

MAJEURE DE MECANIQUE

Rupture et Plasticité (MEC 551)

Devoir

A rendre à la scolarité avant le 13 Novembre (délai de rigueur)

Engagement sur l'honneurMerci de lire cette page avant de prendre connaissance du sujet

Votre devoir doit avoir été conçu et rédigé par vous-même. Toutefois, dans certaines limites précisées ci-dessous, vous pouvez discuter sa résolution avec vos enseignants ou d'autres élèves.

Ce qui est autorisé

- Le recours aux données bibliographiques disponibles (bibliothèque, internet,...)
- La discussion des *concepts et méthodes* mis en jeu dans le problème avec d'autres élèves ou enseignants

Ce qui n'est pas autorisé

- L'échange de solutions détaillées avec d'autres élèves
- La recopie de tout ou partie du devoir

Il vous est demandé de vous engager sur l'honneur en recopiant et signant en tête de votre copie le texte ci-dessous :

Je certifie sur l'honneur n'avoir ni reçu ni donné d'aide non autorisée au cours de la résolution de ce problème.

*Date**Nom**Signature*

Propagation des fissures en fatigue

Sujet proposé par Stéphane Andrieux

Les parties 1 et 2 sont indépendantes mais les concepts présentés en partie 1 sont utiles dans tout le devoir

1. Lois de durée de vie et effet de séquence

La loi la plus simple et la plus ancienne pour modéliser la propagation de fissures de fatigue, pour des situations bidimensionnelles, est la loi proposée en 1963 par Paris et Erdogan¹ sur la base d'essais à amplitude constante pour lesquels les vitesses de propagation apparaissaient comme fonction linéaire de la variation du facteur intensité de contrainte dans un diagramme log-log. Elle prend la forme :

$$\frac{da}{dn} = c [\Delta K]^m$$

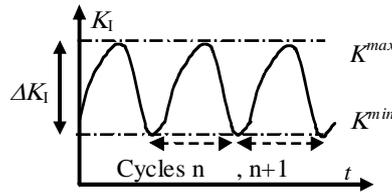


Figure 1 : Définition des sollicitations cycliques

a est ici la longueur de la fissure, n le nombre de cycles, et ΔK la variation du facteur intensité de contrainte en mode I au cours du cycle (définie par $\Delta K = K^{max} - K^{min}$). c et m sont deux paramètres qui caractérisent le matériau à la fatigue (avec typiquement m compris entre 2.5 et 5). Dans ce modèle, on néglige le développement de toute plasticité. On suppose donc que le solide reste entièrement dans le domaine élastique linéaire, ce qui permet de donner le sens usuel au facteur intensité de contrainte et d'utiliser les méthodes de la mécanique linéaire de rupture pour le calculer.

En réalité et même dans les situations simples « mono-amplitude », cette loi a été modifiée pour tenir compte de deux effets.

- Le premier effet est celui du facteur de charge, c'est-à-dire de la valeur moyenne au cours des cycles du facteur intensité de contrainte : $R = K^{min}/K^{max}$. Il est en effet intuitif que pour une même amplitude, les vitesses de propagation sont différentes selon que la valeur moyenne de la sollicitation est nulle (sollicitation alternée) ou positive (sollicitation ondulée en traction).
- Le second effet est un effet de seuil : pour beaucoup de matériaux on ne constate aucune propagation, même à très grand nombre de cycles, en dessous d'une valeur seuil ΔK_s de l'amplitude du facteur intensité de contrainte.

Une des lois les plus simples prenant en compte ces deux effets est la loi de Forman² (1967)

$$\frac{da}{dn} = c \frac{[\langle \Delta K - \Delta K_s \rangle^+]^m}{(1-R)K_{IC} - \Delta K}$$

¹ P. Paris and F. Erdogan A critical analysis of crack propagation laws, Journal of Basic Engineering, Transactions of the American Society of Mechanical Engineers, December 1963, pp. 528-534.

² R.G. Forman, V.E. Kearney and R.M. Engle, Numerical analysis of crack propagation in cyclic-loaded structures, Journal of Basic Engineering, **89** (1967), pp. 459-464

(la notation $\langle x \rangle^+$ désignant la partie positive de x , égale à x si x est positif et à zéro sinon). Deux paramètres supplémentaires à déterminer pour chaque matériau apparaissent dans la loi de Forman : la valeur de ΔK_s et la ténacité K_{IC} du matériau.

En pratique on utilise la loi de propagation en fatigue pour estimer des durées de vie, c'est-à-dire le nombre de cycles correspondant à l'atteinte d'une taille critique de la fissure conduisant à la propagation brutale. En règle générale les sollicitations subies par les structures ne sont pas rigoureusement cycliques, et surtout elles sont souvent constituées de blocs de cycles d'amplitudes différentes correspondant à des régimes de fonctionnement différents. Il est intéressant d'une part de disposer d'une loi reliant taille de la fissure et nombre de cycles, et d'autre part d'examiner les effets de séquence, c'est-à-dire comment la loi permet de représenter les différences observées dans la quasi totalité des cas selon l'ordre des sollicitations imposées (faibles niveaux suivis des grands ou l'inverse par exemple). On considère pour cela des lois générales du type suivant :

$$\frac{da}{dn} = f(\Delta\lambda)F(a) \quad (*)$$

où λ désigne l'amplitude du chargement (à un paramètre) et F une fonction strictement positive ne dépendant que de la géométrie de la pièce et de la taille de la fissure ainsi que des modules élastiques du matériau.

1. La loi de Paris entre-t-elle dans ce cadre ? Celle de Forman ?
2. Montrer que pour une telle loi on a, sur un bloc de N cycles de même amplitude $\Delta\lambda$, une équation du type suivant entre les longueurs initiale a_i et finale a_f de la fissure, le chargement et le nombre de cycles.

$$T(a_f) - T(a_i) = N f(\Delta\lambda)$$

Déterminer une expression formelle de la fonction $T(a)$.

En utilisant la loi de Paris, donner l'expression de la longueur d'une fissure de longueur initiale a_i après N cycles de traction entre 0 et σ^{\max} pour une fissure débouchante perpendiculairement à une surface, libre de charge (cf. figure 2). Dans cette situation, le facteur intensité de contrainte en mode I est :

$$K_I = \sigma \beta \sqrt{\pi a}$$

avec $\beta=1,121$

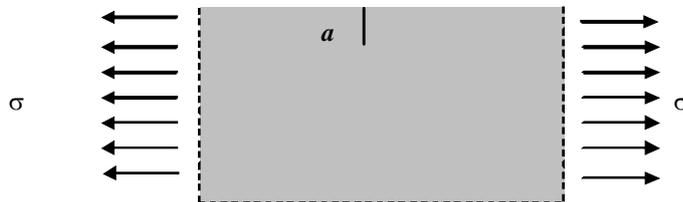


Figure 2 : Fissure débouchante en surface dans un milieu semi infini

3. Montrer que pour les lois du type (*), il n'y pas d'effet de séquence du chargement c'est-à-dire qu'effectuer à partir d'une même longueur de fissure a_i , N_1 cycles d'amplitude $\Delta\lambda_1$, puis N_2 cycles d'amplitude $\Delta\lambda_2$, conduit à la même longueur finale que la séquence inverse.

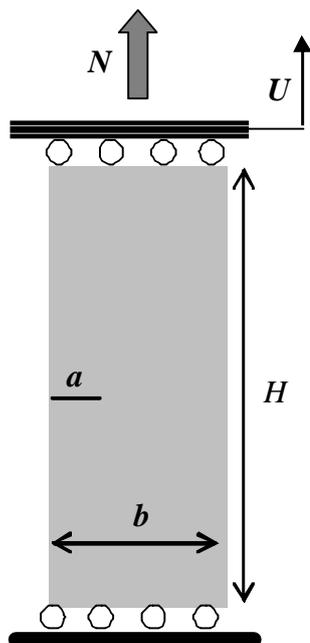
2. Arrêt de fissures de fatigue pour des sollicitations à déformation ou déplacement imposés

Dans la majorité des cas, la rupture par fatigue des pièces mécanique apparaît après un certain nombre de cycles, lorsque la fissure atteint la taille critique conduisant à la rupture brutale. Cet effet peut être incorporé dans la loi de propagation en fatigue elle-même, comme par exemple dans la loi de Forman où on peut vérifier aisément que la vitesse de propagation tend vers l'infini lorsque la valeur du facteur intensité de contrainte maximal au cours du cycle atteint la valeur de la ténacité du matériau.

Cette situation se rencontre dans la quasi totalité des situations où la sollicitation est une sollicitation à effort ou contrainte imposée. En effet dans ce cas les facteurs intensité de contrainte sont en général des fonctions croissantes de la taille de la fissure.

Dans les situations à déformation ou déplacement imposées, en revanche, il peut en être autrement et la décroissance du facteur intensité de contrainte sous ces sollicitations avec la taille de fissure, combiné à l'effet de seuil pour la propagation, peut conduire les fissures à s'arrêter. Sauf sollicitation supplémentaire de plus haute amplitude, la pièce mécanique peut alors être maintenue en service. Par exemple, un pare-brise de voiture peut ainsi (bien que cela ne soit pas conseillé) rester fissuré sans évolution de la fissure. Sur un plan plus industriel, on observe beaucoup de réseaux de fissures stables, dits de faïençage thermique, sur des composants soumis à des chocs thermiques. En effet le choc thermique correspond à une sollicitation à déformation imposée des pièces : lorsque la fissure croît, la rigidité de la pièce diminue et les contraintes d'origine thermique décroissent.

On se propose d'illustrer ce phénomène sur l'exemple simple suivant. Pour une éprouvette mince d'épaisseur e , de largeur b et de hauteur H au moins égale à 3 fois la largeur, comportant une fissure débouchante latérale, on connaît l'expression du facteur intensité de contrainte en mode I et en contrainte plane, sous l'action d'une traction simple exercée à l'extrémité, en fonction de la longueur a de la fissure :



$$K_I^N = \frac{N}{eb} \sqrt{\pi a} f\left(\frac{a}{b}\right)$$

$$f(s) = [1,121 - 0,231s + 10,55s^2 - 21,71s^3 + 30,38s^4]$$

Figure 3 : Eprouvette de traction avec fissure latérale
(*single edge crack tensile specimen*)

4. Déterminer l'expression des taux de restitution de l'énergie à effort N imposé puis déplacement U imposé en fonction de la rigidité $k(a)$ de l'éprouvette fissurée supposée connue.

$$N = k(a)U$$

On prendra garde que pour une progression de la fissure de δa , la fissure créée est d'aire $e \delta a$.

5. A l'aide de la définition de G , de la formule d'Irwin (cf. transparents amphi 3 pour l'expression en contrainte plane requise ici) et de l'expression de K_I^N donnée plus haut, montrer que l'on peut calculer la fonction $k(a)$. Donner son expression formelle en fonction de f (on ne demande pas son calcul complet, on notera : $F(X) = \int_0^X x f^2(x) dx$).

6. Dédurre alors l'expression du facteur intensité de contrainte en mode I à déplacement imposé K_I^U . Là-encore, on se limitera à donner une expression fonction de F et f .

7. On sollicite l'éprouvette par des cycles de chargements compris entre zéro et une valeur maximale N^{max} à force imposée ou U^{max} à déplacement imposé. En réécrivant les facteurs intensité de contraintes dans chaque situation sous la forme :

$$K_I^N(a) = \kappa_N g(a), \quad K_I^U(a) = \frac{\kappa_U}{\left(c + dF\left(\frac{a}{b}\right) \right)} g(a)$$

Où c , d , κ_N et κ_U sont des scalaires positifs indépendants de la taille de la fissure a , montrer ainsi que alors que $K_I^N(a)$ est une fonction croissante (on admettra que f , fonction positive, est croissante), $K_I^U(a)$ peut être décroissante à partir d'une certaine taille de fissure.

Ce résultat permet d'expliquer l'arrêt des fissures de fatigue à déplacement imposé si toutefois la valeur de $K_I^{U^{max}}(a)$ passe en dessous de la valeur seuil de non-propagation.

8. Tracer les courbes K_I^N et K_I^U en fonction de a pour les valeurs suivantes de l'expérience :

$$\begin{aligned} \text{Géométrie : } & e=1 \text{ cm}, b=3 \text{ cm}, H=10 \text{ cm} & \text{Matériau : } E=200\,000 \text{ MPa}, \\ \text{Sollicitations : } & N^{max}=5 \text{ kN}, U^{max}=N^{max}/k(0) \end{aligned}$$

Montrer qu'en déplacement cyclique imposé entre zéro et U^{max} , et pour une valeur de ΔK , égale à $3 \text{ MPa.m}^{1/2}$, il existe une taille en dessous de laquelle les fissures existantes ne se

propagent pas, et une taille limite à la propagation de fissures de fatigue quand celle-ci a lieu. Estimer ces valeurs graphiquement.

9. *Pour les aficionados :*

Tracer l'évolution d'une fissure de fatigue de taille initiale a_0 , pour une loi de Paris avec seuil :

$$\frac{da}{dn} = c \left[\langle \Delta K_I - \Delta K_s \rangle^+ \right]^m$$

avec la géométrie, le matériau et le chargement à déplacement imposé de la question précédente et les paramètres :

$$m=3, c=10^{-6} \text{ MPa}^{-m} \text{ m}^{1-m/2}$$

Comparer et commenter les résultats pour un nombre de cycles N égal à 25 000, et deux valeurs initiales de la taille de la fissure : $a_0=1 \text{ cm}$ et $a_0=7 \text{ mm}$.

Pour intégrer l'équation différentielle, on pourra utiliser un schéma explicite (du fait de la très faible variation de longueur de la fissure au cours d'un cycle) :

$$a(n+1) = a(n) + c \left[\langle K_I^{\max}(a) - \Delta K_s \rangle^+ \right]^m$$



Corrigé

1. Dans le cadre de la modélisation élastique de la structure, le facteur intensité de contrainte en mode I est une fonction linéaire du chargement, formellement on peut donc écrire :

$$K_I(\lambda, a) = \lambda K_I^1(a)$$

expression dans laquelle K_I^1 est le facteur intensité de contrainte pour le chargement « unité » $\lambda=1$, qui dépend uniquement de la géométrie de la structure (y compris la taille de la fissure), du mode d'application du chargement et des modules élastiques.. La loi de Paris s'écrira donc :

$$\frac{da}{dn} = c [K(\Delta\lambda, a)]^m = c \Delta\lambda^m [K_I^1(a)]^m$$

et prend donc bien une forme à variables séparées. Pour la loi de Forman, ce résultat n'est plus vérifié à cause des termes affines apparaissant au numérateur et au dénominateur.

2. Pour la forme à variable séparée, on peut réécrire l'équation différentielle ayant pour inconnue la longueur de la fissure, en notant a_i la longueur initiale, c'est-à-dire la longueur au début du bloc de cycles considéré :

$$\begin{cases} \frac{1}{F(a)} \frac{da}{dn} = f(\Delta\lambda) \\ a(0) = a_i \end{cases}$$

soit en intégrant entre les longueurs initiales et finale, pour les N cycles considérés :

$$\int_{a_i}^{a_f} \frac{da}{F(a)} = N f(\Delta\lambda) \quad \text{ou encore} \quad T(a_f) - T(a_i) = N f(\Delta\lambda) \quad \text{avec} \quad T(a) = \int \frac{da}{F(a)} \quad (1)$$

Pour la fissure débouchante, avec la loi de Paris on obtient :

$$\frac{da}{dn} = c [\Delta K]^m = c \sigma^m [\beta \sqrt{\pi a}]^m \quad \text{soit} \quad \frac{1}{a^{m/2}} \frac{da}{dn} = c \pi^{m/2} \beta^m \sigma^m$$

D'où l'expression de la longueur de fissure a_f après N cycles :

$$a_f(N, a_i) = \left[a_i^{\frac{2-m}{2}} + N \frac{2-m}{2} \pi^{m/2} c \beta^m \sigma^m \right]^{\frac{2}{2-m}}$$

3. La taille de la fissure initiale étant toujours noté a_i , considérons la première séquence constituée de N_1 cycles d'amplitude $\Delta\lambda_1$, puis N_2 cycles d'amplitude $\Delta\lambda_2$. En utilisant le résultat (1) on a , en notant a_1 la taille de la fissure à l'issue des N_1 premiers cycles et a_f^1 la taille finale :

$$\begin{aligned} T(a_1) - T(a_i) &= N_1 f(\Delta\lambda_1) \\ T(a_f^1) - T(a_1) &= N_2 f(\Delta\lambda_2) \end{aligned} \quad \text{d'où} \quad \begin{aligned} T(a_f^1) - T(a_i) &= N_1 f(\Delta\lambda_1) + N_2 f(\Delta\lambda_2) \end{aligned}$$

Par un raisonnement similaire, on a pour l'autre séquences (avec les notations : a_2 et a_f^2 pour els tailles de fissure à l'issue des N_2 premiers cycles et en fin de séquence) :

$$\begin{aligned} T(a_2) - T(a_i) &= N_2 f(\Delta\lambda_2) \\ T(a_f^2) - T(a_2) &= N_1 f(\Delta\lambda_1) \end{aligned} \quad \text{d'où} \quad \begin{aligned} T(a_f^2) - T(a_i) &= N_1 f(\Delta\lambda_1) + N_2 f(\Delta\lambda_2) \end{aligned}$$

On en déduit, si T est un fonction bijective, l'égalité des tailles finales a_f^2 et a_f^1 , et ainsi l'absence d'effet de séquence.

4. L'énergie potentielle mécanique est selon le mode de sollicitation :

$$\begin{aligned} P(N, a) &= -\frac{1}{2} \frac{N^2}{k(a)} \quad \text{à effort } N \text{ imposé} \\ P(U, a) &= \frac{1}{2} k(a) U^2 \quad \text{à déplacement } U \text{ imposé} \end{aligned}$$

5. Le taux de restitution de l'énergie prend donc l'expression suivant dans chacun des cas de sollicitation:

$$\begin{aligned} G_N &= -\frac{dP}{eda} = -\frac{1}{2e} \frac{N^2}{k(a)^2} k'(a) \quad \text{à effort } N \text{ imposé} \\ G_U &= -\frac{dP}{eda} = -\frac{1}{2e} k'(a) U^2 \quad \text{à déplacement } U \text{ imposé} \end{aligned}$$

Grace à la formule d'Irwin en contrainte plane, on obtient une relation entre le facteur intensité de contrainte K_I^N , connu, fonction de la taille de la fissure, et la rigidité $k(a)$:

$$G_N = \frac{1}{E} [K_I^N]^2 = -\frac{1}{2e} \frac{N^2}{k(a)^2} k'(a) \quad \text{soit} \quad \frac{d}{da} \left[\frac{1}{k(a)} \right] = \frac{2\pi a}{Eeb^2} f^2\left(\frac{a}{b}\right)$$

En intégrant entre une taille de fissure nulle et la taille actuelle a , il vient :

$$\frac{1}{k(a)} - \frac{1}{k(0)} = \frac{2\pi}{Eeb^2} \int_0^a s f^2\left(\frac{s}{b}\right) ds \quad \text{ou encore} \quad \frac{1}{k(a)} = \frac{2\pi}{Ee} \int_0^{a/b} x f^2(x) dx + \frac{H}{Eeb}$$

car la rigidité en l'absence de fissure est simplement Eeb/H . Si Oy est l'axe de l'éprouvette, on a en effet :

$$\sigma^{yy} = \frac{N}{eb}, \quad \varepsilon^{yy} = \frac{U}{H}, \quad \sigma^{yy} = E\varepsilon^{yy} \Rightarrow N = \frac{Eeb}{H} U$$

Avec la notation : $F_b(X) = \int_0^X x f^2(x) dx$, on obtient l'expression de la rigidité $k(a)$:

$$k(a) = \frac{Ee}{\left(\frac{H}{b} + 2\pi F\left(\frac{a}{b}\right)\right)}$$

6. On peut maintenant calculer l'expression du facteur intensité de contrainte à déplacement imposé K_I^U , toujours en exploitant la formule d'Irwin et la définition du taux de restitution de l'énergie à déplacement imposé cette fois ;

$$G_U = \frac{1}{E} [K_I^U]^2 = -\frac{1}{2e} k'(a) U^2 \quad \text{d'où} \quad K_I^U = \sqrt{-\frac{E}{2e} k'(a)} U$$

soit :

$$K_I^U = \frac{E}{\left(\frac{H}{b} + 2\pi F\left(\frac{a}{b}\right)\right)} \sqrt{\frac{\pi}{b} F'\left(\frac{a}{b}\right)} U$$

ou plus simplement du fait de la définition de F :

$$K_I^U = \frac{E}{\left(\frac{H}{b} + 2\pi F\left(\frac{a}{b}\right)\right)} \sqrt{\pi a} f\left(\frac{a}{b}\right) \frac{U}{b}.$$

On peut également obtenir ce résultat en remplaçant directement la valeur de $k(a)$ dans l'expression du taux de restitution d'énergie à déplacement imposé déterminé à la question précédente

7. Des expressions des facteurs intensité de contraintes :

$$K_I^N = \frac{N}{eb} \sqrt{\pi a} f\left(\frac{a}{b}\right) \quad K_I^U = \frac{E}{\left(\frac{H}{b} + 2\pi F\left(\frac{a}{b}\right)\right)} \sqrt{\pi a} f\left(\frac{a}{b}\right) \frac{U}{b}$$

On tire :

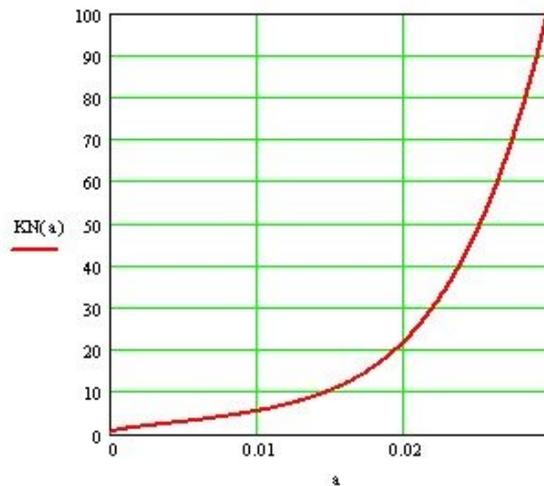
$$K_I^N(a) = \kappa_N g(a), \quad K_I^U(a) = \frac{\kappa_U}{\left(c + dF\left(\frac{a}{b}\right)\right)} g(a)$$

Avec $g(a) = \sqrt{\pi a} f\left(\frac{a}{b}\right)$, $c=H/b$, $d=2\pi$, $\kappa_N=N/eb$ et $\kappa_U=UE/b$. On en déduit les dérivées par rapport à la taille de la fissure a :

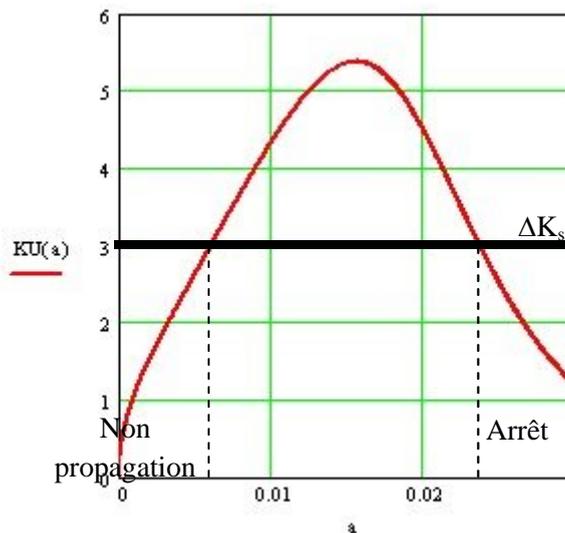
$$\frac{d}{da} K_I^N(a) = \kappa_N g'(a), \quad \frac{d}{da} K_I^U(a) = \frac{\kappa_U}{\left(c + dF\left(\frac{a}{b}\right)\right)} \left[g'(a) - \frac{d g(a) F'\left(\frac{a}{b}\right)}{b \left(c + dF\left(\frac{a}{b}\right)\right)} \right]$$

g est une fonction positive et croissante (puisque f l'est), donc le facteur intensité de contrainte à effort imposé croît avec la taille de la fissure. En revanche, puisque g est positive et que F est une fonction croissante (primitive d'une fonction positive), F' est positive et la dérivée du facteur intensité de contrainte à déplacement imposé peut changer de signe.

8. Grâce aux expressions obtenues pour le facteur intensité de contraintes K_I^N et K_I^U , et puisque le chargement s'opère entre zéro et une valeur maximum, la variation de facteur intensité de contrainte au cours des cycles est égale à la valeur prise pour les valeurs maxima N^{max} et U^{max} . Soit les courbes suivantes :



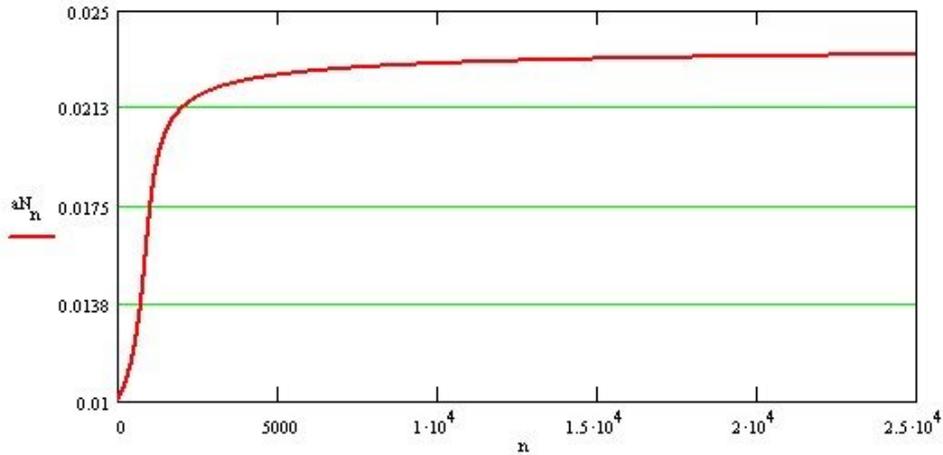
Facteur intensité de contrainte ($MPa.m^{1/2}$) à effort imposé en fonction de la taille de la fissure (mètres)



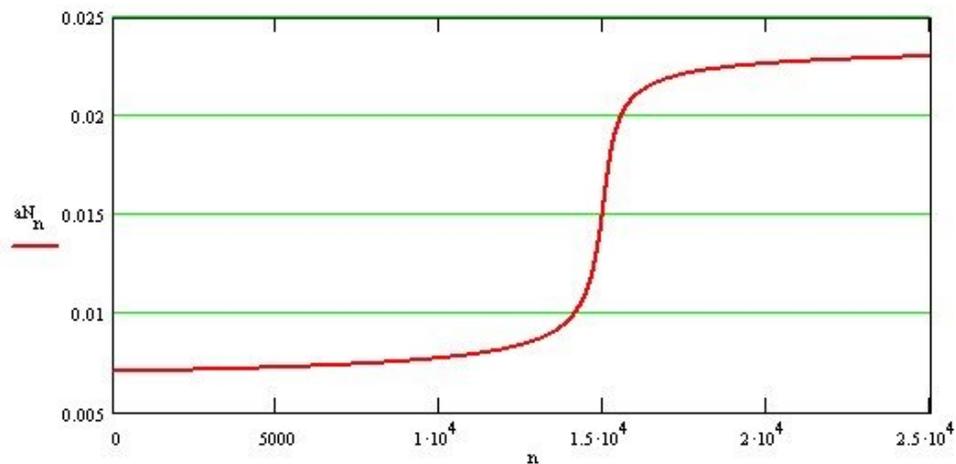
Facteur intensité de contrainte ($MPa.m^{1/2}$) à déplacement imposé en fonction de la taille de la fissure (mètres)

On a fait figurer sur ces courbes la valeur de ΔK_s . Pour le cas à déplacement imposé cyclique, l'intersection de la droite ΔK_s avec $K_I^{U^{max}}$ définit les zones de non-propagation et d'arrêt. Dans cet exemple, le « ligament », c'est-à-dire la partie non fissurée au moment de l'arrêt, est égal au tiers de l'épaisseur ce qui sur le plan pratique serait inacceptable pour le maintien de la pièce en service.

9. Les deux courbes suivantes illustrent l'évolution de la taille de la fissure pour un même chargement à déplacement imposé mais avec deux exposants différents dans la loi de Paris. Dans les deux cas, il y a un arrêt de la fissure asymptotiquement lorsque la valeur de $K_I^{U_{max}}$ atteint ΔK_s : la vitesse de propagation tend alors vers zéro.



Evolution de la taille de fissure (en mètres) au cours d'une séquence de 25 000 cycles à déplacement imposé.
Valeur initiale de la taille de la fissure $a_0 = 1\text{ cm}$



Evolution de la taille de fissure (en mètres) au cours d'une séquence de 25 000 cycles à déplacement imposé.
Valeur initiale de la taille de la fissure $a_0 = 7\text{ mm}$

Dans le second cas on observe en plus une première période qui pourrait passer pour une sorte de période d'incubation, au cours de laquelle aucune propagation sensible n'a lieu, période suivie d'une évolution assez brutale, pour se poursuivre par une phase de ralentissement jusqu'à l'arrêt. Cet effet est purement dû à l'exposant de la loi de Paris et serait encore accentué avec un exposant supérieur, en effet la vitesse ne s'annule jamais, mais prend des valeurs très petites.