

CONTRÔLE DE LA MAJEURE DE MÉCANIQUE
Option Matériaux et Structures : Rupture et Plasticité
Mardi 18 Novembre 2003

Sujet proposé par Pierre Suquet

Durée 3 heures

Documents autorisés : photocopié et notes personnelles de PC

Ce contrôle comporte deux exercices indépendants notés sur 8 et 14 points.

La dernière question de chaque exercice fait l'objet de points de bonus en plus du barème ci-dessus.

Note finale sur 20.

Exercice I (8 points) : Délaminage d'un film mince.

Un film mince est collé sur un substrat élastique. Ce substrat se déforme sous l'effet de forces appliquées. Il y a alors risque de **délaminage** du film. Celui-ci se manifeste par un décollement de l'interface film/substrat, qui prend son origine au bord du film et se propage vers l'intérieur de ce dernier. L'objet de cet exercice est la modélisation de ce phénomène.

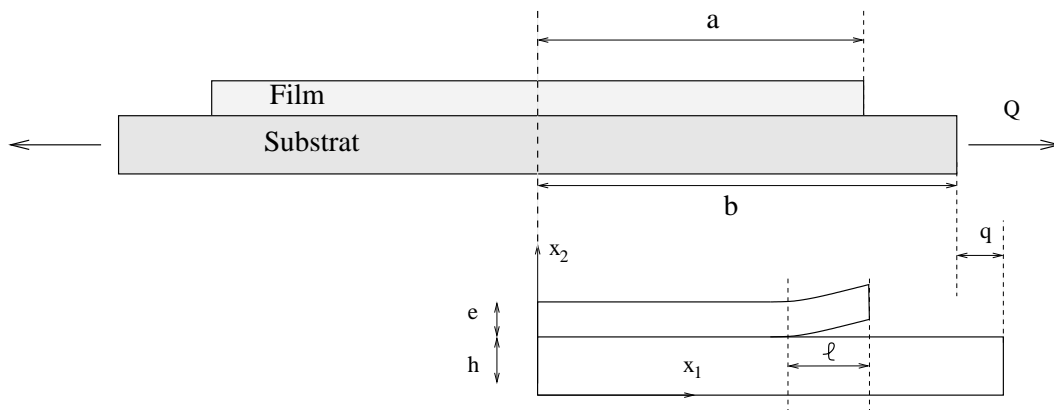


FIG. 1 – *Film mince collé sur un substrat. Délaminage du film sous l'effet de la déformation du substrat.*

On traite le problème comme un problème bi-dimensionnel. Par symétrie on ne considère que la moitié droite du système (figure 1 bas).

Le film mince et le substrat sont assimilés à des domaines rectangulaires de hauteur e et h et de longueur a et b respectivement, avec $b > a$. Chacun de ces domaines est constitué d'un matériau élastique linéaire, homogène et isotrope de module d'Young E_1 pour le film et E_2 pour le substrat. Par souci de simplicité on néglige les effets de Poisson

$$\nu_1 = \nu_2 = 0.$$

Dans cette hypothèse la densité d'énergie élastique de déformation se réduit à

$$\rho w(\underline{\varepsilon}) = \frac{1}{2} E \underline{\varepsilon} : \underline{\varepsilon}, \quad E = E_1 \quad \text{ou} \quad E = E_2.$$

Sous l'application d'un effort de résultante Q , le substrat s'allonge d'une longueur q . La longueur délaminée est notée ℓ . L'adhésif entre le film et le substrat obéit au critère de Griffith (généralisé), équation (3.12) du cours, caractérisé par une énergie de rupture G_c ¹.

Comme c'est souvent le cas, la résolution *analytique exacte* du problème d'élasticité ainsi posé est impossible. On construit une solution approchée permettant une estimation de l'énergie potentielle totale du corps. A cet effet on distingue 4 sous-domaines $\Omega^{(k)}$, $k = 1, \dots, 4$ (cf figure 2) : les deux sous-domaines rectangulaires $\Omega^{(1)}$ et $\Omega^{(2)}$ forment une partition du domaine occupé par le film, correspondant respectivement à la zone adhérent au substrat et à la zone décollée :

$$\Omega^{(1)} = \{ 0 < x_1 < a - \ell, h < x_2 < h + e \}, \quad \Omega^{(2)} = \{ a - \ell < x_1 < a, h < x_2 < h + e \}.$$

Les deux sous-domaines rectangulaires $\Omega^{(3)}$ et $\Omega^{(4)}$ forment une partition du substrat, correspondant respectivement à la zone sur laquelle le film adhère et à la partie libre du substrat :

$$\Omega^{(3)} = \{ 0 < x_1 < a - \ell, 0 < x_2 < h \}, \quad \Omega^{(4)} = \{ a - \ell < x_1 < b, 0 < x_2 < h \}.$$

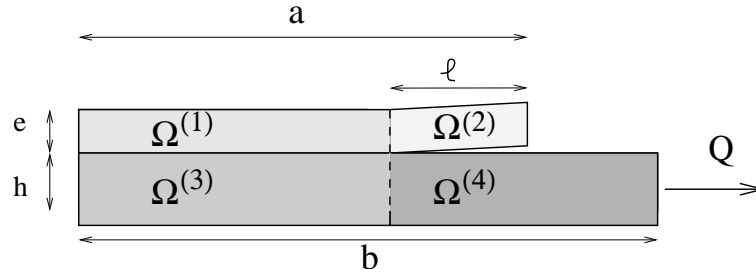


FIG. 2 – Géométrie du problème. La déformation est constante dans chaque sous-domaine.

On choisit dans chaque sous-domaine un champ de déplacement unidirectionnel correspondant à une déformation uniaxiale dans la direction \underline{e}_1 et constante par sous-domaine :

$$\underline{\xi}(\underline{x}) = \xi_1^{(k)}(x_1) \underline{e}_1, \quad \underline{\varepsilon} = \varepsilon^{(k)} \underline{e}_1 \otimes \underline{e}_1 \quad \text{dans } \Omega^{(k)}, \quad (1)$$

où $\varepsilon^{(k)}$ prend les valeurs (constantes) $\varepsilon^{(1)}$, $\varepsilon^{(2)}$, $\varepsilon^{(3)}$ et $\varepsilon^{(4)}$ dans les sous domaines $\Omega^{(1)}$, $\Omega^{(2)}$, $\Omega^{(3)}$ et $\Omega^{(4)}$ respectivement.

1) Champs de déplacements.

1.1) En tenant compte de la condition de symétrie $\xi_1 = 0$ en $x_1 = 0$, déterminer les champs $\xi_1^{(k)}$ dans chaque sous-domaine $\Omega^{(k)}$ en fonction de $\varepsilon^{(1)}$, $\varepsilon^{(2)}$, $\varepsilon^{(3)}$ et $\varepsilon^{(4)}$.

¹Sur le plan de l'analyse dimensionnelle, Q est homogène à une force/longueur (car le problème est traité en plan). G_c est homogène à une énergie/surface, donc à une force/longueur.

1.2) Ecrire une relation entre certaines des inconnues $\varepsilon^{(k)}$, assurant la continuité de $\underline{\xi}$ dans le domaine d'étude. En déduire que l'on peut réduire le paramétrage de la famille de champs cinématiquement admissibles à $\varepsilon^{(1)}$, $\varepsilon^{(2)}$, et $\varepsilon^{(4)}$.

2) Analyse de la propagation.

2.1) Ecrire l'énergie élastique W du système et le potentiel L des efforts extérieurs en fonction des variables cinématiques $\varepsilon^{(1)}$, $\varepsilon^{(2)}$, $\varepsilon^{(4)}$, du paramètre géométrique ℓ et des données du problème. Par application du principe de minimum de l'énergie potentielle, déterminer le "meilleur" champ de la forme (1). Interpréter physiquement les équations obtenues après écriture du minimum de l'énergie potentielle.

2.2) *On fait dorénavant l'approximation que le champ approché qui vient d'être déterminé est la solution du problème élastique.*

Exprimer alors $q = \xi_1(b)$ dans $\Omega^{(4)}$ en fonction de Q , E_2 , h , $b - a$, a , ℓ et $\alpha = E_1 e / E_2 h$. En déduire l'expression de la souplesse $S(\ell)$ du système et de son inverse, la raideur structurale $R(\ell)$, définies par les relations $q = S(\ell)Q$ et $Q = R(\ell)q$.

2.3) L'essai est piloté en force. Exprimer le taux de restitution de l'énergie en fonction de Q . Déterminer, en fonction de G_c , E_2 , h et α la force Q_c pour laquelle le délaminage se propage.

2.4) L'essai est piloté en déplacement. Exprimer le taux de restitution de l'énergie en fonction de $q = \xi_1(b)$. Déterminer, en fonction des données du problème (G_c , E_2 , h , α) le déplacement q_c pour lequel le délaminage se propage.

2.5) Bonus : peut-on décider de la stabilité de l'essai à charge Q imposée (on justifiera la réponse) ? Même question, avec justification, à déplacement q imposé ?

Exercice II (14 points). Réservoir sphérique sous pression interne.

On considère un réservoir sphérique de rayon intérieur a et de rayon extérieur b appelé à recevoir un fluide sous pression.

Le chargement est défini de la façon suivante :

- Les forces de volume sont nulles, les transformations sont infinitésimales et isothermes et l'état initial du réservoir est l'état naturel sans contrainte.
- Le réservoir contient un fluide à la pression uniforme p .
- La pression à l'extérieur du réservoir est la pression atmosphérique qui est négligeable devant p (elle sera donc prise nulle dans la suite).

1. Conditions aux limites et paramètres généralisés de chargement.

1.1) Ecrire les conditions aux limites au bord de Ω .

1.2) On considère un champ virtuel de vitesse \underline{v} . Exprimer la puissance des efforts extérieurs appliqués au domaine Ω en fonction de p et \underline{v} . En déduire que la variation de volume $q = V - V_0$ (où V_0 est le volume initial de la cavité sphérique de rayon a) peut être choisie

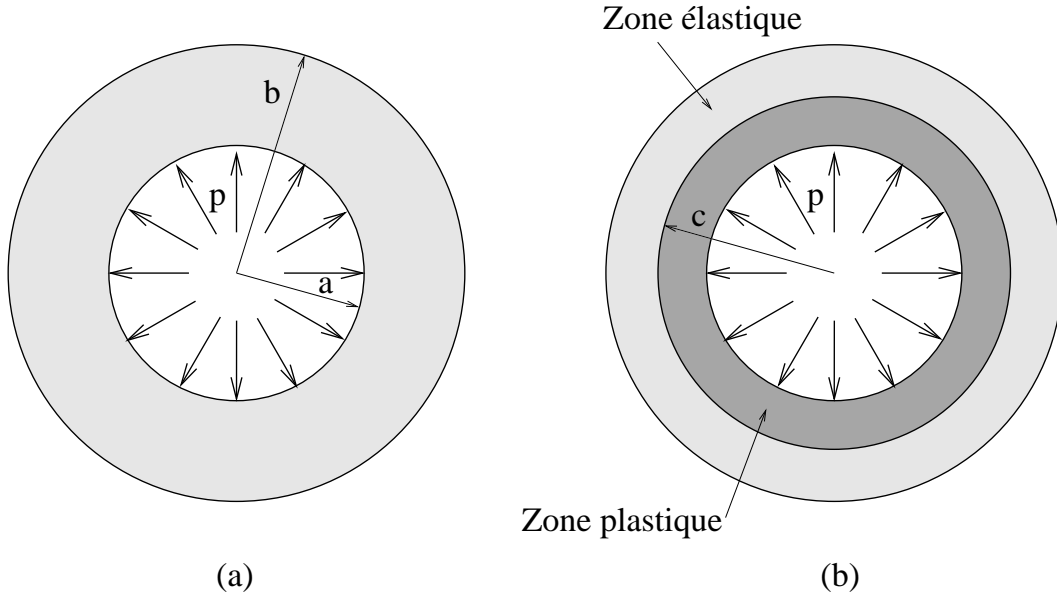


FIG. 3 – Réservoir sphérique sous pression interne.

comme variable cinématique généralisée, associée au paramètre de chargement généralisé $Q = p$.

2. Comportement élasto-plastique parfait.

Le matériau constituant le cylindre est homogène, isotrope, élastique parfaitement plastique. Son comportement plastique est régi par le critère de von Mises $\sigma_{\text{eq}} \leq \sigma_0$ et la règle de normalité.

2.1) Régime élastique.

Lorsque le matériau constituant le réservoir est élastique, linéaire, homogène et isotrope, de module d'Young E et de coefficient de Poisson ν , la solution établie dans le polycopié (annexe A.4.2) prend la forme :

$$\underline{\xi} = \xi(r)\underline{e}_r, \quad \underline{\underline{\sigma}} = \sigma_{rr}(r)\underline{e}_r \otimes \underline{e}_r + \sigma_{\theta\theta}(r) (\underline{e}_\theta \otimes \underline{e}_\theta + \underline{e}_\varphi \otimes \underline{e}_\varphi). \quad (2)$$

Les différentes composantes de ces champs s'écrivent (régime élastique uniquement) :

$$\left. \begin{aligned} \xi(r) &= \frac{pf}{1-f} \frac{1}{E} \left((1-2\nu)r + \frac{1+\nu}{2} \frac{b^3}{r^2} \right), & f &= \frac{a^3}{b^3}, \\ \sigma_{rr}(r) &= \frac{pf}{1-f} \left(1 - \frac{b^3}{r^3} \right), & \sigma_{\theta\theta}(r) &= \frac{pf}{1-f} \left(1 + \frac{b^3}{2r^3} \right). \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

- Où observe-t-on la première plastification et pour quelle valeur p^e de la pression se produit-elle ?
- Quel est, en régime élastique, le signe de la contrainte radiale σ_{rr} et celui de la contrainte de membrane $\sigma_{\theta\theta}$.

2.2) Régime élasto-plastique en charge : construction d'un champ de contrainte.

Pour simplifier certains résultats on suppose désormais que

$$\nu = 1/2.$$

On augmente de façon monotone la pression interne p au delà de p^e .

Pour construire une solution au problème d'évolution élasto-plastique ainsi posé on fait les hypothèses suivantes :

(H1) : Le champ de contrainte dans Ω est de la forme $(2)_b$.

(H2) : Une zone plastique se développe dans l'enveloppe sphérique à partir de son bord intérieur. On note c le rayon externe de cette zone qui occupe le domaine $a \leq r \leq c$. La zone $c \leq r \leq b$ demeure en régime élastique.

- A quelles conditions un champ de contrainte de la forme $(2)_b$ est-il statiquement admissible avec les données du problème ?
- A quelle condition un champ de contrainte de la forme $(2)_b$ est-il plastiquement admissible ?
- Sous les hypothèses (H1) et (H2), et en faisant des hypothèses raisonnables sur le signe de σ_{rr} et $\sigma_{\theta\theta}$ (hypothèses que l'on explicitera), établir, par intégration de l'équation d'équilibre, l'expression du champ de contrainte en zone plastique.
- Calculer le vecteur contrainte exercé par la zone plastique sur la zone élastique. En déduire que sous les hypothèses (H1) et (H2) le champ de contrainte obtenu à partir de $(2)_b$ et $(3)_b$ en y remplaçant f et p par f_c et p_c reste solution dans la zone élastique, où on a posé :

$$f_c = \frac{c^3}{b^3}, \quad p_c = -p + 2\sigma_0 \text{Log} \left(\frac{c}{a} \right).$$

- Ecrire une équation (qu'on ne cherchera pas à résoudre) liant le rayon c de la zone plastique à la pression p . Montrer (par exemple en calculant dc/dp) que c est une fonction croissante de p .

2.3) Régime élasto-plastique en charge. Construction d'un champ de vitesse.

On se propose maintenant de construire un champ de vitesse cinématiquement admissible $\dot{\xi}$ associée par la loi de comportement au champ de contrainte qui vient d'être construit. Par symétrie le champ de déplacement sera recherché sous forme radiale, cf $(2)_a$.

- On se place en zone élastique $c \leq r \leq b$. Exprimer le champ de déplacement $\xi(r)$ en fonction de p_c , f_c et des autres données du problème. Montrer que $\xi(c)$ est une fonction croissante de p , donc de t .
- On se place en zone plastique $a \leq r \leq c$.
 - Exprimer pour un champ de la forme $(2)_a$ (sans référence au comportement) le champ de vitesse de déformation $\underline{\underline{\dot{\epsilon}}}$ en fonction de $\dot{\xi}$.
 - Calculer par ailleurs l'expression du champ de vitesse de déformation qui résulte de la loi de comportement appliquée au champ de contrainte construit en 2.2. Cette expression fait intervenir un multiplicateur plastique $\dot{\lambda}(r, t)$ inconnu à ce stade.

- Dédire de ces deux expressions une équation différentielle pour $\dot{\xi}$ en zone plastique. Exprimer la solution de cette équation différentielle à l'aide de $\dot{\xi}(c)$. En déduire l'expression de λ en fonction de $\dot{\xi}(c)$, c et des autres données du problème.
 - En admettant la continuité de $\dot{\xi}(c)$ en $r = c$ préciser le signe de λ .
- c) Conclure sur la solution ainsi construite et sur les hypothèses (H1) et (H2).
- d) A quelle pression p^+ correspond la plastification totale du réservoir? Donner l'allure de la courbe $(p, \Delta V)$ (on précisera notamment si la pression p^+ est atteinte asymptotiquement ou pour une valeur finie de ΔV). On pourra utiliser, après démonstration, l'égalité

$$\Delta V = 4\pi b^2 \xi(b).$$

2.4) Régime élasto-plastique. Décharge.

Le réservoir a été chargé en régime élasto-plastique jusqu'à une valeur p de la pression telle que $p^e < p < p^+$. On décharge le réservoir en ramenant la pression de p à 0.

- a) On suppose $p^e < p < 2p^e$. Montrer que la décharge est purement élastique en chaque point du réservoir. Il sera commode d'exprimer le champ de contrainte résiduelle en fonction de p, p^e, σ_0, a, c et r .
- b) déterminer la valeur et le signe des composantes σ_{rr}^{res} et $\sigma_{\theta\theta}^{\text{res}}$ du champ de contrainte résiduelle en $r = a$. Quel peut-être l'intérêt d'une plastification partielle du réservoir avant utilisation?

3. Bonus : Charge limite.

On abandonne maintenant l'hypothèse d'un comportement élastique parfaitement plastique : la seule information disponible sur le matériau constituant le réservoir est que **son domaine de résistance est régi par le critère de von Mises** :

$$\sigma_{eq} \leq \sigma_0. \quad (4)$$

Etablir, à l'aide d'un champ statiquement admissible approprié de la forme $(2)_b$, un minorant aussi élevé que possible de la pression limite p^u potentiellement supportable par le réservoir. Puis, en choisissant un champ de vitesse pertinent à symétrie sphérique, déterminer un majorant de la pression limite p^u potentiellement supportable par le réservoir. Conclure sur la charge limite p^u .

Corrigé

Exercice I

1.1) L'intégration du champ de déformation uniforme par sous domaine conduit, compte tenu des conditions aux limites en $x_1 = 0$, à :

$$\left. \begin{aligned} \xi_1 &= \varepsilon^{(1)}x_1 \text{ dans } \Omega^{(1)}, & \xi_1 &= \varepsilon^{(1)}(a - \ell) + \varepsilon^{(2)}(x_1 - a + \ell) \text{ dans } \Omega^{(2)}, \\ \xi_1 &= \varepsilon^{(3)}x_1 \text{ dans } \Omega^{(3)}, & \xi_1 &= \varepsilon^{(3)}(a - \ell) + \varepsilon^{(4)}(x_1 - a + \ell) \text{ dans } \Omega^{(4)}. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

1.2) La continuité du déplacement en $x_2 = h$, le long de la frontière commune à $\Omega^{(1)}$ et $\Omega^{(3)}$, s'exprime par :

$$\varepsilon^{(1)} = \varepsilon^{(3)}. \quad (6)$$

On pourra donc paramétrer les champs de déplacement de la forme (1) par $(\varepsilon^{(1)}, \varepsilon^{(2)}, \varepsilon^{(4)})$.

2.1) L'énergie élastique s'exprime en fonction de la longueur de fissure ℓ et des variables cinématiques $(\varepsilon^{(1)}, \varepsilon^{(2)}, \varepsilon^{(4)})$ par :

$$\begin{aligned} W(\varepsilon^{(1)}, \varepsilon^{(2)}, \varepsilon^{(3)}, \varepsilon^{(4)}, \ell) &= \int_{\Omega} w(\underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{\underline{\xi}})) d\Omega, \quad \text{avec} \quad w(\underline{\underline{\varepsilon}}) = \frac{1}{2} E \underline{\underline{\varepsilon}} : \underline{\underline{\varepsilon}}, \\ &= \frac{1}{2} E_1 e \left[(a - \ell) \varepsilon^{(1)2} + \ell \varepsilon^{(2)2} \right] + \frac{1}{2} E_2 h \left[(a - \ell) \varepsilon^{(1)2} + (b - a + \ell) \varepsilon^{(4)2} \right] \end{aligned}$$

Le potentiel des efforts extérieurs s'exprime par :

$$L(\underline{\underline{\xi}}) = \int_{S_T} \underline{\underline{T}}^d \cdot \underline{\underline{\xi}} da = Q \xi_1(b) = Q \left[\varepsilon^{(3)}(a - \ell) + \varepsilon^{(4)}(b - a + \ell) \right].$$

Le minimum de l'énergie potentielle $P = W - L$ parmi la classe de champs de déplacements (5) est déterminé en annulant les dérivées partielles de P par rapport à $(\varepsilon^{(1)}, \varepsilon^{(2)}, \varepsilon^{(4)})$. Cette condition de stationnarité (qui correspond à un minimum) s'écrit

$$\left. \begin{aligned} 0 &= \frac{\partial P}{\partial \varepsilon^{(1)}} = (a - \ell) \left[(E_1 e + E_2 h) \varepsilon^{(1)} - Q \right], \\ 0 &= \frac{\partial P}{\partial \varepsilon^{(2)}} = E_1 e \varepsilon^{(2)}, \\ 0 &= \frac{\partial P}{\partial \varepsilon^{(4)}} = (b - a + \ell) (E_2 h \varepsilon^{(4)} - Q), \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

L'interprétation de ces équations est immédiate : la troisième traduit l'équilibre global de $\Omega^{(4)}$ soumis à une densité de force de résultante Q en $x_1 = b$, la seconde traduit l'équilibre de $\Omega^{(2)}$

libre de contrainte en son extrémité $x_1 = a$, la première traduit l'équilibre de $\Omega^{(1)} \cup \Omega^{(3)}$, soumis à une densité de force de résultante Q en $x_1 = a - \ell$.

On déduit de (7) :

$$\varepsilon^{(1)} (= \varepsilon^{(3)}) = \frac{Q}{E_1 e + E_2 h}, \quad \varepsilon^{(2)} = 0, \quad \varepsilon^{(4)} = \frac{Q}{E_2 h}. \quad (8)$$

2.2) En particulier

$$q = \xi_1(b) = Q \left(\frac{b - a + \ell}{E_2 h} + \frac{a - \ell}{E_1 e + E_2 h} \right) = \frac{Q}{E_2 h} \left(b - a + \frac{a}{\alpha + 1} + \ell \frac{\alpha}{\alpha + 1} \right).$$

On en déduit la souplesse et la raideur structurale :

$$\left. \begin{aligned} S(\ell) &= \frac{q}{Q} = \frac{1}{E_2 h} \left(b - a + \frac{a}{\alpha + 1} + \ell \frac{\alpha}{\alpha + 1} \right), \\ R(\ell) &= \frac{1}{S(\ell)} = E_2 h \left(b - a + \frac{a}{\alpha + 1} + \ell \frac{\alpha}{\alpha + 1} \right)^{-1}. \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

2.3) Le taux de restitution de l'énergie G à force imposée se déduit immédiatement de (9)_a (et du cours) :

$$G = \frac{1}{2} \frac{\partial S}{\partial \ell} Q^2 = \frac{1}{2} \frac{\alpha}{\alpha + 1} \frac{Q^2}{E_2 h}. \quad (10)$$

Remarque : On aurait pu obtenir le taux de restitution de l'énergie en calculant le minimum de l'énergie potentielle :

$$\text{Min}_{\varepsilon^{(1)}, \varepsilon^{(2)}, \varepsilon^{(4)}} [W(\varepsilon^{(1)}, \varepsilon^{(2)}, \varepsilon^{(4)}, \ell) - L(\varepsilon^{(1)}, \varepsilon^{(2)}, \varepsilon^{(4)}, \ell)] = -\frac{1}{2} L(\varepsilon^{(1)}, \varepsilon^{(2)}, \varepsilon^{(4)}, \ell) = -\frac{1}{2} Q \xi_1(b) = -\frac{1}{2} Q q,$$

(cette dernière expression permet de simplifier le calcul) et donc

$$P(\ell) = -\frac{1}{2} \frac{Q^2}{E_2 h} \left(b - a + \frac{a}{\alpha + 1} + \ell \frac{\alpha}{\alpha + 1} \right). \quad (11)$$

On en déduit par dérivation l'expression (10) du taux de restitution de l'énergie.

Le délaminage se produira lorsque

$$Q = Q_c = \left(\frac{\alpha + 1}{\alpha} 2G_c E_2 h \right)^{1/2}. \quad (12)$$

2.4) Lorsque l'essai est piloté en déplacement, on a (cf cours) :

$$G = -\frac{1}{2} \frac{\partial R}{\partial \ell} q^2 = \frac{q^2}{2} \frac{\alpha}{\alpha + 1} \frac{E_2 h}{\left(b - a + \frac{a}{\alpha + 1} + \ell \frac{\alpha}{\alpha + 1} \right)^2}. \quad (13)$$

Le délaminage se propage lorsque

$$q = q_c = \frac{Q_c}{E_2 h} \left(b - a + \frac{a}{\alpha + 1} + \ell \frac{\alpha}{\alpha + 1} \right).$$

2.5) Dans le cas d'un essai à force imposée on a :

$$\left. \frac{\partial G}{\partial \ell} \right|_{Q \text{ imposée}} = 0.$$

On ne peut pas décider de la stabilité de la propagation (propagation *neutre*). Dans le cas d'un essai à déplacement imposé on a :

$$\left. \frac{\partial G}{\partial \ell} \right|_{q \text{ imposé}} = - \left(\frac{\alpha}{\alpha + 1} \right)^2 \frac{E_2 h}{\left(b - a + \frac{a}{\alpha + 1} + \ell \frac{\alpha}{\alpha + 1} \right)^3} q^2.$$

Cette dérivée est négative et la propagation est *stable*.

Exercice II

1. Paramètres généralisés de chargement.

1.1) Les conditions aux limites sur le bord du réservoir sont :

$$\text{en } r = a : \quad \underline{T} = p \underline{e}_r, \quad \text{en } r = b : \quad \underline{T} = \underline{0}. \quad (14)$$

1.2) Les forces de volume sont nulles. On a donc

$$\mathcal{P}_e = \int_{\partial \Omega} \underline{T} \cdot \underline{v} \, da = \int_{r=a} p \underline{e}_r \cdot \underline{v} \, da.$$

Par ailleurs, en notant V le volume intérieur du réservoir, la variation de volume dans un mouvement (virtuel) de champ de vitesse \underline{v} s'écrit :

$$\dot{V} = \int_{r=a} \underline{v} \cdot \underline{e}_r \, da.$$

Par suite

$$\mathcal{P}_e = p \dot{V} = Q \dot{q}, \quad \text{avec } Q = p, \quad q = V - V_0.$$

2) Comportement élasto-plastique parfait.

2.1) Régime élastique.

a) Pour un champ de contrainte de la forme (2)_b on a :

$$\underline{\sigma}_m = \frac{1}{3} (\sigma_{rr} + 2\sigma_{\theta\theta}), \quad \underline{s} = (\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}) \left(\frac{2}{3} \underline{e}_r \otimes \underline{e}_r - \frac{1}{3} \underline{e}_\theta \otimes \underline{e}_\theta - \frac{1}{3} \underline{e}_\varphi \otimes \underline{e}_\varphi \right). \quad (15)$$

Par suite la contrainte équivalente associée à un champ de contrainte de la forme (2)_b s'écrit :

$$\sigma_{\text{eq}} = |\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}|. \quad (16)$$

Pour le champ de contrainte (3)_b on obtient :

$$\sigma_{\text{eq}}(r) = \frac{3}{2} \frac{pf}{1-f} \frac{b^3}{r^3}.$$

Le maximum de $\sigma_{\text{eq}}(r)$ est atteint en $r = a$. Ce maximum vaut σ_0 pour :

$$p = p^e = \frac{2}{3}\sigma_0(1 - f). \quad (17)$$

La première plastification se produit donc à l'intérieur du réservoir ($r = a$) pour la pression p^e .

b) On remarque qu'en régime élastique, la contrainte radiale σ_{rr} est une contrainte de compression tandis que les contraintes de membrane $\sigma_{\theta\theta} = \sigma_{\varphi\varphi}$ sont de tension :

$$a \leq r \leq b : \quad \sigma_{rr} \leq 0, \quad \sigma_{\theta\theta} \geq 0. \quad (18)$$

2.2) Régime élasto-plastique : champ de contrainte. a) Un champ de contrainte est statiquement admissible avec les données du problème s'il vérifie les équations d'équilibre dans Ω et les conditions aux limites en force sur $\partial\Omega$. Dans le cas présent, compte tenu de la forme (2)_b et des équations d'équilibre en coordonnées sphériques (annexe B.2 du photocopié), la seule équation d'équilibre non triviale est le long de \underline{e}_r . Par ailleurs les conditions aux limites, précisées en 1.1, portent sur σ_{rr} seulement. L'ensemble de ces conditions s'écrit :

$$\frac{\partial\sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{2(\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta})}{r} = 0, \quad \sigma_{rr}(a) = -p, \quad \sigma_{rr}(b) = 0. \quad (19)$$

b) Un champ de contrainte est plastiquement admissible s'il vérifie le critère de von Mises en tout point du domaine. Compte tenu de l'expression (16) de la contrainte équivalente pour un champ de contrainte de la forme (2)_b, un tel champ est plastiquement admissible si

$$|\sigma_{rr}(r) - \sigma_{\theta\theta}(r)| \leq \sigma_0 \quad \forall r \in [a, b].$$

c) Le critère de von Mises est atteint en zone plastique :

$$|\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}| = \sigma_0.$$

En régime élastique on a $\sigma_{rr} \leq 0$ et $\sigma_{\theta\theta} \geq 0$. On fait l'hypothèse :

(H3) : les inégalités (18) restent satisfaites en zone plastique (lors d'une charge monotone).

Il vient alors, en zone plastique :

$$\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{rr} = \sigma_0.$$

L'équation d'équilibre (19) devient alors en zone plastique :

$$\frac{\partial\sigma_{rr}}{\partial r}(r) = \frac{2\sigma_0}{r}.$$

On peut alors intégrer cette équation entre a et c :

$$a \leq r \leq c : \quad \sigma_{rr}(r) - \sigma_{rr}(a) = \int_a^r \frac{\partial\sigma_{rr}}{\partial r}(r) dr = 2\sigma_0 \text{Log} \left(\frac{r}{a} \right).$$

En conclusion, compte tenu de la condition en limite en $r = a$, le champ de contrainte s'écrit en zone plastique :

$$a \leq r \leq c : \quad \sigma_{rr}(r) = -p + 2\sigma_0 \text{Log} \left(\frac{r}{a} \right), \quad \sigma_{\theta\theta}(r) = \sigma_{rr}(r) + \sigma_0 \quad (20)$$

d) Le vecteur contrainte exercé par la zone élastique sur la zone plastique est :

$$\underline{T}_{\text{élas/plas}} = \underline{\sigma} \cdot \underline{n}, \quad \underline{n} = \underline{e}_r \quad \text{normale extérieure à la zone plastique en } r = c.$$

Par suite :

$$\underline{T}_{\text{élas/plas}} = \left[-p + 2\sigma_0 \text{Log} \left(\frac{c}{a} \right) \right] \underline{e}_r \quad \text{en } r = c.$$

Le vecteur contrainte exercé par la zone plastique sur la zone élastique est l'opposé du précédent. Cet effort se traduit par l'application d'une pression $p_c = p - 2\sigma_0 \text{Log} \left(\frac{c}{a} \right)$ en $r = c$. Le problème à résoudre en zone élastique est donc celui d'une sphère creuse de rayon intérieur c , de rayon extérieur b , soumis à une pression interne p_c , constitué d'un matériau élastique linéaire. La solution est donc donnée par (2) et (3), où a et p doivent être remplacés par c et p_c .

En résumé, sous les hypothèses (H1) et (H2) le champ de contrainte est de la forme (2)_b avec :

$$\left. \begin{array}{l} a \leq r \leq c : \left\{ \begin{array}{l} \sigma_{rr}(r) = -p + 2\sigma_0 \text{Log} \left(\frac{r}{a} \right), \\ \sigma_{\theta\theta}(r) = \sigma_{rr}(r) + \sigma_0, \end{array} \right. \\ c \leq r \leq b : \left\{ \begin{array}{l} \sigma_{rr}(r) = \frac{p_c f_c}{1 - f_c} \left(1 - \frac{b^3}{r^3} \right), \\ \sigma_{\theta\theta}(r) = \frac{p_c f_c}{1 - f_c} \left(1 + \frac{b^3}{2r^3} \right). \end{array} \right. \end{array} \right\} \quad (21)$$

e) Le critère de von Mises doit être atteint au bord intérieur de la zone élastique et donc (cf (17)) :

$$p_c = \frac{2}{3}\sigma_0(1 - f_c). \quad (22)$$

En revenant à la définition de p_c , on obtient une équation dont la résolution permet la détermination du rayon c de la zone plastique :

$$\frac{2}{3}\sigma_0 \left(1 - \frac{c^3}{b^3} \right) = p - 2\sigma_0 \text{Log} \left(\frac{c}{a} \right). \quad (23)$$

On remarque que le rayon c de la zone plastique est une fonction croissante de la pression. En effet, en dérivant (23) par rapport à p il vient :

$$\frac{2\sigma_0 c^2}{b^3} \left(\frac{b^3}{c^3} - 1 \right) \frac{dc}{dp}(p) = 1,$$

ce qui montre (puisque $c \leq b$) que $\frac{dc}{dp}(p) \geq 0$.

f) Le réservoir est totalement plastifié lorsque $c = b$. La pression correspondante se déduit de (23) :

$$p = p^+ = 2\sigma_0 \text{Log} \left(\frac{b}{a} \right) = -\frac{2}{3}\sigma_0 \text{Log}(f). \quad (24)$$

2.3) Il reste à vérifier qu'un champ de déplacement cinématiquement admissible $\underline{\xi}$ peut être associé au champ de contrainte (21) par la loi de comportement.

a) En zone élastique, il déjà été remarqué que la solution est donnée par (3)_a avec, par hypothèse, $\nu = 1/2$ et, par construction, $p = p_c, f = f_c$:

$$\xi(r) = \frac{3}{4E} \frac{p_c f_c}{1 - f_c} \frac{b^3}{r^2}.$$

En particulier :

$$\xi(c) = \frac{3p_c}{4E} \frac{b^3 c}{b^3 - c^3}. \quad (25)$$

c, p_c et $1/(b^3 - c^3)$ sont des fonctions croissantes de p , donc de t . Par suite $\xi(c)$ est une fonction croissante de t .

b) On se place maintenant en zone plastique. Le tenseur vitesse de déformation s'exprime de façon générale en fonction du champ de vitesse par les relations cinématiques classiques (cours, annexe B.2) :

$$\underline{\dot{\underline{\underline{\epsilon}}}} = \frac{\partial \dot{\xi}}{\partial r} \underline{e}_r \otimes \underline{e}_r + \frac{\dot{\xi}}{r} (\underline{e}_\theta \otimes \underline{e}_\theta + \underline{e}_\varphi \otimes \underline{e}_\varphi) \quad (26)$$

Par ailleurs la loi de comportement doit être satisfaite :

$$\underline{\dot{\underline{\underline{\epsilon}}}} = \underline{\underline{\underline{S}}} : \underline{\dot{\underline{\underline{\sigma}}}} + \frac{3}{2} \dot{\lambda} \frac{\underline{\underline{\underline{s}}}}{\sigma_0}.$$

Le tenseur des contraintes est constant en zone plastique. Par suite $\underline{\dot{\underline{\underline{\sigma}}}} = \underline{\underline{\underline{0}}}$ en zone plastique et :

$$\underline{\dot{\underline{\underline{\epsilon}}}} = \underline{\underline{\underline{\epsilon}}}^p = \frac{3}{2} \dot{\lambda} \frac{\underline{\underline{\underline{s}}}}{\sigma_0}. \quad (27)$$

Le déviateur des contraintes (15) s'écrit en zone plastique :

$$\underline{\underline{\underline{s}}} = -\frac{2\sigma_0}{3} \underline{e}_r \otimes \underline{e}_r + \frac{\sigma_0}{3} (\underline{e}_\theta \otimes \underline{e}_\theta + \underline{e}_\varphi \otimes \underline{e}_\varphi). \quad (28)$$

Le tenseur vitesse de déformation qui se déduit de la loi de comportement est donc, en zone plastique :

$$\underline{\dot{\underline{\underline{\epsilon}}}} = \dot{\lambda} \left[-\underline{e}_r \otimes \underline{e}_r + \frac{1}{2} (\underline{e}_\theta \otimes \underline{e}_\theta + \underline{e}_\varphi \otimes \underline{e}_\varphi) \right], \quad (29)$$

où $\dot{\lambda}$ est *a priori* une fonction de r (par symétrie) et t dont on doit vérifier la positivité.

On déduit par comparaison entre (26) et (29) les deux équations suivantes

$$\frac{\partial \dot{\xi}}{\partial r} + 2 \frac{\dot{\xi}}{r} = 0 \quad (\text{incompressibilité}), \quad \dot{\lambda} = 2 \frac{\dot{\xi}}{r}.$$

L'équation d'incompressibilité s'intègre en

$$\dot{\xi}(r) = \frac{A}{r^2} = \frac{c^2 \dot{\xi}(c)}{r^2}, \quad (30)$$

tandis que la seconde équation donne :

$$\dot{\lambda} = 2 \frac{c^2 \dot{\xi}(c)}{r^3}. \quad (31)$$

Il a été montré précédemment que $\dot{\xi}(c) \geq 0$. Le multiplicateur $\dot{\lambda}$ ainsi construit est donc positif.

c) Les hypothèses (H1), (H2) et (H3) nous ont permis de construire, pour $p < p^+$ (i.e. $c < b$) un champ de contrainte et un champ de déplacement vérifiant toutes les équations du problème (équilibre, comportement, conditions aux limites). En raison de l'unicité du champ de contrainte, nous sommes assurés d'avoir trouvé l'unique solution en contrainte. Les hypothèses (H1) et (H2) sont donc justifiées *a posteriori*.

d) Par incompressibilité des déformations élastiques et plastiques, la variation de volume intérieur du réservoir est égale à sa variation de volume extérieur

$$\Delta V|_{r=a} = \Delta V|_{r=b}.$$

Par ailleurs

$$V|_{r=b} = \frac{4\pi}{3}b^3, \quad \text{et donc} \quad \left. \frac{\Delta V}{V} \right|_{r=b} = \frac{3\xi(b)}{b}, \quad \text{i.e.} \quad \Delta V = 4\pi b^2 \xi(b).$$

Compte tenu de l'expression (22) de p_c et de celle de $\xi(b)$ il vient :

$$\Delta V = 2\pi b^2 \frac{\sigma_0}{E} f_c.$$

A la première plastification, $f_c = f$, et donc :

$$\Delta V^e = 2\pi b^2 \frac{\sigma_0}{E} f.$$

A la plastification complète, $f_c = 1$, et donc

$$\Delta V^+ = 2\pi b^2 \frac{\sigma_0}{E} = f \Delta V^e.$$

Les variations qualitatives de ΔV en fonction de p sont portées sur le graphe ci-dessous. Contrairement au cas de la torsion traité en cours, la charge maximale (dont on verra plus loin qu'il s'agit de la charge limite) est atteinte pour une valeur finie de la variable cinématique ΔV et non asymptotiquement.

2.4) Comportement élasto-plastique parfait. Décharge

a) Pour justifier l'hypothèse d'une décharge purement élastique en tout point du réservoir entre p et 0, il faut montrer que le champ de contrainte obtenu en superposant le champ de contrainte initial et le champ de contrainte purement élastique dû à l'application d'une pression $-p$ est strictement dans le domaine d'élasticité. Posons :

$$\underline{\underline{\sigma}}^{\text{res}} = \underline{\underline{\sigma}} - \underline{\underline{\sigma}}^{\text{el}},$$

où le champ $\underline{\underline{\sigma}}$ est donné par (21) tandis que $\underline{\underline{\sigma}}^{\text{el}}$ est donné par (2)_b et (3)_b. Compte tenu de

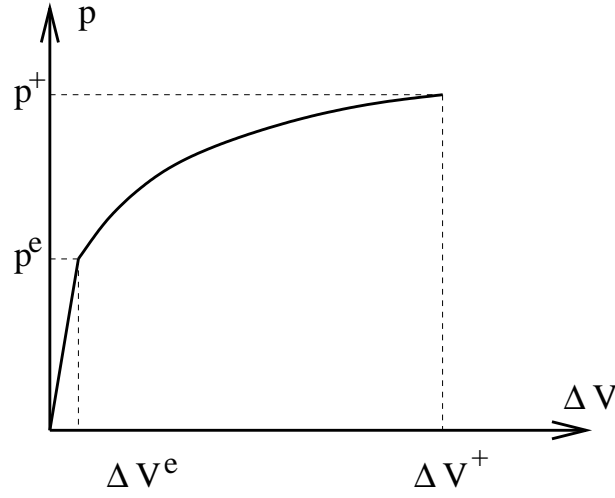


FIG. 4 – Variation de volume en fonction de la pression.

l'équation (22) on obtient :

$$\left. \begin{aligned}
 a \leq r \leq c & : \quad (\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{rr})(r) = \sigma_0, \quad (\sigma_{\theta\theta}^{\text{el}} - \sigma_{rr}^{\text{el}})(r) = \frac{3}{2} \frac{pf}{1-f} \frac{b^3}{r^3} = \sigma_0 \frac{p}{p^e} \frac{a^3}{r^3}, \\
 & \quad (\sigma_{\theta\theta}^{\text{res}} - \sigma_{rr}^{\text{res}})(r) = \sigma_0 \left(1 - \frac{p}{p^e} \frac{a^3}{r^3} \right), \\
 c \leq r \leq b & : \quad (\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{rr})(r) = \frac{3}{2} \frac{p_c f_c}{1-f_c} \frac{b^3}{r^3} = \sigma_0 \frac{c^3}{r^3}, \quad (\sigma_{\theta\theta}^{\text{el}} - \sigma_{rr}^{\text{el}})(r) = \sigma_0 \frac{p}{p^e} \frac{a^3}{r^3}, \\
 & \quad (\sigma_{\theta\theta}^{\text{res}} - \sigma_{rr}^{\text{res}})(r) = \sigma_0 \frac{c^3}{r^3} \left(1 - \frac{p}{p^e} \frac{a^3}{c^3} \right),
 \end{aligned} \right\} \quad (32)$$

En partant de $r = a$, on remarque que $\sigma_{\theta\theta}^{\text{res}} - \sigma_{rr}^{\text{res}}$ est une fonction croissante de r , négative en $r = a$ (car $p > p^e$) et positive en $r = c$. Pour établir ce dernier point, il suffit de remarquer que d'après (23) et l'inégalité $\text{Log}(x) \leq x - 1$ appliquée à $x = c^3/a^3$, on a :

$$p = \frac{2\sigma_0}{3} \left(1 - \frac{c^3}{b^3} \right) + \frac{2\sigma_0}{3} \text{Log} \left(\frac{c^3}{a^3} \right) \leq \frac{2\sigma_0}{3} \left(\frac{c^3}{a^3} - \frac{c^3}{b^3} \right) = \frac{c^3}{a^3} p^e.$$

Par conséquent

$$(\sigma_{\theta\theta}^{\text{res}} - \sigma_{rr}^{\text{res}})(c) = \sigma_0 \left(1 - \frac{p}{p^e} \frac{a^3}{c^3} \right) \geq 0.$$

Puis pour $r \geq c$, $\sigma_{\theta\theta}^{\text{res}} - \sigma_{rr}^{\text{res}}$ est du signe de $\left(1 - \frac{p}{p^e} \frac{a^3}{c^3} \right)$, donc positif et fonction décroissante de r d'après (32). Le maximum de $|\sigma_{\theta\theta}^{\text{res}} - \sigma_{rr}^{\text{res}}|$ ne peut donc être atteint qu'en $r = a$ ou $r = c$ et il suffit donc de vérifier que le critère est satisfait en ces points. Il est automatiquement satisfait en $r = c$ et il l'est en $r = a$ sous la condition $p < 2p^e$, ce qui est le cas par hypothèse.

b) Sur le bord intérieur du réservoir on a en particulier (pour $p \geq p^e$) :

$$\sigma_{rr}(a) = -p, \quad \sigma_{rr}^{\text{el}}(a) = -p, \quad \sigma_{\theta\theta}(a) = \sigma_0 - p, \quad \sigma_{\theta\theta}^{\text{el}}(a) = p \frac{1+2f}{2(1-f)}.$$

Par suite

$$\sigma_{rr}^{\text{res}}(a) = 0, \quad \sigma_{\theta\theta}^{\text{res}}(a) = \sigma_0 - p \frac{3}{2(1-f)}. \quad (33)$$

Il résulte de la définition de p^e que $\sigma_{\theta\theta}^{\text{res}}(a) \leq 0$ si $p \geq p^e$. La peau intérieure du réservoir subit une contrainte résiduelle de membrane *en compression*, la contrainte radiale étant nulle. Cette compression est physiquement due au fait que la zone élastique a tendance à se rétracter lorsque la pression est diminuée, qu'elle est gênée dans ce retrait par la zone plastique et qu'elle comprime donc cette dernière. On a donc ainsi un moyen de mettre en compression l'intérieur d'un réservoir métallique dont on craint la présence de défauts débouchant à l'intérieur du réservoir. On plastifie légèrement le réservoir avant usage, en créant ainsi une compression en peau interne, diminuant d'autant la pression ressentie par cette peau interne en service.

3. Charge limite.

Approche statique. En s'inspirant du problème élasto-plastique (dont la solution est obligatoirement un champ statiquement et physiquement admissible) on peut choisir pour famille de champs de contrainte le champ (21) paramétré par c . Ces champs de contrainte sont en équilibre avec la pression p donnée par (23). La fonction $c(p)$ étant croissante, son inverse $p(c)$ l'est également. La pression maximale supportable par cette famille de champs est donc obtenue pour $c = b$, ce qui correspond à $p = p^+$. On a donc montré que

$$p^u \geq p^+. \quad (34)$$

Approche cinématique. Comme suggéré par l'énoncé, on choisit un champ de vitesse à symétrie sphérique, $\underline{v} = v \underline{e}_r$. La condition de pertinence se traduit par

$$\text{tr} \underline{d}(\underline{v}) = 0, \quad \text{i.e.} \quad \frac{\partial v}{\partial r} + 2 \frac{v}{r} = 0, \quad \text{i.e.} \quad v(r) = \frac{A}{r^2}.$$

Le taux de vitesse de déformation correspondant s'écrit

$$\underline{d}(\underline{v}) = \frac{2A}{r^3} \left[-\underline{e}_r \otimes \underline{e}_r + \frac{1}{2} (\underline{e}_\theta \otimes \underline{e}_\theta + \underline{e}_\varphi \otimes \underline{e}_\varphi) \right], \quad d_{\text{eq}} = \frac{2|A|}{r^3}.$$

La puissance des efforts extérieurs est égale à

$$p \dot{V} \Big|_{r=a} = p V \Big|_{r=a} \frac{3v(a)}{a} = 4\pi A p.$$

La puissance résistante maximale dans ce champ de vitesse s'écrit :

$$\mathcal{P}_{rm}(\underline{v}) = \int_{\Omega} \pi(x, \underline{d}(\underline{v})) d\Omega = \sigma_0 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi d\theta \int_a^b \frac{2|A|}{r^3} r^2 \sin(\theta) dr.$$

En vertu de la définition cinématique de la charge limite, tout chargement potentiellement supportable p doit satisfaire :

$$\mathcal{P}_e(\underline{v}) \leq \mathcal{P}_{rm}(\underline{v}), \quad i.e. \quad 4\pi Ap \leq 8\pi\sigma_0 |A| \text{Log} \left(\frac{b}{a} \right),$$

d'où l'on déduit :

$$-p^+ \leq p^u \leq p^+. \quad (35)$$

Les inégalités (34) et (35) montrent donc que :

$$p^u = p^+.$$