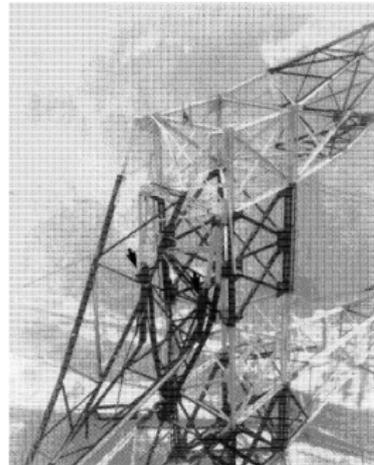
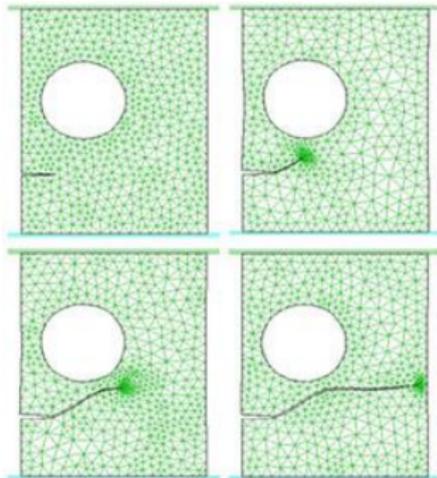


# Rupture et plasticité



Département de Mécanique, Ecole Polytechnique, 2009–2010

# Rupture et plasticité : plan du cours

## Comportements non linéaires des matériaux solides

Amphi 1

### Rupture fragile

- ▶ Singularités de contrainte et ténacité des matériaux Amphi 2
- ▶ Analyse énergétique de la propagation d'une fissure I Amphi 3
- ▶ Analyse énergétique de la propagation d'une fissure II.  
Fissuration par fatigue Amphi 4

### Plasticité

- ▶ Comportement élasto-plastique Amphi 5
- ▶ Dissipation plastique Amphi 6
- ▶ Structures élasto-plastiques standards Amphi 7

### Charges limites

**Amphi 8**

[www.lms.polytechnique.fr/users/bonnet/enseignement.html](http://www.lms.polytechnique.fr/users/bonnet/enseignement.html)

# Charges limites

1. Position du problème
2. Chargements potentiellement supportables : approche statique
3. Chargements potentiellement supportables : approche cinématique
4. Chargements supportables ou potentiellement supportables ?
5. Exemples d'analyse limite par les deux approches
  - Stabilité des pentes
  - Fondation

# Plan

## 1. Position du problème

2. Chargements potentiellement supportables : approche statique

3. Chargements potentiellement supportables : approche cinématique

4. Chargements supportables ou potentiellement supportables ?

5. Exemples d'analyse limite par les deux approches

Stabilité des pentes

Fondation

## Charges limites

Les contraintes que peut supporter une structure sont physiquement limitées...



### Matériaux élastiques fragiles

$$\sup_{|n|=1} \sigma(\underline{n}) \leq \sigma_0.$$

### Matériaux ductiles

$$\sigma_{\text{eq}} \leq \sigma_0.$$

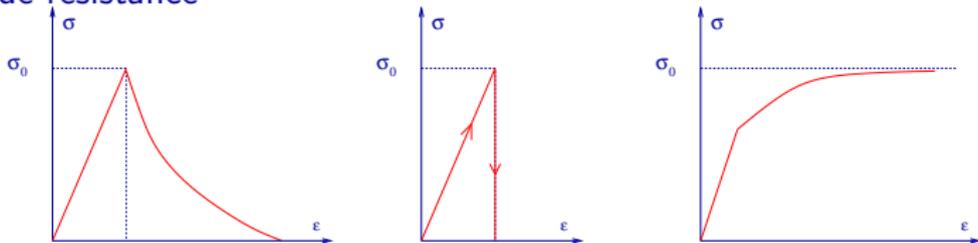
Plus généralement :

$$\underline{\underline{\sigma}} \in G \quad \text{domaine de résistance.}$$

**Objectif** : dimensionner une structure à partir de la **seule** connaissance de son domaine de résistance.

## Position du problème

### Domaine de résistance

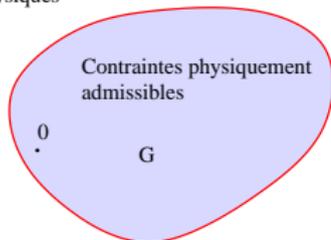


Une même condition d'admissibilité :  $\sigma \leq \sigma_0$ , mais **3 comportements 1D différents**

### Plus généralement :

$$\underline{\underline{\sigma}} \in G$$

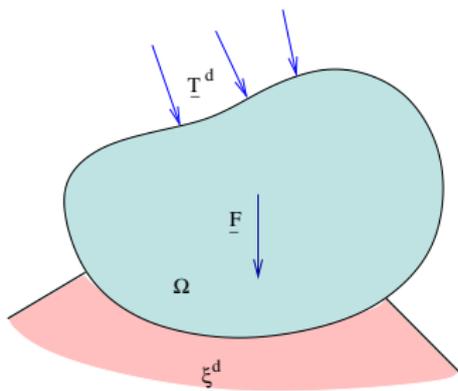
Contraintes non  
physiques



Le domaine de résistance  $G$  délimite les états de contraintes physiquement admissibles.

- ▶  $G$  est convexe.
- ▶  $\underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{0}}$  est point intérieur de  $G$ .
- ▶ Rien n'est dit sur le comportement du matériau lorsque  $\underline{\underline{\sigma}}$  est à l'intérieur de  $G$  ou sur le bord de  $\overline{G}$ .

## Problème de structure



▶ HPP :

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \frac{1}{2} (\underline{\nabla} \underline{\xi} + {}^T \underline{\nabla} \underline{\xi}),$$

▶ Quasi-statique :

$$\operatorname{div} \underline{\underline{\sigma}} + \underline{F} = 0,$$

▶ C.L. :  $\underline{T} = \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{n} = \underline{T}^d$  sur  $S_{\underline{T}}$ ,  $\underline{\xi} = \underline{\xi}^d$  sur  $S_{\underline{\xi}}$ .

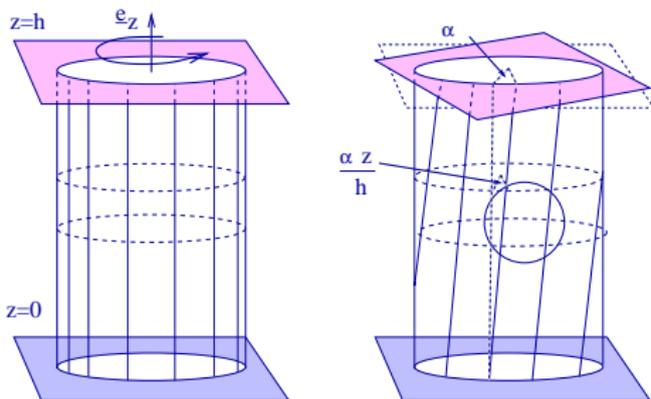
▶ Résistance limitée :  $\underline{\underline{\sigma}}(\underline{x}) \in G(\underline{x}), \forall \underline{x} \in \Omega$

Estimation des chargements supportables (ou non) par la structure ?

### Commentaires :

- ▶ **Information sur le comportement très incomplète.**  
Pas (ou peu) d'espoir de caractériser les chargements **supportables**.
- ▶ **Objectif** : caractériser les chargements **non supportables** par la structure.

## Exemple : torsion



Paramètres généralisés de chargement :

$$\mathcal{P}_e = \int_{z=h} \underline{T} \cdot \underline{\xi} \, ds = Q \dot{q},$$

$$Q = M = 2\pi \int_0^R \sigma_{\theta z} r^2 dr,$$

$M$  : couple de torsion,

$q = \alpha$  (angle de torsion).

## Exemple : torsion

Torsion d'un arbre : borne supérieure pour le couple admissible

$$M \leq 2\pi \int_0^R \left( \sup_{\underline{\sigma} \in G} \sigma_{\theta z} \right) r^2 dr = \frac{2\pi R^3}{3} \sup_{\underline{\sigma} \in G} \sigma_{\theta z}.$$

► **Résistance régie par le critère de von Mises :**

$$G = \{ \underline{\sigma} : \sigma_{\text{eq}} \leq \sigma_0 \}, \quad \sigma_{\text{eq}}^2 = \frac{3}{2} (s_{rr}^2 + s_{\theta\theta}^2 + s_{zz}^2 + 2\sigma_{r\theta}^2 + 2\sigma_{rz}^2 + 2\sigma_{\theta z}^2) \leq \sigma_0^2,$$

$$\sup_{\underline{\sigma} \in G} \sigma_{\theta z} = \frac{\sigma_0}{\sqrt{3}} \implies M \leq M^u = \frac{2\pi R^3 \sigma_0}{3\sqrt{3}}.$$

► **Résistance régie par la contrainte normale maximale**  $\sigma(\underline{n}) \leq \sigma_0 \quad \forall \underline{n}$ ,

En supposant (équilibre)  $\underline{\sigma} = \tau (\underline{e}_\theta \otimes \underline{e}_z + \underline{e}_z \otimes \underline{e}_\theta)$

$$\sup_{|\underline{n}|=1} \sigma(\underline{n}) = \tau \implies M \leq M^u = \frac{2\pi R^3 \sigma_0}{3}.$$

**Informations utilisées : Equilibre + résistance limitée**

## Commentaires

- ▶ **Existe-t-il un champ de contrainte  $\underline{\sigma}(\underline{x}, t)$  vérifiant les équations en contrainte du problème ?**

NON si  $M > M^u$ ,

- ▶ Le champ de contrainte solution du problème élastoplastique montre (critère de von Mises) que la réponse est

OUI si  $M < M^u$ .

- ▶ **Existe-t-il un champ de déplacement  $\underline{\xi}(\underline{x}, t)$  associé ?** : impossible de répondre sans préciser la loi de comportement complète :
  - Matériau parfaitement plastique : **Oui**.
  - Matériau élastique fragile : **Non en général**. Il peut y avoir rupture dès que le critère est atteint sur le bord.

Informations incomplètes  $\implies$  réponse incomplète.

On ne peut donner que des conditions nécessaires pour l'existence d'une solution.  
 $\implies$  Notion de chargement **potentiellement supportable**.

# Plan

1. Position du problème
- 2. Chargements potentiellement supportables : approche statique**
3. Chargements potentiellement supportables : approche cinématique
4. Chargements supportables ou potentiellement supportables ?
5. Exemples d'analyse limite par les deux approches
  - Stabilité des pentes
  - Fondation

## Approche statique (Equilibre + résistance limitée)

Cadre de travail : paramètres généralisés de chargement  $\underline{Q}$ .

Condition **nécessaire** pour que le chargement soit supportable : il doit exister un champ de contrainte  $\underline{\underline{\sigma}}$

- ▶ **statiquement admissible** :

$$\underline{\underline{\sigma}} \in \mathcal{S}(\underline{Q}) = \left\{ \underline{\underline{\sigma}}^*, \quad \text{div } \underline{\underline{\sigma}}^* + \underline{F} = \underline{0} \text{ dans } \Omega, \quad \underline{\underline{\sigma}}^* \cdot \underline{n} = \underline{T}^d \text{ sur } S_{\underline{T}} \right\}.$$

- ▶ **physiquement admissible** :

$$\underline{\underline{\sigma}} \in \mathcal{P} = \left\{ \underline{\underline{\sigma}}^*, \text{ tel que } \underline{\underline{\sigma}}^*(\underline{x}) \in G(\underline{x}) \quad \forall \underline{x} \in \Omega \right\}.$$

Condition nécessaire :

$$\underline{Q} \in \mathcal{K} = \left\{ \underline{X} \text{ tels que : } \mathcal{S}(\underline{X}) \cap \mathcal{P} \neq \emptyset \right\}.$$

- ▶ Un chargement dans  $\mathcal{K}$  est dit **potentiellement supportable**.
- ▶ Un chargement en dehors de  $\mathcal{K}$  **n'est pas supportable**.
- ▶ Un chargement sur le bord de  $\mathcal{K}$  est **chargement limite**.

## Propriétés de $\mathcal{K}$

$$\mathcal{K} = \{ \underline{X} \text{ tels que : } \mathcal{S}(\underline{X}) \cap \mathcal{P} \neq \emptyset \}.$$

- $\mathcal{K}$  contient  $\underline{0}$  :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{0}} \in \mathcal{S}(\underline{\underline{0}}), \quad \underline{\underline{0}} \in \mathcal{P}.$$

- $\mathcal{K}$  est convexe :

$$\underline{Q}_1, \underline{Q}_2 \in \mathcal{K}, \quad \underline{Q}_t = t\underline{Q}_1 + (1-t)\underline{Q}_2, \quad \text{alors } \underline{Q}_t \in \mathcal{K} \quad \forall 0 \leq t \leq 1.$$

- Chargement à un paramètre :

$$\mathcal{K} = [-Q_-^u, +Q_+^u]. \quad Q_{\pm}^u : \text{charges limites.}$$

- Tout champ de contrainte  $\underline{\underline{\sigma}}$  statiquement et physiquement admissible donne une **estimation par défaut** de  $Q^u$  :

$$Q(\underline{\underline{\sigma}}) \leq Q_+^u \quad (\underline{\underline{\sigma}} \in \mathcal{K}).$$

Objectif de l'approche **statique** : construire des champs de contrainte statiquement et physiquement admissibles donnant la borne inférieure la plus grande.

## Preuve de la convexité de $\mathcal{K}$

Définition de  $\mathcal{K} \implies \exists \underline{\underline{\sigma}}_1 \in \mathcal{S}(\underline{Q}_1) \cap \mathcal{P}, \quad \underline{\underline{\sigma}}_2 \in \mathcal{S}(\underline{Q}_2) \cap \mathcal{P}.$

On pose  $\underline{\underline{\sigma}}_t = t\underline{\underline{\sigma}}_1 + (1-t)\underline{\underline{\sigma}}_2.$

(a) Par linéarité de l'application  $\underline{\underline{\sigma}} \rightarrow \underline{Q}(\underline{\underline{\sigma}})$  et des équations d'équilibre :

$$\underline{Q}(t\underline{\underline{\sigma}}_1 + (1-t)\underline{\underline{\sigma}}_2) = t\underline{Q}_1 + (1-t)\underline{Q}_2 \implies \underline{\underline{\sigma}}_t \in \mathcal{S}(\underline{Q}_t).$$

(b) Par convexité de  $G$  :

$$\underline{\underline{\sigma}}_1(\underline{x}) \in G, \quad \underline{\underline{\sigma}}_2(\underline{x}) \in G \implies t\underline{\underline{\sigma}}_1(\underline{x}) + (1-t)\underline{\underline{\sigma}}_2(\underline{x}) \in G, \quad \underline{\underline{\sigma}}_t \in \mathcal{P}.$$

(c) Conclusion

$$\underline{\underline{\sigma}}_t \in \mathcal{S}(\underline{Q}_t) \cap \mathcal{P} \implies \underline{Q}_t \in \mathcal{K}.$$

## Mise en oeuvre de l'approche statique (dite aussi « par l'intérieur »)

- ▶ Choisir un champ de contrainte, ou (mieux) une **famille de champs de contrainte**.
- ▶ Leur imposer d'être **statiquement admissibles**.
- ▶ Appliquer le **critère d'admissibilité physique**.
- ▶ On obtient une **estimation par défaut** de la charge limite.
- ▶ **Optimiser le champ de contrainte pour maximiser la borne inférieure sur le chargement potentiellement supportable**.

## Exemple : plaque trouée, matériau de von Mises

### Données du problème :

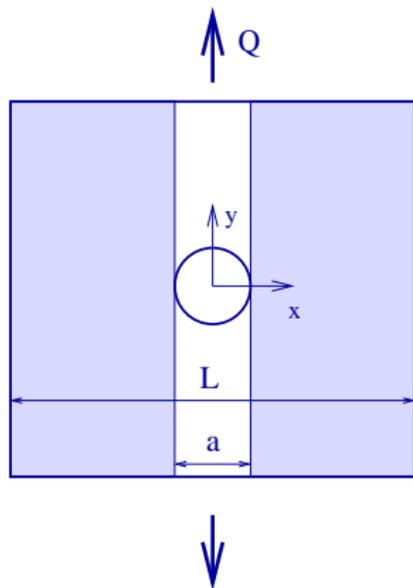
- Force  $Q$  selon  $Oy$ .
- Trou libre de contrainte.
- Déformations planes.
- von Mises :  $\sigma_{eq} \leq \sigma_0$ .

### Famille de champ de contrainte :

- $\underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{0}}$  dans la bande centrale  
(satisfait  $\underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{\underline{n}} = \underline{\underline{0}}$  au bord du trou).
- $\underline{\underline{\sigma}}$  uniforme dans les bandes latérales  
(satisfait  $\text{div } \underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{0}}$ )
- Continuité du vecteur contrainte  $\underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{\underline{e}}_x$  entre bandes :  $\sigma_{xx} = \sigma_{xy} = \sigma_{xz} = 0$ .

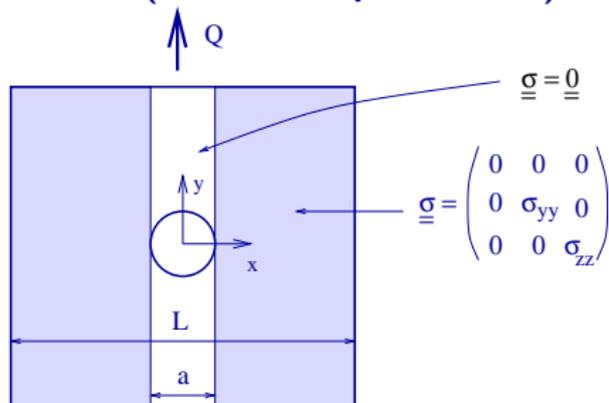
**Choix 1 :**  $\underline{\underline{\sigma}} = \sigma_{yy} \underline{\underline{e}}_y \otimes \underline{\underline{e}}_y$ ,

équilibre :  $\sigma_{yy} = Q/(L-a)$ , résistance :  $\sigma_{eq} = |\sigma_{yy}|$ ,  $Q^{\max} = \sigma_0(L-a)$ ,  
 $\implies \sigma_0(L-a) \leq Q^u$ .



## Exemple : plaque trouée, matériau de von Mises

Choix 2 (famille à 2 paramètres) :



$$\underline{\underline{\sigma}} = \sigma_{yy} \underline{e}_y \otimes \underline{e}_y + \sigma_{zz} \underline{e}_z \otimes \underline{e}_z,$$

équilibre :  $\sigma_{yy} = \frac{Q}{L-a},$

résistance :  $\sigma_{eq}^2 = (\sigma_{yy}^2 - \sigma_{yy}\sigma_{zz} + \sigma_{zz}^2)$   
 $= \left(\frac{1}{2}\sigma_{yy} - \sigma_{zz}\right)^2 + \frac{3}{4}\sigma_{yy}^2$   
 $\leq \sigma_0^2,$

Maximiser  $Q$  (ou  $\sigma_{yy}$ ) admissible :

choisir  $\sigma_{zz} = \frac{1}{2}\sigma_{yy}, \implies \sigma_{yy}^{\max} = \frac{2}{\sqrt{3}}\sigma_0 \implies Q^{\max} = \frac{2}{\sqrt{3}}\sigma_0(L-a),$

$$\implies \frac{2}{\sqrt{3}}\sigma_0(L-a) \leq Q^u.$$

Améliore la borne inf précédente  $\sigma_0(L-a)$  par un facteur  $2/\sqrt{3}$ .

# Plan

1. Position du problème
2. Chargements potentiellement supportables : approche statique
- 3. Chargements potentiellement supportables : approche cinématique**
4. Chargements supportables ou potentiellement supportables ?
5. Exemples d'analyse limite par les deux approches
  - Stabilité des pentes
  - Fondation

## Approche cinématique (dite aussi « par l'extérieur »)

- ▶ Soit  $\underline{Q} \in \mathcal{K}$ . Par définition de  $\mathcal{K}$  :  $\exists \underline{\underline{\sigma}} \in \mathcal{S}(\underline{Q}) \cap \mathcal{P}$ .
- ▶ Soit  $\underline{v}$  un champ cinématiquement admissible quelconque :

$$\text{PPV} \implies \underline{Q} \cdot \dot{\underline{q}}(\underline{v}) = \int_{\Omega} \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{d}}(\underline{v}) \, d\Omega, \quad (\underline{\underline{d}}(\underline{v}) = \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{v})).$$

$$\text{Or : } \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{d}}(\underline{v}) \leq \pi(\underline{x}, \underline{\underline{d}}(\underline{v})), \quad \text{avec } \pi(\underline{x}, \underline{\underline{d}}) \stackrel{\text{déf}}{=} \sup_{\underline{\underline{\sigma}}^* \in G(\underline{x})} \underline{\underline{\sigma}}^* : \underline{\underline{d}},$$

$$\mathcal{P}_e(\underline{Q}, \underline{v}) = \underline{Q} \cdot \dot{\underline{q}}(\underline{v}) \leq \mathcal{P}_{\text{rm}}(\underline{v}) \quad \text{avec } \mathcal{P}_{\text{rm}}(\underline{v}) \stackrel{\text{déf}}{=} \int_{\Omega} \pi(\underline{x}, \underline{\underline{d}}(\underline{v})) \, d\Omega.$$

$\mathcal{P}_{\text{rm}}$  est la puissance résistante maximale.

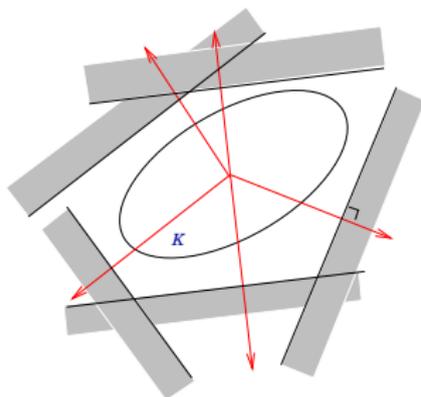
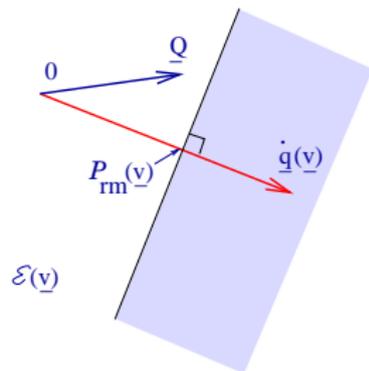
**Interprétation :** La puissance fournie par l'extérieur ne peut excéder celle que la structure est physiquement capable d'accommoder.

## Approche cinématique

$$\underline{Q} \cdot \underline{\dot{q}}(\underline{v}) \leq \mathcal{P}_{\text{rm}}(\underline{v}).$$

$$\underline{Q} \in \mathcal{E}(\underline{v}) = \{ \underline{Q}^* \text{ tels que } \mathcal{P}_e(\underline{Q}^*, \underline{v}) \leq \mathcal{P}_{\text{rm}}(\underline{v}) \}$$

$$\mathcal{E}(\underline{v}) = \text{demi-espace.}$$



En considérant **tous** les champs de vitesses  $\underline{v}$  cinématiquement admissibles :

$$\mathcal{K} \subset \mathcal{K}^c = \bigcap_{\underline{v}} \mathcal{E}(\underline{v}).$$

- ▶  $\mathcal{K}^c$  est défini de façon purement cinématique.
- ▶ On montre (théorie de la dualité) que  $\mathcal{K}^c = \mathcal{K}$ .

## Approche cinématique

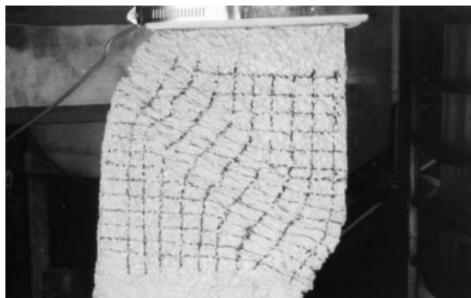
- ▶ **Tout champ de vitesse** donne une information (par excès) sur les chargements  $\underline{Q}$  potentiellement supportables

$$\underline{Q} \cdot \underline{\dot{v}} \leq \mathcal{P}_{\text{rm}}(\underline{v}).$$

- ▶ Cette information peut être **optimisée** : soit une **famille** de champs de vitesse  $\underline{v}$  tels que :

$$\underline{\dot{v}} = \underline{\dot{v}}^0, \quad \text{alors} \quad \underline{Q} \cdot \underline{\dot{v}}^0 \leq \inf_{\underline{\dot{v}} = \underline{\dot{v}}^0} \mathcal{P}_{\text{rm}}(\underline{v}).$$

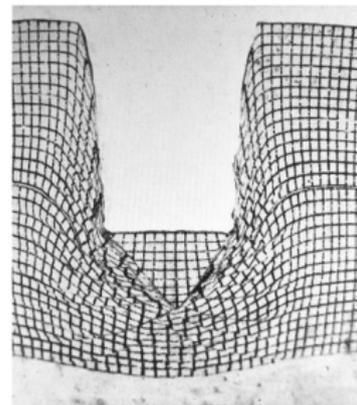
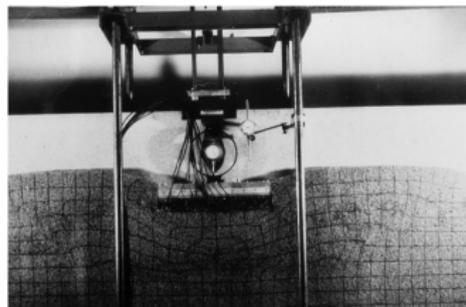
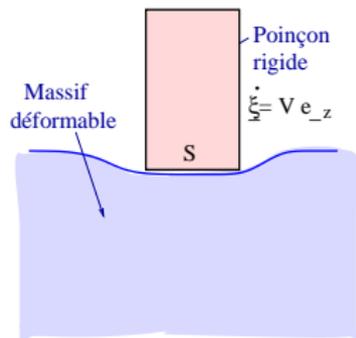
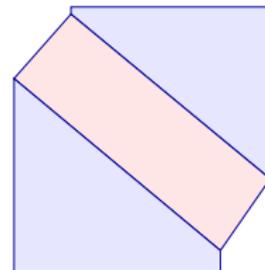
## Choix des champs de vitesse



Champ de vitesse :

$\underline{d}$  constant par sous domaine.

$\underline{v}$  **continu**.



Champs de vitesse virtuelle discontinus ?

## Champs de vitesse discontinus

Modifications à apporter à l'approche cinématique pour tenir compte des discontinuités de vitesse virtuelle :

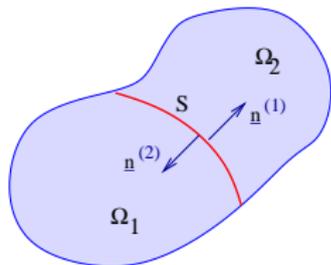
Champ de vitesse  $\underline{v}$  régulier sur  $\Omega_1$  et  $\Omega_2$ , discontinu sur  $S$  :

$$\int_{\Omega_1} \underline{\sigma} : \underline{d}(\underline{v}) \, d\Omega = - \int_{\Omega_1} \operatorname{div} \underline{\sigma} \cdot \underline{v} \, d\Omega + \int_{\partial_e \Omega_1} (\underline{\sigma} \cdot \underline{n}) \cdot \underline{v} \, da + \int_S (\underline{\sigma} \cdot \underline{n}^{(1)}) \cdot \underline{v}^{(1)} \, da,$$

$$\int_{\Omega_2} \underline{\sigma} : \underline{d}(\underline{v}) \, d\Omega = - \int_{\Omega_2} \operatorname{div} \underline{\sigma} \cdot \underline{v} \, d\Omega + \int_{\partial_e \Omega_2} (\underline{\sigma} \cdot \underline{n}) \cdot \underline{v} \, da + \int_S (\underline{\sigma} \cdot \underline{n}^{(2)}) \cdot \underline{v}^{(2)} \, da$$

(1) + (2) avec :  $\underline{\sigma} \cdot \underline{n}^{(1)} = -\underline{\sigma} \cdot \underline{n}^{(2)} = \underline{\sigma} \cdot \underline{n}$ ,  $[[\underline{v}]] = \underline{v}^{(2)} - \underline{v}^{(1)}$ .

$$\underbrace{\int_{\Omega-S} \underline{\sigma} : \underline{d}(\underline{v}) \, d\Omega + \int_S \underline{\sigma} \cdot \underline{n} \cdot [[\underline{v}]] \, da}_{-P_i} = \underbrace{\int_{\Omega} \underline{F} \cdot \underline{v} \, d\Omega + \int_{\partial\Omega} (\underline{\sigma} \cdot \underline{n}) \cdot \underline{v} \, da}_{P_e = \underline{Q} \cdot \dot{\underline{v}}}$$



## Champs de vitesse discontinus

$$\underbrace{\int_{\Omega-S} \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{d}}(\underline{\underline{v}}) d\Omega + \int_S \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{\underline{n}} \cdot \llbracket \underline{\underline{v}} \rrbracket da}_{-\mathcal{P}_i} = \underbrace{\int_{\Omega} \underline{\underline{F}} \cdot \underline{\underline{v}} d\Omega + \int_{\partial\Omega} (\underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{\underline{n}}) \cdot \underline{\underline{v}} da}_{\mathcal{P}_e = \underline{\underline{Q}} \cdot \underline{\underline{\dot{q}}}(\underline{\underline{v}})}$$

On remarque alors (symétrie de  $\underline{\underline{\sigma}}$ ) que

$$(\underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{\underline{n}}) \cdot \llbracket \underline{\underline{v}} \rrbracket = \sigma_{ij} n_j \llbracket v_i \rrbracket = \underline{\underline{\sigma}} : (\underline{\underline{n}} \otimes \llbracket \underline{\underline{v}} \rrbracket) = \underline{\underline{\sigma}} : \left( \frac{1}{2} [\underline{\underline{n}} \otimes \llbracket \underline{\underline{v}} \rrbracket + \llbracket \underline{\underline{v}} \rrbracket \otimes \underline{\underline{n}}] \right) = \underline{\underline{\sigma}} : (\underline{\underline{n}} \otimes_s \llbracket \underline{\underline{v}} \rrbracket)$$

d'où on déduit

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_e = \underline{\underline{Q}} \cdot \underline{\underline{\dot{q}}}(\underline{\underline{v}}) &= \int_{\Omega-S} \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{d}}(\underline{\underline{v}}) d\Omega + \int_S \underline{\underline{\sigma}} : (\underline{\underline{n}} \otimes_s \llbracket \underline{\underline{v}} \rrbracket) da \\ &\leq \int_{\Omega-S} \sup_{\underline{\underline{\sigma}}^* \in G(\underline{\underline{x}})} \underline{\underline{\sigma}}^* : \underline{\underline{d}}(\underline{\underline{v}}) d\Omega + \int_S \sup_{\underline{\underline{\sigma}}^* \in G(\underline{\underline{x}})} \underline{\underline{\sigma}}^* : (\underline{\underline{n}} \otimes_s \llbracket \underline{\underline{v}} \rrbracket) da \\ &= \int_{\Omega-S} \pi(\underline{\underline{x}}, \underline{\underline{d}}(\underline{\underline{v}})) d\Omega + \int_S \pi(\underline{\underline{x}}, \underline{\underline{n}} \otimes_s \llbracket \underline{\underline{v}} \rrbracket) da \end{aligned}$$

$$(\text{rappel : } \pi(\underline{\underline{x}}, \underline{\underline{d}}) \stackrel{\text{d\u00e9f}}{=} \sup_{\underline{\underline{\sigma}}^* \in G(\underline{\underline{x}})} \underline{\underline{\sigma}}^* : \underline{\underline{d}}).$$

## Puissance résistante maximale pour champs de vitesse discontinus :

$$\mathcal{P}_{\text{rm}}(\underline{v}) = \int_{\Omega-S} \pi(\underline{x}, \underline{d}(\underline{v})) d\Omega + \int_S \pi(\underline{x}, \underline{n} \otimes_s \llbracket \underline{v} \rrbracket) da$$

Puissance résistante = terme volumique + terme surfacique.

$$\mathcal{P}_e(\underline{Q}, \underline{v}) \leq \mathcal{P}_{\text{rm}}(\underline{v}), \quad \forall \underline{v} \text{ C.A.}$$

### Commentaires :

- ▶ **Idée : choisir une famille de  $\underline{v}$  C.A. et optimiser.**
- ▶ Les meilleurs champs de vitesse (ceux donnant une puissance résistante minimale) sont les **modes de ruine** les plus proches possibles de la réalité physique.
- ▶ **En théorie des charges limites** on peut travailler avec des champs de vitesse discontinus.

## Calcul de $\mathcal{P}_{\text{rm}}$ . Fonctions $\pi$ (critère de von Mises)

$$\pi(\underline{x}, \underline{\underline{d}}) = \sup_{\underline{\underline{\sigma}}^* \in G(\underline{x})} \underline{\underline{\sigma}}^* : \underline{\underline{d}},$$

### Critère de von Mises :

$$\pi(\underline{\underline{d}}) = \sup_{\sigma_{\text{eq}} \leq \sigma_0} \underline{\underline{\sigma}}^* : \underline{\underline{d}} = \sup_{\sigma_{\text{eq}} \leq \sigma_0} \left( p^* \text{tr}(\underline{\underline{d}}) + \underline{\underline{s}}^* : \underline{\underline{d}}^d \right), \quad \underline{\underline{d}}^d = \underline{\underline{d}} - \frac{\text{tr}(\underline{\underline{d}})}{3} \underline{\underline{1}}.$$

- ▶  $p^*$  arbitraire ( $\underline{\underline{s}}^*$  fixé) :  $\pi(\underline{\underline{d}}) = +\infty$  si  $\text{tr}(\underline{\underline{d}}) \neq 0$ .
- ▶ Si  $\text{tr}(\underline{\underline{d}}) = 0$ ,

$$\sup_{\sqrt{\frac{3}{2}} \|\underline{\underline{s}}^*\| \leq \sigma_0} \underline{\underline{s}}^* : \underline{\underline{d}} = \sqrt{\frac{2}{3}} \sigma_0 \|\underline{\underline{d}}\| = \sigma_0 d_{\text{eq}}, \quad \text{où } d_{\text{eq}} = \left( \frac{2}{3} \underline{\underline{d}} : \underline{\underline{d}} \right)^{1/2}.$$

$$\pi(\underline{\underline{d}}) = \begin{cases} +\infty & \text{si } \text{tr}(\underline{\underline{d}}) \neq 0, \\ = \sigma_0 d_{\text{eq}} & \text{si } \text{tr}(\underline{\underline{d}}) = 0, \end{cases}$$

## Fonctions $\pi$ et discontinuités de vitesse (critère de von Mises)

$$\text{tr}(\llbracket \underline{v} \rrbracket \otimes_s \underline{n}) = \llbracket \underline{v} \rrbracket \cdot \underline{n},$$

$$(\llbracket \underline{v} \rrbracket \otimes_s \underline{n})_{\text{eq}}^2 = \frac{1}{3} |\llbracket \underline{v} \rrbracket|^2 + \frac{1}{9} (\llbracket \underline{v} \rrbracket \cdot \underline{n})^2$$

$$\Rightarrow \pi(\llbracket \underline{v} \rrbracket \otimes_s \underline{n}) = \begin{cases} +\infty & \text{si } \llbracket \underline{v} \rrbracket \cdot \underline{n} \neq 0, \\ = \sigma_0 \|\llbracket \underline{v} \rrbracket\| / \sqrt{3} & \text{si } \llbracket \underline{v} \rrbracket \cdot \underline{n} = 0. \end{cases}$$

- ▶ Si  $\underline{v}$  est tel que :  $\pi(\underline{d}(\underline{v}))$  ou  $\pi(\llbracket \underline{v} \rrbracket \otimes_s \underline{n}) = +\infty$ , alors  $\mathcal{P}_{\text{rm}}(\underline{v}^*) = +\infty$ ,  
l'inégalité  $\underline{Q} \cdot \underline{\dot{q}}(\underline{v}) \leq \mathcal{P}_{\text{rm}}(\underline{v})$  est toujours satisfaite.

**Ces champs  $\underline{v}$  ne donnent pas d'information sur les charges limites ; ils sont donc sans intérêt pour la méthode.**

- ▶ Un champ  $\underline{v}$  tel que  $\pi(\underline{d}(\underline{v}))$  et  $\pi(\llbracket \underline{v} \rrbracket \otimes_s \underline{n})$  sont  $< +\infty$  est dit **pertinent**.
- ▶ **Pour le critère de von Mises :**

$$\underline{v} \text{ pertinent} \Leftrightarrow \text{tr} \underline{d}(\underline{v}) = 0 \text{ et } \llbracket \underline{v} \rrbracket \cdot \underline{n} = 0.$$

Les champs de vitesse pertinents pour le critère de von Mises ne créent pas de variation de volume et leurs discontinuités sont purement tangentielles.

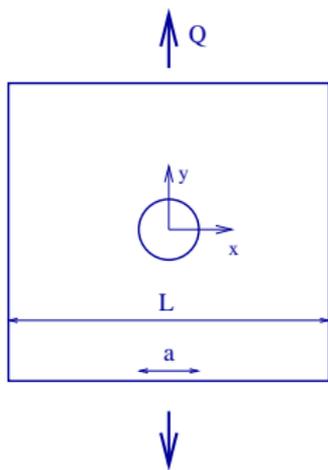
## Autres critères

Fonctions  $\pi$  connues (entre autres) pour :

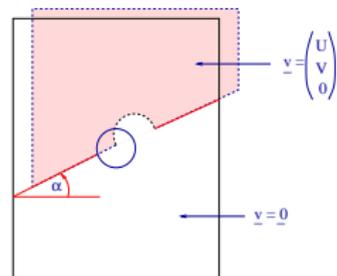
- ▶ Critère de Tresca : voir poly ;
- ▶ Critère de Coulomb (géomatériaux, friction) : voir exemple contrôle MEC551 2007-2008

$$|\tau| + \tan\phi \sigma_n - C \leq 0 \quad (C : \text{cohésion}, \phi : \text{angle de frottement})$$

## Exemple de mise en oeuvre : (a) construction de champs pertinents

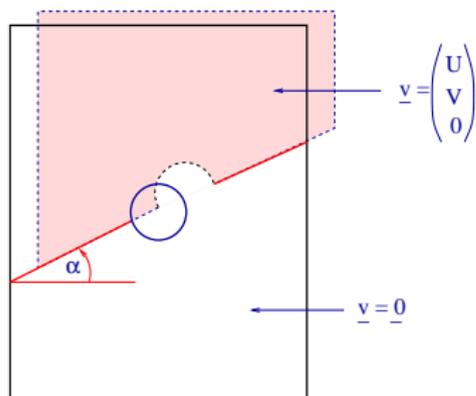


Choisir une famille de champs de vitesse pertinents.



- ▶ Vitesse partie basse :  $\underline{v} = \underline{0}$
- ▶ Vitesse partie haute :  
 $\underline{v} = U\underline{e}_x + V\underline{e}_y$ .
- ▶ **Pertinence** :  $V = U \operatorname{tg} \alpha$ .

## Exemple de mise en oeuvre : (b) puissance résistante et optimisation



- ▶ **Puissance des efforts extérieurs :**

$$\mathcal{P}_e(\underline{Q}, \underline{v}) = QV = QU \operatorname{tg} \alpha.$$

- ▶ **Discontinuité de vitesse :**

$$\|\llbracket \underline{v} \rrbracket\| = (U^2 + V^2)^{1/2} = \frac{|U|}{\cos \alpha}.$$

- ▶ **Puissance résistante maximale  $\mathcal{P}_{\text{rm}}(\underline{v})$  :**

$$\int_S \frac{\sigma_0}{\sqrt{3}} \|\llbracket \underline{v} \rrbracket\| da = \frac{\sigma_0}{\sqrt{3}} \left( \frac{L}{\cos \alpha} - a \right) \frac{|U|}{\cos \alpha}.$$

Appliquer l'inégalité  $\mathcal{P}_e(\underline{Q}, \underline{v}) \leq \mathcal{P}_{\text{rm}}(\underline{v})$  :

$$QV \leq \frac{\sigma_0}{\sqrt{3}} \left( \frac{L}{\cos \alpha} - a \right) \frac{|U|}{\cos \alpha}.$$

$$Q \leq \frac{\sigma_0}{\sqrt{3}} \left( \frac{L}{\cos \alpha} - a \right) \frac{1}{\sin \alpha}$$

Optimiser l'inégalité :

$$\alpha = \pi/4,$$

$$Q^u \leq \frac{2\sigma_0}{\sqrt{3}} \left( L - \frac{a}{\sqrt{2}} \right).$$

## Exemple de mise en oeuvre : (c) combinaison des approches statique et cinématique

$$\frac{2\sigma_0 L}{\sqrt{3}} \left(1 - \frac{a}{L}\right) \leq Q^u \leq \frac{2\sigma_0 L}{\sqrt{3}} \left(1 - \frac{a}{\sqrt{2}L}\right).$$

**Encadrement de la charge limite.**

Remarque : les bornes sont d'autant plus rapprochées que  $a/L$  est petit.

# Plan

1. Position du problème
2. Chargements potentiellement supportables : approche statique
3. Chargements potentiellement supportables : approche cinématique
- 4. Chargements supportables ou potentiellement supportables ?**
5. Exemples d'analyse limite par les deux approches
  - Stabilité des pentes
  - Fondation

## Chargements supportables ou potentiellement supportables ?

Supposons déterminé l'ensemble  $\mathcal{K}$ . Tout chargement dans l'intérieur de  $\mathcal{K}$  peut-il être **effectivement** supporté ?

Réponse :

- ▶ **oui** en plasticité parfaite :  $\underline{Q} \in \text{int}(\mathcal{K}) \implies$  **condition de charge sûre**.
- ▶ **inconnue** en général.

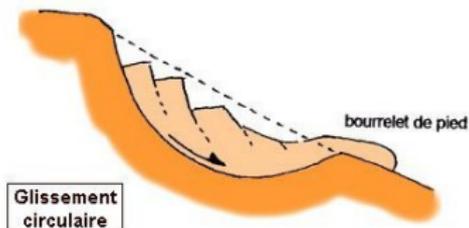
# Plan

1. Position du problème
2. Chargements potentiellement supportables : approche statique
3. Chargements potentiellement supportables : approche cinématique
4. Chargements supportables ou potentiellement supportables ?
- 5. Exemples d'analyse limite par les deux approches**
  - Stabilité des pentes
  - Fondation

# Plan

1. Position du problème
2. Chargements potentiellement supportables : approche statique
3. Chargements potentiellement supportables : approche cinématique
4. Chargements supportables ou potentiellement supportables ?
- 5. Exemples d'analyse limite par les deux approches**
  - Stabilité des pentes
  - Fondation

## Exemple d'analyse limite par les deux approches : stabilité de pente



Masse volumique ↗ quand teneur en eau ↗ . Paramètre de chargement :  $\rho$ .

## Approche statique (« par l'intérieur »)

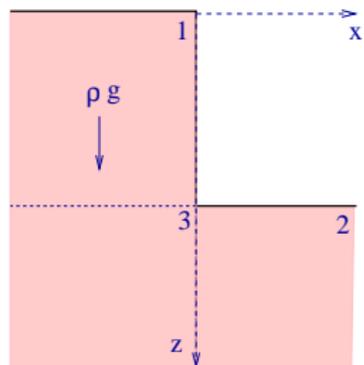
### Données du problème :

- Force volumique  $\rho g$  selon  $Oz$

$$\operatorname{div} \underline{\underline{\sigma}} + \rho g \underline{e}_z = 0.$$

- Bord libre de contrainte.
- Tresca

$$|\sigma_i - \sigma_j| \leq \sigma_0.$$



### Champ statiquement admissible :

$$\text{Zone 1 : } \sigma_{zz} = -\rho g z, \quad \sigma_{xz} = 0, \quad \sigma_{xx} = 0, \quad \sigma_{yy} = (1/2)(\sigma_{xx} + \sigma_{zz}).$$

$$\text{Zone 2 : } \sigma_{zz} = -\rho g(z - h), \quad \sigma_{xz} = 0, \quad \sigma_{xx} = -\rho g z, \quad \sigma_{yy} = (1/2)(\sigma_{xx} + \sigma_{zz}).$$

$$\text{Zone 3 : } \sigma_{zz} = -\rho g(z - h), \quad \sigma_{xz} = 0, \quad \sigma_{xx} = -\rho g z, \quad \sigma_{yy} = (1/2)(\sigma_{xx} + \sigma_{zz}).$$

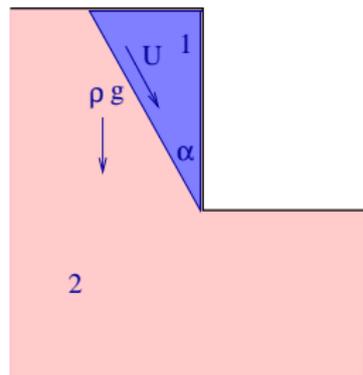
### Tresca :

$$|\sigma_i - \sigma_j| \leq \rho g h \quad \Longrightarrow \quad \boxed{\frac{\sigma_0}{gh} \leq \rho^u.}$$

## Approche cinématique

### Champ de vitesse :

- ▶ Zone 1 :  $\underline{v} = U(\sin \alpha \underline{e}_x + \cos \alpha \underline{e}_z)$
- ▶ Zone 2 :  $\underline{v} = \underline{0}$ .
- ▶ **Fonction  $\pi$  pour Tresca (cf. poly) :**  
 $\pi(\llbracket \underline{v} \rrbracket) = \frac{\sigma_0}{2} \|\llbracket \underline{v} \rrbracket\|$  si  $\llbracket \underline{v} \rrbracket \cdot \underline{n} = 0$ .
- ▶ **Champ pertinent** par construction,  $\|\llbracket \underline{v} \rrbracket\| = U$ .



### Puissance efforts extérieurs :

$$\mathcal{P}_e(P, \underline{v}) = \int_{\Omega} \rho g \underline{v} \cdot \underline{e}_z \, dV = PU, \quad P = \frac{1}{2} \rho g h^2 \sin \alpha \quad (\text{poids de la partie « mobile »}).$$

### Puissance résistante maximale :

$$\mathcal{P}_{rm}(\underline{v}) = \int_S \frac{\sigma_0}{2} \|\llbracket \underline{v} \rrbracket\| \, da = \frac{\sigma_0 |U|}{2} \frac{h}{\cos \alpha} \quad \Rightarrow \quad \rho^u \leq \frac{\sigma_0}{gh} \frac{1}{\cos \alpha \sin \alpha}.$$

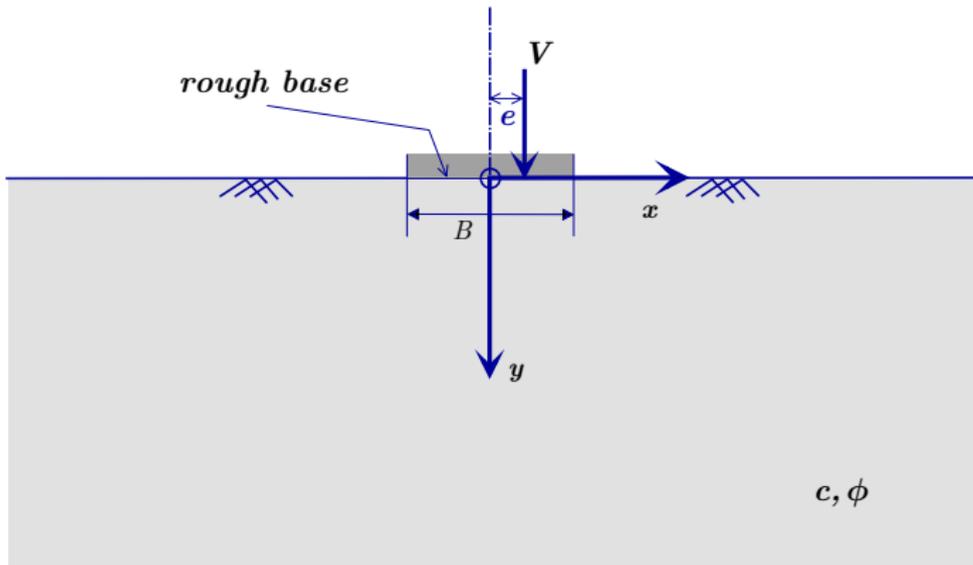
### Optimisation par rapport à $\alpha$ :

$$\rho^u \leq \min_{0 \leq \alpha \leq \pi/2} \frac{\sigma_0}{gh} \frac{1}{\cos \alpha \sin \alpha} = \frac{2\sigma_0}{gh}.$$

# Plan

1. Position du problème
2. Chargements potentiellement supportables : approche statique
3. Chargements potentiellement supportables : approche cinématique
4. Chargements supportables ou potentiellement supportables ?
- 5. Exemples d'analyse limite par les deux approches**
  - Stabilité des pentes
  - Fondation

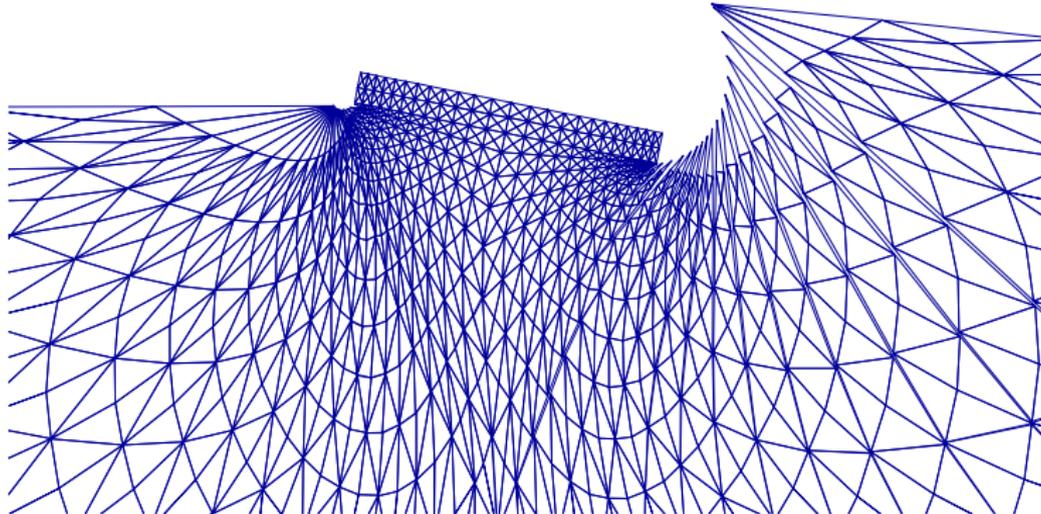
## Exemple d'analyse limite par les deux approches : fondation



M. Hjjaj, A. V. Ljamin, S. W. Sloan, *Int. J. Solids Structures* **42** :1681–1704, 2005.

## Analyse limite d'une fondation : approche cinématique

Construction numérique d'un « mode de ruine » : optimisation numérique de  $\mathcal{P}_{rm}(\underline{v})$  par rapport aux **valeurs nodales** des champs de vitesse pertinents  $\underline{v}$  engendrés par des **fonctions de base éléments finis**.



$$e = 0.3 B$$

M. Hjjaj, A. V. Ljamin, S. W. Sloan, *Int. J. Solids Structures* **42** :1681–1704, 2005.

## Analyse limite par les deux approches d'une fondation : encadrements de charges limites

### Numerical results – Eccentricity = 0.3 $B$

#### Rough

Angle	LB	UB	Average	Error
30	12.69	13.71	13.20	3.86
35	19.45	21.41	20.43	4.79
40	31.82	35.51	33.66	5.49
45	56.43	63.34	59.89	5.76

#### Smooth

Angle	LB	UB	Average	Error
30	11.99	12.14	12.07	0.63
35	18.32	18.60	18.46	0.75
40	29.81	30.46	30.13	1.08
45	52.60	54.24	53.42	1.54

M. Hjjaj, A. V. Ljamin, S. W. Sloan, *Int. J. Solids Structures* 42 :1681–1704, 2005.

## Conclusion

- ▶ Pour une structure constituée d'un matériau à résistance limitée, il existe un domaine  $\mathcal{K}$  de **chargements potentiellement supportables** dont le bord est constitué **des charges limites de la structure**.
- ▶ **Approche statique** : détermination par l'intérieur de  $\mathcal{K}$  (détermination par défaut des charges limites).
- ▶ **Approche cinématique** : détermination par l'extérieur de  $\mathcal{K}$  (détermination par excès des charges limites).
- ▶ **Tout chargement potentiellement supportable n'est pas nécessairement effectivement supportable.**

## Récapitulation : points clés du cours

- ▶ Les contraintes dans un matériau réel sont le plus souvent limitées. Le critère dépend du type de matériau.
- ▶ Notion de **force thermodynamique**, commune à la mécanique linéaire de la rupture ( $G$ ) et la plasticité parfaite ( $\underline{\underline{\sigma}}$ ), ainsi qu'à d'autres comportements non linéaires.
- ▶ **Des lois à seuil** sur ces forces sont fréquemment utilisées pour traduire des transitions entre régimes de comportement.
- ▶ L'évolution d'un phénomène irréversible s'accompagne d'une **dissipation d'énergie** toujours positive.
- ▶ En fonction des limitations physiques que traduisent ces seuils, on peut obtenir des **estimations des chargements potentiellement supportables**.

**Merci pour votre attention !**

*mercredi 02/12 : pas d'amphi mais la PC9 a lieu ;*

*mercredi 09/12 : examen écrit 9h00–12h00*