ▶ Amphi 5 – Calcul de solides à comportement non-linéaire
- ▶ **Amphi 6 – Calcul de solides élastoplastiques 1 : aspects locaux**
- ▶ Amphi 7 – Calcul de solides élastoplastiques 2 : aspects globaux

### Régime linéaire, avec évolution temporelle

- ▶ Amphi 8 – Evolution thermique et thermoélasticité linéaire quasistatique
- ▶ Amphi 9 – Analyse dynamique des structures élastiques

## Amphi 6 – Calcul de solides élastoplastiques 1 : aspects locaux

1. Le comportement élastoplastique : rappels (cf. cours MEC 551)
2. Calcul numérique d'une structure élastoplastique : formulation
3. Intégration locale du comportement élastoplastique
  - Point de vue implicite et intégration en temps discret
  - Prédiction élastique et correction
  - Algorithme de retour radial
  - Erreur d'intégration temporelle : écart à la radialité
4. Exemple

# Plan

## 1. Le comportement élastoplastique : rappels (cf. cours MEC 551)

## 2. Calcul numérique d'une structure élastoplastique : formulation

## 3. Intégration locale du comportement élastoplastique

Point de vue implicite et intégration en temps discret

Prédiction élastique et correction

Algorithme de retour radial

Erreur d'intégration temporelle : écart à la radialité

## 4. Exemple

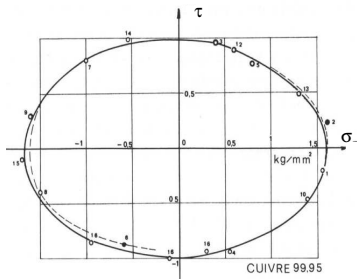
## Domaine d'élasticité, limite d'élasticité, critère

- ▶ Un grand nombre de matériaux présentent un comportement élastique, **dans certaines limites**
- ▶ Notion de limite d'élasticité, observée expérimentalement
- ▶ Domaine d'élasticité dans l'espace des contraintes : introduction d'un critère

$$f(\underline{\sigma}) < 0 \quad \text{pour tout état de contrainte élastique}$$

- ▶ Pour un matériau **élastoplastique**, le critère est un **seuil** :

$$f(\underline{\sigma}) \leq 0 \quad \text{pour tout état de contrainte}$$



[Bui, 1970]

## Critère de von Mises

$$\boxed{\sigma^{\text{eq}} - R \leq 0} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} R & \text{limite d'élasticité} \\ \sigma^{\text{eq}} = \sqrt{\frac{3}{2}} \|\underline{\underline{s}}\| & \text{contrainte équivalente} \\ \underline{\underline{s}} = \underline{\underline{\sigma}} - \frac{1}{3} \text{Tr}(\underline{\underline{\sigma}}) \underline{\underline{1}} & \text{déviateur des contraintes} \end{cases}$$

- ▶ **Critère indépendant de la pression**
- ▶ **Sert à décrire la plasticité des métaux**  
(déformation plastique par cisaillement, dislocations dans le réseau cristallin)
- ▶ Pour  $\underline{\underline{\sigma}} = \sigma(\underline{\underline{e}}_x \otimes \underline{\underline{e}}_x)$  uniaxial, on a  $\boxed{\sigma^{\text{eq}} = \sigma}$  (explication du facteur  $\sqrt{3/2}$ )
- ▶  $R$  : limite d'élasticité observée en traction-compression uniaxiale.

## Evolution de la surface seuil, écrouissage

### ► Observations :

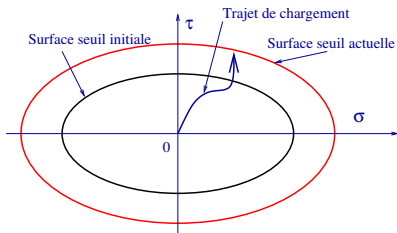
- Poursuite du chargement (habituellement) possible au-delà de la limite initiale d'élasticité ;
- Charge au-delà de la limite initiale d'élasticité, puis décharge, puis re-charge : **la surface seuil a varié**

### ► Ce phénomène est appelé **écrouissage**.

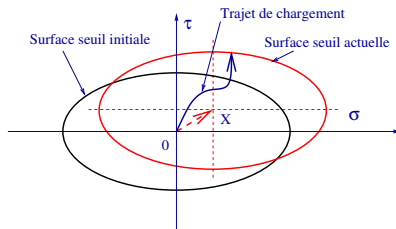
### ► La surface seuil évolue avec la **déformation plastique** créée

### ► Ecrouissage isotrope :

$$f(\underline{\sigma}) - R \leq 0 \quad \text{seuil } R \text{ fonction de la déformation plastique}$$



**Ecrouissage isotrope**



**Ecrouissage cinématique**

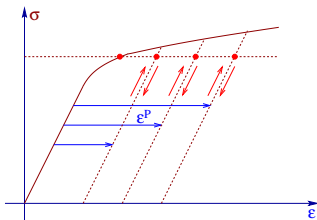


## Déformation plastique

- ▶ Parties élastique et plastique de la déformation

$$\underline{\underline{\varepsilon}}^E = \mathcal{S} : \underline{\underline{\sigma}}, \quad \underline{\underline{\varepsilon}}^P = \underline{\underline{\varepsilon}} - \underline{\underline{\varepsilon}}^E \quad \text{soit} \quad \underline{\underline{\sigma}} = \mathcal{A} : \underline{\underline{\varepsilon}}^E = \mathcal{A} : (\underline{\underline{\varepsilon}} - \underline{\underline{\varepsilon}}^P)$$

- ▶ Par construction,  $\underline{\underline{\varepsilon}}^P = \underline{\underline{0}}$  dans une évolution purement élastique du matériau
- ▶ Un niveau de contrainte donné peut correspondre à une infinité de valeurs de  $\underline{\underline{\varepsilon}}^P$  : **L'état actuel du matériau dépend de l'histoire du chargement.**

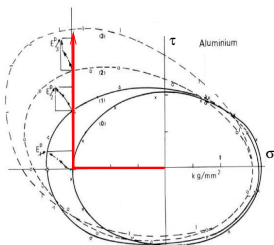


- ▶ Déformation plastique cumulée : mesure le trajet de déformation plastique

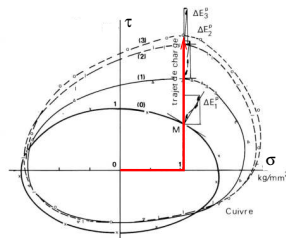
$$p(t) = \sqrt{\frac{2}{3}} \int_0^t \|\dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}^P(\tau)\| d\tau \quad \text{en uniaxial : } \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\varepsilon}}^P = \sigma^{\text{eq}} p \text{ d'où le facteur } \sqrt{2/3}$$

## Règle de normalité

- ▶ Constatation expérimentale : **normalité des vitesses de déformation plastique à la surface seuil**, en différents points d'un trajet de chargement



[Bui, 1970]



- ▶ Formulation de la **règle de normalité** :

$$\begin{cases} \text{Si } f(\underline{\underline{\sigma}}) < 0 & \underline{\underline{\dot{\epsilon}}}^P = \underline{\underline{0}} \\ \text{Si } f(\underline{\underline{\sigma}}) = 0 & \underline{\underline{\dot{\epsilon}}}^P \text{ est normale extérieure à la surface de plasticité } f(\underline{\underline{\sigma}}) = 0 \end{cases}$$

$$\underline{\underline{\dot{\epsilon}}}^P = \dot{\gamma} \frac{\partial f}{\partial \underline{\underline{\sigma}}} \quad \dot{\gamma} \geq 0 \quad f(\underline{\underline{\sigma}}) \leq 0 \quad \dot{\gamma} f(\underline{\underline{\sigma}}) = 0$$

$\dot{\gamma}$  : « **multiplicateur plastique** », *a priori* inconnu.

## Règle de normalité : formulation pour le critère de von Mises

- ▶ Normale à la surface de plasticité :

$$\frac{\partial f}{\partial \underline{\underline{\sigma}}} = \frac{3}{2\sigma^{\text{eq}}} \underline{\underline{s}} = \sqrt{\frac{3}{2}} \underline{\underline{N}} \quad (\|\underline{\underline{N}}\| = 1)$$

- ▶ Règle de normalité

$$\underline{\underline{\dot{\epsilon}}}^{\text{P}} = \dot{\gamma} \frac{3}{2\sigma^{\text{eq}}} \underline{\underline{s}} = \dot{\gamma} \sqrt{\frac{3}{2}} \underline{\underline{N}}$$

- ▶ Lien entre  $\dot{\gamma}$  et  $\dot{p}$  :

$$\dot{p} = \sqrt{\frac{2}{3}} \|\underline{\underline{\dot{\epsilon}}}^{\text{P}}\| = \sqrt{\frac{2}{3}} \dot{\gamma} \frac{3}{2\sigma^{\text{eq}}} \sqrt{\frac{2}{3}} \sigma^{\text{eq}} = \dot{\gamma} \quad \dot{p} = \dot{\gamma}$$

Dans la suite : relations de comportement écrites avec  $\dot{p}$  (élimination de  $\dot{\gamma}$ )

En particulier :

$$\underline{\underline{\dot{\epsilon}}}^{\text{P}} = \dot{p} \frac{3}{2\sigma^{\text{eq}}} \underline{\underline{s}} = \dot{p} \sqrt{\frac{3}{2}} \underline{\underline{N}}$$

## Récapitulation : modèle de comportement considéré

### Hypothèses de base :

- ▶ HPP ; élasticité linéaire isotrope ;
- ▶ Critère de von Mises ; écoulement plastique obéissant à la règle de normalité ;
- ▶ Ecrouissage isotrope.

### Relations de comportement :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \kappa \text{tr}(\underline{\underline{\varepsilon}}) + 2\mu(\underline{\underline{e}} - \underline{\underline{\varepsilon}}^P) \quad \text{élasticité}$$

$$f(\underline{\underline{\sigma}}, p) = \sigma^{\text{eq}} - R(p) \leq 0 \quad \text{critère de von Mises}$$

$$\underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}^P = \dot{p} \frac{3}{2\sigma^{\text{eq}}} \underline{\underline{s}} = \sqrt{\frac{3}{2}} \dot{p} \underline{\underline{N}}, \quad \dot{p} \geq 0, \quad \dot{p}(\sigma^{\text{eq}} - R(p)) = 0 \quad \text{règle de normalité}$$

$$3\kappa = 2\mu \frac{1 + \nu}{1 - 2\nu} = 3\lambda + 2\mu = \frac{E}{1 - 2\nu} \quad \text{module de compressibilité isotrope}$$

**Hypothèses sur**  $R(p)$  (convexité de  $f(\underline{\underline{\sigma}}, p) = \sigma^{\text{eq}} - R(p)$ ) :

$$(i) \quad R(0) = \sigma_0 \quad (ii) \quad R'(p) \geq 0$$

$$(iii) \quad R(\alpha p_1 + (1 - \alpha)p_2) \geq \alpha R(p_1) + (1 - \alpha)R(p_2) \quad (0 \leq \alpha \leq 1)$$

# Plan

1. Le comportement élastoplastique : rappels (cf. cours MEC 551)

2. Calcul numérique d'une structure élastoplastique : formulation

3. Intégration locale du comportement élastoplastique

Point de vue implicite et intégration en temps discret

Prédiction élastique et correction

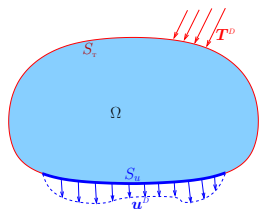
Algorithme de retour radial

Erreur d'intégration temporelle : écart à la radialité

4. Exemple

## Calcul numérique d'une structure élastoplastique : formulation

- ▶ HPP, quasistatique ;
- ▶ Chargements (lentement) évolutifs ;
- ▶  $S_\xi$  et  $S_T$  indépendantes du temps



$$\begin{aligned} \underline{\underline{\varepsilon}} &= \frac{1}{2}(\nabla \underline{u} + \nabla^T \underline{u}) && \text{dans } \Omega \times [0, T] && \text{(compatibilité)} \\ \operatorname{div} \underline{\underline{\sigma}} + \rho \underline{f} &= \underline{0} && \text{dans } \Omega \times [0, T] && \text{(équilibre)} \\ \underline{\underline{\sigma}} &= \kappa \operatorname{tr}(\underline{\underline{\varepsilon}}) \underline{1} + 2\mu(\underline{\underline{\varepsilon}} - \underline{\underline{\varepsilon}}^P) && && \text{(comportement, partie élastique)} \\ \dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}^P &= \dot{p} \frac{3}{2\sigma^{\text{eq}}} \underline{\underline{s}}, \quad \dot{p} \geq 0, \quad \sigma^{\text{eq}} - R(p) \leq 0, \quad \dot{p}[\sigma^{\text{eq}} - R(p)] = 0 && && \text{(comportement, partie plastique)} \\ \underline{u}(\underline{x}, t) &= \underline{u}^D(\underline{x}, t) && \text{sur } S_\xi \times [0, T] && \text{(déplacements imposés)} \\ \underline{T}(\underline{x}, t) &= \underline{T}^D(\underline{x}, t) && \text{sur } S_T \times [0, T] && \text{(efforts imposés)} \\ \underline{\underline{\varepsilon}}^P(\underline{x}, 0) &= \underline{0} && \text{dans } \Omega && \text{(condition initiale)} \end{aligned}$$

## Principe de la méthode de résolution numérique

### Retour sur le cas élastique non linéaire (amphi 5) :

recherche de **position d'équilibre**, algorithme fondé sur

- Formulation faible des équations d'équilibre (PPV)
- Recherche de  $\underline{u}$  par **approximations successives** : suite  $\underline{u}^{(k)} \rightarrow \underline{u}$  par la méthode de Newton

- Relation de comportement **instantanée**

$$\underline{\underline{\sigma}} = \partial\phi / \partial\underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{\underline{\varepsilon}}[\underline{u}]) = \mathcal{F}^{\text{elas}}(\underline{u})$$

### Cas élastoplastique : démarche analogue, mais avec **différences essentielles** :

- **Evolution** (quasistatique) : solution fonction de  $(\underline{x}, t)$  : recherche d'une **suite** de positions d'équilibre
- Relation de comportement **non instantanée (histoire)** :

$$\underline{\underline{\sigma}}(\underline{x}, t) \neq \mathcal{F}^{\text{plas}}(\underline{u}(\underline{x}, t))$$

## Discrétisation temporelle, résolution pas à pas



### ► But de l'algorithme :

calcul de  $\mathcal{S}_n \stackrel{\text{def}}{=} \{\underline{u}_n, \underline{\varepsilon}_n, \underline{\varepsilon}_n^P, \underline{\sigma}_n \dots\}$  à chaque instant  $t = t_n$

(notation :  $f_n(\underline{x}) \stackrel{\text{def}}{=} f(\underline{x}, t_n)$ )

- **Approche incrémentale** : calcul de  $\mathcal{S}_0, \mathcal{S}_1, \dots, \mathcal{S}_M$  de proche en proche
- Recherche d'un procédé algorithmique réalisant

Connaissant  $\mathcal{S}_n$  et  $(\underline{f}_{n+1}, \underline{u}_{n+1}^D, \underline{T}_{n+1}^D)$ , trouver  $\mathcal{S}_{n+1}$



## Approche par les déplacements

Pour traiter chaque incrément  $\mathcal{S}_n \rightarrow \mathcal{S}_{n+1}$  :

- ▶ Equilibre (local + C.L.) sous forme faible, à l'instant final  $t = t_{n+1}$
- ▶ Approche par les déplacements ; approximation par éléments finis de  $\underline{u}_{n+1}$ ,  $\underline{w}$ .

Conséquences :

- Le déplacement  $\underline{u}_{n+1}$  a le statut d'inconnue principale ;
- **Besoin d'exprimer  $\underline{\sigma}_{n+1}$  comme grandeur dépendante**, sous la forme

$$\boxed{(\underline{u}_{n+1}, \mathcal{S}_n) \longrightarrow \underline{\sigma}_{n+1} \stackrel{?}{=} \mathcal{F}(\underline{u}_{n+1}; \mathcal{S}_n)} \quad (\mathcal{F} : \text{algorithme à déterminer})$$

- **Supposant l'algorithme  $\mathcal{F}$  connu**, définition du **résidu** (écart à l'équilibre) :

$$\mathcal{R}(\underline{u}_{n+1}; \underline{w}, \mathcal{S}_n) = \int_{\Omega} \mathcal{F}(\underline{u}_{n+1}; \mathcal{S}_n) : \underline{\underline{\varepsilon}}[\underline{w}] \, dV - \int_{\Omega} \rho \underline{f}_{n+1} \cdot \underline{w} \, dV - \int_{S_T} \underline{T}_{n+1}^D \cdot \underline{w} \, dS$$

- Formulation d'une équation non linéaire d'inconnue  $\underline{u}_{n+1}$  :

$$\boxed{\text{trouver } \underline{u}_{n+1} \in \mathcal{C}(\underline{u}_{n+1}^D), \quad \mathcal{R}(\underline{u}_{n+1}; \underline{w}, \mathcal{S}_n) = 0 \quad \forall \underline{w} \in \mathcal{C}(\underline{0})}$$

## Approche par les déplacements

trouver  $\underline{u}_{n+1} \in \mathcal{C}(\underline{u}_{n+1}^D)$ ,  $\mathcal{R}(\underline{u}_{n+1}; \underline{w}, \mathcal{S}_n) = 0 \quad \forall \underline{w} \in \mathcal{C}(\underline{0})$

Nécessité d'une procédure **itérative** pour trouver  $\underline{u}_{n+1}$

### Calcul complet sur $t \in [0, T]$ : deux niveaux

- ▶ **Incrémental** : recherche de la réponse aux instants successifs

$t = t_0, t_1, t_2 \dots t_M$ .

- **Itératif** : calcul de  $\mathcal{S}_n$  à  $t = t_n$

Pour chaque pas de temps : **combinaison (itérative)** de deux types de traitements :

- ▶ Traitement **local** des relations de comportement (algorithme  $\mathcal{F}$ ) :
  - Méthode d'intégration locale du comportement élastoplastique sur un pas de temps (suite de cet amphi)
- ▶ Traitement **global** des relations d'équilibre
  - Amphi 7

# Plan

1. Le comportement élastoplastique : rappels (cf. cours MEC 551)

2. Calcul numérique d'une structure élastoplastique : formulation

**3. Intégration locale du comportement élastoplastique**

Point de vue implicite et intégration en temps discret

Prédiction élastique et correction

Algorithme de retour radial

Erreur d'intégration temporelle : écart à la radialité

4. Exemple

## Intégration locale du comportement élastoplastique

Problème auxiliaire **local** (à l'échelle de l'élément de matière) :

- ▶ Etat  $\mathcal{S}_n$  à l'instant  $t_n$  **connu** ;
- ▶  $\{\underline{\underline{\varepsilon}}_n, \underline{\underline{\varepsilon}}_n^P, \underline{\underline{\sigma}}_n\}$  **homogènes** ;
- ▶ On **impose** un incrément de déformation  $\Delta \underline{\underline{\varepsilon}}_n$  entre les instants  $t_n$  et  $t_{n+1}$  ;

Trouver la contrainte  $\underline{\underline{\sigma}}_{n+1}$  sous la forme  $\underline{\underline{\sigma}}_{n+1} = \mathcal{F}(\Delta \underline{\underline{\varepsilon}}_n; \mathcal{S}_n)$

$$\boxed{\underline{\underline{\varepsilon}}_n, \underline{\underline{\varepsilon}}_n^P, \underline{\underline{\sigma}}_n} \longrightarrow \boxed{\underline{\underline{\varepsilon}}_{n+1} = \underline{\underline{\varepsilon}}_n + \Delta \underline{\underline{\varepsilon}}_n}, \quad \boxed{\underline{\underline{\sigma}}_{n+1} = ?, \underline{\underline{\varepsilon}}_{n+1}^P = ?}$$

- ▶ Commentaires :
  - La déformation plastique est une variable dépendante :

$$\underline{\underline{\varepsilon}}_{n+1}^P = \underline{\underline{\varepsilon}}_{n+1} - \mathcal{S} : \underline{\underline{\sigma}}_{n+1}$$

- La méthode d'intégration du comportement privilégie la déformation plutôt que le déplacement

# Plan

1. Le comportement élastoplastique : rappels (cf. cours MEC 551)

2. Calcul numérique d'une structure élastoplastique : formulation

**3. Intégration locale du comportement élastoplastique**

Point de vue implicite et intégration en temps discret

Prédiction élastique et correction

Algorithme de retour radial

Erreur d'intégration temporelle : écart à la radialité

4. Exemple

## Intégration en temps : point de vue implicite

- ▶ Les relations de comportement comprennent l'équation différentielle

$$\dot{\underline{\underline{\epsilon}}}^P = \dot{p} \frac{3}{2\sigma^{eq}} \underline{\underline{S}} \quad (\text{von Mises} + \text{normalité})$$

- ▶ **Intégration numérique** : approximation par différence finie de la dérivée :

$$\dot{\underline{\underline{\epsilon}}}^P(t) \approx \frac{1}{\Delta t} [\underline{\underline{\epsilon}}_{n+1}^P - \underline{\underline{\epsilon}}_n^P] \quad (t_n \leq t \leq t_{n+1})$$

Choix de l'affectation de la différence finie :

- $t = t_n$  : point de vue **explicite** ;
  - $t = t_{n+1}$  : point de vue **implicite** ;
- ▶ **Les propriétés de l'intégration numérique (stabilité, précision) dépendent de ce choix** (amphi 8). Fréquemment :
- Approche explicite : stabilité **conditionnelle** (il faut  $\Delta t$  « assez petit »)
  - Approche implicite : stabilité **inconditionnelle** (pour tout choix de  $\Delta t$ )

**On adopte une approche implicite**

## Relations de comportement en temps discret

- On adopte une approche implicite :

écriture des relations de comportement à l'instant final  $t_{n+1}$

$$(a) \quad \underline{\underline{\sigma}}_{n+1} = \underline{\underline{\sigma}}_n + \kappa \text{tr}(\Delta \underline{\underline{\varepsilon}}_n) \underline{\underline{1}} + 2\mu(\Delta \underline{\underline{e}}_n - \Delta \underline{\underline{\varepsilon}}_n^P) \quad \text{élasticité}$$

$$(b) \quad \sigma_{n+1}^{\text{eq}} - R(p_n + \Delta p_n) \leq 0 \quad \text{critère de von Mises}$$

$$(c) \quad \Delta \underline{\underline{\varepsilon}}_n^P = \Delta p_n \frac{3}{2\sigma_{n+1}^{\text{eq}}} \underline{\underline{s}}_{n+1} = \Delta p_n \sqrt{\frac{3}{2}} \underline{\underline{N}}_{n+1}$$

$$\Delta p_n \geq 0, \quad \Delta p_n (\sigma_{n+1}^{\text{eq}} - R(p_n + \Delta p_n)) = 0 \quad \text{règle de normalité}$$

$\Delta \underline{\underline{e}}_n$  : partie déviatorique de  $\Delta \underline{\underline{\varepsilon}}_n$  ;

$\Delta p_n = p_{n+1} - p_n$  : incrément (inconnu) de déformation plastique cumulée ;

$\underline{\underline{N}}_{n+1}$  : normale unitaire (inconnue) à la surface de plasticité **finale**.

# Plan

1. Le comportement élastoplastique : rappels (cf. cours MEC 551)

2. Calcul numérique d'une structure élastoplastique : formulation

**3. Intégration locale du comportement élastoplastique**

Point de vue implicite et intégration en temps discret

Prédiction élastique et correction

Algorithme de retour radial

Erreur d'intégration temporelle : écart à la radialité

4. Exemple



## Prédiction élastique et correction

$$(a) \quad \underline{\underline{\sigma}}_{n+1} = \underline{\underline{\sigma}}_n + \kappa \text{tr}(\Delta \underline{\underline{\varepsilon}}_n) \underline{\underline{1}} + 2\mu(\Delta \underline{\underline{e}}_n - \Delta \underline{\underline{\varepsilon}}_n^P) \quad \text{élasticité}$$

$$(b) \quad \sigma_{n+1}^{\text{eq}} - R(p_n + \Delta p_n) \leq 0 \quad \text{critère de von Mises}$$

$$(c) \quad \Delta \underline{\underline{\varepsilon}}_n^P = \Delta p_n \frac{3}{2\sigma_{n+1}^{\text{eq}}} \underline{\underline{s}}_{n+1} = \Delta p_n \sqrt{\frac{3}{2}} \underline{\underline{N}}_{n+1}$$

$$\Delta p_n \geq 0, \quad \Delta p_n (\sigma_{n+1}^{\text{eq}} - R(p_n + \Delta p_n)) = 0 \quad \text{règle de normalité}$$

### ► La solution des relations de comportement varie suivant

$$\sigma_{n+1}^{\text{eq}} - R(p_n + \Delta p_n) < 0 \quad \text{évolution purement élastique, } \Delta p_n = 0$$

$$\sigma_{n+1}^{\text{eq}} - R(p_n + \Delta p_n) = 0 \quad \text{évolution élastoplastique, } \Delta p_n \geq 0$$

### ► Idée : commencer par tester l'hypothèse d'une évolution purement élastique. Définition d'un **prédicteur élastique** ( $\Delta \underline{\underline{\varepsilon}}_n^P = \underline{\underline{0}}$ )

$$\underline{\underline{\sigma}}_{n+1}^{\text{elas}} = \underline{\underline{\sigma}}_n + \kappa \text{tr}(\Delta \underline{\underline{\varepsilon}}_n) \underline{\underline{1}} + 2\mu \Delta \underline{\underline{e}}_n \quad \text{soit} \quad \underline{\underline{s}}_{n+1}^{\text{elas}} = \underline{\underline{s}}_n + 2\mu \Delta \underline{\underline{e}}_n$$

### ► Une inégalité importante (preuve : cf. livre p. 155) :

$$f(\underline{\underline{\sigma}}_{n+1}^{\text{elas}}, p_n) \geq f(\underline{\underline{\sigma}}_{n+1}, p_n + \Delta p_n)$$

## Deux possibilités :

(i) **Prédiction élastique plastiquement admissible**,  $f(\underline{\sigma}_{n+1}^{\text{elas}}, p_n) \leq 0$  :

$$f(\underline{\sigma}_{n+1}^{\text{elas}}, p_n) \geq f(\underline{\sigma}_{n+1}, p_n + \Delta p_n) \quad \text{et donc} \quad f(\underline{\sigma}_{n+1}, p_n + \Delta p_n) < 0$$

dans ce cas,  $\underline{\sigma}_{n+1}$  résulte d'une évolution purement élastique, et  
**la prédiction élastique est correcte :**

$$\underline{\sigma}_{n+1} = \underline{\sigma}_{n+1}^{\text{elas}} \quad \underline{\varepsilon}_{n+1}^{\text{P}} = \underline{\varepsilon}_n^{\text{P}} \quad p_{n+1} = p_n$$

## Deux possibilités :

(i) Prédiction élastique plastiquement admissible,

$$f(\underline{\sigma}_{n+1}^{\text{elas}}, p_n) \leq 0$$

(ii) Prédiction élastique non plastiquement admissible,

$$f(\underline{\sigma}_{n+1}^{\text{elas}}, p_n) > 0 :$$

- $\Delta \underline{\varepsilon}_n \neq \Delta \underline{\varepsilon}_n^E$ , et il faut donc supposer  $\Delta \underline{\varepsilon}_n^P \neq \underline{0}$ ,  $\Delta p_n > 0$  ;
- Complémentarité sous forme discrète :

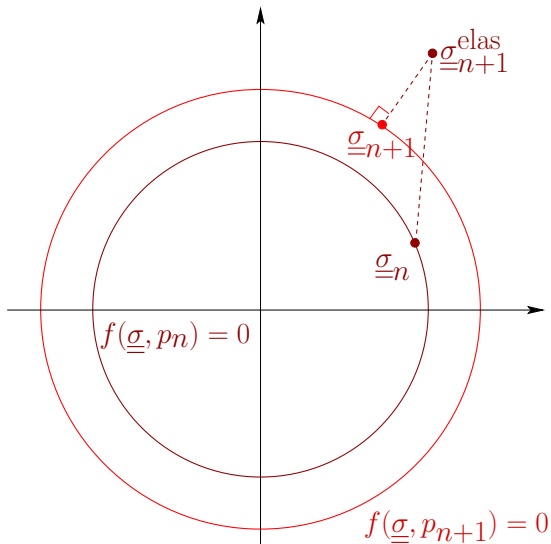
$$\Delta p_n f(\underline{\sigma}_{n+1}, p_n + \Delta p_n) = 0 \implies f(\underline{\sigma}_{n+1}, p_n + \Delta p_n) = 0$$

- Les relations de comportement en temps discret se réduisent à

$$\underline{\sigma}_{n+1} = \underline{\sigma}_{n+1}^{\text{elas}} - 2\mu \Delta \underline{\varepsilon}_n^P, \quad \Delta \underline{\varepsilon}_n^P = \Delta p_n \sqrt{\frac{3}{2}} \underline{N}_{n+1}, \quad \Delta p_n > 0$$

- ▶ La correction  $\underline{\sigma}_{n+1} - \underline{\sigma}_{n+1}^{\text{elas}}$  est normale à la surface de plasticité **finale**
- ▶ Nature **implicite** du calcul de la correction (surface de plasticité finale inconnue)

## Interprétation géométrique dans l'espace des contraintes



# Plan

1. Le comportement élastoplastique : rappels (cf. cours MEC 551)

2. Calcul numérique d'une structure élastoplastique : formulation

**3. Intégration locale du comportement élastoplastique**

Point de vue implicite et intégration en temps discret

Prédiction élastique et correction

**Algorithme de retour radial**

Erreur d'intégration temporelle : écart à la radialité

4. Exemple

## Algorithme de retour radial

Hypothèse : évolution élastoplastique ( $\Delta p_n \neq 0$ ).

**Correction : opération de type implicite** (surface de plasticité finale inconnue)

- ▶ Partie déviatorique du comportement élastique :

$$\underline{s}_{n+1} = \underline{s}_{n+1}^{\text{elas}} - 2\mu\Delta\underline{\varepsilon}_n^{\text{P}} \quad \text{avec} \quad \underline{s}_{n+1}^{\text{elas}} = \underline{s}_n + 2\mu\Delta\underline{e}_n$$

- ▶ De plus :

$$\Delta\underline{\varepsilon}_n^{\text{P}} = \sqrt{\frac{3}{2}}\Delta p_n \underline{N}_{n+1} \quad (\text{règle de normalité})$$

$$\underline{s}_{n+1} = \sqrt{\frac{2}{3}}\sigma_{n+1}^{\text{eq}} \underline{N}_{n+1} \quad (\text{expression de la normale pour le critère de von Mises})$$

$$\Rightarrow \left( \sqrt{\frac{2}{3}}\sigma_{n+1}^{\text{eq}} + 2\mu\sqrt{\frac{3}{2}}\Delta p_n \right) \underline{N}_{n+1} = \underline{s}_{n+1}^{\text{elas}}$$

La normale finale  $\underline{N}_{n+1}$  à la surface de plasticité finale est **colinéaire** à  $\underline{s}_{n+1}^{\text{elas}}$  :

$$\underline{N}_{n+1} = \frac{1}{\|\underline{s}_{n+1}^{\text{elas}}\|} \underline{s}_{n+1}^{\text{elas}} = \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{1}{\sigma_{n+1}^{\text{elas,eq}}} \underline{s}_{n+1}^{\text{elas}} = \underline{N}_{n+1}^{\text{elas}}$$

Elle est donc en fait connue **a priori**, en fonction de  $\mathcal{S}_n$  et  $\Delta\underline{\varepsilon}_n$

## Algorithme de retour radial

- ▶ La normale  $\underline{\underline{N}}_{n+1}$  à la surface de plasticité finale est colinéaire à  $\underline{s}_{n+1}^{\text{elas}}$  :

$$\underline{\underline{N}}_{n+1} = \frac{1}{\|\underline{s}_{n+1}^{\text{elas}}\|} \underline{s}_{n+1}^{\text{elas}} = \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{1}{\sigma_{n+1}^{\text{elas,eq}}} \underline{s}_{n+1}^{\text{elas}} = \underline{N}_{n+1}^{\text{elas}}$$

Elle est donc en fait connue a priori, en fonction de  $\mathcal{S}_n$  et  $\Delta \underline{\underline{\varepsilon}}_n$

- ▶ Contrainte déviatorique finale :

$$\underline{s}_{n+1} = \underline{s}_{n+1}^{\text{elas}} - 2\mu \sqrt{\frac{3}{2}} \Delta p_n \underline{\underline{N}}_{n+1}^{\text{elas}}$$

- ▶ Contrainte équivalente finale :  $\sigma_{n+1}^{\text{eq}} = \sigma_{n+1}^{\text{elas,eq}} - 3\mu \Delta p_n$

- ▶ **Forme discrète de la condition de cohérence** (évolution plastique par hyp.) :

$$\sigma_{n+1}^{\text{elas,eq}} - 3\mu \Delta p_n - R(p_n + \Delta p_n) = 0$$

Equation non-linéaire **scalaire** d'inconnue  $\Delta p_n$ , en général résolue par Newton :

$$\Delta p_n^{(k+1)} = \Delta p_n^{(k)} + \frac{\sigma_{n+1}^{\text{elas,eq}} - 3\mu \Delta p_n^{(k)} - R(p_n + \Delta p_n^{(k)})}{3\mu + R'(p_n + \Delta p_n^{(k)})}$$

## Récapitulation : algorithme de retour radial

(a) Former  $\underline{s}_{n+1}^{\text{elas}} = \underline{s}_n + 2\mu\Delta\underline{e}_n$  (prédicteur élastique), calculer  $\underline{\sigma}_{n+1}^{\text{elas}}$  et  $\sigma_{n+1}^{\text{elas,eq}}$  ;

(b) Calcul de  $f(\underline{\sigma}_{n+1}^{\text{elas}}, p_n)$  et **test** :

► Si  $f(\underline{\sigma}_{n+1}^{\text{elas}}, p_n) \leq 0$  (**évolution élastique**), actualiser par

$$\underline{\sigma}_{n+1} = \underline{\sigma}_{n+1}^{\text{elas}}, \quad \underline{\varepsilon}_{n+1}^{\text{P}} = \underline{\varepsilon}_n^{\text{P}}, \quad p_{n+1} = p_n \quad \text{(FIN)}$$

► Si  $f(\underline{\sigma}_{n+1}^{\text{elas}}, p_n) > 0$  (**évolution élastoplastique**) :

(i) Résoudre  $\underline{\sigma}_{n+1}^{\text{elas,eq}} - 3\mu\Delta p_n - R(p_n + \Delta p_n) = 0$  par rapport à  $\Delta p_n$  ;

(ii) calculer l'incrément de déformation plastique

$$\Delta\underline{\varepsilon}_n^{\text{P}} = \frac{3\Delta p_n}{2\sigma_{n+1}^{\text{elas,eq}}} \underline{s}_{n+1}^{\text{elas}} ;$$

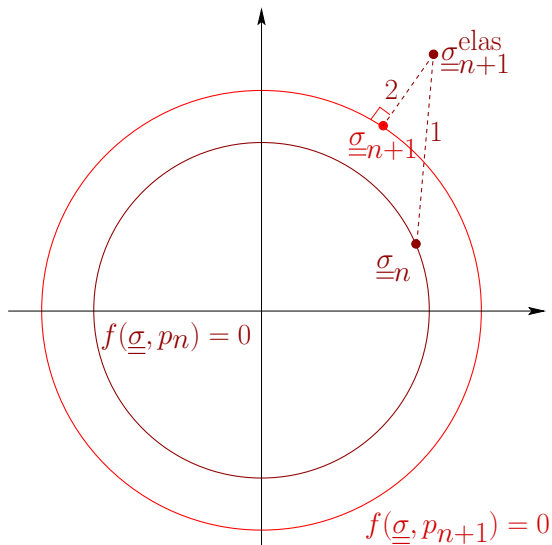
(iii) Actualiser les variables mécaniques :

$$\begin{aligned} \underline{\varepsilon}_{n+1}^{\text{P}} &= \underline{\varepsilon}_n^{\text{P}} + \Delta\underline{\varepsilon}_n^{\text{P}}, & p_{n+1} &= p_n + \Delta p_n \\ \underline{\sigma}_{n+1} &= \underline{\sigma}_n + \kappa \text{tr}(\Delta\underline{\varepsilon}_n) + 2\mu(\Delta\underline{\varepsilon}_n - \Delta\underline{\varepsilon}_n^{\text{P}}) \end{aligned}$$

(FIN)



## Interprétation géométrique dans l'espace des contraintes



# Plan

1. Le comportement élastoplastique : rappels (cf. cours MEC 551)

2. Calcul numérique d'une structure élastoplastique : formulation

**3. Intégration locale du comportement élastoplastique**

Point de vue implicite et intégration en temps discret

Prédiction élastique et correction

Algorithme de retour radial

Erreur d'intégration temporelle : écart à la radialité

4. Exemple

## Écart à la radialité et erreur d'intégration temporelle

Déformation plastique cumulée sur le pas de temps :

$$\Delta p_n = p_{n+1} - p_n = \int_{t_n}^{t_{n+1}} \dot{p}(u) du$$

Règle de normalité (forme continue en temps) :

$$\Delta \underline{\underline{\varepsilon}}_n^P = \underline{\underline{\varepsilon}}_{n+1}^P - \underline{\underline{\varepsilon}}_n^P = \int_{t_n}^{t_{n+1}} \underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}^P(u) du = \sqrt{\frac{3}{2}} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \dot{p}(u) \underline{\underline{N}}(u) du$$

(i) Si normale  $\underline{\underline{N}}$  constante sur  $[t_n, t_{n+1}]$  :  $\underline{\underline{s}}_n, \underline{\underline{s}}_{n+1}^{\text{elas}}$  colinéaires, intégration exacte

$$\implies \Delta \underline{\underline{\varepsilon}}_n^P = \Delta p_n \sqrt{\frac{3}{2}} \underline{\underline{N}}_{n+1} \quad (\text{règle de normalité en temps discret})$$

Equivalence entre relations de comportement **continues** et **discrètes**.

**Algorithme de retour radial : exact si incrément de contrainte radial**

(ii) Si normale  $\underline{\underline{N}}$  variable sur  $[t_n, t_{n+1}]$  :

$$\text{Erreur} = \Delta \underline{\underline{\varepsilon}}_n^P - \Delta p_n \sqrt{\frac{3}{2}} \underline{\underline{N}}_{n+1} = \sqrt{\frac{3}{2}} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \dot{p}(u) [\underline{\underline{N}}(u) - \underline{\underline{N}}_{n+1}] du$$

**Erreur fonction croissante de  $\underline{\underline{N}}(t) - \underline{\underline{N}}_{n+1}$  (écart à la radialité).**

# Plan

1. Le comportement élastoplastique : rappels (cf. cours MEC 551)

2. Calcul numérique d'une structure élastoplastique : formulation

3. Intégration locale du comportement élastoplastique

Point de vue implicite et intégration en temps discret

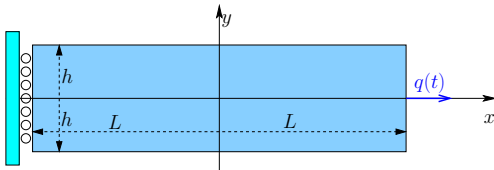
Prédiction élastique et correction

Algorithme de retour radial

Erreur d'intégration temporelle : écart à la radialité

4. Exemple

## Exemple (intégration avec incrément non radial)

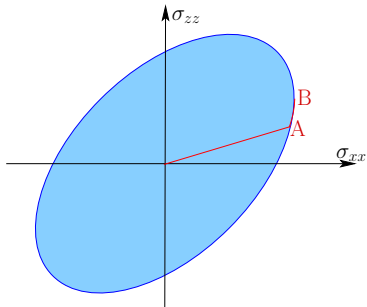


$$\begin{aligned} \xi_x(L, y) &= q(t) & T_y(L, y) &= 0 \\ \xi_x(-L, y) &= T_y(-L, y) &= 0 \\ T_x(x, \pm h) &= T_y(x, \pm h) &= 0 \end{aligned}$$

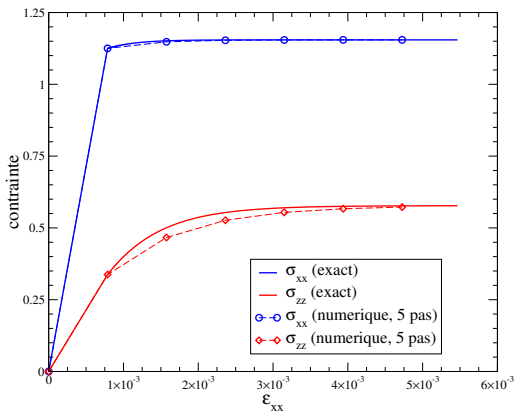
### Solution exacte connue (cf. MEC 551, chap. 5)

- ▶ Hypothèse des déformations planes
- ▶ Matériau élastique, parfaitement plastique  
i.e.  $R'(\rho) = 0$
- ▶ Déformations  $\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy}$  homogènes  
(autres = 0)
- ▶ Contraintes  $\sigma_{xx}, \sigma_{zz}$  homogènes  
(autres = 0)

Chargement plastique (trajet AB) **non radial**

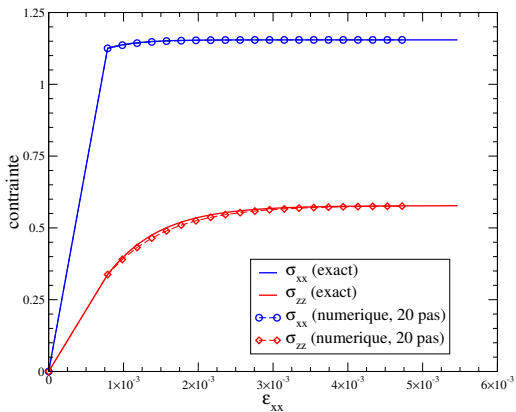


## Exemple (intégration avec incrément non radial) : résultats



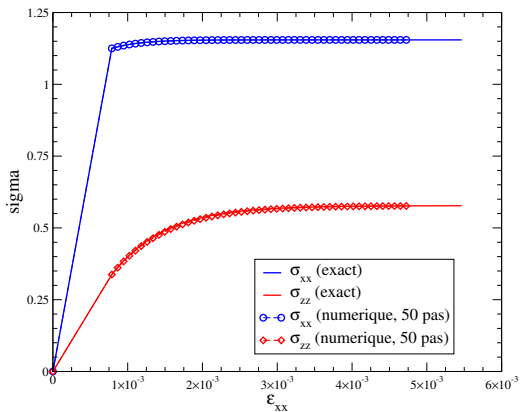
Nombre de pas de temps pour l'évolution plastique : 5

## Exemple (intégration avec incrément non radial) : résultats



Nombre de pas de temps pour l'évolution plastique : **20**

## Exemple (intégration avec incrément non radial) : résultats



Nombre de pas de temps pour l'évolution plastique : **50**



## Conclusion

- ▶ Développement restreint au modèle élastoplastique défini par (von Mises + écrouissage isotrope + règle de normalité)
- ▶ Calcul élastoplastique d'une structure : combinaison **itérative** de :
  - **Etape locale** :  
intégration du comportement élastoplastique sur un pas de temps (**amphi 6**)
  - **Procédure globale** :  
incorporation dans les équations (faibles) d'équilibre et résolution (**amphi 7**)
- ▶ Formulation **implicite** de l'intégration en temps discret
- ▶ Intégration locale par l'**algorithme de retour radial**
- ▶ Erreur d'intégration en temps discret : **Ecart à la radialité**

[www.lms.polytechnique.fr/users/bonnet/enseignement.html](http://www.lms.polytechnique.fr/users/bonnet/enseignement.html)