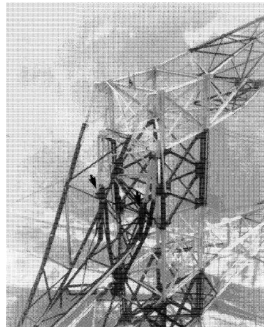
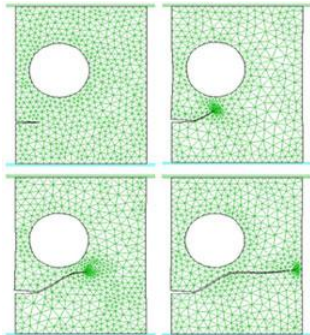


Rupture et plasticité



Département de Mécanique, Ecole Polytechnique, 2009–2010

Rupture et plasticité : plan du cours

Comportements non linéaires des matériaux solides

Amphi 1

Rupture fragile

- ▶ Singularités de contrainte et ténacité des matériaux Amphi 2
- ▶ Analyse énergétique de la propagation d'une fissure I Amphi 3
- ▶ Analyse énergétique de la propagation d'une fissure II.
Fissuration par fatigue Amphi 4

Plasticité

- ▶ Comportement élasto-plastique Amphi 5
- ▶ Dissipation plastique Amphi 6
- ▶ **Structures élasto-plastiques standards** Amphi 7

Charges limites

Amphi 8

www.lms.polytechnique.fr/users/bonnet/enseignement.html

Elasto-plasticité

Amphis 5, 6. Loi de comportement : quand et comment apparaissent les déformations plastiques en un point matériel ; dissipation...



Amphi 7 : prévoir la réponse d'une structure élastoplastique.

Structures élasto-plastiques standards

1. Formulation du problème d'évolution pour une structure élasto-plastique
2. Exemple : torsion d'un arbre cylindrique élasto-plastique
3. Evolution de structures élasto-plastiques
 - Structures élastiques parfaitement plastiques
 - Structures élasto-plastiques avec écrouissage
 - Ecrouissage de structure
4. Incompatibilité et contraintes résiduelles
5. Intégration numérique en temps (plasticité parfaite)

Plan

1. Formulation du problème d'évolution pour une structure élasto-plastique
2. Exemple : torsion d'un arbre cylindrique élasto-plastique
3. Evolution de structures élasto-plastiques
 - Structures élastiques parfaitement plastiques
 - Structures élasto-plastiques avec écrouissage
 - Ecrouissage de structure
4. Incompatibilité et contraintes résiduelles
5. Intégration numérique en temps (plasticité parfaite)

Formulation du problème d'évolution (quasi-statique) pour une structure élasto-plastique

Compatibilité + HPP :

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \frac{1}{2} (\underline{\underline{\nabla}} \underline{\underline{\xi}} + {}^T \underline{\underline{\nabla}} \underline{\underline{\xi}}),$$

Formulation du problème d'évolution (quasi-statique) pour une structure élasto-plastique

Compatibilité + HPP :

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \frac{1}{2}(\underline{\nabla}\underline{\xi} + {}^T\underline{\nabla}\underline{\xi}),$$

Equilibre :

$$\operatorname{div} \underline{\underline{\sigma}} + \underline{F} = 0,$$

Formulation du problème d'évolution (quasi-statique) pour une structure élasto-plastique

Compatibilité + HPP :

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \frac{1}{2}(\underline{\nabla}\underline{\xi} + {}^T\underline{\nabla}\underline{\xi}),$$

Equilibre :

$$\operatorname{div}\underline{\underline{\sigma}} + \underline{\underline{F}} = 0,$$

Loi de comportement :

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \underline{\underline{S}} : \underline{\underline{\sigma}} + \underline{\underline{\varepsilon}}^P,$$

$$f(\underline{\underline{\sigma}}) \leq 0, \quad \dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}^P = \dot{\lambda} \frac{\partial f}{\partial \underline{\underline{\sigma}}}(\underline{\underline{\sigma}}), \quad \dot{\lambda} f(\underline{\underline{\sigma}}) = 0.$$

Formulation du problème d'évolution (quasi-statique) pour une structure élasto-plastique

Compatibilité + HPP :

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \frac{1}{2} (\underline{\nabla} \underline{\xi} + {}^T \underline{\nabla} \underline{\xi}),$$

Equilibre :

$$\operatorname{div} \underline{\underline{\sigma}} + \underline{\underline{F}} = 0,$$

Loi de comportement :

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \underline{\underline{S}} : \underline{\underline{\sigma}} + \underline{\underline{\varepsilon}}^P,$$

$$f(\underline{\underline{\sigma}}) \leq 0, \quad \dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}^P = \dot{\lambda} \frac{\partial f}{\partial \underline{\underline{\sigma}}}(\underline{\underline{\sigma}}), \quad \dot{\lambda} f(\underline{\underline{\sigma}}) = 0.$$

Conditions aux limites :

$$\underline{\underline{T}} = \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{\underline{n}} = \underline{\underline{T}}^d \quad \text{sur } S_{\underline{\underline{T}}}, \quad \underline{\underline{\xi}} = \underline{\underline{\xi}}^d \quad \text{sur } S_{\underline{\underline{\xi}}}.$$

Formulation du problème d'évolution (quasi-statique) pour une structure élasto-plastique

Compatibilité + HPP :

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \frac{1}{2} (\underline{\nabla} \underline{\xi} + {}^T \underline{\nabla} \underline{\xi}),$$

Equilibre :

$$\operatorname{div} \underline{\underline{\sigma}} + \underline{\underline{F}} = 0,$$

Loi de comportement :

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \underline{\underline{S}} : \underline{\underline{\sigma}} + \underline{\underline{\varepsilon}}^P,$$

$$f(\underline{\underline{\sigma}}) \leq 0, \quad \dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}^P = \dot{\lambda} \frac{\partial f}{\partial \underline{\underline{\sigma}}}(\underline{\underline{\sigma}}), \quad \dot{\lambda} f(\underline{\underline{\sigma}}) = 0.$$

Conditions aux limites :

$$\underline{\underline{T}} = \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{\underline{n}} = \underline{\underline{T}}^d \quad \text{sur } S_{\underline{\underline{T}}}, \quad \underline{\underline{\xi}} = \underline{\underline{\xi}}^d \quad \text{sur } S_{\underline{\underline{\xi}}}.$$

Histoire de chargement :

$$\underline{\underline{F}}(\underline{\underline{x}}, t), \underline{\underline{T}}^d(\underline{\underline{x}}, t), \underline{\underline{\xi}}^d(\underline{\underline{x}}, t) \implies \underline{\underline{\sigma}}(\underline{\underline{x}}, t), \underline{\underline{\xi}}(\underline{\underline{x}}, t).$$

Formulation du problème d'évolution (quasi-statique) pour une structure élasto-plastique

Compatibilité + HPP :

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \frac{1}{2} (\underline{\nabla} \underline{\xi} + {}^T \underline{\nabla} \underline{\xi}),$$

Equilibre :

$$\operatorname{div} \underline{\underline{\sigma}} + \underline{\underline{F}} = 0,$$

Loi de comportement :

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \underline{\underline{S}} : \underline{\underline{\sigma}} + \underline{\underline{\varepsilon}}^P,$$

$$f(\underline{\underline{\sigma}}) \leq 0, \quad \dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}^P = \dot{\lambda} \frac{\partial f}{\partial \underline{\underline{\sigma}}}(\underline{\underline{\sigma}}), \quad \dot{\lambda} f(\underline{\underline{\sigma}}) = 0.$$

Conditions aux limites :

$$\underline{\underline{T}} = \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{n} = \underline{\underline{T}}^d \quad \text{sur } S_{\underline{\underline{T}}}, \quad \underline{\underline{\xi}} = \underline{\underline{\xi}}^d \quad \text{sur } S_{\underline{\underline{\xi}}}.$$

Histoire de chargement :

$$\underline{\underline{F}}(\underline{x}, t), \underline{\underline{T}}^d(\underline{x}, t), \underline{\underline{\xi}}^d(\underline{x}, t) \implies \underline{\underline{\sigma}}(\underline{x}, t), \underline{\underline{\xi}}(\underline{x}, t).$$

Existe-t-il un champ de déplacement $\underline{\underline{\xi}}(\underline{x}, t)$ et un champ de contrainte $\underline{\underline{\sigma}}(\underline{x}, t)$ vérifiant ce système d'équations ?

Conditions initiales

- La seule véritable inconnue cinématique est le champ de vitesse $\underline{\dot{\xi}}$.

$$\underline{\dot{\underline{\underline{\xi}}}} = \frac{1}{2} (\underline{\nabla} \underline{\dot{\xi}} + {}^T \underline{\nabla} \underline{\dot{\xi}}) = \underline{\dot{\underline{\underline{\xi}}}}^{\text{el}} + \underline{\dot{\underline{\underline{\xi}}}}^{\text{P}}, \quad \underline{\dot{\underline{\underline{\xi}}}}^{\text{el}} = \underline{\underline{\underline{\underline{S}}}} : \underline{\dot{\underline{\underline{\sigma}}}}, \quad \underline{\dot{\underline{\underline{\xi}}}}^{\text{P}} = \dot{\lambda} \frac{\partial f}{\partial \underline{\underline{\underline{\underline{\sigma}}}}}(\underline{\underline{\underline{\underline{\sigma}}}}).$$

Conditions initiales

- La seule véritable inconnue cinématique est le champ de vitesse $\underline{\dot{\xi}}$.

$$\underline{\dot{\xi}} = \frac{1}{2} (\nabla \underline{\dot{\xi}} + {}^T \nabla \underline{\dot{\xi}}) = \underline{\dot{\xi}}^{\text{el}} + \underline{\dot{\xi}}^{\text{P}}, \quad \underline{\dot{\xi}}^{\text{el}} = \underline{\underline{\underline{S}}} : \underline{\dot{\sigma}}, \quad \underline{\dot{\xi}}^{\text{P}} = \dot{\lambda} \frac{\partial f}{\partial \underline{\underline{\underline{\sigma}}}}(\underline{\underline{\underline{\sigma}}}).$$

- Intégration en temps :

$$\underline{\xi}(\underline{x}, t) = \underline{\xi}(\underline{x}, 0) + \int_0^t \underline{\dot{\xi}}(\underline{x}, s) ds,$$

$$\underline{\xi}(\underline{x}, 0) = \underline{\xi}^0(\underline{x}).$$

$$\underline{\underline{\underline{\varepsilon}}}^{\text{P}}(\underline{x}, t) = \underline{\underline{\underline{\varepsilon}}}^{\text{P}}(\underline{x}, 0) + \int_0^t \underline{\underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}}^{\text{P}}(\underline{x}, s) ds,$$

$$\underline{\underline{\underline{\varepsilon}}}^{\text{P}}(\underline{x}, 0) = \underline{\underline{\underline{\varepsilon}}}^{\text{P}0}(\underline{x}).$$

Conditions initiales

- ▶ La seule véritable inconnue cinématique est le champ de vitesse $\underline{\dot{\xi}}$.

$$\underline{\dot{\xi}} = \frac{1}{2} (\nabla \underline{\dot{\xi}} + {}^T \nabla \underline{\dot{\xi}}) = \underline{\dot{\xi}}^{\text{el}} + \underline{\dot{\xi}}^{\text{P}}, \quad \underline{\dot{\xi}}^{\text{el}} = \underline{\underline{S}} : \underline{\dot{\sigma}}, \quad \underline{\dot{\xi}}^{\text{P}} = \dot{\lambda} \frac{\partial f}{\partial \underline{\underline{\sigma}}}(\underline{\sigma}).$$

- ▶ Intégration en temps :

$$\underline{\xi}(\underline{x}, t) = \underline{\xi}(\underline{x}, 0) + \int_0^t \underline{\dot{\xi}}(\underline{x}, s) ds,$$

$$\underline{\xi}(\underline{x}, 0) = \underline{\xi}^0(\underline{x}).$$

$$\underline{\underline{\varepsilon}}^{\text{P}}(\underline{x}, t) = \underline{\underline{\varepsilon}}^{\text{P}}(\underline{x}, 0) + \int_0^t \underline{\dot{\underline{\varepsilon}}}^{\text{P}}(\underline{x}, s) ds,$$

$$\underline{\underline{\varepsilon}}^{\text{P}}(\underline{x}, 0) = \underline{\underline{\varepsilon}}^{\text{P}0}(\underline{x}).$$

- ▶ Problème en contrainte :

$$\underline{\underline{S}} : \underline{\dot{\sigma}}(t) + \dot{\lambda} \frac{\partial f}{\partial \underline{\underline{\sigma}}}(\underline{\sigma}) = \underline{\dot{\xi}}, \quad \text{avec } f(\underline{\sigma}) \leq 0 \quad \text{et} \quad \dot{\lambda} f(\underline{\sigma}) = 0.$$

Même lorsque $\underline{\xi}$ est connu, $\underline{\sigma}$ est solution d'une équation d'évolution.
Condition initiale

$$\underline{\sigma}(\underline{x}, 0) = \underline{\sigma}^0(\underline{x}).$$

Conditions initiales

- ▶ La seule véritable inconnue cinématique est le champ de vitesse $\underline{\dot{\xi}}$.

$$\underline{\dot{\xi}} = \frac{1}{2} (\nabla \underline{\dot{\xi}} + {}^T \nabla \underline{\dot{\xi}}) = \underline{\dot{\xi}}^{\text{el}} + \underline{\dot{\xi}}^{\text{P}}, \quad \underline{\dot{\xi}}^{\text{el}} = \underline{\underline{S}} : \underline{\dot{\sigma}}, \quad \underline{\dot{\xi}}^{\text{P}} = \dot{\lambda} \frac{\partial f}{\partial \underline{\sigma}}(\underline{\sigma}).$$

- ▶ Intégration en temps :

$$\underline{\xi}(\underline{x}, t) = \underline{\xi}(\underline{x}, 0) + \int_0^t \underline{\dot{\xi}}(\underline{x}, s) ds,$$

$$\underline{\xi}(\underline{x}, 0) = \underline{\xi}^0(\underline{x}).$$

$$\underline{\underline{\varepsilon}}^{\text{P}}(\underline{x}, t) = \underline{\underline{\varepsilon}}^{\text{P}}(\underline{x}, 0) + \int_0^t \underline{\dot{\underline{\varepsilon}}}^{\text{P}}(\underline{x}, s) ds,$$

$$\underline{\underline{\varepsilon}}^{\text{P}}(\underline{x}, 0) = \underline{\underline{\varepsilon}}^{\text{P}0}(\underline{x}).$$

- ▶ Problème en contrainte :

$$\underline{\underline{S}} : \underline{\dot{\sigma}}(t) + \dot{\lambda} \frac{\partial f}{\partial \underline{\sigma}}(\underline{\sigma}) = \underline{\dot{\xi}}, \quad \text{avec } f(\underline{\sigma}) \leq 0 \quad \text{et} \quad \dot{\lambda} f(\underline{\sigma}) = 0.$$

Même lorsque $\underline{\xi}$ est connu, $\underline{\sigma}$ est solution d'une équation d'évolution.
Condition initiale

$$\underline{\sigma}(\underline{x}, 0) = \underline{\sigma}^0(\underline{x}).$$

- ▶ Compatibilité des données initiales :

$$\underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{\xi}^0) = \underline{\underline{S}} : \underline{\underline{\sigma}}^0 + \underline{\underline{\varepsilon}}^{\text{P}0}.$$

Plan

1. Formulation du problème d'évolution pour une structure élasto-plastique

2. Exemple : torsion d'un arbre cylindrique élasto-plastique

3. Evolution de structures élasto-plastiques

Structures élastiques parfaitement plastiques

Structures élasto-plastiques avec écrouissage

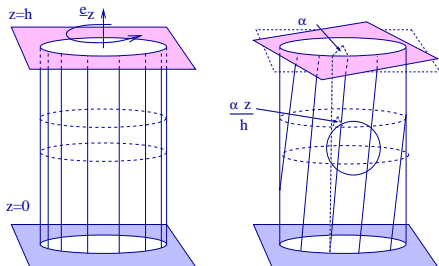
Ecrouissage de structure

4. Incompatibilité et contraintes résiduelles

5. Intégration numérique en temps (plasticité parfaite)

Torsion d'un arbre cylindrique élasto-plastique

- ▶ Matériau élastique parfaitement plastique, homogène, isotrope, critère de von Mises.
- ▶ **Forces de volume nulles, état initial = état naturel sans contrainte.**



Conditions aux limites :

$$\text{en } z = 0 : \quad \xi_r = \xi_\theta = 0, \quad T_z = 0,$$

$$\text{en } z = h : \quad \xi_r = 0, \quad \xi_\theta = \alpha r, \quad T_z = 0,$$

$$\text{en } r = R : \quad \underline{T} = \underline{0}.$$

(rotation d'angle (petit) α imposée à la section $z = h$)

Solution élastique

- Paramètres généralisés de chargement : angle et couple de torsion

$$\mathcal{P}_e = \int_{z=h} \underline{T} \cdot \underline{\xi} ds = Q\dot{q}, \quad q = \alpha \text{ (angle)}, \quad Q = M = 2\pi \int_0^R \sigma_{\theta z} r^2 dr \text{ (couple)}.$$

Solution élastique

- **Paramètres généralisés de chargement** : angle et couple de torsion

$$\mathcal{P}_e = \int_{z=h} \underline{T} \cdot \underline{\xi} ds = Q\dot{q}, \quad q = \alpha \text{ (angle)}, \quad Q = M = 2\pi \int_0^R \sigma_{\theta z} r^2 dr \text{ (couple)}.$$

- **Solution élastique** : $\underline{\xi}$ cinématiquement admissible, $\underline{\sigma}$ statiquement admissible, liés par la loi de comportement :

$$\underline{\xi} = \xi_{\theta} \underline{e}_{\theta}, \quad \underline{\sigma} = \tau(r) (\underline{e}_z \otimes \underline{e}_{\theta} + \underline{e}_{\theta} \otimes \underline{e}_z),$$

$$\xi_{\theta} = \frac{\alpha r z}{h}, \quad \tau(r) = \frac{\mu \alpha r}{h}, \quad M = \frac{\mu l}{h} \alpha, \quad I = \frac{\pi R^4}{2}.$$

Solution élastique

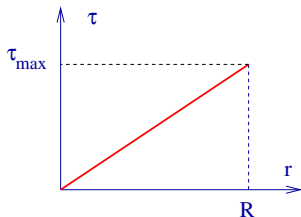
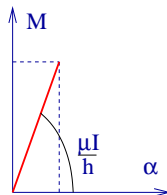
- **Paramètres généralisés de chargement** : angle et couple de torsion

$$\mathcal{P}_e = \int_{z=h} \underline{T} \cdot \underline{\xi} ds = Q \dot{q}, \quad q = \alpha \text{ (angle)}, \quad Q = M = 2\pi \int_0^R \sigma_{\theta z} r^2 dr \text{ (couple)}.$$

- **Solution élastique** : $\underline{\xi}$ cinématiquement admissible, $\underline{\sigma}$ statiquement admissible, liés par la loi de comportement :

$$\underline{\xi} = \xi_{\theta} \underline{e}_{\theta}, \quad \underline{\sigma} = \tau(r) (\underline{e}_z \otimes \underline{e}_{\theta} + \underline{e}_{\theta} \otimes \underline{e}_z),$$

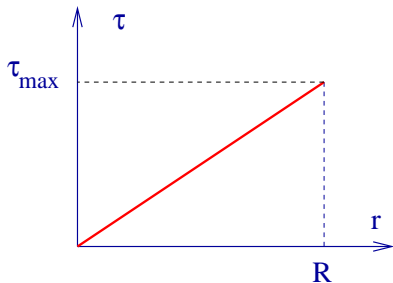
$$\xi_{\theta} = \frac{\alpha r z}{h}, \quad \tau(r) = \frac{\mu \alpha r}{h}, \quad M = \frac{\mu I}{h} \alpha, \quad I = \frac{\pi R^4}{2}.$$


 \Rightarrow


Première plastification

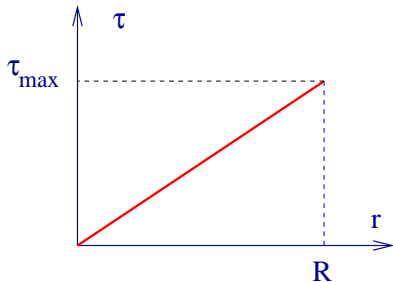
Chargement monotone $\alpha(t) \nearrow$.

$$\underline{\underline{\sigma}} = \tau(r) (\underline{e}_z \otimes \underline{e}_\theta + \underline{e}_\theta \otimes \underline{e}_z),$$



Première plastification

Chargement monotone $\alpha(t) \nearrow$.



$$\underline{\underline{\sigma}} = \tau(r) (\underline{e}_z \otimes \underline{e}_\theta + \underline{e}_\theta \otimes \underline{e}_z),$$

Critère de von Mises : $\sigma_{\text{eq}} \leq \sigma_0$,

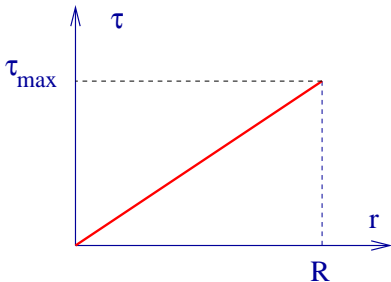
$$\sigma_{\text{eq}} = \left(\frac{3}{2} s_{ij} s_{ij} \right)^{1/2} \Rightarrow \sigma_{\text{eq}} = \sqrt{3} \tau,$$

von Mises : $\tau(r) \leq k$, $k = \sigma_0 / \sqrt{3}$.

En régime élastique $\tau(r) = \mu \alpha r / h$

Première plastification

Chargement monotone $\alpha(t) \nearrow$.



Critère atteint pour la première fois pour :

$$r = R, \quad \alpha = \alpha_0 = kh/\mu R, \quad M = M_0 = \pi k R^3/2 \quad (k = \sigma_0/\sqrt{3}).$$

$$\underline{\underline{\sigma}} = \tau(r) (\underline{e}_z \otimes \underline{e}_\theta + \underline{e}_\theta \otimes \underline{e}_z),$$

Critère de von Mises : $\sigma_{\text{eq}} \leq \sigma_0$,

$$\sigma_{\text{eq}} = \left(\frac{3}{2} s_{ij} s_{ij} \right)^{1/2} \Rightarrow \sigma_{\text{eq}} = \sqrt{3} \tau,$$

von Mises : $\tau(r) \leq k, \quad k = \sigma_0/\sqrt{3}$.

En régime élastique $\tau(r) = \mu \alpha r/h$

Le régime est élastique en tout point de l'arbre pour $\alpha \leq \alpha_0, M \leq M_0$.

Régime élasto-plastique

Construction d'une solution à partir d'hypothèses physiquement intuitives.

H1 : Etat de contrainte = cisaillement simple entre les directions $(\underline{e}_\theta, \underline{e}_z)$:

$$\underline{\underline{\sigma}} = \tau(r) (\underline{e}_z \otimes \underline{e}_\theta + \underline{e}_\theta \otimes \underline{e}_z), \quad \underline{\underline{\sigma}} \text{ est S.A. } \forall \tau(r).$$

Régime élasto-plastique

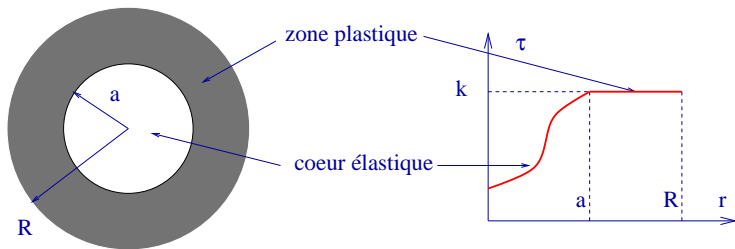
Construction d'une solution à partir d'hypothèses physiquement intuitives.

H1 : Etat de contrainte = cisaillement simple entre les directions $(\underline{e}_\theta, \underline{e}_z)$:

$$\underline{\underline{\sigma}} = \tau(r) (\underline{e}_z \otimes \underline{e}_\theta + \underline{e}_\theta \otimes \underline{e}_z), \quad \underline{\underline{\sigma}} \text{ est S.A. } \forall \tau(r).$$

H2 : Zone plastique = couronne $a \leq r \leq R$ progressant du bord extérieur vers le centre de l'arbre.

$$\implies \tau = k \quad (a \leq r \leq R).$$



Régime élasto-plastique

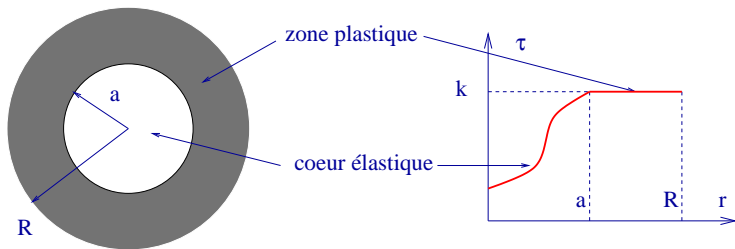
Construction d'une solution à partir d'hypothèses physiquement intuitives.

H1 : Etat de contrainte = cisaillement simple entre les directions $(\underline{e}_\theta, \underline{e}_z)$:

$$\underline{\underline{\sigma}} = \tau(r) (\underline{e}_z \otimes \underline{e}_\theta + \underline{e}_\theta \otimes \underline{e}_z), \quad \underline{\underline{\sigma}} \text{ est S.A. } \forall \tau(r).$$

H2 : Zone plastique = couronne $a \leq r \leq R$ progressant du bord extérieur vers le centre de l'arbre.

$$\implies \tau = k \quad (a \leq r \leq R).$$



Cisaillement τ en zone élastique ?

Zone élastique

Equations à satisfaire en zone élastique :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{C}} : \underline{\underline{\varepsilon}}, \quad \text{div} \underline{\underline{\sigma}} = 0, \quad \text{Conditions aux limites inchangées en } z = 0 \text{ et } z = h,$$

$$\underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{\underline{e}}_r |_{r=a^-} = \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{\underline{e}}_r |_{r=a^+}.$$

Zone élastique

Equations à satisfaire en zone élastique :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{C}} : \underline{\underline{\varepsilon}}, \quad \text{div} \underline{\underline{\sigma}} = 0, \quad \text{Conditions aux limites inchangées en } z = 0 \text{ et } z = h,$$

$$\underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{e}_r |_{r=a^-} = \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{e}_r |_{r=a^+}.$$

Effort exercé par la zone plastique sur la zone élastique ?

$$\underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{e}_r |_{r=a^+} = k (\underline{e}_z \otimes \underline{e}_\theta + \underline{e}_\theta \otimes \underline{e}_z) \cdot \underline{e}_r = 0.$$

Zone élastique

Equations à satisfaire en zone élastique :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{C}} : \underline{\underline{\varepsilon}}, \quad \text{div} \underline{\underline{\sigma}} = 0, \quad \text{Conditions aux limites inchangées en } z = 0 \text{ et } z = h,$$

$$\underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{e}_r |_{r=a^-} = \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{e}_r |_{r=a^+}.$$

Effort exercé par la zone plastique sur la zone élastique ?

$$\underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{e}_r |_{r=a^+} = k (\underline{e}_z \otimes \underline{e}_\theta + \underline{e}_\theta \otimes \underline{e}_z) \cdot \underline{e}_r = 0.$$

Torsion d'un arbre élastique de rayon extérieur a .

$$\tau(r) = \mu \alpha r / h.$$

Zone élastique

Equations à satisfaire en zone élastique :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{C}} : \underline{\underline{\varepsilon}}, \quad \text{div} \underline{\underline{\sigma}} = 0, \quad \text{Conditions aux limites inchangées en } z = 0 \text{ et } z = h,$$

$$\underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{e}_r |_{r=a^-} = \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{e}_r |_{r=a^+}.$$

Effort exercé par la zone plastique sur la zone élastique ?

$$\underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{e}_r |_{r=a^+} = k (\underline{e}_z \otimes \underline{e}_\theta + \underline{e}_\theta \otimes \underline{e}_z) \cdot \underline{e}_r = 0.$$

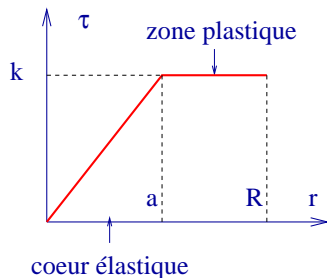
Torsion d'un arbre élastique de rayon extérieur a .

$$\tau(r) = \mu \alpha r / h.$$

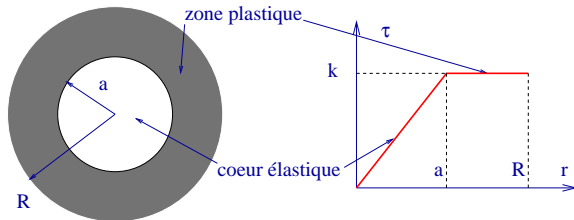
Raccordement zone élastique / zone plastique

$$\tau(a) = k, \quad \Rightarrow \quad a = \frac{kh}{\alpha\mu} = \frac{\alpha_0}{\alpha} R.$$

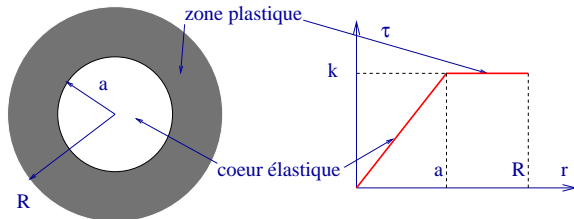
$a \rightarrow 0$ quand $\alpha \rightarrow +\infty$. Réserve élastique.



Déformation plastique



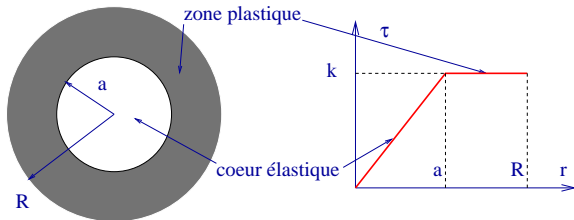
Déformation plastique



Règle de normalité

$$\underline{\dot{\underline{\varepsilon}}}^P = \frac{3}{2} \lambda \frac{\underline{\underline{s}}}{\sigma_{\text{eq}}}, \quad \underline{\underline{s}} = \tau(r) (\underline{e}_z \otimes \underline{e}_\theta + \underline{e}_\theta \otimes \underline{e}_z), \quad \underline{\dot{\underline{\varepsilon}}}^P = \dot{\underline{\varepsilon}}^P (\underline{e}_\theta \otimes \underline{e}_z + \underline{e}_z \otimes \underline{e}_\theta),$$

Déformation plastique

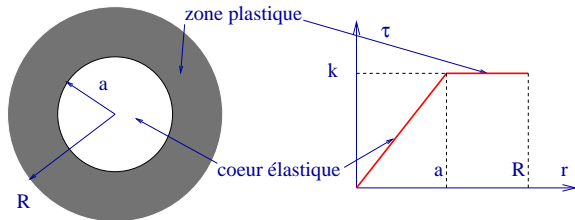


Règle de normalité

$$\underline{\dot{\underline{\epsilon}}}^P = \frac{3}{2} \dot{\lambda} \frac{\underline{\underline{s}}}{\sigma_{eq}}, \quad \underline{\underline{s}} = \tau(r) (\underline{e}_z \otimes \underline{e}_\theta + \underline{e}_\theta \otimes \underline{e}_z), \quad \underline{\dot{\underline{\epsilon}}}^P = \dot{\epsilon}^P (\underline{e}_\theta \otimes \underline{e}_z + \underline{e}_z \otimes \underline{e}_\theta),$$

$$\dot{\epsilon}^P = 0 \quad (0 \leq r \leq a), \quad \dot{\epsilon}^P = \frac{3}{2} \dot{\lambda} \frac{\tau}{\sigma_{eq}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \dot{\lambda}(r) \quad (a \leq r \leq R)$$

Déformation plastique



Règle de normalité

$$\underline{\underline{\dot{\epsilon}}}^P = \frac{3}{2} \dot{\lambda} \frac{\underline{\underline{s}}}{\sigma_{eq}}, \quad \underline{\underline{s}} = \tau(r) (\underline{e}_z \otimes \underline{e}_\theta + \underline{e}_\theta \otimes \underline{e}_z), \quad \underline{\underline{\dot{\epsilon}}}^P = \dot{\epsilon}^P (\underline{e}_\theta \otimes \underline{e}_z + \underline{e}_z \otimes \underline{e}_\theta),$$

$$\dot{\epsilon}^P = 0 \quad (0 \leq r \leq a), \quad \dot{\epsilon}^P = \frac{3}{2} \dot{\lambda} \frac{\tau}{\sigma_{eq}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \dot{\lambda}(r) \quad (a \leq r \leq R)$$

$$\underline{\underline{\dot{\epsilon}}} = \underline{\underline{\dot{\epsilon}}}^{el} + \underline{\underline{\dot{\epsilon}}}^P = \frac{\dot{s}}{2\mu} + \underline{\underline{\dot{\epsilon}}}^P = \dot{\epsilon}_{\theta z} (\underline{e}_\theta \otimes \underline{e}_z + \underline{e}_z \otimes \underline{e}_\theta),$$

$$\dot{\epsilon}_{\theta z} = \frac{\dot{\alpha} r}{2h} \quad (0 \leq r \leq a), \quad \dot{\epsilon}_{\theta z} = \frac{\sqrt{3}}{2} \dot{\lambda}(r) \quad (a \leq r \leq R).$$

Construction d'un champ de déplacement C.A.

Compatibilité géométrique et cinématique : en cherchant $\underline{\xi} = \xi_\theta \underline{e}_\theta$

$$\dot{\varepsilon}_{\theta z} = \frac{1}{2} \frac{\partial \dot{\xi}_\theta}{\partial z} \implies 2h\dot{\varepsilon}_{\theta z} = \int_0^h 2\dot{\varepsilon}_{\theta z} dz = \dot{\xi}_\theta(h, r) = \dot{\alpha}r,$$

$$\implies \dot{\lambda} = 0 \quad (0 \leq r \leq a), \quad \dot{\lambda} = \frac{\dot{\alpha}r}{\sqrt{3}h} \quad (a \leq r \leq R).$$

Construction d'un champ de déplacement C.A.

Compatibilité géométrique et cinématique : en cherchant $\underline{\xi} = \xi_\theta \underline{e}_\theta$

$$\dot{\varepsilon}_{\theta z} = \frac{1}{2} \frac{\partial \dot{\xi}_\theta}{\partial z} \implies 2h\dot{\varepsilon}_{\theta z} = \int_0^h 2\dot{\varepsilon}_{\theta z} dz = \dot{\xi}_\theta(h, r) = \dot{\alpha}r,$$

$$\implies \dot{\lambda} = 0 \quad (0 \leq r \leq a), \quad \dot{\lambda} = \frac{\dot{\alpha}r}{\sqrt{3}h} \quad (a \leq r \leq R).$$

Multiplicateur plastique $\dot{\lambda}$ donc **positif** tant que $\dot{\alpha} > 0$, ce qui correspond à la **charge**.

Construction d'un champ de déplacement C.A.

Compatibilité géométrique et cinématique : en cherchant $\underline{\xi} = \xi_\theta \underline{e}_\theta$

$$\dot{\varepsilon}_{\theta z} = \frac{1}{2} \frac{\partial \dot{\xi}_\theta}{\partial z} \implies 2h\dot{\varepsilon}_{\theta z} = \int_0^h 2\dot{\varepsilon}_{\theta z} dz = \dot{\xi}_\theta(h, r) = \dot{\alpha}r,$$

$$\implies \dot{\lambda} = 0 \quad (0 \leq r \leq a), \quad \dot{\lambda} = \frac{\dot{\alpha}r}{\sqrt{3}h} \quad (a \leq r \leq R).$$

Multiplicateur plastique $\dot{\lambda}$ donc **positif** tant que $\dot{\alpha} > 0$, ce qui correspond à la **charge**.

Par intégration $\xi_\theta = \alpha rz/h$.

Construction d'un champ de déplacement C.A.

Compatibilité géométrique et cinématique : en cherchant $\underline{\xi} = \xi_\theta \underline{e}_\theta$

$$\dot{\varepsilon}_{\theta z} = \frac{1}{2} \frac{\partial \dot{\xi}_\theta}{\partial z} \implies 2h \dot{\varepsilon}_{\theta z} = \int_0^h 2 \dot{\varepsilon}_{\theta z} dz = \dot{\xi}_\theta(h, r) = \dot{\alpha} r,$$

$$\implies \dot{\lambda} = 0 \quad (0 \leq r \leq a), \quad \dot{\lambda} = \frac{\dot{\alpha} r}{\sqrt{3}h} \quad (a \leq r \leq R).$$

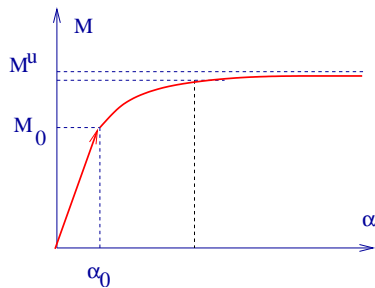
Multiplicateur plastique $\dot{\lambda}$ donc **positif** tant que $\dot{\alpha} > 0$, ce qui correspond à la **charge**.

Par intégration $\xi_\theta = \alpha r z / h$.

Une solution $(\underline{\sigma}, \dot{\underline{\xi}})$ au problème a été construite.

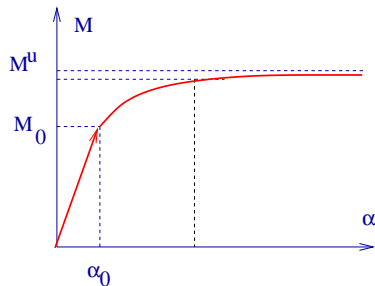
Relation (Q, q) , moment-angle de torsion.

$$M = 2\pi \int_0^R \tau(r) r^2 dr$$



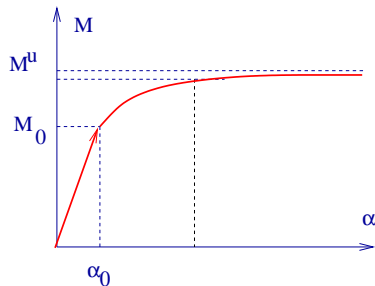
Relation (Q, q) , moment-angle de torsion.

$$\begin{aligned}
 M &= 2\pi \int_0^R \tau(r) r^2 dr \\
 &= 2\pi \left(\int_0^a \frac{\mu\alpha r^3}{h} dr + \int_a^R k r^2 dr \right) \\
 &= M_0 \left(\frac{4}{3} - \frac{1}{3} \left(\frac{\alpha_0}{\alpha} \right)^3 \right).
 \end{aligned}$$



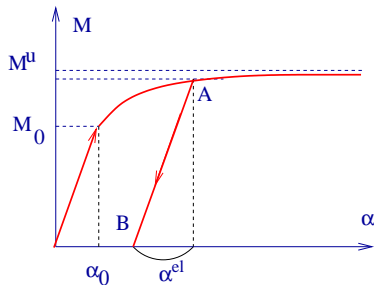
Relation (Q, q) , moment-angle de torsion.

$$\begin{aligned}
 M &= 2\pi \int_0^R \tau(r) r^2 dr \\
 &= 2\pi \left(\int_0^a \frac{\mu\alpha r^3}{h} dr + \int_a^R k r^2 dr \right) \\
 &= M_0 \left(\frac{4}{3} - \frac{1}{3} \left(\frac{\alpha_0}{\alpha} \right)^3 \right).
 \end{aligned}$$



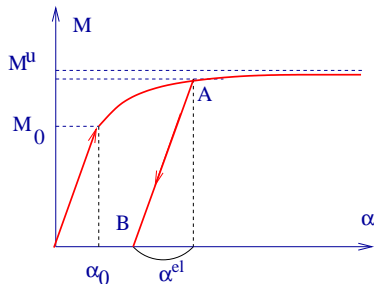
- ▶ La courbe $(q, Q) = (\alpha, M)$ a l'allure d'une courbe d'écroissage, alors que le matériau est parfaitement plastique.
- ▶ Moment ultime $M^u = 4M_0/3$

Décharge



A partir de M , $M_0 \leq M < M^u$ le couple M est ramené à 0.

Décharge



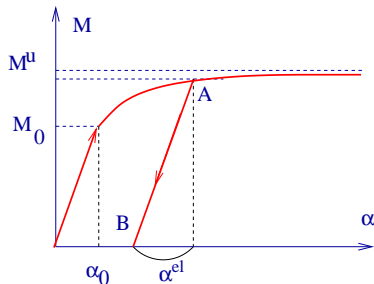
A partir de M , $M_0 \leq M < M^u$ le couple M est ramené à 0.

Par linéarité des équations d'équilibre :

$$\underline{\underline{\sigma}}(B) = \underline{\underline{\sigma}}(A) + (\underline{\underline{\sigma}}(B) - \underline{\underline{\sigma}}(A))$$

La décharge est-elle élastique en tout point de l'arbre ?

Décharge



A partir de M , $M_0 \leq M < M^u$ le couple M est ramené à 0.

Par linéarité des équations d'équilibre :

$$\underline{\underline{\sigma}}(B) = \underline{\underline{\sigma}}(A) + (\underline{\underline{\sigma}}(B) - \underline{\underline{\sigma}}(A))$$

La décharge est-elle élastique en tout point de l'arbre ?

Si oui : $\underline{\underline{\sigma}}(B) - \underline{\underline{\sigma}}(A) = -\underline{\underline{\sigma}}^{\text{el}}$ (contrainte **élastique** correspondant au couple $-M$).

Il reste à vérifier que $\underline{\underline{\sigma}}(B)$ vérifie toutes les équations du problème en B.

Contraintes résiduelles

$\underline{\underline{\sigma}}(B)$ champ de contrainte résiduelle : $\underline{\underline{\sigma}}^{\text{res}} = \underline{\underline{\sigma}} - \underline{\underline{\sigma}}^{\text{el}}$,

Contraintes résiduelles

$\underline{\underline{\sigma}}(B)$ **champ de contrainte résiduelle** : $\underline{\underline{\sigma}}^{\text{res}} = \underline{\underline{\sigma}} - \underline{\underline{\sigma}}^{\text{el}}$,

$$\underline{\underline{\sigma}} = \tau (\underline{\underline{e}}_{\theta} \otimes \underline{\underline{e}}_z + \underline{\underline{e}}_z \otimes \underline{\underline{e}}_{\theta}), \quad \tau = \mu\alpha r/h \quad (0 \leq r \leq a), \quad \tau = k \quad (a \leq r \leq R).$$

$$\underline{\underline{\sigma}}^{\text{el}} = \tau^{\text{el}} (\underline{\underline{e}}_{\theta} \otimes \underline{\underline{e}}_z + \underline{\underline{e}}_z \otimes \underline{\underline{e}}_{\theta}), \quad \tau^{\text{el}} = Mr/I, \quad \text{avec} \quad I = \pi R^4/2.$$

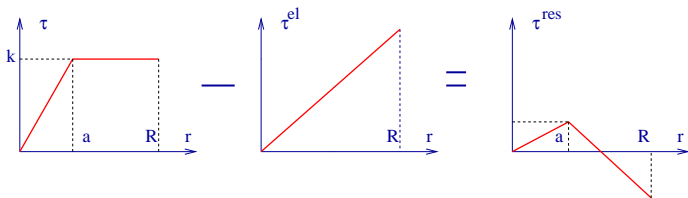
Contraintes résiduelles

$\underline{\underline{\sigma}}(B)$ **champ de contrainte résiduelle** : $\underline{\underline{\sigma}}^{\text{res}} = \underline{\underline{\sigma}} - \underline{\underline{\sigma}}^{\text{el}}$,

$$\underline{\underline{\sigma}} = \tau (\underline{e}_\theta \otimes \underline{e}_z + \underline{e}_z \otimes \underline{e}_\theta), \quad \tau = \mu\alpha r/h \quad (0 \leq r \leq a), \quad \tau = k \quad (a \leq r \leq R).$$

$$\underline{\underline{\sigma}}^{\text{el}} = \tau^{\text{el}} (\underline{e}_\theta \otimes \underline{e}_z + \underline{e}_z \otimes \underline{e}_\theta), \quad \tau^{\text{el}} = Mr/I, \quad \text{avec } I = \pi R^4/2.$$

$$\underline{\underline{\sigma}}^{\text{res}} = \tau^{\text{res}} (\underline{e}_\theta \otimes \underline{e}_z + \underline{e}_z \otimes \underline{e}_\theta), \quad \tau^{\text{res}} = \begin{cases} \mu\alpha r/h - Mr/I, & (0 \leq r \leq a), \\ k - Mr/I, & (a \leq r \leq R). \end{cases}$$



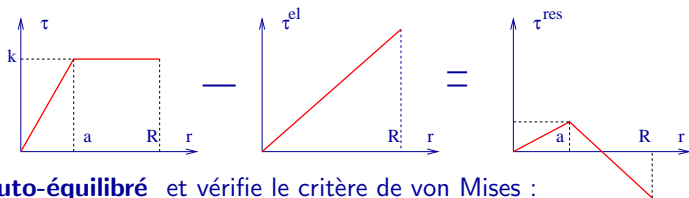
Contraintes résiduelles

$\underline{\underline{\sigma}}(B)$ **champ de contrainte résiduelle** : $\underline{\underline{\sigma}}^{\text{res}} = \underline{\underline{\sigma}} - \underline{\underline{\sigma}}^{\text{el}}$,

$$\underline{\underline{\sigma}} = \tau (\underline{e}_\theta \otimes \underline{e}_z + \underline{e}_z \otimes \underline{e}_\theta), \quad \tau = \mu\alpha r/h \quad (0 \leq r \leq a), \quad \tau = k \quad (a \leq r \leq R).$$

$$\underline{\underline{\sigma}}^{\text{el}} = \tau^{\text{el}} (\underline{e}_\theta \otimes \underline{e}_z + \underline{e}_z \otimes \underline{e}_\theta), \quad \tau^{\text{el}} = Mr/I, \quad \text{avec } I = \pi R^4/2.$$

$$\underline{\underline{\sigma}}^{\text{res}} = \tau^{\text{res}} (\underline{e}_\theta \otimes \underline{e}_z + \underline{e}_z \otimes \underline{e}_\theta), \quad \tau^{\text{res}} = \begin{cases} \mu\alpha r/h - Mr/I, & (0 \leq r \leq a), \\ k - Mr/I, & (a \leq r \leq R). \end{cases}$$



$\underline{\underline{\sigma}}^{\text{res}}$ est **auto-équilibré** et vérifie le critère de von Mises :

$$\int_0^R \tau^{\text{res}}(r) r^2 dr = 0, \quad \sigma_{\text{eq}}^{\text{res}} < \sigma_0 \quad (\text{extrema atteints en } r = a \text{ et en } r = R).$$

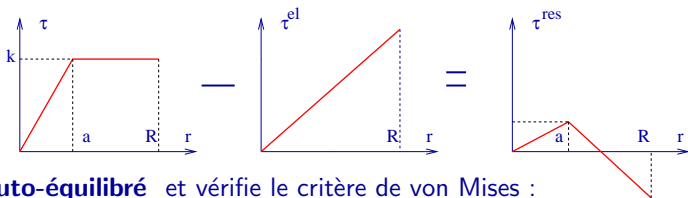
Contraintes résiduelles

$\underline{\underline{\sigma}}(B)$ **champ de contrainte résiduelle** : $\underline{\underline{\sigma}}^{\text{res}} = \underline{\underline{\sigma}} - \underline{\underline{\sigma}}^{\text{el}}$,

$$\underline{\underline{\sigma}} = \tau (\underline{e}_\theta \otimes \underline{e}_z + \underline{e}_z \otimes \underline{e}_\theta), \quad \tau = \mu\alpha r/h \quad (0 \leq r \leq a), \quad \tau = k \quad (a \leq r \leq R).$$

$$\underline{\underline{\sigma}}^{\text{el}} = \tau^{\text{el}} (\underline{e}_\theta \otimes \underline{e}_z + \underline{e}_z \otimes \underline{e}_\theta), \quad \tau^{\text{el}} = Mr/I, \quad \text{avec } I = \pi R^4/2.$$

$$\underline{\underline{\sigma}}^{\text{res}} = \tau^{\text{res}} (\underline{e}_\theta \otimes \underline{e}_z + \underline{e}_z \otimes \underline{e}_\theta), \quad \tau^{\text{res}} = \begin{cases} \mu\alpha r/h - Mr/I, & (0 \leq r \leq a), \\ k - Mr/I, & (a \leq r \leq R). \end{cases}$$



$\underline{\underline{\sigma}}^{\text{res}}$ est **auto-équilibré** et vérifie le critère de von Mises :

$$\int_0^R \tau^{\text{res}}(r) r^2 dr = 0, \quad \sigma_{\text{eq}}^{\text{res}} < \sigma_0 \quad (\text{extrema atteints en } r = a \text{ et en } r = R).$$

$\underline{\underline{\sigma}}^{\text{res}}$ est solution. La décharge est bien élastique en tout point de l'arbre.

Enseignements à tirer de cet exemple.

Construction de la solution :

- ▶ Recherche de la solution élastique. Limite de validité plastification.
- ▶ Construction d'une solution "intuitive" en zone plastique (pas systématique). Raccordement à la zone élastique.
- ▶ Vérification de toutes les équations (équilibre, compatibilité, conditions aux limites).

Enseignements à tirer de cet exemple.

Construction de la solution :

- ▶ Recherche de la solution élastique. Limite de validité plastification.
- ▶ Construction d'une solution "intuitive" en zone plastique (pas systématique). Raccordement à la zone élastique.
- ▶ Vérification de toutes les équations (équilibre, compatibilité, conditions aux limites).

Dans l'espace des chargements généralisés :

- ▶ Il existe une charge de **première plastification** et une **charge ultime**.
- ▶ Il n'y a pas de solution au problème **quel que soit le chargement**. Condition **nécessaire** :

$$M < M^u.$$

Sous cette condition, il existe une solution au problème.

- ▶ Bien que le **matériau** soit élastique parfaitement plastique, la réponse de la **structure** est élastique avec écrouissage.
- ▶ Après décharge il subsiste un **champ de contrainte résiduelle**.

Plan

1. Formulation du problème d'évolution pour une structure élasto-plastique
2. Exemple : torsion d'un arbre cylindrique élasto-plastique
- 3. Evolution de structures élasto-plastiques**
 - Structures élastiques parfaitement plastiques
 - Structures élasto-plastiques avec écrouissage
 - Ecrouissage de structure
4. Incompatibilité et contraintes résiduelles
5. Intégration numérique en temps (plasticité parfaite)

Plan

1. Formulation du problème d'évolution pour une structure élasto-plastique
2. Exemple : torsion d'un arbre cylindrique élasto-plastique
- 3. Evolution de structures élasto-plastiques**
 - Structures élastiques parfaitement plastiques
 - Structures élasto-plastiques avec écrouissage
 - Ecrouissage de structure
4. Incompatibilité et contraintes résiduelles
5. Intégration numérique en temps (plasticité parfaite)

Evolution de structures élastiques parfaitement plastiques

Toute solution $\underline{\underline{\sigma}}$ du problème doit être :

- ▶ statiquement admissible :

$$\underline{\underline{\sigma}} \in \mathcal{S}(\underline{F}, S_{\underline{T}}, \underline{T}^d) = \{ \underline{\underline{\sigma}}^*, \quad \text{div } \underline{\underline{\sigma}}^* + \underline{F} = \underline{0} \text{ dans } \Omega, \quad \underline{\underline{\sigma}}^* \cdot \underline{n} = \underline{T}^d \text{ sur } S_{\underline{T}}. \}.$$

$\underline{F}, S_{\underline{T}}, \underline{T}^d$ dépendent du temps : $\mathcal{S}(\underline{F}, S_{\underline{T}}, \underline{T}^d)$ noté $\mathcal{S}(t)$ en bref.

Evolution de structures élastiques parfaitement plastiques

Toute solution $\underline{\underline{\sigma}}$ du problème doit être :

- ▶ statiquement admissible :

$$\underline{\underline{\sigma}} \in \mathcal{S}(\underline{F}, S_{\underline{T}}, \underline{T}^d) = \{ \underline{\underline{\sigma}}^*, \quad \text{div } \underline{\underline{\sigma}}^* + \underline{F} = \underline{0} \text{ dans } \Omega, \quad \underline{\underline{\sigma}}^* \cdot \underline{n} = \underline{T}^d \text{ sur } S_{\underline{T}}. \}.$$

$\underline{F}, S_{\underline{T}}, \underline{T}^d$ dépendent du temps : $\mathcal{S}(\underline{F}, S_{\underline{T}}, \underline{T}^d)$ noté $\mathcal{S}(t)$ en bref.

- ▶ plastiquement admissible :

$$\underline{\underline{\sigma}} \in \mathcal{P} = \{ \underline{\underline{\sigma}}^*, \text{ tel que } \underline{\underline{\sigma}}^*(\underline{x}) \in \mathbb{P}(\underline{x}) \quad \forall \underline{x} \in \Omega. \}.$$

Evolution de structures élastiques parfaitement plastiques

Toute solution $\underline{\underline{\sigma}}$ du problème doit être :

- ▶ statiquement admissible :

$$\underline{\underline{\sigma}} \in \mathcal{S}(\underline{F}, S_{\underline{T}}, \underline{T}^d) = \{ \underline{\underline{\sigma}}^*, \quad \text{div } \underline{\underline{\sigma}}^* + \underline{F} = \underline{0} \text{ dans } \Omega, \quad \underline{\underline{\sigma}}^* \cdot \underline{n} = \underline{T}^d \text{ sur } S_{\underline{T}}. \}.$$

$\underline{F}, S_{\underline{T}}, \underline{T}^d$ dépendent du temps : $\mathcal{S}(\underline{F}, S_{\underline{T}}, \underline{T}^d)$ noté $\mathcal{S}(t)$ en bref.

- ▶ plastiquement admissible :

$$\underline{\underline{\sigma}} \in \mathcal{P} = \{ \underline{\underline{\sigma}}^*, \text{ tel que } \underline{\underline{\sigma}}^*(\underline{x}) \in \mathbb{P}(\underline{x}) \quad \forall \underline{x} \in \Omega. \}.$$

Condition nécessaire :

$$\mathcal{S}(t) \cap \mathcal{P} \neq \emptyset \quad \forall t > 0.$$

Conditions suffisantes

H1 : Tenseurs d'élasticité définis positifs :

$$\forall \underline{\underline{\mathbf{e}}} \in \mathbb{R}_s^{3 \times 3} \quad \underline{\underline{\mathbf{e}}} : \underline{\underline{\mathbf{C}}} : \underline{\underline{\mathbf{e}}} \geq \alpha \underline{\underline{\mathbf{e}}} : \underline{\underline{\mathbf{e}}}, \quad \forall \underline{\underline{\mathbf{T}}} \in \mathbb{R}_s^{3 \times 3} \quad \underline{\underline{\mathbf{T}}} : \underline{\underline{\mathbf{S}}} : \underline{\underline{\mathbf{T}}} \geq \beta \underline{\underline{\mathbf{T}}} : \underline{\underline{\mathbf{T}}}.$$

Cette hypothèse assure qu'il existe une solution au problème élastique $(\underline{\underline{\xi}}^{\text{el}}, \underline{\underline{\sigma}}^{\text{el}})$.

Conditions suffisantes

H1 : Tenseurs d'élasticité définis positifs :

$$\forall \underline{\underline{e}} \in \mathbb{R}_s^{3 \times 3} \quad \underline{\underline{e}} : \underline{\underline{C}} : \underline{\underline{e}} \geq \alpha \underline{\underline{e}} : \underline{\underline{e}}, \quad \forall \underline{\underline{T}} \in \mathbb{R}_s^{3 \times 3} \quad \underline{\underline{T}} : \underline{\underline{S}} : \underline{\underline{T}} \geq \beta \underline{\underline{T}} : \underline{\underline{T}}.$$

Cette hypothèse assure qu'il existe une solution au problème élastique $(\underline{\underline{\xi}}^{\text{el}}, \underline{\underline{\sigma}}^{\text{el}})$.

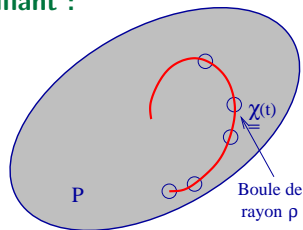
H3 : Il existe un champ de contrainte $\underline{\underline{\chi}}(\underline{x}, t)$ vérifiant :

$$\text{H3.1} \quad \underline{\underline{\chi}}(\underline{x}, t) \in \mathcal{S}(t) \cap \mathcal{P},$$

$$\text{H3.2} \quad \exists \rho > 0, \text{ tel que } \underline{\underline{\chi}}(\underline{x}, t) + \underline{\underline{T}} \in \mathcal{P}$$

$$\forall \underline{\underline{T}} \in \mathbb{R}_s^{3 \otimes 3}, \underline{\underline{T}} : \underline{\underline{T}} \leq \rho^2$$

$$\text{H3.3} \quad \underline{\underline{\chi}}(\underline{x}, 0) = \underline{\underline{\sigma}}^0(\underline{x}).$$



Conditions suffisantes

H1 : Tenseurs d'élasticité définis positifs :

$$\forall \underline{\underline{e}} \in \mathbb{R}_s^{3 \times 3} \quad \underline{\underline{e}} : \underline{\underline{C}} : \underline{\underline{e}} \geq \alpha \underline{\underline{e}} : \underline{\underline{e}}, \quad \forall \underline{\underline{T}} \in \mathbb{R}_s^{3 \times 3} \quad \underline{\underline{T}} : \underline{\underline{S}} : \underline{\underline{T}} \geq \beta \underline{\underline{T}} : \underline{\underline{T}}.$$

Cette hypothèse assure qu'il existe une solution au problème élastique $(\underline{\underline{\xi}}^{el}, \underline{\underline{\sigma}}^{el})$.

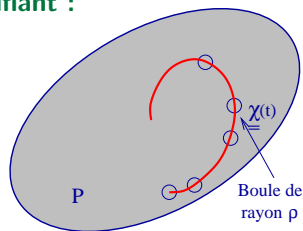
H3 : Il existe un champ de contrainte $\underline{\underline{\chi}}(\underline{x}, t)$ vérifiant :

$$\text{H3.1} \quad \underline{\underline{\chi}}(\underline{x}, t) \in \mathcal{S}(t) \cap \mathcal{P},$$

$$\text{H3.2} \quad \exists \rho > 0, \text{ tel que } \underline{\underline{\chi}}(\underline{x}, t) + \underline{\underline{T}} \in \mathcal{P}$$

$$\forall \underline{\underline{T}} \in \mathbb{R}_s^{3 \otimes 3}, \underline{\underline{T}} : \underline{\underline{T}} \leq \rho^2$$

$$\text{H3.3} \quad \underline{\underline{\chi}}(\underline{x}, 0) = \underline{\underline{\sigma}}^0(\underline{x}).$$



Alors :

Sous les hypothèses H1 et H3 et si les conditions initiales sont compatibles, le problème d'évolution quasi-statique d'une structure élastique parfaitement plastique admet **une unique solution en contrainte** $\underline{\underline{\sigma}}(\underline{x}, t)$ et **une solution en vitesse** $\underline{\underline{\dot{\xi}}}(\underline{x}, t)$ ($0 \leq t \leq T$).

Commentaires

- ▶ Le champ de vitesse n'est **pas forcément unique**.
Il peut de plus être **discontinu** (apparition de lignes de glissement).

Commentaires

- ▶ Le champ de vitesse n'est **pas forcément unique**.
Il peut de plus être **discontinu** (apparition de lignes de glissement).
- ▶ L'hypothèse H3.2 est appelée **condition de charge sûre**. Elle se traduit par une condition sur les chargements \underline{Q} supportables par la structure.
Notion de charge limite (cf M^u).

Commentaires

- ▶ Le champ de vitesse n'est **pas forcément unique**.
Il peut de plus être **discontinu** (apparition de lignes de glissement).
- ▶ L'hypothèse H3.2 est appelée **condition de charge sûre**. Elle se traduit par une condition sur les chargements \underline{Q} supportables par la structure.
Notion de charge limite (cf M^u).
- ▶ Dans le cas de la torsion, la condition de charge sûre est satisfaite avec un champ uniforme :

$$\underline{\underline{\chi}} = \chi (\underline{e}_\theta \otimes \underline{e}_z + \underline{e}_z \otimes \underline{e}_\theta), \quad \chi = 3M/2\pi R^3 \text{ satisfait H3.2 tant que } M < M^u$$

Commentaires

- ▶ Le champ de vitesse n'est **pas forcément unique**.
Il peut de plus être **discontinu** (apparition de lignes de glissement).
- ▶ L'hypothèse H3.2 est appelée **condition de charge sûre**. Elle se traduit par une condition sur les chargements \underline{Q} supportables par la structure.

Notion de charge limite (cf M^u).

- ▶ Dans le cas de la torsion, la condition de charge sûre est satisfaite avec un champ uniforme :

$$\underline{\underline{\chi}} = \chi (\underline{e}_\theta \otimes \underline{e}_z + \underline{e}_z \otimes \underline{e}_\theta), \quad \chi = 3M/2\pi R^3 \text{ satisfait H3.2 tant que } M < M^u$$

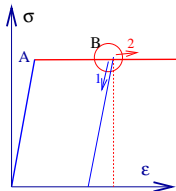
- ▶ L'**unicité du champ de contrainte** (preuve dans le poly) rend légitime la construction du champ de contrainte en torsion.

Plan

1. Formulation du problème d'évolution pour une structure élasto-plastique
2. Exemple : torsion d'un arbre cylindrique élasto-plastique
- 3. Evolution de structures élasto-plastiques**
 - Structures élastiques parfaitement plastiques
 - Structures élasto-plastiques avec écrouissage**
 - Ecrouissage de structure
4. Incompatibilité et contraintes résiduelles
5. Intégration numérique en temps (plasticité parfaite)

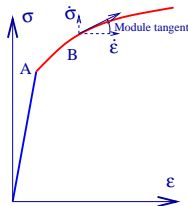
Evolution de structures élasto-plastiques avec écrouissage

Rappel (amphi 5) : le multiplicateur plastique $\dot{\lambda}$, inconnu en plasticité parfaite, est parfaitement déterminé dans les matériaux à écrouissage strictement positif :



$$\dot{\lambda} = \frac{(\underline{\underline{N}} : \underline{\underline{\dot{\sigma}}})^+}{\underline{\underline{N}} : \underline{\underline{H}} : \underline{\underline{N}} + h}, \quad \underline{\underline{N}} = \frac{\partial f}{\partial \underline{\underline{\sigma}}}(\underline{\underline{\sigma}}, \underline{\underline{X}}, R).$$

(amphi 6)



Remarque : Il résulte de cette expression de $\dot{\lambda}$ que :

$$\underline{\underline{\dot{\sigma}}} : \underline{\underline{\dot{\epsilon}}}^P = \underline{\underline{\dot{\sigma}}} : \dot{\lambda} \underline{\underline{N}}, \quad \underline{\underline{\dot{\sigma}}} : \underline{\underline{\dot{\epsilon}}}^P = \frac{(\underline{\underline{N}} : \underline{\underline{\dot{\sigma}}})^2}{\underline{\underline{N}} : \underline{\underline{H}} : \underline{\underline{N}} + h} > 0 \quad (= 0 \text{ en plasticité parfaite}).$$

Existence de solutions

H1 : Tenseurs élastiques définis positifs :

$$\forall \underline{\underline{e}} \in \mathbb{R}_s^{3 \times 3} \quad \underline{\underline{e}} : \underline{\underline{C}} : \underline{\underline{e}} \geq \alpha \underline{\underline{e}} : \underline{\underline{e}}, \quad \forall \underline{\underline{T}} \in \mathbb{R}_s^{3 \times 3} \quad \underline{\underline{T}} : \underline{\underline{S}} : \underline{\underline{T}} \geq \beta \underline{\underline{T}} : \underline{\underline{T}}, \quad \alpha, \beta > 0.$$

Existence de solutions

H1 : Tenseurs élastiques définis positifs :

$$\forall \underline{\underline{e}} \in \mathbb{R}_s^{3 \times 3} \quad \underline{\underline{e}} : \underline{\underline{C}} : \underline{\underline{e}} \geq \alpha \underline{\underline{e}} : \underline{\underline{e}}, \quad \forall \underline{\underline{T}} \in \mathbb{R}_s^{3 \times 3} \quad \underline{\underline{T}} : \underline{\underline{S}} : \underline{\underline{T}} \geq \beta \underline{\underline{T}} : \underline{\underline{T}}, \quad \alpha, \beta > 0.$$

H2 : l'écoulement du matériau constitutif est strictement positif.

Existence de solutions

H1 : Tenseurs élastiques définis positifs :

$$\forall \underline{\underline{e}} \in \mathbb{R}_s^{3 \times 3} \quad \underline{\underline{e}} : \underline{\underline{C}} : \underline{\underline{e}} \geq \alpha \underline{\underline{e}} : \underline{\underline{e}}, \quad \forall \underline{\underline{T}} \in \mathbb{R}_s^{3 \times 3} \quad \underline{\underline{T}} : \underline{\underline{S}} : \underline{\underline{T}} \geq \beta \underline{\underline{T}} : \underline{\underline{T}}, \quad \alpha, \beta > 0.$$

H2 : l'écroissage du matériau constitutif est strictement positif.

Sous les hypothèses (H1 et H2) et si les conditions initiales sont compatibles, le problème d'évolution quasi-statique d'une structure élastoplastique à écroissage positif admet une solution $(\underline{\underline{\xi}}(\underline{\underline{x}}, t), \underline{\underline{\sigma}}(\underline{\underline{x}}, t)), 0 \leq t \leq T$.

Existence de solutions

H1 : Tenseurs élastiques définis positifs :

$$\forall \underline{\underline{e}} \in \mathbb{R}_s^{3 \times 3} \quad \underline{\underline{e}} : \underline{\underline{C}} : \underline{\underline{e}} \geq \alpha \underline{\underline{e}} : \underline{\underline{e}}, \quad \forall \underline{\underline{T}} \in \mathbb{R}_s^{3 \times 3} \quad \underline{\underline{T}} : \underline{\underline{S}} : \underline{\underline{T}} \geq \beta \underline{\underline{T}} : \underline{\underline{T}}, \quad \alpha, \beta > 0.$$

H2 : l'écroissage du matériau constitutif est strictement positif.

Sous les hypothèses (H1 et H2) et si les conditions initiales sont compatibles, le problème d'évolution quasi-statique d'une structure élastoplastique à écroissage positif admet une solution $(\underline{\underline{\xi}}(\underline{\underline{x}}, t), \underline{\underline{\sigma}}(\underline{\underline{x}}, t)), 0 \leq t \leq T$.

- ▶ Le champ des contraintes est unique,
- ▶ Le champ de déplacement est unique à un déplacement rigidifiant C.A. près.

Existence de solutions

H1 : Tenseurs élastiques définis positifs :

$$\forall \underline{\underline{e}} \in \mathbb{R}_s^{3 \times 3} \quad \underline{\underline{e}} : \underline{\underline{C}} : \underline{\underline{e}} \geq \alpha \underline{\underline{e}} : \underline{\underline{e}}, \quad \forall \underline{\underline{T}} \in \mathbb{R}_s^{3 \times 3} \quad \underline{\underline{T}} : \underline{\underline{S}} : \underline{\underline{T}} \geq \beta \underline{\underline{T}} : \underline{\underline{T}}, \quad \alpha, \beta > 0.$$

H2 : l'écrouissage du matériau constitutif est strictement positif.

Sous les hypothèses (H1 et H2) et si les conditions initiales sont compatibles, le problème d'évolution quasi-statique d'une structure élastoplastique à écrouissage positif admet une solution $(\underline{\underline{\xi}}(\underline{\underline{x}}, t), \underline{\underline{\sigma}}(\underline{\underline{x}}, t)), 0 \leq t \leq T$.

- ▶ Le champ des contraintes est unique,
- ▶ Le champ de déplacement est unique à un déplacement rigidifiant C.A. près.

Commentaires :

- ▶ Pas de condition de charge sûre. **Pas de charge limite.**
- ▶ **Unicité (et régularité) du champ de vitesse.**
Problème mathématique et numérique mieux posé.
- ▶ Ecrouissage négatif : **gros** problèmes (physiques, mathématiques, numériques)

Récapitulation

Comportement :	Elasto-plasticité parfaite	Elasto-plasticité à écrouissage > 0
Condition de charge sûre nécessaire ?	OUI	NON
Existence d'un champ de contrainte	OUI (sous charge sûre)	OUI
Unicité du champ de contrainte	OUI	OUI
Existence d'un champ de déplacement	OUI (sous charge sûre)	OUI
Unicité du champ de déplacement	NON	OUI
Unicité de la réponse macro (q, Q)	OUI	OUI

Plan

1. Formulation du problème d'évolution pour une structure élasto-plastique
2. Exemple : torsion d'un arbre cylindrique élasto-plastique
- 3. Evolution de structures élasto-plastiques**
 - Structures élastiques parfaitement plastiques
 - Structures élasto-plastiques avec écrouissage
 - Ecrouissage de structure
4. Incompatibilité et contraintes résiduelles
5. Intégration numérique en temps (plasticité parfaite)

Écrouissage de structure

Chargement prescrit au travers de variables de chargement généralisées $(\underline{q}, \underline{Q})$.

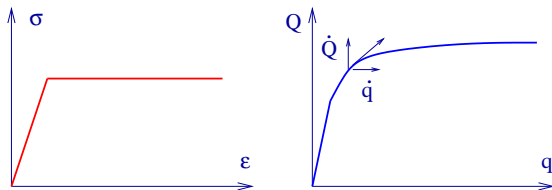
Pour toute évolution d'une structure élasto-plastique (écrouissage ≥ 0), on

a $\underline{\dot{Q}} \cdot \underline{\dot{q}} \geq 0$.

Écrouissage de structure

Chargement prescrit au travers de variables de chargement généralisées (q, Q) .

Pour toute évolution d'une structure élasto-plastique (écrouissage ≥ 0), on a $\underline{\dot{Q}} \cdot \underline{\dot{q}} \geq 0$.



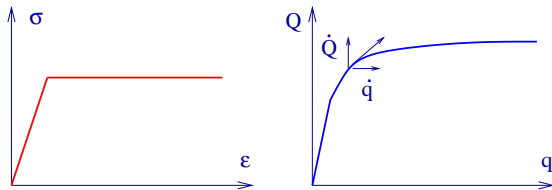
Par définition des variables généralisées :

$$\int_{\Omega} \underline{\underline{\sigma}}(t) : \underline{\underline{\dot{\epsilon}}}(t) \, d\Omega = \underline{Q}(t) \cdot \underline{\dot{q}}(t), \quad \int_{\Omega} \underline{\underline{\sigma}}(t + dt) : \underline{\underline{\dot{\epsilon}}}(t) \, d\Omega = \underline{Q}(t + dt) \cdot \underline{\dot{q}}(t),$$

Ecrouissage de structure

Chargement prescrit au travers de variables de chargement généralisées (q, Q) .

Pour toute évolution d'une structure élasto-plastique (écrouissage ≥ 0), on a $\underline{\dot{Q}} \cdot \underline{\dot{q}} \geq 0$.



Par définition des variables généralisées :

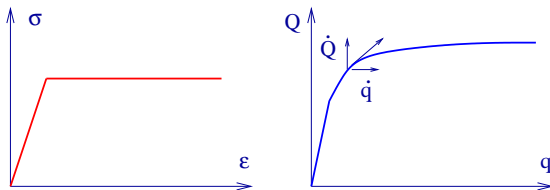
$$\int_{\Omega} \underline{\underline{\sigma}}(t) : \underline{\underline{\dot{\epsilon}}}(t) \, d\Omega = \underline{Q}(t) \cdot \underline{\dot{q}}(t), \quad \int_{\Omega} \underline{\underline{\sigma}}(t + dt) : \underline{\underline{\dot{\epsilon}}}(t) \, d\Omega = \underline{Q}(t + dt) \cdot \underline{\dot{q}}(t),$$

$$\Rightarrow \underline{\dot{Q}}(t) \cdot \underline{\dot{q}}(t) = \int_{\Omega} \underline{\underline{\dot{\sigma}}} : \underline{\underline{\dot{\epsilon}}} \, d\Omega$$

Écrouissage de structure

Chargement prescrit au travers de variables de chargement généralisées $(\underline{q}, \underline{Q})$.

Pour toute évolution d'une structure élasto-plastique (écrouissage ≥ 0), on a $\underline{\dot{Q}} \cdot \underline{\dot{q}} \geq 0$.



Par définition des variables généralisées :

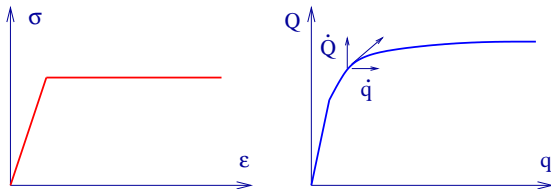
$$\int_{\Omega} \underline{\underline{\sigma}}(t) : \underline{\underline{\dot{\epsilon}}}(t) \, d\Omega = \underline{Q}(t) \cdot \underline{\dot{q}}(t), \quad \int_{\Omega} \underline{\underline{\sigma}}(t + dt) : \underline{\underline{\dot{\epsilon}}}(t) \, d\Omega = \underline{Q}(t + dt) \cdot \underline{\dot{q}}(t),$$

$$\implies \underline{\dot{Q}}(t) \cdot \underline{\dot{q}}(t) = \int_{\Omega} \underline{\underline{\dot{\sigma}}} : \underline{\underline{\dot{\epsilon}}} \, d\Omega = \int_{\Omega} \underline{\underline{\dot{\sigma}}} : \underline{\underline{S}} : \underline{\underline{\dot{\sigma}}} \, d\Omega + \int_{\Omega} \underline{\underline{\dot{\sigma}}} : \underline{\underline{\dot{\epsilon}}}^P \, d\Omega.$$

Ecrouissage de structure

Chargement prescrit au travers de variables de chargement généralisées $(\underline{q}, \underline{Q})$.

Pour toute évolution d'une structure élasto-plastique (écrouissage ≥ 0), on a $\underline{\dot{Q}} \cdot \underline{\dot{q}} \geq 0$.



Par définition des variables généralisées :

$$\int_{\Omega} \underline{\underline{\sigma}}(t) : \underline{\underline{\dot{\epsilon}}}(t) \, d\Omega = \underline{Q}(t) \cdot \underline{\dot{q}}(t), \quad \int_{\Omega} \underline{\underline{\sigma}}(t + dt) : \underline{\underline{\dot{\epsilon}}}(t) \, d\Omega = \underline{Q}(t + dt) \cdot \underline{\dot{q}}(t),$$

$$\implies \underline{\dot{Q}}(t) \cdot \underline{\dot{q}}(t) = \int_{\Omega} \underline{\underline{\dot{\sigma}}} : \underline{\underline{\dot{\epsilon}}} \, d\Omega = \int_{\Omega} \underline{\underline{\dot{\sigma}}} : \underline{\underline{S}} : \underline{\underline{\dot{\sigma}}} \, d\Omega + \int_{\Omega} \underline{\underline{\dot{\sigma}}} : \underline{\underline{\dot{\epsilon}}}^P \, d\Omega.$$

Chaque terme est séparément positif, puisque

$$\underline{\underline{\dot{\sigma}}} : \underline{\underline{S}} : \underline{\underline{\dot{\sigma}}} \geq 0, \quad \underline{\underline{\dot{\sigma}}} : \underline{\underline{\dot{\epsilon}}}^P \geq 0.$$

Différentes origines de l'écroissage de structure

$$\underline{\dot{Q}}(t) \cdot \underline{\dot{q}}(t) = \int_{\Omega} \underline{\underline{\dot{\sigma}}} : \underline{\underline{\dot{\varepsilon}}} \, d\Omega = \int_{\Omega} \underline{\underline{\dot{\sigma}}} : \underline{\underline{S}} : \underline{\underline{\dot{\sigma}}} \, d\Omega + \int_{\Omega} \underline{\underline{\dot{\sigma}}} : \underline{\underline{\dot{\varepsilon}}^P} \, d\Omega.$$

- **Écroissage propre du matériau** : $\underline{\underline{\dot{\sigma}}} : \underline{\underline{\dot{\varepsilon}}^P} \geq 0$. Si écroissage strictement positif, la courbe $Q(q)$ est strictement croissante sans asymptote horizontale.
Pas de charge limite pour un matériau à écroissage positif.

Différentes origines de l'écroissage de structure

$$\underline{\dot{Q}}(t) \cdot \underline{\dot{q}}(t) = \int_{\Omega} \underline{\dot{\sigma}} : \underline{\dot{\varepsilon}} \, d\Omega = \int_{\Omega} \underline{\dot{\sigma}} : \underline{\underline{S}} : \underline{\dot{\sigma}} \, d\Omega + \int_{\Omega} \underline{\dot{\sigma}} : \underline{\underline{\dot{\varepsilon}}^P} \, d\Omega.$$

- ▶ **Écroissage propre du matériau** : $\underline{\dot{\sigma}} : \underline{\underline{\dot{\varepsilon}}^P} \geq 0$. Si écroissage strictement positif, la courbe $Q(q)$ est strictement croissante sans asymptote horizontale.
Pas de charge limite pour un matériau à écroissage positif.

- ▶ **Evolution des contraintes** : $\underline{\dot{\sigma}} : \underline{\underline{S}} : \underline{\dot{\sigma}} \geq 0$.

Terme > 0 tant qu'il y a évolution des contraintes.

- Evolution de la zone plastique.
- Rotation des contraintes sur le seuil de plasticité.

Plan

1. Formulation du problème d'évolution pour une structure élasto-plastique
2. Exemple : torsion d'un arbre cylindrique élasto-plastique
3. Evolution de structures élasto-plastiques
 - Structures élastiques parfaitement plastiques
 - Structures élasto-plastiques avec écrouissage
 - Ecrouissage de structure
- 4. Incompatibilité et contraintes résiduelles**
5. Intégration numérique en temps (plasticité parfaite)

Incompatibilité et contraintes résiduelles

Après décharge ($Q = 0$), il subsiste des **contraintes résiduelles**.

Origine de ces contraintes : **la partie plastique de la déformation n'est pas une déformation compatible.**

$$\underline{\underline{\underline{\epsilon}}} = \underline{\underline{\underline{\epsilon}}}^{\text{el}} + \underline{\underline{\underline{\epsilon}}}^{\text{P}}, \quad \underline{\underline{\underline{\epsilon}}}^{\text{el}} = \underline{\underline{\underline{\mathbf{S}}}} : \underline{\underline{\underline{\sigma}}}, \quad \dot{\underline{\underline{\underline{\epsilon}}}}^{\text{P}} = \dot{\lambda} \frac{\partial f}{\partial \underline{\underline{\underline{\sigma}}}}(\underline{\underline{\underline{\sigma}}}).$$

Incompatibilité et contraintes résiduelles

Après décharge ($Q = 0$), il subsiste des **contraintes résiduelles**.

Origine de ces contraintes : **la partie plastique de la déformation n'est pas une déformation compatible.**

$$\underline{\underline{\underline{\epsilon}}} = \underline{\underline{\underline{\epsilon}}}^{\text{el}} + \underline{\underline{\underline{\epsilon}}}^{\text{P}}, \quad \underline{\underline{\underline{\epsilon}}}^{\text{el}} = \underline{\underline{\underline{S}}} : \underline{\underline{\underline{\sigma}}}, \quad \underline{\underline{\underline{\dot{\epsilon}}}}^{\text{P}} = \dot{\lambda} \frac{\partial f}{\partial \underline{\underline{\underline{\sigma}}}}(\underline{\underline{\underline{\sigma}}}).$$

$$\underline{\underline{\underline{\epsilon}}} = \frac{1}{2} (\underline{\underline{\underline{\nabla}}}\underline{\underline{\underline{\xi}}} + {}^{\text{T}}\underline{\underline{\underline{\nabla}}}\underline{\underline{\underline{\xi}}}),$$

$$\text{mais } \underline{\underline{\underline{\epsilon}}}^{\text{el}} \neq \frac{1}{2} (\underline{\underline{\underline{\nabla}}}\underline{\underline{\underline{\xi}}}^{\text{el}} + {}^{\text{T}}\underline{\underline{\underline{\nabla}}}\underline{\underline{\underline{\xi}}}^{\text{el}}), \quad \underline{\underline{\underline{\epsilon}}}^{\text{P}} \neq \frac{1}{2} (\underline{\underline{\underline{\nabla}}}\underline{\underline{\underline{\xi}}}^{\text{P}} + {}^{\text{T}}\underline{\underline{\underline{\nabla}}}\underline{\underline{\underline{\xi}}}^{\text{P}}).$$

Incompatibilité et contraintes résiduelles

Après décharge ($Q = 0$), il subsiste des **contraintes résiduelles**.

Origine de ces contraintes : **la partie plastique de la déformation n'est pas une déformation compatible.**

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \underline{\underline{\varepsilon}}^{\text{el}} + \underline{\underline{\varepsilon}}^{\text{P}}, \quad \underline{\underline{\varepsilon}}^{\text{el}} = \underline{\underline{\mathbf{S}}} : \underline{\underline{\sigma}}, \quad \dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}^{\text{P}} = \dot{\lambda} \frac{\partial f}{\partial \underline{\underline{\sigma}}}(\underline{\underline{\sigma}}).$$

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \frac{1}{2} (\nabla \underline{\underline{\xi}} + {}^{\text{T}} \nabla \underline{\underline{\xi}}), \quad \text{mais } \underline{\underline{\varepsilon}}^{\text{el}} \neq \frac{1}{2} (\nabla \underline{\underline{\xi}}^{\text{el}} + {}^{\text{T}} \nabla \underline{\underline{\xi}}^{\text{el}}), \quad \underline{\underline{\varepsilon}}^{\text{P}} \neq \frac{1}{2} (\nabla \underline{\underline{\xi}}^{\text{P}} + {}^{\text{T}} \nabla \underline{\underline{\xi}}^{\text{P}}).$$

Analogie avec la déformation d'origine thermique :

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \underline{\underline{\varepsilon}}^{\text{el}} + \underline{\underline{\varepsilon}}^{\text{th}}, \quad \underline{\underline{\varepsilon}}^{\text{el}} = \underline{\underline{\mathbf{S}}} : \underline{\underline{\sigma}}, \quad \underline{\underline{\varepsilon}}^{\text{th}} = \underline{\underline{\alpha}}^{\text{th}} \theta.$$

$\underline{\underline{\varepsilon}}$ est compatible. $\underline{\underline{\varepsilon}}^{\text{th}}$, $\underline{\underline{\varepsilon}}^{\text{P}}$, $\underline{\underline{\varepsilon}}^{\text{el}}$ sont incompatibles.

Rappel de la notion de compatibilité

Soit $\underline{\underline{e}}(\underline{x})$ un champ tensoriel d'ordre 2, symétrique.

Rappel de la notion de compatibilité

Soit $\underline{\underline{e}}(\underline{x})$ un champ tensoriel d'ordre 2, symétrique.

- **Compatibilité géométrique :**

$$\exists \underline{\underline{\eta}} \quad \text{tel que} \quad \underline{\underline{e}} = \frac{1}{2} (\underline{\underline{\nabla}} \underline{\underline{\eta}} + {}^T \underline{\underline{\nabla}} \underline{\underline{\eta}}) .$$

Rappel de la notion de compatibilité

Soit $\underline{\underline{e}}(\underline{x})$ un champ tensoriel d'ordre 2, symétrique.

► **Compatibilité géométrique :**

$$\exists \underline{\eta} \quad \text{tel que} \quad \underline{\underline{e}} = \frac{1}{2} (\nabla \underline{\eta} + {}^T \nabla \underline{\eta}) .$$

Condition (nécessaire) de compatibilité géométrique pour un champ $\underline{\underline{e}}$ deux fois dérivable :

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{ij}}{\partial x_k \partial x_l} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{kl}}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 \varepsilon_{ik}}{\partial x_j \partial x_l} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{jl}}{\partial x_i \partial x_k}$$

Rappel de la notion de compatibilité

Soit $\underline{\underline{e}}(\underline{x})$ un champ tensoriel d'ordre 2, symétrique.

► **Compatibilité géométrique :**

$$\exists \underline{\underline{\eta}} \quad \text{tel que} \quad \underline{\underline{e}} = \frac{1}{2} (\nabla \underline{\underline{\eta}} + {}^T \nabla \underline{\underline{\eta}}).$$

Condition (nécessaire) de compatibilité géométrique pour un champ $\underline{\underline{e}}$ deux fois dérivable :

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{ij}}{\partial x_k \partial x_l} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{kl}}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 \varepsilon_{ik}}{\partial x_j \partial x_l} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{jl}}{\partial x_i \partial x_k}$$

► **Compatibilité cinématique :**

$$\underline{\underline{\eta}} = \underline{\underline{\xi}}^d \quad \text{sur} \quad \partial_{\underline{\underline{\xi}}} \Omega.$$

Rappel de la notion de compatibilité

Soit $\underline{\underline{e}}(\underline{x})$ un champ tensoriel d'ordre 2, symétrique.

► **Compatibilité géométrique :**

$$\exists \underline{\underline{\eta}} \quad \text{tel que} \quad \underline{\underline{e}} = \frac{1}{2} (\nabla \underline{\underline{\eta}} + {}^T \nabla \underline{\underline{\eta}}).$$

Condition (nécessaire) de compatibilité géométrique pour un champ $\underline{\underline{e}}$ deux fois dérivable :

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{ij}}{\partial x_k \partial x_l} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{kl}}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 \varepsilon_{ik}}{\partial x_j \partial x_l} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{jl}}{\partial x_i \partial x_k}$$

► **Compatibilité cinématique :**

$$\underline{\underline{\eta}} = \underline{\underline{\xi}}^d \quad \text{sur} \quad \partial_{\underline{\underline{\xi}}} \Omega.$$

Un champ $\underline{\underline{e}}$ qui ne vérifie pas ces conditions est **incompatible**.

Contraintes résiduelles

Conséquence : sous charge nulle et champ de déformation $\underline{\underline{\varepsilon}}^P$ incompatible, il se crée un champ de contrainte $\underline{\underline{\sigma}}^{\text{res}}$ pour **compenser** l'incompatibilité de $\underline{\underline{\varepsilon}}^P$:

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \frac{1}{2} (\underline{\underline{\nabla}}\underline{\underline{\xi}} + {}^T\underline{\underline{\nabla}}\underline{\underline{\xi}}) = \underline{\underline{S}} : \underline{\underline{\sigma}}^{\text{res}} + \underline{\underline{\varepsilon}}^P \text{ dans } \Omega.$$

Contraintes résiduelles

Conséquence : sous charge nulle et champ de déformation $\underline{\underline{\varepsilon}}^P$ incompatible, il se crée un champ de contrainte $\underline{\underline{\sigma}}^{\text{res}}$ pour **compenser** l'incompatibilité de $\underline{\underline{\varepsilon}}^P$:

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \frac{1}{2} (\underline{\underline{\nabla}}\underline{\underline{\xi}} + {}^T\underline{\underline{\nabla}}\underline{\underline{\xi}}) = \underline{\underline{S}} : \underline{\underline{\sigma}}^{\text{res}} + \underline{\underline{\varepsilon}}^P \text{ dans } \Omega.$$

La **contrainte résiduelle** $\underline{\underline{\sigma}}^{\text{res}}$ est un champ d'autocontrainte :

$$\text{div} \underline{\underline{\sigma}}^{\text{res}} = \underline{\underline{0}} \text{ dans } \Omega, \quad \underline{\underline{\sigma}}^{\text{res}} \cdot \underline{\underline{n}} = \underline{\underline{0}} \text{ sur } \partial_T \Omega, \quad \underline{\underline{\xi}} = \underline{\underline{\xi}}^d \text{ sur } \partial_\xi \Omega.$$

Contraintes résiduelles

Conséquence : sous charge nulle et champ de déformation $\underline{\underline{\varepsilon}}^P$ incompatible, il se crée un champ de contrainte $\underline{\underline{\sigma}}^{\text{res}}$ pour **compenser** l'incompatibilité de $\underline{\underline{\varepsilon}}^P$:

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \frac{1}{2} (\underline{\underline{\nabla}}\underline{\underline{\xi}} + {}^T\underline{\underline{\nabla}}\underline{\underline{\xi}}) = \underline{\underline{S}} : \underline{\underline{\sigma}}^{\text{res}} + \underline{\underline{\varepsilon}}^P \text{ dans } \Omega.$$

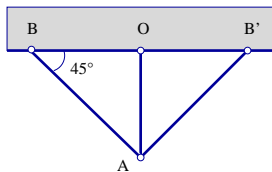
La **contrainte résiduelle** $\underline{\underline{\sigma}}^{\text{res}}$ est un champ d'autocontrainte :

$$\text{div} \underline{\underline{\sigma}}^{\text{res}} = \underline{\underline{0}} \text{ dans } \Omega, \quad \underline{\underline{\sigma}}^{\text{res}} \cdot \underline{\underline{n}} = \underline{\underline{0}} \text{ sur } \partial_T \Omega, \quad \underline{\underline{\xi}} = \underline{\underline{\xi}}^d \text{ sur } \partial_\xi \Omega.$$

- ▶ **A l'issue d'un processus de mise en forme, ayant créé un champ de déformations plastiques $\underline{\underline{\varepsilon}}^P$, il subsiste des contraintes résiduelles.**
- ▶ **Leur prise en compte est essentielle dans le dimensionnement des structures.** Plusieurs dizaines ou centaines de MPa.
- ▶ Pour la suite de la vie de la structure :

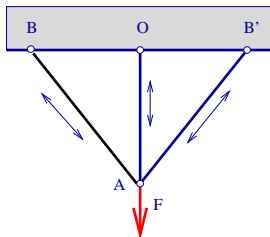
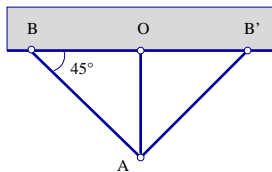
$$\underline{\underline{\sigma}}^0(\underline{\underline{x}}) = \underline{\underline{\sigma}}^{\text{res}}(\underline{\underline{x}}).$$

Signe des contraintes résiduelles pas toujours intuitif



Barres AB, AB' élastiques,
Barre OA élasto-plastique
Configuration initiale.

Signe des contraintes résiduelles pas toujours intuitif

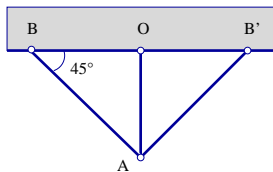


Barres AB, AB' élastiques,
Barre OA élasto-plastique
Configuration initiale.

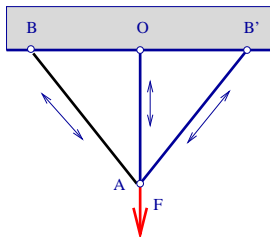
Plastification de OA.
Déformation plastique
positive de OA.

$$\sum N_i = F > 0$$

Signe des contraintes résiduelles pas toujours intuitif

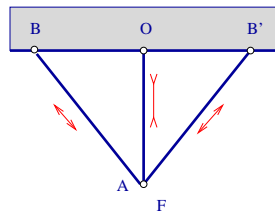


Barres AB, AB' élastiques,
Barre OA élasto-plastique
Configuration initiale.



Plastification de OA.
Déformation plastique
positive de OA.

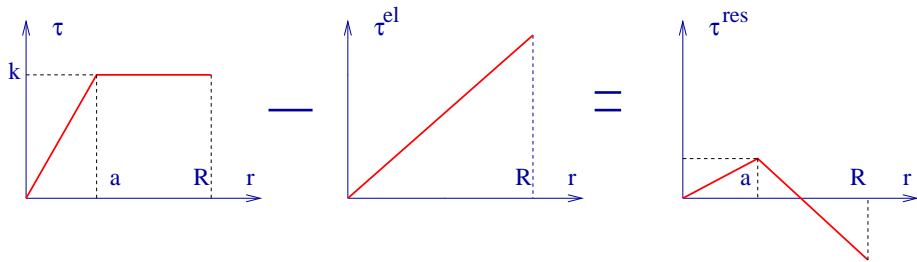
$$\sum N_i = F > 0$$



Barres AB, AB' : **traction**
Barres OA : **compression**

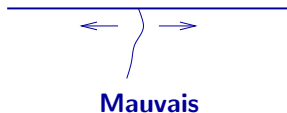
$$\sum N_i = F = 0.$$

Retour sur l'exemple de la torsion



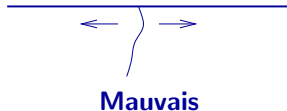
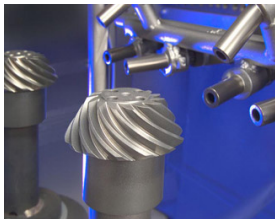
Comment utiliser les contraintes résiduelles : traitements de surface

Les pièces en contact sont sujettes à la **fatigue** (propagation de microfissures sous chargement alterné). Effets de l'« environnement » (température, gaz, corrosion etc..)



Comment utiliser les contraintes résiduelles : traitements de surface

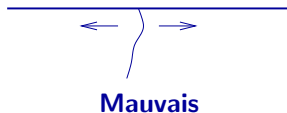
Les pièces en contact sont sujettes à la **fatigue** (propagation de microfissures sous chargement alterné). Effets de l'« environnement » (température, gaz, corrosion etc..)



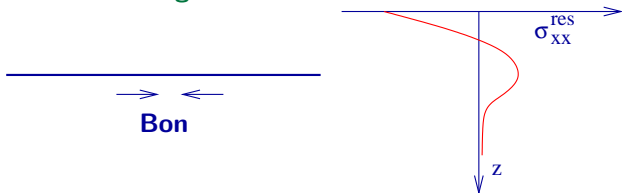
Remède : créer des contraintes résiduelles de compression à la surface avant application du chargement de service.

Comment utiliser les contraintes résiduelles : traitements de surface

Les pièces en contact sont sujettes à la **fatigue** (propagation de microfissures sous chargement alterné). Effets de l'« environnement » (température, gaz, corrosion etc..)



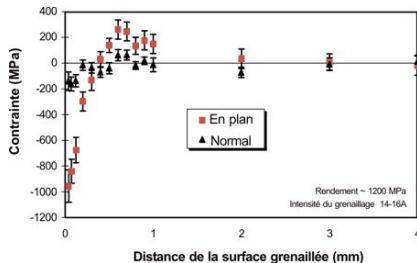
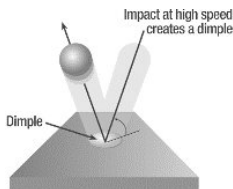
Remède : créer des contraintes résiduelles de compression à la surface avant application du chargement de service.



Grenailage

Contrainte résiduelle de compression = déformation plastique en traction.

$$\varepsilon_{xx}^P > 0 \Rightarrow \sigma_{xx}^{\text{res}} < 0.$$



Plan

1. Formulation du problème d'évolution pour une structure élasto-plastique
2. Exemple : torsion d'un arbre cylindrique élasto-plastique
3. Evolution de structures élasto-plastiques
 - Structures élastiques parfaitement plastiques
 - Structures élasto-plastiques avec écrouissage
 - Ecrouissage de structure
4. Incompatibilité et contraintes résiduelles
- 5. Intégration numérique en temps (plasticité parfaite)**

Intégration numérique en temps (plasticité parfaite)

Motivation

- ▶ Solutions analytiques rares \Rightarrow recours aux méthodes numériques.

Intégration numérique en temps (plasticité parfaite)

Motivation

- ▶ Solutions analytiques rares \Rightarrow recours aux méthodes numériques.
- ▶ Méthodes numériques de résolution du problème élastique largement répandues (Méthode des Eléments Finis, Méthode des Différences Finies, analyse de Fourier...).

Intégration numérique en temps (plasticité parfaite)

Motivation

- ▶ Solutions analytiques rares \Rightarrow recours aux méthodes numériques.
- ▶ Méthodes numériques de résolution du problème élastique largement répandues (Méthode des Eléments Finis, Méthode des Différences Finies, analyse de Fourier...).
- ▶ Chargement imposé à la structure sur $[0, T]$ discrétisé en $t_0 = 0, t_1, \dots, t_{N-1}, t_N = T$. Intégration "pas à pas" dans le temps.

Intégration numérique en temps (plasticité parfaite)

Motivation

- ▶ Solutions analytiques rares \Rightarrow recours aux méthodes numériques.
- ▶ Méthodes numériques de résolution du problème élastique largement répandues (Méthode des Eléments Finis, Méthode des Différences Finies, analyse de Fourier...).
- ▶ Chargement imposé à la structure sur $[0, T]$ discrétisé en $t_0 = 0, t_1, \dots, t_{N-1}, t_N = T$. Intégration "pas à pas" dans le temps.
- ▶ Supposant connus les champs solutions en $t = t_n$ on détermine (numériquement) ces champs en $t = t_{n+1}$.

Intégration numérique en temps (plasticité parfaite)

Motivation

- ▶ Solutions analytiques rares \Rightarrow recours aux méthodes numériques.
- ▶ Méthodes numériques de résolution du problème élastique largement répandues (Méthode des Eléments Finis, Méthode des Différences Finies, analyse de Fourier...).
- ▶ Chargement imposé à la structure sur $[0, T]$ discrétisé en $t_0 = 0, t_1, \dots, t_{N-1}, t_N = T$. Intégration "pas à pas" dans le temps.
- ▶ Supposant connus les champs solutions en $t = t_n$ on détermine (numériquement) ces champs en $t = t_{n+1}$.

Notations

- ▶ Champs en $t = t_n$ notés avec un exposant (n) : $\underline{\underline{\sigma}}^{(n)}, \underline{\underline{\xi}}^{(n)}$ etc...
- ▶ Champs inconnus en $t = t_{n+1}$ notés $\underline{\underline{\sigma}}$ et $\underline{\underline{\xi}}$.

$$\underline{\underline{\sigma}} \in \mathcal{S} = \mathcal{S}(\underline{F}(t_{n+1}), \underline{S}_T, \underline{T}^d(t_{n+1})), \quad \underline{\underline{\xi}} \in \mathbb{C} = \mathbb{C}(\underline{S}_{\underline{\xi}}, \underline{\xi}^d(t_{n+1})),$$

$$\underline{\underline{\sigma}} \in \mathcal{P} \quad \Longrightarrow \quad \underline{\underline{\sigma}} \in \mathcal{SP} = \mathcal{S} \cap \mathcal{P}.$$

Schéma d'Euler implicite

- Approximation des dérivées en temps :

$$\Delta t = t_{n+1} - t_n, \quad \dot{f}(t) \simeq \frac{\Delta f}{\Delta t} = \frac{f(t_{n+1}) - f(t_n)}{t_{n+1} - t_n}, \quad t \in [t_n, t_{n+1}].$$

Schéma d'Euler implicite

- Approximation des dérivées en temps :

$$\Delta t = t_{n+1} - t_n, \quad \dot{f}(t) \simeq \frac{\Delta f}{\Delta t} = \frac{f(t_{n+1}) - f(t_n)}{t_{n+1} - t_n}, \quad t \in [t_n, t_{n+1}].$$

- Comportement :

$$\underline{\underline{\dot{\epsilon}}} = \underline{\underline{\dot{\epsilon}}}^{\text{el}} + \underline{\underline{\dot{\epsilon}}}^{\text{P}}, \quad \underline{\underline{\dot{\epsilon}}}^{\text{el}} = \underline{\underline{\mathbf{S}}} : \underline{\underline{\dot{\sigma}}}, \quad \underline{\underline{\dot{\epsilon}}}^{\text{P}} = \dot{\lambda} \frac{\partial f}{\partial \underline{\underline{\sigma}}}(\underline{\underline{\sigma}}),$$

Schéma d'Euler implicite

- Approximation des dérivées en temps :

$$\Delta t = t_{n+1} - t_n, \quad \dot{f}(t) \simeq \frac{\Delta f}{\Delta t} = \frac{f(t_{n+1}) - f(t_n)}{t_{n+1} - t_n}, \quad t \in [t_n, t_{n+1}].$$

- Comportement :

$$\underline{\underline{\dot{\varepsilon}}} = \underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}^{\text{el}} + \underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}^{\text{P}}, \quad \underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}^{\text{el}} = \underline{\underline{\mathbf{S}}} : \underline{\underline{\dot{\sigma}}}, \quad \underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}^{\text{P}} = \dot{\lambda} \frac{\partial f}{\partial \underline{\underline{\sigma}}}(\underline{\underline{\sigma}}),$$

$$\Delta \underline{\underline{\varepsilon}} = \underline{\underline{\mathbf{S}}} : \Delta \underline{\underline{\sigma}} + \Delta \lambda \underline{\underline{\mathbf{N}}}(\underline{\underline{\sigma}}), \quad \underline{\underline{\mathbf{N}}}(\underline{\underline{\sigma}}) : (\underline{\underline{\sigma}}^* - \underline{\underline{\sigma}}) \leq 0 \quad \forall \underline{\underline{\sigma}}^* \in \mathcal{P}, \quad \Delta \lambda \geq 0.$$

Schéma d'Euler implicite

- Approximation des dérivées en temps :

$$\Delta t = t_{n+1} - t_n, \quad \dot{f}(t) \simeq \frac{\Delta f}{\Delta t} = \frac{f(t_{n+1}) - f(t_n)}{t_{n+1} - t_n}, \quad t \in [t_n, t_{n+1}].$$

- Comportement :

$$\underline{\dot{\underline{\varepsilon}}} = \underline{\dot{\underline{\varepsilon}}}^{\text{el}} + \underline{\dot{\underline{\varepsilon}}}^{\text{P}}, \quad \underline{\dot{\underline{\varepsilon}}}^{\text{el}} = \underline{\underline{\underline{S}}} : \underline{\dot{\underline{\sigma}}}, \quad \underline{\dot{\underline{\varepsilon}}}^{\text{P}} = \dot{\lambda} \frac{\partial f}{\partial \underline{\underline{\underline{\sigma}}}}(\underline{\underline{\underline{\sigma}}}),$$

$$\Delta \underline{\underline{\underline{\varepsilon}}} = \underline{\underline{\underline{S}}} : \Delta \underline{\underline{\underline{\sigma}}} + \Delta \lambda \underline{\underline{\underline{N}}}(\underline{\underline{\underline{\sigma}}}), \quad \underline{\underline{\underline{N}}}(\underline{\underline{\underline{\sigma}}}) : (\underline{\underline{\underline{\sigma}}}^* - \underline{\underline{\underline{\sigma}}}) \leq 0 \quad \forall \underline{\underline{\underline{\sigma}}}^* \in \mathcal{P}, \quad \Delta \lambda \geq 0.$$

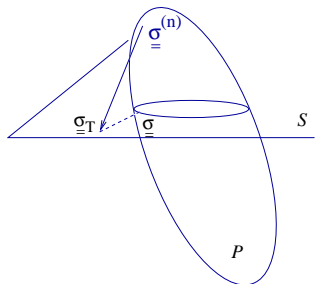
- Réponse élastique de la structure entre t_n et t_{n+1} :

$$\begin{aligned} \underline{\underline{\underline{\sigma}}}_T &= \underline{\underline{\underline{\sigma}}}^{(n)} + \Delta^{\text{el}} \underline{\underline{\underline{\sigma}}}, & \underline{\underline{\underline{\xi}}}_T &= \underline{\underline{\underline{\xi}}}^{(n)} + \Delta^{\text{el}} \underline{\underline{\underline{\xi}}}, \\ \Delta^{\text{el}} \underline{\underline{\underline{\sigma}}} &= \underline{\underline{\underline{C}}} : \Delta^{\text{el}} \underline{\underline{\underline{\varepsilon}}}, & \Delta^{\text{el}} \underline{\underline{\underline{\varepsilon}}} &= \underline{\underline{\underline{\varepsilon}}}(\Delta^{\text{el}} \underline{\underline{\underline{\xi}}}), \\ \Delta^{\text{el}} \underline{\underline{\underline{\sigma}}} &\in \mathcal{S}(\Delta \underline{\underline{\underline{F}}}, S_T, \Delta T^d), & \Delta^{\text{el}} \underline{\underline{\underline{\xi}}} &\in \mathbb{C}(S_{\underline{\underline{\underline{\xi}}}}, \Delta \underline{\underline{\underline{\xi}}}^d). \end{aligned}$$

$$\underline{\underline{\underline{\sigma}}}_T \in \mathcal{S}, \quad \underline{\underline{\underline{\xi}}}_T \in \mathbb{C}.$$

Lien entre incrément élastique et solution élasto-plastique

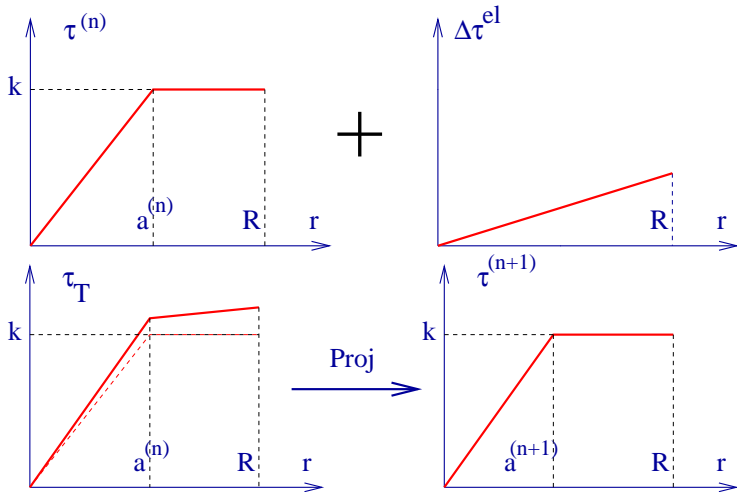
Propriété (en plasticité parfaite) : Le champ de contrainte $\underline{\underline{\sigma}}$ solution du problème élasto-plastique est la projection du champ test élastique $\underline{\underline{\sigma}}_T$ sur l'ensemble \mathcal{SP} des champs de contrainte statiquement et plastiquement admissibles, au sens du produit scalaire défini par le tenseur d'élasticité $\underline{\underline{S}}$.



Principe de la résolution numérique :

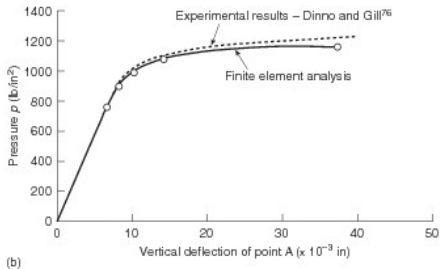
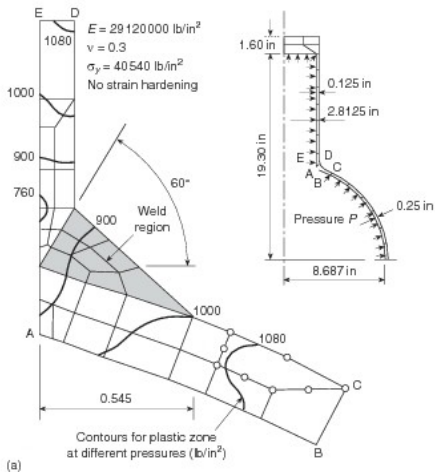
- ▶ $\underline{\underline{\sigma}}^{(n)}$ connu,
- ▶ calculer $\underline{\underline{\sigma}}_T$ (résolution d'un problème élastique),
- ▶ projeter $\underline{\underline{\sigma}}_T$ sur \mathcal{SP} : projections successives sur \mathcal{S} et \mathcal{P} (itérations).

Retour sur le cas de la torsion



Par chance, $\text{Proj}_{\mathcal{P}} = \text{Proj}_{\mathcal{SP}}$.

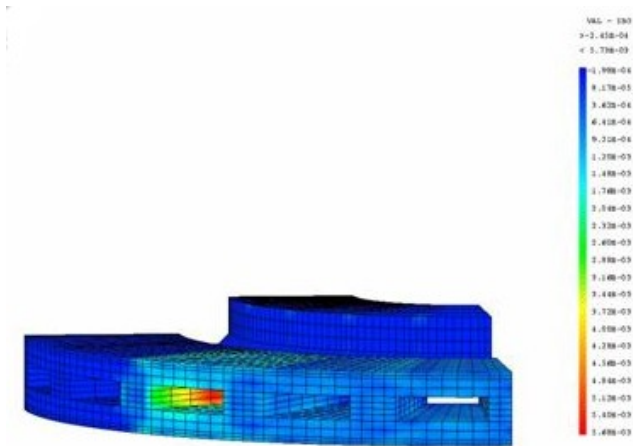
Exemple : modélisation d'une enceinte pressurisée



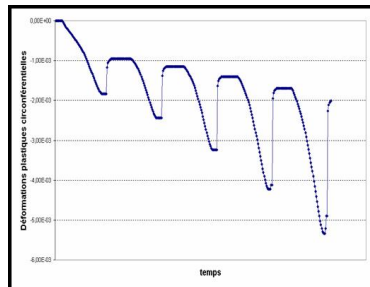
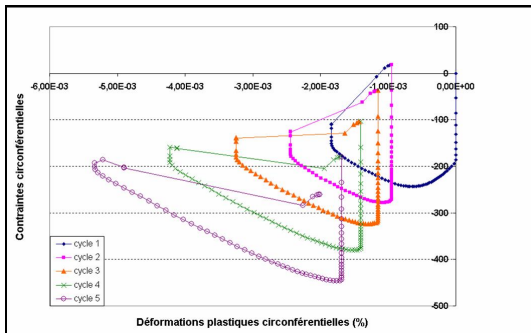
Exemple : modélisation de disques de freins automobiles sous chargement cyclique



Exemple : modélisation de disques de freins automobiles sous chargement cyclique



Exemple : modélisation de disques de freins automobiles sous chargement cyclique



Exemple : modélisation de disques de freins automobiles sous chargement cyclique

But de l'analyse : modélisation de la rupture sous chargements thermomécaniques cycliques (un cycle = une phase de freinage sévère)

Faïençage :



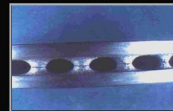
Fissure radiale :



Rupture du bol :



Fissure en pied d'ailette :



Conclusion

- ▶ **Plasticité parfaite** : **sous la condition de charge sûre** existence d'une solution $(\underline{\xi}, \underline{\underline{\sigma}})$, unique pour $\underline{\underline{\sigma}}$.
- ▶ **Ecrouissage positif** : **Sans condition sur le chargement** existence d'une unique solution $(\underline{\xi}, \underline{\underline{\sigma}})$.

Conclusion

- ▶ **Plasticité parfaite** : **sous la condition de charge sûre** existence d'une solution $(\underline{\xi}, \underline{\underline{\sigma}})$, unique pour $\underline{\underline{\sigma}}$.
- ▶ **Écrouissage positif** : **Sans condition sur le chargement** existence d'une unique solution $(\underline{\xi}, \underline{\underline{\sigma}})$.
- ▶ Réponse de la structure en variables généralisées : **écrouissage de structure.**

Conclusion

- ▶ **Plasticité parfaite** : **sous la condition de charge sûre** existence d'une solution $(\underline{\xi}, \underline{\underline{\sigma}})$, unique pour $\underline{\underline{\sigma}}$.
- ▶ **Écrouissage positif** : **Sans condition sur le chargement** existence d'une unique solution $(\underline{\xi}, \underline{\underline{\sigma}})$.
- ▶ Réponse de la structure en variables généralisées : **écrouissage de structure.**
- ▶ **Incompatibilité de la déformation plastique** s'accompagnant de **contraintes résiduelles.**

Leur prise en compte est essentielle dans le dimensionnement des structures.