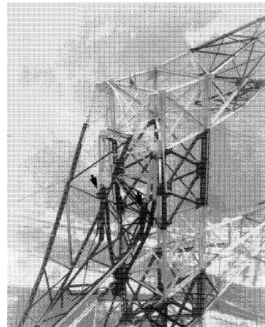
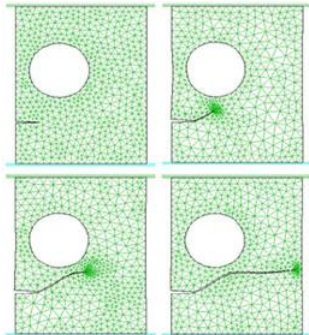


Rupture et plasticité



Département de Mécanique, Ecole Polytechnique, 2009–2010

Devoir (Mécanique de la rupture)

- ▶ Sujet **disponible en ligne** (version imprimée prochainement disponible à la scolarité), copie à remettre (scolarité) le **13/11**, coefficient 40% ;
- ▶ Thème : rupture en conditions dynamiques ;
- ▶ Règles du jeu :
 - Autorisé : bibliographie (BCX, Internet...); discussion entre élèves ou avec enseignants des concepts et méthodes.
 - Non autorisé : échange de solutions détaillées

www.lms.polytechnique.fr/users/bonnet/enseignement.html

Rupture et plasticité : plan du cours

Comportements non linéaires des matériaux solides

Amphi 1

Rupture fragile

- ▶ Singularités de contrainte et ténacité des matériaux Amphi 2
- ▶ Analyse énergétique de la propagation d'une fissure I Amphi 3
- ▶ Analyse énergétique de la propagation d'une fissure II.
Fissuration par fatigue Amphi 4

Plasticité

- ▶ **Comportement élasto-plastique** **Amphi 5**
- ▶ Dissipation plastique Amphi 6
- ▶ Structures élasto-plastiques standards Amphi 7

Charges limites

Amphi 8

www.lms.polytechnique.fr/users/bonnet/enseignement.html

Déformations plastiques...



...essentielles en mise en forme

Déformations plastiques...



...essentielles en mise en forme



...dissipant de l'énergie

Objectif : expliquer **quand** et **comment** apparaissent ces déformations plastiques

Cadre de travail

Hypothèse des petites perturbations :

- ▶ Configuration actuelle = configuration initiale.
- ▶ Tenseur des déformations linéarisées :

$$\underline{\underline{\epsilon}} = \frac{1}{2} (\underline{\nabla \xi} + {}^T \underline{\nabla \xi}),$$

Cadre de travail

Hypothèse des petites perturbations :

- ▶ Configuration actuelle = configuration initiale.
- ▶ Tenseur des déformations linéarisées :

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \frac{1}{2} (\underline{\nabla} \underline{\xi} + {}^T \underline{\nabla} \underline{\xi}),$$

- ▶ Tenseur vitesse de déformation :

$$\underline{\underline{d}}(\underline{v}) = \frac{1}{2} (\underline{\nabla} \underline{v} + {}^T \underline{\nabla} \underline{v}) = \frac{1}{2} (\underline{\nabla} \dot{\underline{\xi}} + {}^T \underline{\nabla} \dot{\underline{\xi}}) = \frac{d}{dt} \underline{\underline{\varepsilon}}, \quad \underline{\underline{\dot{\varepsilon}}} = \underline{\underline{d}}(\underline{v}).$$

Cadre de travail

Hypothèse des petites perturbations :

- ▶ Configuration actuelle = configuration initiale.
- ▶ Tenseur des déformations linéarisées :

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \frac{1}{2} (\underline{\nabla} \underline{\xi} + {}^T \underline{\nabla} \underline{\xi}),$$

- ▶ Tenseur vitesse de déformation :

$$\underline{\underline{d}}(\underline{v}) = \frac{1}{2} (\underline{\nabla} \underline{v} + {}^T \underline{\nabla} \underline{v}) = \frac{1}{2} (\underline{\nabla} \dot{\underline{\xi}} + {}^T \underline{\nabla} \dot{\underline{\xi}}) = \frac{d}{dt} \underline{\underline{\varepsilon}}, \quad \underline{\underline{\dot{\varepsilon}}} = \underline{\underline{d}}(\underline{v}).$$

Evolution quasi-statique : les termes d'accélération sont négligés.

Evolution isotherme : les variations de température sont négligées.

Comportement élasto-plastique

1. Rappel du cas uniaxial
2. Chargements multiaxiaux. Surface initiale de plasticité
3. Chargements multiaxiaux. Ecrouissage
4. Déformation plastique.
5. Charge-décharge
6. Règle de normalité dans les matériaux écrouissables

Plan

1. Rappel du cas uniaxial

2. Chargements multiaxiaux. Surface initiale de plasticité

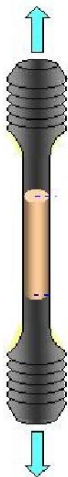
3. Chargements multiaxiaux. Ecrouissage

4. Déformation plastique.

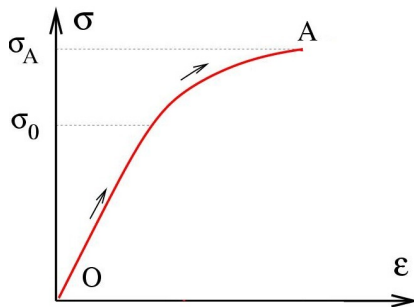
5. Charge-décharge

6. Règle de normalité dans les matériaux écrouissables

Chargement uniaxial (limite d'élasticité)



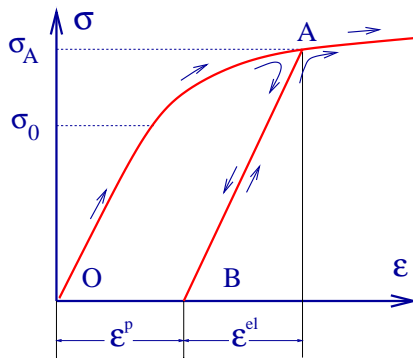
Chargement uniaxial (limite d'élasticité)



Limite d'élasticité = seuil de plasticité

- ▶ Limite élastique **initiale** (en partant de 0) : σ_0

Chargement uniaxial (limite d'élasticité)

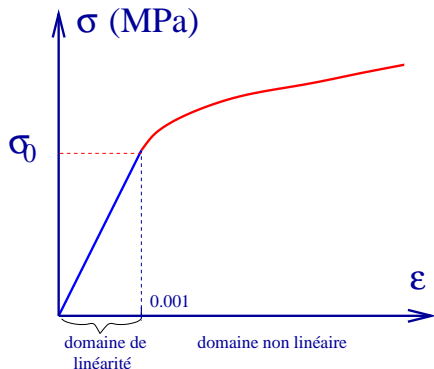


Limite d'élasticité = seuil de plasticité

- ▶ Limite élastique **initiale** (en partant de 0) : σ_0
- ▶ Limite élastique **actuelle** (en partant de B) : σ_A .

Notion d'écrouissage

Ecrouissage : la limite d'élasticité dépend de la déformation plastique.

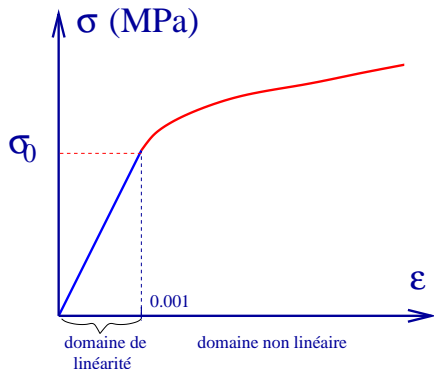


Acier inox : seuil = fonction ($\underline{\underline{\epsilon}}^P$).

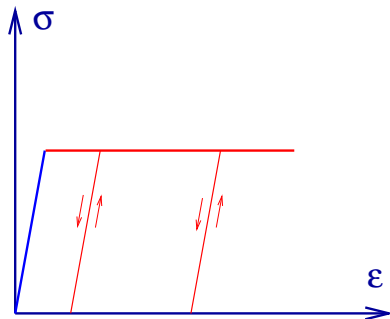
Ecrouissage

Notion d'écrouissage

Ecrouissage : la limite d'élasticité dépend de la déformation plastique.



Acier inox : seuil = fonction ($\underline{\underline{\epsilon}}^P$).
Ecrouissage



Acier doux : seuil constant.
Plasticité parfaite

Plan

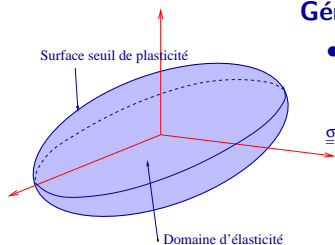
1. Rappel du cas uniaxial
- 2. Chargements multiaxiaux. Surface initiale de plasticité**
3. Chargements multiaxiaux. Ecrouissage
4. Déformation plastique.
5. Charge-décharge
6. Règle de normalité dans les matériaux écrouissables

Chargements multiaxiaux. Surface initiale de plasticité

L'état de contrainte en un point d'une structure est en général **multi-axial** : $\underline{\underline{\sigma}}$.

Chargements multiaxiaux. Surface initiale de plasticité

L'état de contrainte en un point d'une structure est en général **multi-axial** : $\underline{\underline{\sigma}}$.

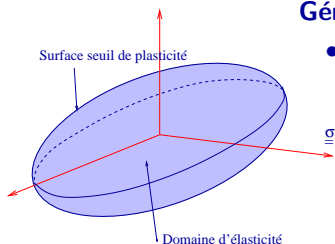


Généralisation de la notion de seuil de plasticité

- Existence d'un domaine dans l'espace des contraintes tel que
 - ▶ A l'intérieur du domaine, le régime est **élastique** : **domaine d'élasticité**.

Chargements multiaxiaux. Surface initiale de plasticité

L'état de contrainte en un point d'une structure est en général **multi-axial** : $\underline{\underline{\sigma}}$.

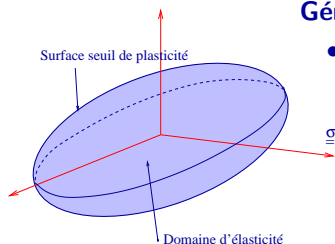


Généralisation de la notion de seuil de plasticité

- Existence d'un domaine dans l'espace des contraintes tel que
 - ▶ A l'intérieur du domaine, le régime est **élastique** : **domaine d'élasticité**.
 - ▶ Sur le bord du domaine, le régime est **élasto-plastique** : **surface seuil de plasticité**.

Chargements multiaxiaux. Surface initiale de plasticité

L'état de contrainte en un point d'une structure est en général **multi-axial** : $\underline{\underline{\sigma}}$.



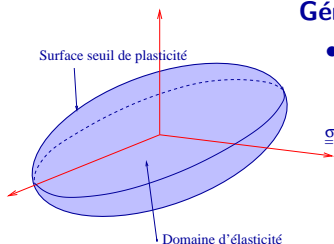
Généralisation de la notion de seuil de plasticité

- Existence d'un domaine dans l'espace des contraintes tel que
 - ▶ A l'intérieur du domaine, le régime est **élastique** : **domaine d'élasticité**.
 - ▶ Sur le bord du domaine, le régime est **élasto-plastique** : **surface seuil de plasticité**.
- Critère = toute fonction f telle que

$$\begin{aligned} \text{Domaine d'élasticité} &= \{ \underline{\underline{\sigma}}, f(\underline{\underline{\sigma}}) < 0 \}, \\ \text{Surface seuil de plasticité} &= \{ \underline{\underline{\sigma}}, f(\underline{\underline{\sigma}}) = 0 \}. \end{aligned}$$

Chargements multiaxiaux. Surface initiale de plasticité

L'état de contrainte en un point d'une structure est en général **multi-axial** : $\underline{\sigma}$.



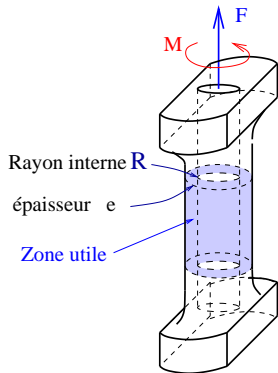
Généralisation de la notion de seuil de plasticité

- Existence d'un domaine dans l'espace des contraintes tel que
 - ▶ A l'intérieur du domaine, le régime est **élastique** : **domaine d'élasticité**.
 - ▶ Sur le bord du domaine, le régime est **élasto-plastique** : **surface seuil de plasticité**.
- Critère = toute fonction f telle que

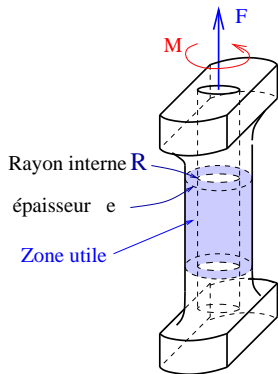
$$\begin{aligned} \text{Domaine d'élasticité} &= \{ \underline{\sigma}, f(\underline{\sigma}) < 0 \}, \\ \text{Surface seuil de plasticité} &= \{ \underline{\sigma}, f(\underline{\sigma}) = 0 \}. \end{aligned}$$

Domaine d'élasticité + Surface seuil de plasticité = Domaine de plasticité

Détermination expérimentale de la surface seuil : essai de traction torsion sur tube mince



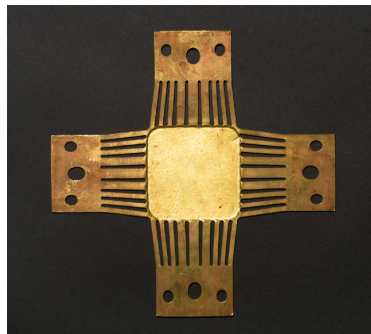
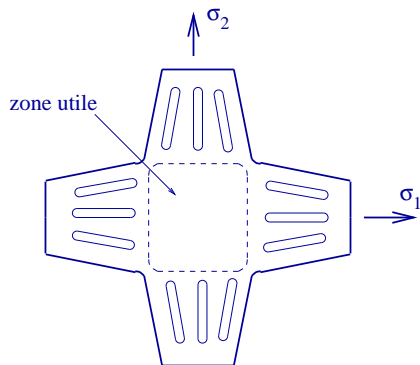
Détermination expérimentale de la surface seuil : essai de traction torsion sur tube mince



$$\underline{\underline{\sigma}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \tau \\ 0 & \tau & \sigma \end{pmatrix}$$

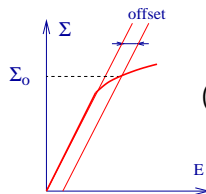
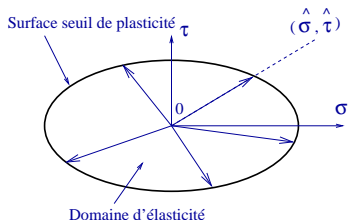
$$\sigma = \frac{F}{2\pi R e}, \quad \tau = \frac{M}{2\pi R^2 e}.$$

Détermination expérimentale de la surface seuil : essai de traction biaxiale



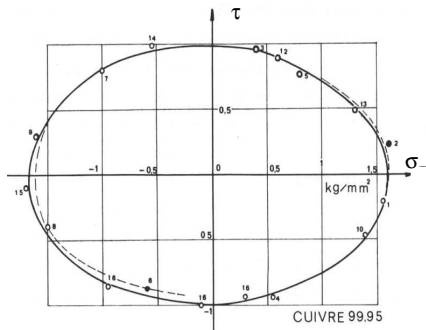
$$\underline{\underline{\sigma}} = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Surface initiale de plasticité : essais de traction-torsion (Bui, 1970)



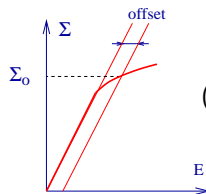
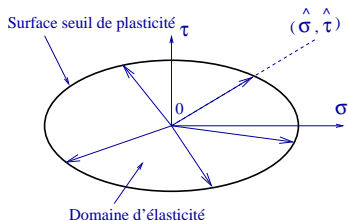
$$(\Sigma(t), \tau(t)) = \sigma(t) (\hat{\sigma}, \hat{\tau})$$

$$\text{offset} \simeq 10^{-5}.$$



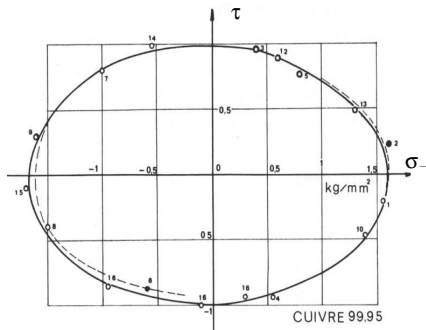
Charge radiale, puis retour à l'origine.

Surface initiale de plasticité : essais de traction-torsion (Bui, 1970)



$$(\Sigma(t), \tau(t)) = \sigma(t) (\hat{\sigma}, \hat{\tau})$$

$$\text{offset} \simeq 10^{-5}.$$



Charge radiale, puis retour à l'origine.

Observations :

- ▶ $\underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{0}}$ est dans le domaine d'élasticité.
- ▶ Le domaine d'élasticité est **convexe**.
- ▶ Surface seuil \simeq ellipse :

$$\frac{\text{grand axe}}{\text{petit axe}} \simeq \sqrt{3}.$$

Surface initiale de plasticité : modélisation

- ▶ Etat de contrainte en traction-torsion :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \sigma \underline{e}_z \otimes \underline{e}_z + \tau (\underline{e}_\theta \otimes \underline{e}_z + \underline{e}_z \otimes \underline{e}_\theta),$$

Surface initiale de plasticité : modélisation

- ▶ Etat de contrainte en traction-torsion :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \sigma \underline{e}_z \otimes \underline{e}_z + \tau (\underline{e}_\theta \otimes \underline{e}_z + \underline{e}_z \otimes \underline{e}_\theta),$$

- ▶ **Critère de Tresca** (cisaillement maximal) :

$$\sup_{i,j} |\sigma_i - \sigma_j| \leq \sigma_0.$$

Surface initiale de plasticité : modélisation

- ▶ Etat de contrainte en traction-torsion :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \sigma \underline{e}_z \otimes \underline{e}_z + \tau (\underline{e}_\theta \otimes \underline{e}_z + \underline{e}_z \otimes \underline{e}_\theta),$$

- ▶ **Critère de Tresca** (cisaillement maximal) :

$$\sup_{i,j} |\sigma_i - \sigma_j| \leq \sigma_0.$$

$$\underline{\underline{\sigma}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \tau \\ 0 & \tau & \sigma \end{pmatrix}$$

Contraintes principales $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ avec

$$\sigma_1 = \frac{\sigma - \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}}{2}, \quad \sigma_2 = 0, \quad \sigma_3 = \frac{\sigma + \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}}{2}.$$

Surface initiale de plasticité : modélisation

- ▶ Etat de contrainte en traction-torsion :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \sigma \underline{e}_z \otimes \underline{e}_z + \tau (\underline{e}_\theta \otimes \underline{e}_z + \underline{e}_z \otimes \underline{e}_\theta),$$

- ▶ **Critère de Tresca** (cisaillement maximal) :

$$\sup_{i,j} |\sigma_i - \sigma_j| \leq \sigma_0.$$

$$\underline{\underline{\sigma}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \tau \\ 0 & \tau & \sigma \end{pmatrix}$$

Contraintes principales $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ avec

$$\sigma_1 = \frac{\sigma - \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}}{2}, \quad \sigma_2 = 0, \quad \sigma_3 = \frac{\sigma + \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}}{2}.$$

$$\sup_{i,j} |\sigma_i - \sigma_j| = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \xrightarrow{\text{Tresca}} \sigma^2 + 4\tau^2 \leq \sigma_0^2.$$

Surface initiale de plasticité : modélisation

- ▶ Etat de contrainte en traction-torsion :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \sigma \underline{\underline{e}}_z \otimes \underline{\underline{e}}_z + \tau (\underline{\underline{e}}_\theta \otimes \underline{\underline{e}}_z + \underline{\underline{e}}_z \otimes \underline{\underline{e}}_\theta),$$

- ▶ **Critère de Tresca** (cisaillement maximal) :

$$\sup_{i,j} |\sigma_i - \sigma_j| \leq \sigma_0.$$

$$\underline{\underline{\sigma}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \tau \\ 0 & \tau & \sigma \end{pmatrix}$$

Contraintes principales $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ avec

$$\sigma_1 = \frac{\sigma - \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}}{2}, \quad \sigma_2 = 0, \quad \sigma_3 = \frac{\sigma + \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}}{2}.$$

$$\sup_{i,j} |\sigma_i - \sigma_j| = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \xrightarrow{\text{Tresca}} \sigma^2 + 4\tau^2 \leq \sigma_0^2.$$

La surface seuil est une ellipse.

$$\frac{\text{grand axe}}{\text{petit axe}} = 2.$$

Surface initiale de plasticité : modélisation

► Critère de von Mises

$$\underline{\underline{\sigma}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \tau \\ 0 & \tau & \sigma \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \sigma_m = \frac{\sigma}{3}, \quad \underline{\underline{s}} = \begin{pmatrix} -\sigma/3 & 0 & 0 \\ 0 & -\sigma/3 & \tau \\ 0 & \tau & 2\sigma/3 \end{pmatrix}$$

Surface initiale de plasticité : modélisation

► Critère de von Mises

$$\underline{\underline{\sigma}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \tau \\ 0 & \tau & \sigma \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \sigma_m = \frac{\sigma}{3}, \quad \underline{\underline{s}} = \begin{pmatrix} -\sigma/3 & 0 & 0 \\ 0 & -\sigma/3 & \tau \\ 0 & \tau & 2\sigma/3 \end{pmatrix}$$

► Contrainte équivalente :

$$\sigma_{\text{eq}} = \left(\frac{3}{2} s_{ij} s_{ij} \right)^{1/2} = (\sigma^2 + 3\tau^2)^{1/2}.$$

$$\xrightarrow{\text{vonMises}} \boxed{\sigma^2 + 3\tau^2 \leq \sigma_0^2.}$$

Surface initiale de plasticité : modélisation

► Critère de von Mises

$$\underline{\underline{\sigma}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \tau \\ 0 & \tau & \sigma \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \sigma_m = \frac{\sigma}{3}, \quad \underline{\underline{s}} = \begin{pmatrix} -\sigma/3 & 0 & 0 \\ 0 & -\sigma/3 & \tau \\ 0 & \tau & 2\sigma/3 \end{pmatrix}$$

► Contrainte équivalente :

$$\sigma_{\text{eq}} = \left(\frac{3}{2} s_{ij} s_{ij} \right)^{1/2} = (\sigma^2 + 3\tau^2)^{1/2}.$$

$$\xrightarrow{\text{vonMises}} \boxed{\sigma^2 + 3\tau^2 \leq \sigma_0^2.}$$

La surface seuil est une ellipse.

$$\frac{\text{grand axe}}{\text{petit axe}} = \sqrt{3}.$$

Surface initiale de plasticité : modélisation

► Critère de von Mises

$$\underline{\underline{\sigma}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \tau \\ 0 & \tau & \sigma \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \sigma_m = \frac{\sigma}{3}, \quad \underline{\underline{s}} = \begin{pmatrix} -\sigma/3 & 0 & 0 \\ 0 & -\sigma/3 & \tau \\ 0 & \tau & 2\sigma/3 \end{pmatrix}$$

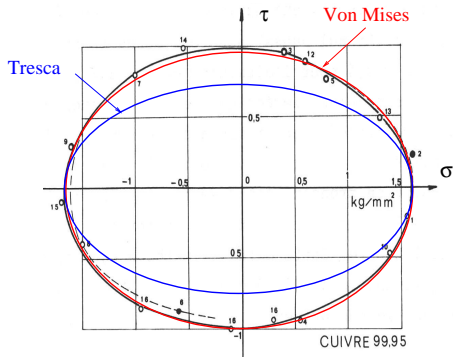
► Contrainte équivalente :

$$\sigma_{\text{eq}} = \left(\frac{3}{2} s_{ij} s_{ij} \right)^{1/2} = (\sigma^2 + 3\tau^2)^{1/2}.$$

$$\xrightarrow{\text{vonMises}} \boxed{\sigma^2 + 3\tau^2 \leq \sigma_0^2}.$$

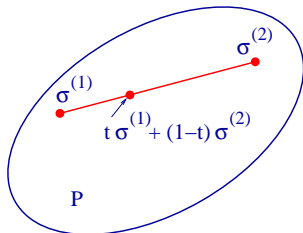
La surface seuil est une ellipse.

$$\frac{\text{grand axe}}{\text{petit axe}} = \sqrt{3}.$$



Meilleur accord modèle/expérience dans ce cas avec le critère de von Mises

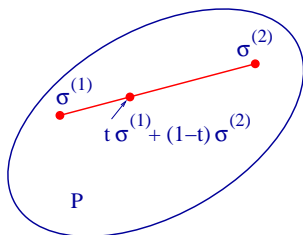
Forme générale du domaine initial de plasticité



Domaine initial de plasticité \mathbb{P} :

- ▶ \mathbb{P} est **convexe**,
- ▶ \mathbb{P} contient $\underline{0}$ dans son intérieur.

Forme générale du domaine initial de plasticité



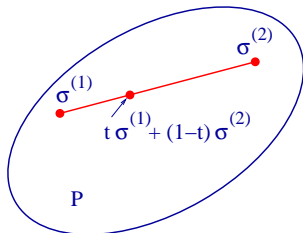
Domaine initial de plasticité \mathbb{P} :

- ▶ \mathbb{P} est **convexe**,
- ▶ \mathbb{P} contient $\underline{0}$ dans son intérieur.

Conséquences pour le choix du **critère de plasticité**, *i.e.* de toute fonction f définissant le domaine de plasticité selon

$$\mathbb{P} = \{ \underline{\sigma}, f(\underline{\sigma}) \leq 0 \} :$$

Forme générale du domaine initial de plasticité



Domaine initial de plasticité \mathbb{P} :

- ▶ \mathbb{P} est **convexe**,
- ▶ \mathbb{P} contient $\underline{0}$ dans son intérieur.

Conséquences pour le choix du **critère de plasticité**, *i.e.* de toute fonction f définissant le domaine de plasticité selon

$$\mathbb{P} = \{ \underline{\sigma}, f(\underline{\sigma}) \leq 0 \} :$$

f est choisie **convexe** et telle que $f(\underline{0}) < 0$.

$$f \text{ convexe} \iff f(t\underline{\sigma}^{(1)} + (1-t)\underline{\sigma}^{(2)}) \leq tf(\underline{\sigma}^{(1)}) + (1-t)f(\underline{\sigma}^{(2)}) \quad (0 \leq t \leq 1)$$

Plan

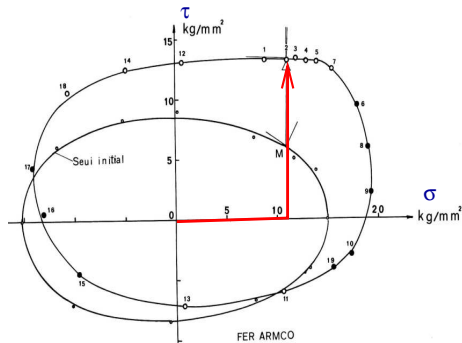
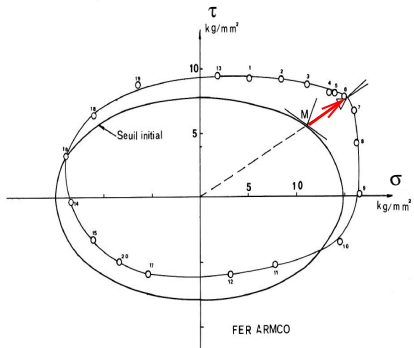
1. Rappel du cas uniaxial
2. Chargements multiaxiaux. Surface initiale de plasticité
- 3. Chargements multiaxiaux. Ecrouissage**
4. Déformation plastique.
5. Charge-décharge
6. Règle de normalité dans les matériaux écrouissables

Chargements multiaxiaux. Ecrouissage

La charge est poursuivie au delà de la surface **initiale** de plasticité.

Chargements multiaxiaux. Ecoulement

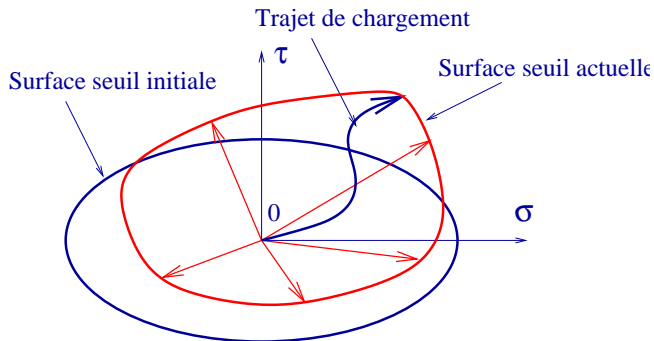
La charge est poursuivie au delà de la surface **initiale** de plasticité.



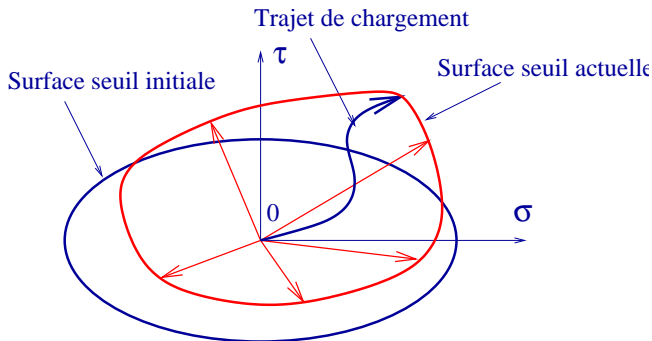
Chargement radial en traction-torsion

Traction puis torsion

Manifestations de l'écrouissage

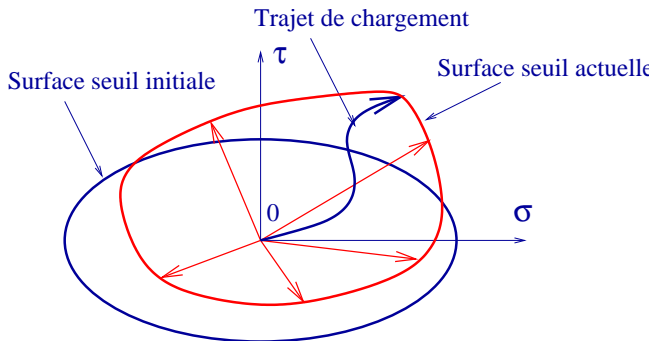


Manifestations de l'écrouissage



- (i) Modification de taille : écouissage **isotrope**.
- (ii) Translation du centre du domaine d'élasticité : écouissage **cinématique**
⇒ **effet Bauschinger** (limite d'élasticité en compression $<$ limite élasticité en traction après écouissage).
- (iii) Distorsion ou changement de forme de la surface seuil.

Manifestations de l'écrouissage



- (i) Modification de taille : écouvissage **isotrope**.
- (ii) Translation du centre du domaine d'élasticité : écouvissage **cinématique**
 ⇒ **effet Bauschinger** (limite d'élasticité en compression < limite élasticité en traction après écouvissage).
- (iii) Distorsion ou changement de forme de la surface seuil.

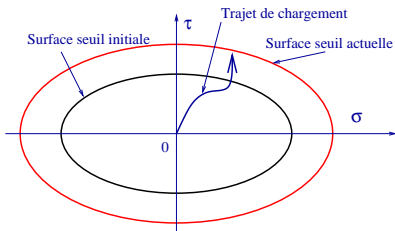
Dans ce cours : modèles de comportement incluant possibilités (i) ou (ii).

Modélisation de l'écrouissage

Domaine initial de plasticité : $f(\underline{\sigma}) = \mathcal{F}(\underline{\sigma}) - \sigma_0 \leq 0$.

Modélisation de l'écrouissage

Domaine initial de plasticité : $f(\underline{\underline{\sigma}}) = \mathcal{F}(\underline{\underline{\sigma}}) - \sigma_0 \leq 0$.



Ecrouissage isotrope :

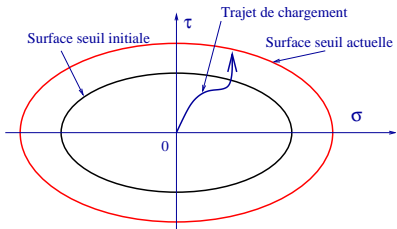
changement de taille de la surface seuil.

$$f(\underline{\underline{\sigma}}, R) = \mathcal{F}(\underline{\underline{\sigma}}) - R \leq 0.$$

R paramètre scalaire mesurant la taille du domaine.

Modélisation de l'écrouissage

Domaine initial de plasticité : $f(\underline{\sigma}) = \mathcal{F}(\underline{\sigma}) - \sigma_0 \leq 0$.

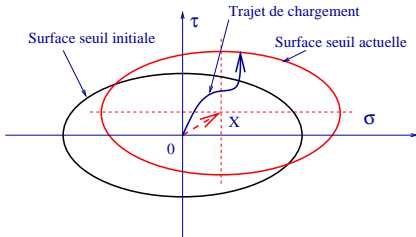


Écoulement isotrope :

changement de taille de la surface seuil.

$$f(\underline{\sigma}, R) = \mathcal{F}(\underline{\sigma}) - R \leq 0.$$

R paramètre scalaire mesurant la taille du domaine.



Écoulement cinématique :

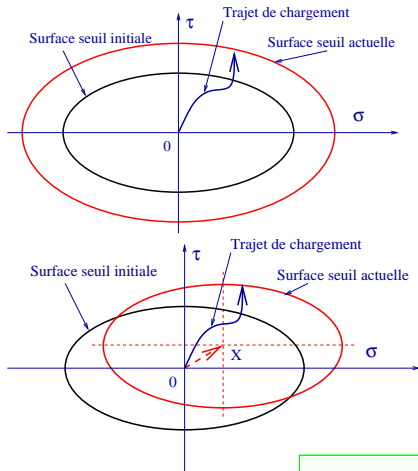
Changement de centre de la surface seuil

$$f(\underline{\sigma} - \underline{X}) \leq 0.$$

\underline{X} : contrainte interne, centre du domaine.

Modélisation de l'écrouissage

Domaine initial de plasticité : $f(\underline{\sigma}) = \mathcal{F}(\underline{\sigma}) - \sigma_0 \leq 0$.



Écoulement isotrope :

changement de taille de la surface seuil.

$$f(\underline{\sigma}, R) = \mathcal{F}(\underline{\sigma}) - R \leq 0.$$

R paramètre scalaire mesurant la taille du domaine.

Écoulement cinématique :

Changement de centre de la surface seuil

$$f(\underline{\sigma} - \underline{X}) \leq 0.$$

\underline{X} : contrainte interne, centre du domaine.

Cas général :

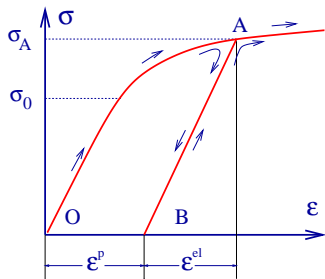
$$f(\underline{\sigma}, \underline{X}, R) = \mathcal{F}(\underline{\sigma} - \underline{X}) - R \leq 0.$$

R et \underline{X} évoluent avec la déformation plastique.

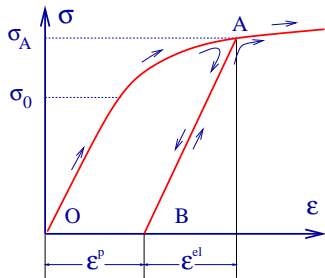
Plan

1. Rappel du cas uniaxial
2. Chargements multiaxiaux. Surface initiale de plasticité
3. Chargements multiaxiaux. Ecrouissage
- 4. Déformation plastique.**
5. Charge-décharge
6. Règle de normalité dans les matériaux écrouissables

Déformation plastique : rappel du cas uniaxial



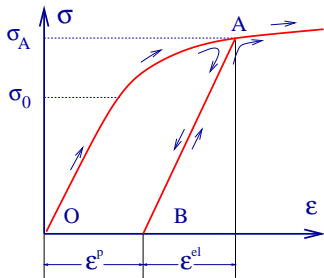
Déformation plastique : rappel du cas uniaxial



Evolution de la déformation plastique

- **Décomposition de la déformation** ϵ en partie élastique ϵ^{el} (récupérable par décharge) et partie plastique ϵ^P (déformation permanente après décharge) : $\epsilon = \epsilon^{el} + \epsilon^P$.

Déformation plastique : rappel du cas uniaxial



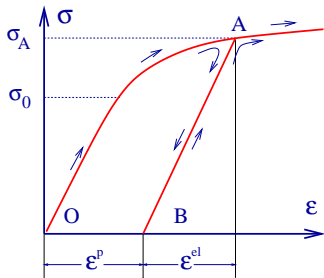
Evolution de la déformation plastique

- **Décomposition de la déformation** ϵ en partie élastique ϵ^{el} (récupérable par décharge) et partie plastique ϵ^P (déformation permanente après décharge) : $\epsilon = \epsilon^{el} + \epsilon^P$.
- Décharge $A \rightarrow B \simeq$ parallèle au trajet élastique :

$$\epsilon^{el} = \sigma/E,$$

$\epsilon^P?$ Comportement élasto-plastique.

Déformation plastique : rappel du cas uniaxial



Evolution de la déformation plastique

- **Décomposition de la déformation** ϵ en partie élastique ϵ^{el} (récupérable par décharge) et partie plastique ϵ^P (déformation permanente après décharge) : $\epsilon = \epsilon^{el} + \epsilon^P$.
- Décharge $A \rightarrow B \simeq$ parallèle au trajet élastique :

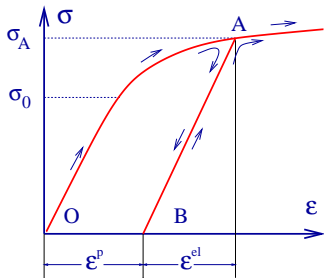
$$\epsilon^{el} = \sigma/E,$$

$\epsilon^P?$ Comportement élasto-plastique.

ϵ^P identique le long de AB

\Rightarrow impossible de déterminer ϵ^P . On peut déterminer le signe de $\dot{\epsilon}^P$:

Déformation plastique : rappel du cas uniaxial



Evolution de la déformation plastique

- **Décomposition de la déformation** ϵ en partie élastique ϵ^{el} (récupérable par décharge) et partie plastique ϵ^P (déformation permanente après décharge) : $\epsilon = \epsilon^{el} + \epsilon^P$.
- Décharge $A \rightarrow B \simeq$ parallèle au trajet élastique :

$$\epsilon^{el} = \sigma/E,$$

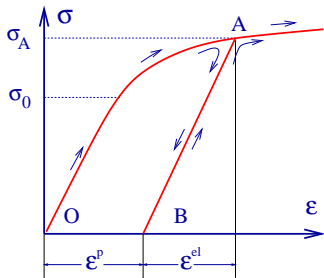
$\epsilon^P?$ Comportement élasto-plastique.

ϵ^P identique le long de AB

\Rightarrow impossible de déterminer ϵ^P . On peut déterminer le signe de $\dot{\epsilon}^P$:

sur AB : si $\sigma < \sigma_A$, $d\epsilon^P = 0$;

Déformation plastique : rappel du cas uniaxial



Evolution de la déformation plastique

- **Décomposition de la déformation** ϵ en partie élastique ϵ^{el} (récupérable par décharge) et partie plastique ϵ^P (déformation permanente après décharge) : $\epsilon = \epsilon^{el} + \epsilon^P$.
- Décharge $A \rightarrow B \simeq$ parallèle au trajet élastique :

$$\epsilon^{el} = \sigma/E,$$

$\epsilon^P?$ Comportement élasto-plastique.

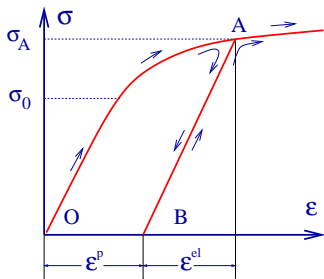
ϵ^P identique le long de AB

\Rightarrow impossible de déterminer ϵ^P . On peut déterminer le signe de $\dot{\epsilon}^P$:

sur AB : si $\sigma < \sigma_A$, $d\epsilon^P = 0$;

en A : si $\sigma = \sigma_A$, $d\sigma \leq 0$, $d\epsilon^P = 0$, $d\epsilon = d\epsilon^{el}$;

Déformation plastique : rappel du cas uniaxial



Evolution de la déformation plastique

- ▶ **Décomposition de la déformation** ϵ en partie élastique ϵ^{el} (récupérable par décharge) et partie plastique ϵ^P (déformation permanente après décharge) : $\epsilon = \epsilon^{el} + \epsilon^P$.
- ▶ Décharge $A \rightarrow B \simeq$ parallèle au trajet élastique :

$$\epsilon^{el} = \sigma/E,$$

ϵ^P ? Comportement élasto-plastique.

ϵ^P identique le long de AB

\Rightarrow impossible de déterminer ϵ^P . On peut déterminer le signe de $\dot{\epsilon}^P$:

sur AB : si $\sigma < \sigma_A$, $d\epsilon^P = 0$;

en A : si $\sigma = \sigma_A$, $d\sigma \leq 0$, $d\epsilon^P = 0$, $d\epsilon = d\epsilon^{el}$;

en A : si $\sigma = \sigma_A$, $d\sigma \geq 0 \Rightarrow d\epsilon = d\epsilon^{el} + d\epsilon^P$, $d\epsilon^{el} = d\sigma/E$, $d\epsilon^P \geq 0$.

Chargements multiaxiaux

Décomposition de la déformation totale :

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \underline{\underline{\varepsilon}}^{\text{el}} + \underline{\underline{\varepsilon}}^{\text{P}}, \quad \underline{\underline{\varepsilon}}^{\text{el}} = \underline{\underline{\mathbf{S}}} : \underline{\underline{\sigma}},$$

$$\underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}^{\text{P}}?$$

Chargements multiaxiaux

Décomposition de la déformation totale :

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \underline{\underline{\varepsilon}}^{\text{el}} + \underline{\underline{\varepsilon}}^{\text{P}}, \quad \underline{\underline{\varepsilon}}^{\text{el}} = \underline{\underline{\mathbf{S}}} : \underline{\underline{\sigma}},$$

$$\underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}^{\text{P}}?$$

Aspects expérimentaux :



- ▶ Mesure de $\sigma_{zz} = \sigma, \sigma_{\theta z} = \tau$
- ▶ Mesure de $d\varepsilon_{zz}, d\varepsilon_{\theta z}$ (jauges)

$$\Rightarrow d\varepsilon_{zz}^{\text{P}}, d\varepsilon_{\theta z}^{\text{P}}$$

Chargements multiaxiaux

Décomposition de la déformation totale :

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \underline{\underline{\varepsilon}}^{\text{el}} + \underline{\underline{\varepsilon}}^{\text{P}}, \quad \underline{\underline{\varepsilon}}^{\text{el}} = \underline{\underline{S}} : \underline{\underline{\sigma}}, \quad \underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}^{\text{P}}?$$

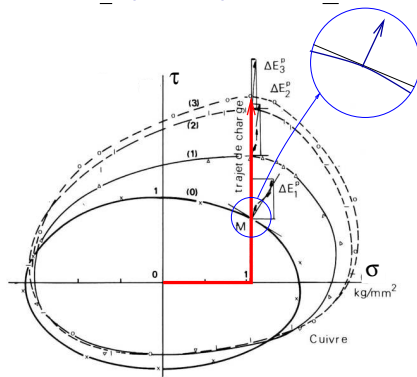
Aspects expérimentaux :



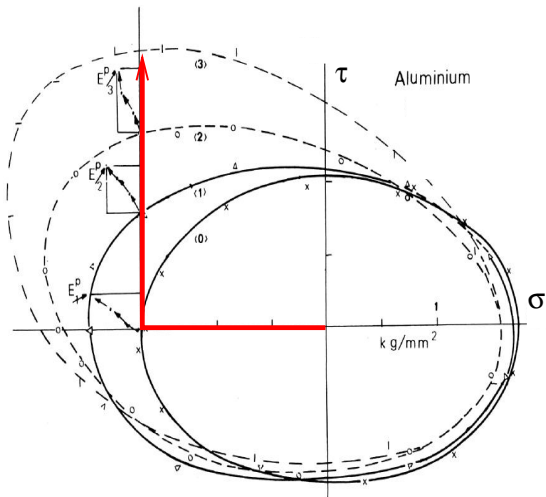
- ▶ Mesure de $\sigma_{zz} = \sigma, \sigma_{\theta z} = \tau$
- ▶ Mesure de $d\varepsilon_{zz}, d\varepsilon_{\theta z}$ (jauges)

$$\Rightarrow d\varepsilon_{zz}^{\text{P}}, d\varepsilon_{\theta z}^{\text{P}}$$

Vecteur $d\underline{\underline{\varepsilon}}^{\text{P}}$ porté à partir de $\underline{\underline{\sigma}}$.



Autre matériau, autre trajet de chargement



Modélisation : règle de normalité en plasticité parfaite

Etat de contrainte sur le seuil. **Comment évolue la déformation plastique ?**

Modélisation : règle de normalité en plasticité parfaite

Etat de contrainte sur le seuil. **Comment évolue la déformation plastique ?**

- ▶ Si $\underline{\underline{\sigma}}$ est à l'intérieur du domaine d'élasticité les déformations plastiques n'évoluent pas.

Modélisation : règle de normalité en plasticité parfaite

Etat de contrainte sur le seuil. **Comment évolue la déformation plastique ?**

- ▶ Si $\underline{\underline{\sigma}}$ est à l'intérieur du domaine d'élasticité les déformations plastiques n'évoluent pas.
- ▶ Si $\underline{\underline{\sigma}}$ est sur la surface seuil de plasticité, la vitesse de déformation plastique est, dans les métaux, donnée par la **règle de normalité** : $\underline{\underline{\dot{\epsilon}}}^P$ est normale extérieure à la surface seuil de plasticité au point représentatif de l'état de contrainte :

Modélisation : règle de normalité en plasticité parfaite

Etat de contrainte sur le seuil. **Comment évolue la déformation plastique ?**

- ▶ Si $\underline{\underline{\sigma}}$ est à l'intérieur du domaine d'élasticité les déformations plastiques n'évoluent pas.
- ▶ Si $\underline{\underline{\sigma}}$ est sur la surface seuil de plasticité, la vitesse de déformation plastique est, dans les métaux, donnée par la **règle de normalité** : $\underline{\underline{\dot{\epsilon}}}^P$ est normale extérieure à la surface seuil de plasticité au point représentatif de l'état de contrainte :

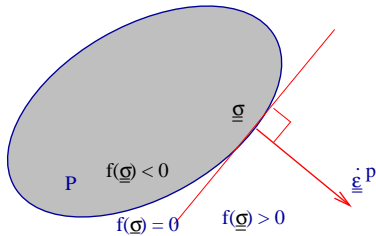
Sur la surface seuil :

$$f(\underline{\underline{\sigma}}) = 0,$$

et, si f est dérivable :

$$\underline{\underline{\dot{\epsilon}}}^P = \dot{\lambda} \frac{\partial f}{\partial \underline{\underline{\sigma}}}(\underline{\underline{\sigma}}), \quad \dot{\lambda} \geq 0.$$

$\dot{\lambda}$: **multiplicateur plastique**, non spécifié par la loi de comportement.



Modélisation : règle de normalité en plasticité parfaite

Etat de contrainte sur le seuil. **Comment évolue la déformation plastique ?**

- ▶ Si $\underline{\underline{\sigma}}$ est à l'intérieur du domaine d'élasticité les déformations plastiques n'évoluent pas.
- ▶ Si $\underline{\underline{\sigma}}$ est sur la surface seuil de plasticité, la vitesse de déformation plastique est, dans les métaux, donnée par la **règle de normalité** : $\underline{\underline{\dot{\epsilon}}}^P$ est normale extérieure à la surface seuil de plasticité au point représentatif de l'état de contrainte :

Sur la surface seuil :

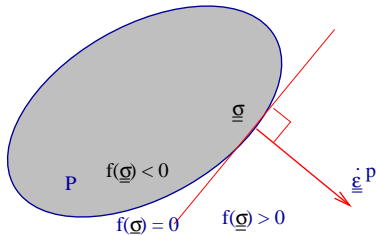
$$f(\underline{\underline{\sigma}}) = 0,$$

et, si f est dérivable :

$$\underline{\underline{\dot{\epsilon}}}^P = \dot{\lambda} \frac{\partial f}{\partial \underline{\underline{\sigma}}}(\underline{\underline{\sigma}}), \quad \dot{\lambda} \geq 0.$$

$\dot{\lambda}$: **multiplicateur plastique**, non spécifié par la loi de comportement.

- ▶ Les états de contraintes hors du domaine de plasticité **sont considérés comme non physiquement admissibles.**



Equations de comportement pour un solide élastique parfaitement plastique (et critère f dérivable)

$$\begin{aligned}\underline{\underline{\varepsilon}} &= \underline{\underline{\varepsilon}}^{\text{el}} + \underline{\underline{\varepsilon}}^{\text{P}}, & \underline{\underline{\varepsilon}}^{\text{el}} &= \underline{\underline{S}} : \underline{\underline{\sigma}}, \\ f(\underline{\underline{\sigma}}) &\leq 0, & \underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}^{\text{P}} &= \dot{\lambda} \frac{\partial f}{\partial \underline{\underline{\sigma}}}(\underline{\underline{\sigma}}), & \dot{\lambda} &\text{ inconnu} \\ \dot{\lambda} &= 0 \text{ si } f(\underline{\underline{\sigma}}) < 0, & \dot{\lambda} &\geq 0 \text{ si } f(\underline{\underline{\sigma}}) = 0.\end{aligned}$$

Equations de comportement pour un solide élastique parfaitement plastique (et critère f dérivable)

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \underline{\underline{\varepsilon}}^{\text{el}} + \underline{\underline{\varepsilon}}^{\text{P}}, \quad \underline{\underline{\varepsilon}}^{\text{el}} = \underline{\underline{S}} : \underline{\underline{\sigma}},$$

$$f(\underline{\underline{\sigma}}) \leq 0, \quad \underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}^{\text{P}} = \dot{\lambda} \frac{\partial f}{\partial \underline{\underline{\sigma}}}(\underline{\underline{\sigma}}), \quad \dot{\lambda} \text{ inconnu}$$

$$\dot{\lambda} = 0 \text{ si } f(\underline{\underline{\sigma}}) < 0, \quad \dot{\lambda} \geq 0 \text{ si } f(\underline{\underline{\sigma}}) = 0.$$

Décompte équations-inconnues. Connaissant l'incrément de déformation $\underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}$, peut-on déterminer l'incrément de contrainte $\underline{\underline{\dot{\sigma}}}$?

Equations de comportement pour un solide élastique parfaitement plastique (et critère f dérivable)

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \underline{\underline{\varepsilon}}^{\text{el}} + \underline{\underline{\varepsilon}}^{\text{P}}, \quad \underline{\underline{\varepsilon}}^{\text{el}} = \underline{\underline{\mathbf{S}}} : \underline{\underline{\sigma}},$$

$$f(\underline{\underline{\sigma}}) \leq 0, \quad \underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}^{\text{P}} = \dot{\lambda} \frac{\partial f}{\partial \underline{\underline{\sigma}}}(\underline{\underline{\sigma}}), \quad \dot{\lambda} \text{ inconnu}$$

$$\dot{\lambda} = 0 \text{ si } f(\underline{\underline{\sigma}}) < 0, \quad \dot{\lambda} \geq 0 \text{ si } f(\underline{\underline{\sigma}}) = 0.$$

Décompte équations-inconnues. Connaissant l'incrément de déformation $\underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}$, peut-on déterminer l'incrément de contrainte $\underline{\underline{\dot{\sigma}}}$?

- ▶ En élasticité (ou en régime élastique) :

$$\underline{\underline{\dot{\varepsilon}}} = \underline{\underline{\mathbf{S}}} : \underline{\underline{\dot{\sigma}}},$$

6 équations pour 6 inconnues .

Equations de comportement pour un solide élastique parfaitement plastique (et critère f dérivable)

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \underline{\underline{\varepsilon}}^{\text{el}} + \underline{\underline{\varepsilon}}^{\text{P}}, \quad \underline{\underline{\varepsilon}}^{\text{el}} = \underline{\underline{\mathbf{S}}} : \underline{\underline{\sigma}},$$

$$f(\underline{\underline{\sigma}}) \leq 0, \quad \underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}^{\text{P}} = \dot{\lambda} \frac{\partial f}{\partial \underline{\underline{\sigma}}}(\underline{\underline{\sigma}}), \quad \dot{\lambda} \text{ inconnu}$$

$$\dot{\lambda} = 0 \text{ si } f(\underline{\underline{\sigma}}) < 0, \quad \dot{\lambda} \geq 0 \text{ si } f(\underline{\underline{\sigma}}) = 0.$$

Décompte équations-inconnues. Connaissant l'incrément de déformation $\underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}$, peut-on déterminer l'incrément de contrainte $\underline{\underline{\dot{\sigma}}}$?

- ▶ En élasticité (ou en régime élastique) :

$$\underline{\underline{\dot{\varepsilon}}} = \underline{\underline{\mathbf{S}}} : \underline{\underline{\dot{\sigma}}}, \quad 6 \text{ équations pour } 6 \text{ inconnues} \quad .$$

- ▶ En élasto-plasticité :

$$\underline{\underline{\dot{\varepsilon}}} = \underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}^{\text{P}} + \underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}^{\text{el}} = \underline{\underline{\mathbf{S}}} : \underline{\underline{\dot{\sigma}}} + \dot{\lambda} \frac{\partial f}{\partial \underline{\underline{\sigma}}}(\underline{\underline{\sigma}}), \quad 6 \text{ équations pour } 6 + 1 \text{ inconnues.}$$

Equations de comportement pour un solide élastique parfaitement plastique (et critère f dérivable)

$$\begin{aligned} \underline{\underline{\varepsilon}} &= \underline{\underline{\varepsilon}}^{\text{el}} + \underline{\underline{\varepsilon}}^{\text{P}}, & \underline{\underline{\varepsilon}}^{\text{el}} &= \underline{\underline{\mathbf{S}}} : \underline{\underline{\sigma}}, \\ f(\underline{\underline{\sigma}}) &\leq 0, & \underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}^{\text{P}} &= \dot{\lambda} \frac{\partial f}{\partial \underline{\underline{\sigma}}}(\underline{\underline{\sigma}}), & \dot{\lambda} &\text{ inconnu} \\ \dot{\lambda} &= 0 \text{ si } f(\underline{\underline{\sigma}}) < 0, & \dot{\lambda} &\geq 0 \text{ si } f(\underline{\underline{\sigma}}) = 0. \end{aligned}$$

Décompte équations-inconnues. Connaissant l'incrément de déformation $\underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}$, peut-on déterminer l'incrément de contrainte $\underline{\underline{\dot{\sigma}}}$?

- ▶ En élasticité (ou en régime élastique) :

$$\underline{\underline{\dot{\varepsilon}}} = \underline{\underline{\mathbf{S}}} : \underline{\underline{\dot{\sigma}}}, \quad 6 \text{ équations pour } 6 \text{ inconnues} .$$

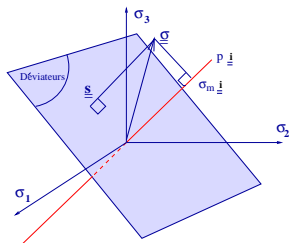
- ▶ En élasto-plasticité :

$$\underline{\underline{\dot{\varepsilon}}} = \underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}^{\text{P}} + \underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}^{\text{el}} = \underline{\underline{\mathbf{S}}} : \underline{\underline{\dot{\sigma}}} + \dot{\lambda} \frac{\partial f}{\partial \underline{\underline{\sigma}}}(\underline{\underline{\sigma}}), \quad 6 \text{ équations pour } 6 + 1 \text{ inconnues.}$$

Equation supplémentaire :

$$\dot{\lambda} = 0 \text{ si } f(\underline{\underline{\sigma}}) < 0, \quad \dot{\lambda} \geq 0 \text{ si } f(\underline{\underline{\sigma}}) = 0. \quad \text{Bilan OK!}$$

Critère de von Mises : formulation de la règle de normalité

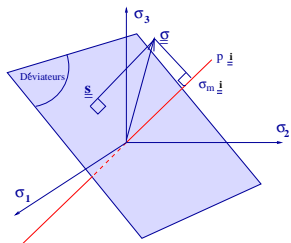


Contrainte équivalente mesurant l'intensité du cisaillement :

$$f(\underline{\underline{\sigma}}) = \sigma_{\text{eq}} = \left(\frac{3}{2} \underline{\underline{s}} : \underline{\underline{s}} \right)^{1/2}, \quad \text{où } \underline{\underline{\sigma}} = \sigma_m \underline{\underline{i}} + \underline{\underline{s}},$$

$\underline{\underline{s}} = \underline{\underline{K}} : \underline{\underline{\sigma}}$ déviateur de $\underline{\underline{\sigma}}$, $\underline{\underline{K}}$ projecteur sur les déviateurs.

Critère de von Mises : formulation de la règle de normalité



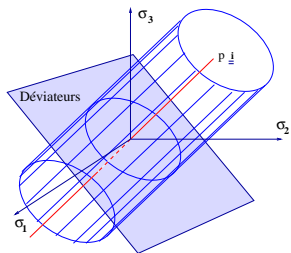
Contrainte équivalente mesurant l'intensité du cisaillement :

$$f(\underline{\underline{\sigma}}) = \sigma_{\text{eq}} = \left(\frac{3}{2} \underline{\underline{s}} : \underline{\underline{s}} \right)^{1/2}, \quad \text{où } \underline{\underline{\sigma}} = \sigma_m \underline{\underline{i}} + \underline{\underline{s}},$$

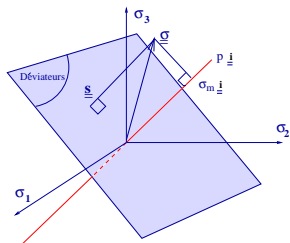
$\underline{\underline{s}} = \underline{\underline{K}} : \underline{\underline{\sigma}}$ déviateur de $\underline{\underline{\sigma}}$, $\underline{\underline{K}}$ projecteur sur les déviateurs.

$$f(\underline{\underline{\sigma}} + p\underline{\underline{i}}) = f(\underline{\underline{\sigma}}).$$

Le domaine de plasticité de von Mises est un cylindre de génératrices parallèles à l'axe des pressions.



Critère de von Mises : formulation de la règle de normalité



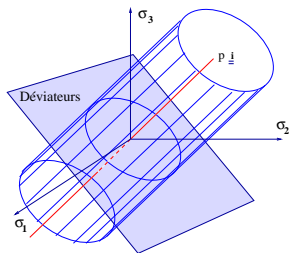
Contrainte équivalente mesurant l'intensité du cisaillement :

$$f(\underline{\underline{\sigma}}) = \sigma_{\text{eq}} = \left(\frac{3}{2} \underline{\underline{s}} : \underline{\underline{s}} \right)^{1/2}, \quad \text{où } \underline{\underline{\sigma}} = \sigma_m \underline{\underline{i}} + \underline{\underline{s}},$$

$\underline{\underline{s}} = \underline{\underline{K}} : \underline{\underline{\sigma}}$ déviateur de $\underline{\underline{\sigma}}$, $\underline{\underline{K}}$ projecteur sur les déviateurs.

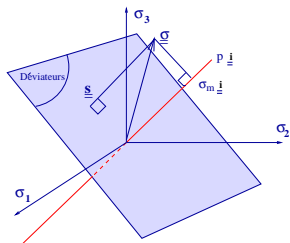
$$f(\underline{\underline{\sigma}} + p \underline{\underline{i}}) = f(\underline{\underline{\sigma}}).$$

Le domaine de plasticité de von Mises est un cylindre de génératrices parallèles à l'axe des pressions.



$$\frac{\partial f}{\partial \underline{\underline{\sigma}}}(\underline{\underline{\sigma}}) = \frac{\partial f}{\partial \underline{\underline{s}}}(\underline{\underline{\sigma}}) : \frac{\partial \underline{\underline{s}}}{\partial \underline{\underline{\sigma}}} = \frac{3}{2} \frac{\underline{\underline{s}}}{\sigma_{\text{eq}}} : \frac{\partial \underline{\underline{s}}}{\partial \underline{\underline{\sigma}}}.$$

Critère de von Mises : formulation de la règle de normalité



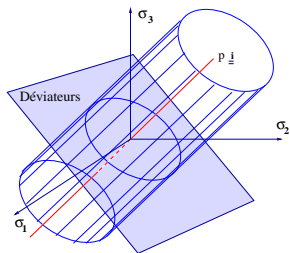
Contrainte équivalente mesurant l'intensité du cisaillement :

$$f(\underline{\underline{\sigma}}) = \sigma_{\text{eq}} = \left(\frac{3}{2} \underline{\underline{s}} : \underline{\underline{s}} \right)^{1/2}, \quad \text{où } \underline{\underline{\sigma}} = \sigma_m \underline{\underline{i}} + \underline{\underline{s}},$$

$\underline{\underline{s}} = \underline{\underline{K}} : \underline{\underline{\sigma}}$ déviateur de $\underline{\underline{\sigma}}$, $\underline{\underline{K}}$ projecteur sur les déviateurs.

$$f(\underline{\underline{\sigma}} + p \underline{\underline{i}}) = f(\underline{\underline{\sigma}}).$$

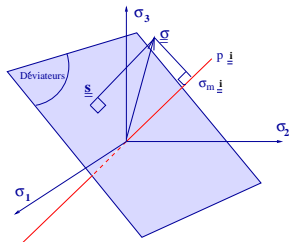
Le domaine de plasticité de von Mises est un cylindre de génératrices parallèles à l'axe des pressions.



$$\frac{\partial f}{\partial \underline{\underline{\sigma}}}(\underline{\underline{\sigma}}) = \frac{\partial f}{\partial \underline{\underline{s}}}(\underline{\underline{\sigma}}) : \frac{\partial \underline{\underline{s}}}{\partial \underline{\underline{\sigma}}} = \frac{3}{2} \frac{\underline{\underline{s}}}{\sigma_{\text{eq}}} : \frac{\partial \underline{\underline{s}}}{\partial \underline{\underline{\sigma}}}.$$

$$\frac{\partial \underline{\underline{s}}}{\partial \underline{\underline{\sigma}}} = \underline{\underline{K}},$$

Critère de von Mises : formulation de la règle de normalité



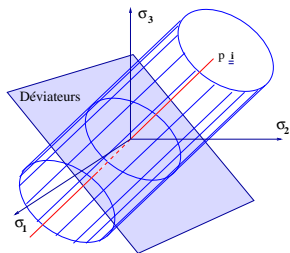
Contrainte équivalente mesurant l'intensité du cisaillement :

$$f(\underline{\underline{\sigma}}) = \sigma_{\text{eq}} = \left(\frac{3}{2} \underline{\underline{s}} : \underline{\underline{s}} \right)^{1/2}, \quad \text{où } \underline{\underline{\sigma}} = \sigma_m \underline{\underline{i}} + \underline{\underline{s}},$$

$\underline{\underline{s}} = \underline{\underline{K}} : \underline{\underline{\sigma}}$ déviateur de $\underline{\underline{\sigma}}$, $\underline{\underline{K}}$ projecteur sur les déviateurs.

$$f(\underline{\underline{\sigma}} + p \underline{\underline{i}}) = f(\underline{\underline{\sigma}}).$$

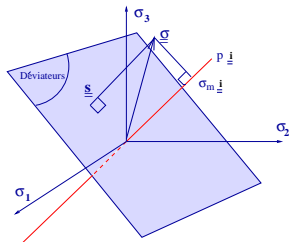
Le domaine de plasticité de von Mises est un cylindre de génératrices parallèles à l'axe des pressions.



$$\frac{\partial f}{\partial \underline{\underline{\sigma}}}(\underline{\underline{\sigma}}) = \frac{\partial f}{\partial \underline{\underline{s}}}(\underline{\underline{\sigma}}) : \frac{\partial \underline{\underline{s}}}{\partial \underline{\underline{\sigma}}} = \frac{3}{2} \frac{\underline{\underline{s}}}{\sigma^{\text{eq}}} : \frac{\partial \underline{\underline{s}}}{\partial \underline{\underline{\sigma}}}.$$

$$\frac{\partial \underline{\underline{s}}}{\partial \underline{\underline{\sigma}}} = \underline{\underline{K}}, \quad \text{et donc } \frac{\partial f}{\partial \underline{\underline{\sigma}}}(\underline{\underline{\sigma}}) = \frac{3}{2} \frac{\underline{\underline{s}}}{\sigma^{\text{eq}}} \quad \text{puisque } \underline{\underline{K}} : \underline{\underline{s}} = \underline{\underline{s}}.$$

Critère de von Mises : formulation de la règle de normalité



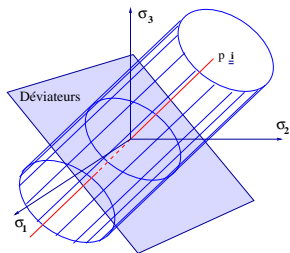
Contrainte équivalente mesurant l'intensité du cisaillement :

$$f(\underline{\underline{\sigma}}) = \sigma_{eq} = \left(\frac{3}{2} \underline{\underline{s}} : \underline{\underline{s}} \right)^{1/2}, \quad \text{où } \underline{\underline{\sigma}} = \sigma_m \underline{\underline{i}} + \underline{\underline{s}},$$

$\underline{\underline{s}} = \underline{\underline{K}} : \underline{\underline{\sigma}}$ déviateur de $\underline{\underline{\sigma}}$, $\underline{\underline{K}}$ projecteur sur les déviateurs.

$$f(\underline{\underline{\sigma}} + p \underline{\underline{i}}) = f(\underline{\underline{\sigma}}).$$

Le domaine de plasticité de von Mises est un cylindre de génératrices parallèles à l'axe des pressions.



$$\frac{\partial f}{\partial \underline{\underline{\sigma}}}(\underline{\underline{\sigma}}) = \frac{\partial f}{\partial \underline{\underline{s}}}(\underline{\underline{\sigma}}) : \frac{\partial \underline{\underline{s}}}{\partial \underline{\underline{\sigma}}} = \frac{3}{2} \frac{\underline{\underline{s}}}{\sigma_{eq}} : \frac{\partial \underline{\underline{s}}}{\partial \underline{\underline{\sigma}}}.$$

$$\frac{\partial \underline{\underline{s}}}{\partial \underline{\underline{\sigma}}} = \underline{\underline{K}}, \quad \text{et donc } \frac{\partial f}{\partial \underline{\underline{\sigma}}}(\underline{\underline{\sigma}}) = \frac{3}{2} \frac{\underline{\underline{s}}}{\sigma_{eq}} \quad \text{puisque } \underline{\underline{K}} : \underline{\underline{s}} = \underline{\underline{s}}.$$

$$\underline{\underline{\dot{\epsilon}}}^P = \frac{3}{2} \lambda \frac{\underline{\underline{s}}}{\sigma_{eq}}.$$

$\underline{\underline{\dot{\epsilon}}}^P$ parallèle à $\underline{\underline{s}}$.

Récapitulation (cas du critère de von Mises)

Récapitulation (cas du critère de von Mises)

Relations de comportement élasto-plastique (l'élasticité étant supposée **isotrope**) :

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \underline{\underline{\varepsilon}}^{\text{el}} + \underline{\underline{\varepsilon}}^{\text{P}},$$

Décomposition additive de la déformation

$$\underline{\underline{\varepsilon}}^{\text{el}} = \frac{1+\nu}{E} \underline{\underline{\sigma}} - \frac{\nu}{E} \text{Tr}(\underline{\underline{\sigma}}) \underline{\underline{i}},$$

Partie élastique (isotrope)

$$\sigma_{\text{eq}} \leq \sigma_0,$$

La contrainte appartient au domaine de plasticité

$$\underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}^{\text{P}} = \frac{3}{2} \dot{\lambda} \frac{\underline{\underline{\sigma}}}{\sigma_{\text{eq}}},$$

Règle de normalité

$$\dot{\lambda} = 0 \quad \text{si } \sigma_{\text{eq}} < \sigma_0,$$

$\underline{\underline{\sigma}}$ dans le domaine d'élasticité : pas d'évolution de $\underline{\underline{\varepsilon}}^{\text{P}}$

$$\dot{\lambda} \geq 0 \quad \text{si } \sigma_{\text{eq}} = \sigma_0.$$

$\underline{\underline{\sigma}}$ sur la surface de plasticité : évolution de $\underline{\underline{\varepsilon}}^{\text{P}}$ possible

Commentaires

1 Les déformations plastiques sont **incompressibles** :

$$\text{Tr}(\underline{\dot{\underline{\epsilon}}}^P) = \frac{3}{2} \frac{\dot{\lambda}}{\sigma_{eq}} \text{Tr}(\underline{\underline{s}}) = 0.$$

Pas de variation de volume (à l'échelle micro, glissement cristallin, cf. amphi 1).

Commentaires

1 Les déformations plastiques sont **incompressibles** :

$$\text{Tr}(\underline{\dot{\underline{\varepsilon}}^P}) = \frac{3}{2} \frac{\dot{\lambda}}{\sigma_{eq}} \text{Tr}(\underline{\underline{s}}) = 0.$$

Pas de variation de volume (à l'échelle micro, glissement cristallin, cf. amphi 1).

2 Définitions :

$$\dot{p}(t) \stackrel{\text{def}}{=} \left(\frac{2}{3} \dot{\underline{\underline{\varepsilon}}^P_{ij} \dot{\underline{\underline{\varepsilon}}^P_{ij}} \right)^{1/2} (t) \quad (\text{vitesse de déformation plastique équivalente})$$

$$p(t) \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^t \dot{p}(s) ds, \quad (\text{déformation plastique cumulée})$$

Commentaires

- 1 Les déformations plastiques sont **incompressibles** :

$$\text{Tr}(\underline{\dot{\underline{\varepsilon}}^P}) = \frac{3}{2} \frac{\dot{\lambda}}{\sigma_{eq}} \text{Tr}(\underline{\underline{s}}) = 0.$$

Pas de variation de volume (à l'échelle micro, glissement cristallin, cf. amphi 1).

- 2 Définitions :

$$\dot{p}(t) \stackrel{\text{def}}{=} \left(\frac{2}{3} \dot{\underline{\underline{\varepsilon}}^P \dot{\underline{\underline{\varepsilon}}^P} \right)^{1/2} (t) \quad (\text{vitesse de déformation plastique équivalente})$$

$$p(t) \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^t \dot{p}(s) ds, \quad (\text{déformation plastique cumulée})$$

- 3 Pour le critère de von Mises : $\dot{p} = \dot{\lambda}$

Commentaires

- 1 Les déformations plastiques sont **incompressibles** :

$$\text{Tr}(\underline{\underline{\dot{\epsilon}}}^P) = \frac{3}{2} \frac{\dot{\lambda}}{\sigma_{eq}} \text{Tr}(\underline{\underline{s}}) = 0.$$

Pas de variation de volume (à l'échelle micro, glissement cristallin, cf. amphi 1).

- 2 Définitions :

$$\dot{p}(t) \stackrel{\text{def}}{=} \left(\frac{2}{3} \dot{\epsilon}_{ij}^P \dot{\epsilon}_{ij}^P \right)^{1/2} (t) \quad (\text{vitesse de déformation plastique équivalente})$$

$$p(t) \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^t \dot{p}(s) ds, \quad (\text{déformation plastique cumulée})$$

- 3 Pour le critère de von Mises : $\dot{p} = \dot{\lambda}$

- 4 Justification du facteur 2/3 (analogue du 3/2 pour σ^{eq}) : $\underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\dot{\epsilon}}}^P = \sigma^{eq} \dot{p}$

Commentaires

1 Les déformations plastiques sont **incompressibles** :

$$\text{Tr}(\underline{\dot{\underline{\epsilon}}^P}) = \frac{3}{2} \frac{\dot{\lambda}}{\sigma_{eq}} \text{Tr}(\underline{\underline{s}}) = 0.$$

Pas de variation de volume (à l'échelle micro, glissement cristallin, cf. amphi 1).

2 Définitions :

$$\dot{p}(t) \stackrel{\text{def}}{=} \left(\frac{2}{3} \dot{\underline{\underline{\epsilon}}^P_{ij} \dot{\underline{\underline{\epsilon}}^P_{ij}} \right)^{1/2} (t) \quad (\text{vitesse de déformation plastique équivalente})$$

$$p(t) \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^t \dot{p}(s) ds, \quad (\text{déformation plastique cumulée})$$

3 Pour le critère de von Mises : $\dot{p} = \dot{\lambda}$

4 Justification du facteur 2/3 (analogue du 3/2 pour σ^{eq}) : $\underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\dot{\underline{\epsilon}}}}^P = \sigma^{eq} \dot{p}$

De plus en traction simple :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma \end{pmatrix}, \quad \underline{\underline{s}} = \begin{pmatrix} -\sigma/3 & 0 & 0 \\ 0 & -\sigma/3 & 0 \\ 0 & 0 & 2\sigma/3 \end{pmatrix}, \quad \underline{\underline{\dot{\underline{\epsilon}}}}^P = \begin{pmatrix} -\dot{p}/2 & 0 & 0 \\ 0 & -\dot{p}/2 & 0 \\ 0 & 0 & \dot{p} \end{pmatrix}$$

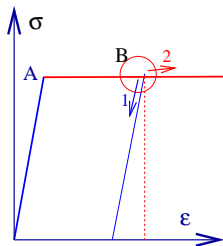
\dot{p} vitesse de déformation plastique axiale.



Plan

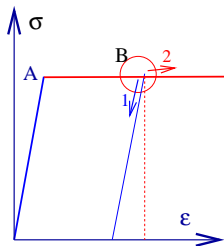
1. Rappel du cas uniaxial
2. Chargements multiaxiaux. Surface initiale de plasticité
3. Chargements multiaxiaux. Ecrouissage
4. Déformation plastique.
- 5. Charge-décharge**
6. Règle de normalité dans les matériaux écrouissables

Charge-décharge



Retour sur le cas uniaxial : même si le seuil de plasticité est atteint, les déformations plastiques n'évoluent **qu'en charge** (trajet 2).

Charge-décharge



Retour sur le cas uniaxial : même si le seuil de plasticité est atteint, les déformations plastiques n'évoluent **qu'en charge** (trajet 2).

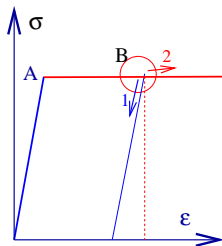
Etat multiaxial : il y a **charge** si

$$f(\underline{\underline{\sigma}}(t)) = 0 \text{ et } f(\underline{\underline{\sigma}}(t + dt)) = 0 \quad \forall dt > 0, dt \ll 1$$

soit

$$\text{charge} \iff f(\underline{\underline{\sigma}}(t)) = 0 \text{ et } \dot{f}(\underline{\underline{\sigma}})(t) = 0$$

Charge-décharge



Retour sur le cas uniaxial : même si le seuil de plasticité est atteint, les déformations plastiques n'évoluent **qu'en charge** (trajet 2).

Etat multiaxial : il y a **charge** si

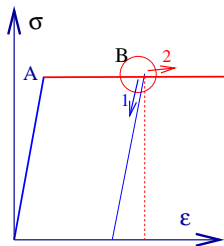
$$f(\underline{\underline{\sigma}}(t)) = 0 \text{ et } f(\underline{\underline{\sigma}}(t + dt)) = 0 \quad \forall dt > 0, dt \ll 1$$

soit

$$\text{charge} \iff f(\underline{\underline{\sigma}}(t)) = 0 \text{ et } \dot{f}(\underline{\underline{\sigma}})(t) = 0$$

$$\dot{f}(\underline{\underline{\sigma}})(t) = 0 \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial \underline{\underline{\sigma}}}(\underline{\underline{\sigma}}) : \dot{\underline{\underline{\sigma}}} = 0 \Rightarrow \dot{\underline{\underline{\epsilon}}}^P(t) : \dot{\underline{\underline{\sigma}}}(t) = 0.$$

Charge-décharge



Retour sur le cas uniaxial : même si le seuil de plasticité est atteint, les déformations plastiques n'évoluent **qu'en charge** (trajet 2).

Etat multiaxial : il y a **charge** si

$$f(\underline{\underline{\sigma}}(t)) = 0 \text{ et } f(\underline{\underline{\sigma}}(t + dt)) = 0 \quad \forall dt > 0, dt \ll 1$$

soit

$$\text{charge} \iff f(\underline{\underline{\sigma}}(t)) = 0 \text{ et } \dot{f}(\underline{\underline{\sigma}})(t) = 0$$

$$\dot{f}(\underline{\underline{\sigma}})(t) = 0 \implies \frac{\partial f}{\partial \underline{\underline{\sigma}}}(\underline{\underline{\sigma}}) : \dot{\underline{\underline{\sigma}}} = 0 \implies \dot{\underline{\underline{\epsilon}}}^P(t) : \dot{\underline{\underline{\sigma}}}(t) = 0.$$

En plasticité parfaite, incrément de contrainte et incrément de déformation plastique sont orthogonaux.

Quelques points de rigueur mathématique (problème non linéaire !)

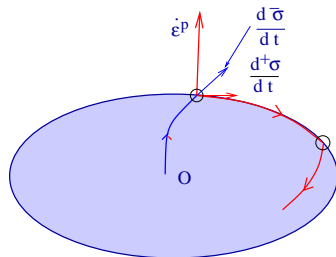
Quelques points de rigueur mathématique (problème non linéaire !)

1. $\dot{\sigma}$ n'existe pas toujours.

$$\frac{d^+}{dt} \underline{\underline{\sigma}}(t) = \lim_{dt \searrow 0} \frac{\underline{\underline{\sigma}}(t + dt) - \underline{\underline{\sigma}}(t)}{dt};$$

$$\frac{d^-}{dt} \underline{\underline{\sigma}}(t) = \lim_{dt \nearrow 0} \frac{\underline{\underline{\sigma}}(t + dt) - \underline{\underline{\sigma}}(t)}{dt}.$$

La relation d'orthogonalité s'applique à $\frac{d^+}{dt} \underline{\underline{\sigma}}(t)$.

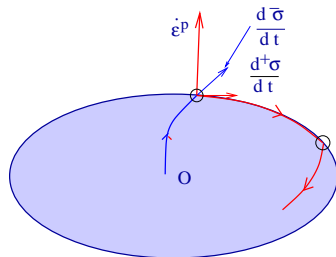


Quelques points de rigueur mathématique (problème non linéaire !)

1. $\dot{\sigma}$ n'existe pas toujours.

$$\frac{d^+}{dt} \underline{\underline{\sigma}}(t) = \lim_{dt \searrow 0} \frac{\underline{\underline{\sigma}}(t + dt) - \underline{\underline{\sigma}}(t)}{dt};$$

$$\frac{d^-}{dt} \underline{\underline{\sigma}}(t) = \lim_{dt \nearrow 0} \frac{\underline{\underline{\sigma}}(t + dt) - \underline{\underline{\sigma}}(t)}{dt}.$$



La relation d'orthogonalité s'applique à $\frac{d^+}{dt} \underline{\underline{\sigma}}(t)$.

2. Equation différentielle non linéaire. Supposons $\dot{\underline{\underline{\epsilon}}}(t)$ connue :

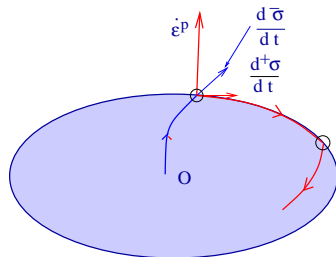
$$\underline{\underline{S}} : \dot{\underline{\underline{\sigma}}}(t) + \dot{\lambda} \frac{\partial f}{\partial \underline{\underline{\sigma}}}(\underline{\underline{\sigma}}) = \dot{\underline{\underline{\epsilon}}}(t), \quad \text{avec} \quad f(\underline{\underline{\sigma}}) \leq 0 \quad \text{et} \quad \dot{\lambda} f(\underline{\underline{\sigma}}) = 0.$$

Quelques points de rigueur mathématique (problème non linéaire !)

1. $\dot{\sigma}$ n'existe pas toujours.

$$\frac{d^+}{dt} \underline{\underline{\sigma}}(t) = \lim_{dt \searrow 0} \frac{\underline{\underline{\sigma}}(t + dt) - \underline{\underline{\sigma}}(t)}{dt};$$

$$\frac{d^-}{dt} \underline{\underline{\sigma}}(t) = \lim_{dt \nearrow 0} \frac{\underline{\underline{\sigma}}(t + dt) - \underline{\underline{\sigma}}(t)}{dt}.$$



La relation d'orthogonalité s'applique à $\frac{d^+}{dt} \underline{\underline{\sigma}}(t)$.

2. Equation différentielle non linéaire. Supposons $\dot{\underline{\underline{\epsilon}}}(t)$ connue :

$$\underline{\underline{S}} : \underline{\underline{\dot{\sigma}}}(t) + \dot{\lambda} \frac{\partial f}{\partial \underline{\underline{\sigma}}}(\underline{\underline{\sigma}}) = \dot{\underline{\underline{\epsilon}}}(t), \quad \text{avec} \quad f(\underline{\underline{\sigma}}) \leq 0 \quad \text{et} \quad \dot{\lambda} f(\underline{\underline{\sigma}}) = 0.$$

- ▶ Equation différentielle non linéaire.
- ▶ $\dot{\lambda}$ fonction implicite et inconnue de $\underline{\underline{\sigma}}$.
- ▶ **Existence, unicité, régularité en t d'une solution non triviale.**

Plan

1. Rappel du cas uniaxial
2. Chargements multiaxiaux. Surface initiale de plasticité
3. Chargements multiaxiaux. Ecrouissage
4. Déformation plastique.
5. Charge-décharge
- 6. Règle de normalité dans les matériaux écrouissables**

Règle de normalité dans les matériaux écrouissables

Règle de normalité dans les matériaux écouissables

- **Domaine et critère de plasticité pour matériaux écouissables :**

$$\mathbb{P}(\underline{X}, R) = \{\underline{\sigma}, \quad f(\underline{\sigma}, \underline{X}, R) \leq 0\}, \quad f = f(\underline{\sigma}, \underline{X}, R) = \mathcal{F}(\underline{\sigma} - \underline{X}) - R.$$

R : variable scalaire mesurant la **taille** du domaine,

\underline{X} variable tensorielle repérant le **centre** du domaine.

Règle de normalité dans les matériaux écouissables

- **Domaine et critère de plasticité pour matériaux écouissables :**

$$\mathbb{P}(\underline{X}, R) = \{ \underline{\sigma}, \quad f(\underline{\sigma}, \underline{X}, R) \leq 0 \}, \quad f = f(\underline{\sigma}, \underline{X}, R) = \mathcal{F}(\underline{\sigma} - \underline{X}) - R.$$

R : variable scalaire mesurant la **taille** du domaine,

\underline{X} variable tensorielle repérant le **centre** du domaine.

- **Comment R et \underline{X} dépendent-elles de la déformation plastique ?**

Règle de normalité dans les matériaux écouissables

- **Domaine et critère de plasticité pour matériaux écouissables :**

$$\mathbb{P}(\underline{\underline{X}}, R) = \{ \underline{\underline{\sigma}}, \quad f(\underline{\underline{\sigma}}, \underline{\underline{X}}, R) \leq 0 \}, \quad f = f(\underline{\underline{\sigma}}, \underline{\underline{X}}, R) = \mathcal{F}(\underline{\underline{\sigma}} - \underline{\underline{X}}) - R.$$

R : variable scalaire mesurant la **taille** du domaine,

$\underline{\underline{X}}$ variable tensorielle repérant le **centre** du domaine.

- **Comment R et $\underline{\underline{X}}$ dépendent-elles de la déformation plastique ?**

Modèle le plus couramment utilisé :

$$\underline{\underline{X}} = \underline{\underline{H}} : \underline{\underline{\varepsilon}}^p, \quad R = R(p), \quad p(t) = \int_0^t \dot{\lambda}(s) ds.$$

Règle de normalité dans les matériaux écouissables

- **Domaine et critère de plasticité pour matériaux écouissables :**

$$\mathbb{P}(\underline{\underline{X}}, R) = \{ \underline{\underline{\sigma}}, \quad f(\underline{\underline{\sigma}}, \underline{\underline{X}}, R) \leq 0 \}, \quad f = f(\underline{\underline{\sigma}}, \underline{\underline{X}}, R) = \mathcal{F}(\underline{\underline{\sigma}} - \underline{\underline{X}}) - R.$$

R : variable scalaire mesurant la **taille** du domaine,

$\underline{\underline{X}}$ variable tensorielle repérant le **centre** du domaine.

- **Comment R et $\underline{\underline{X}}$ dépendent-elles de la déformation plastique ?**

Modèle le plus couramment utilisé :

$$\underline{\underline{X}} = \underline{\underline{H}} : \underline{\underline{\varepsilon}}^p, \quad R = R(p), \quad p(t) = \int_0^t \dot{\lambda}(s) ds.$$

- **Exemple : identification d'un modèle d'écouissage isotrope**

Règle de normalité dans les matériaux écouvissables

- **Domaine et critère de plasticité pour matériaux écouvissables :**

$$\mathbb{P}(\underline{X}, R) = \{ \underline{\sigma}, \quad f(\underline{\sigma}, \underline{X}, R) \leq 0 \}, \quad f = f(\underline{\sigma}, \underline{X}, R) = \mathcal{F}(\underline{\sigma} - \underline{X}) - R.$$

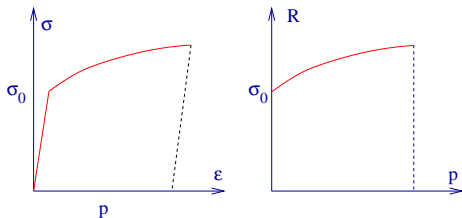
R : variable scalaire mesurant la **taille** du domaine,
 \underline{X} variable tensorielle repérant le **centre** du domaine.

- **Comment R et \underline{X} dépendent-elles de la déformation plastique ?**

Modèle le plus couramment utilisé :

$$\underline{X} = \underline{\underline{H}} : \underline{\underline{\varepsilon}}^p, \quad R = R(p), \quad p(t) = \int_0^t \dot{\lambda}(s) ds.$$

- **Exemple : identification d'un modèle d'écrouissage isotrope**



- Effectuer un essai de traction simple et relever la courbe (ε, σ) .
- En déduire la courbe (p, R) , où $p = \varepsilon - \sigma/E$, $R = \sigma$.
- Modèle d'écrouissage isotrope : $\sigma_{\text{eq}} - R(p) \leq 0$.

Règle de normalité

Règle de normalité

- Enoncé sans changement par rapport au cas parfaitement plastique :

$\underline{\underline{\sigma}}, \underline{\underline{X}}, R$ étant connues, la vitesse de déformation plastique $\underline{\underline{\dot{\epsilon}}}^P$ est nulle si $\underline{\underline{\sigma}}$ est intérieur à $\mathbb{P}(\underline{\underline{X}}, R)$ et normale extérieure à la surface seuil de plasticité si $\underline{\underline{\sigma}}$ est sur le bord de $\mathbb{P}(\underline{\underline{X}}, R)$.

$$\underline{\underline{\dot{\epsilon}}}^P = \dot{\lambda} \frac{\partial f}{\partial \underline{\underline{\sigma}}}(\underline{\underline{\sigma}}, \underline{\underline{X}}, R), \quad \dot{\lambda} \geq 0.$$

Règle de normalité

- ▶ Enoncé sans changement par rapport au cas parfaitement plastique :

$\underline{\underline{\sigma}}, \underline{\underline{X}}, R$ étant connues, la vitesse de déformation plastique $\underline{\underline{\dot{\epsilon}}}^P$ est nulle si $\underline{\underline{\sigma}}$ est intérieur à $\mathbb{P}(\underline{\underline{X}}, R)$ et normale extérieure à la surface seuil de plasticité si $\underline{\underline{\sigma}}$ est sur le bord de $\mathbb{P}(\underline{\underline{X}}, R)$.

$$\underline{\underline{\dot{\epsilon}}}^P = \dot{\lambda} \frac{\partial f}{\partial \underline{\underline{\sigma}}}(\underline{\underline{\sigma}}, \underline{\underline{X}}, R), \quad \dot{\lambda} \geq 0.$$

- ▶ Equations de comportement pour les matériaux élasto-plastiques écrouissables :

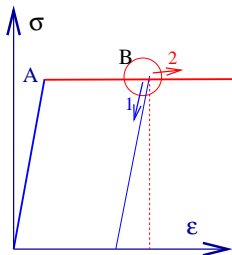
$$\begin{aligned} \underline{\underline{\epsilon}} &= \underline{\underline{\epsilon}}^{\text{el}} + \underline{\underline{\epsilon}}^P, & \underline{\underline{\epsilon}}^{\text{el}} &= \underline{\underline{S}} : \underline{\underline{\sigma}}, \\ f(\underline{\underline{\sigma}}, \underline{\underline{X}}, R) &\leq 0, & \underline{\underline{\dot{\epsilon}}}^P &= \dot{\lambda} \frac{\partial f}{\partial \underline{\underline{\sigma}}}(\underline{\underline{\sigma}}, \underline{\underline{X}}, R), \\ \dot{\lambda} &= 0 \quad \text{si} \quad f(\underline{\underline{\sigma}}) < 0, & \dot{\lambda} &\geq 0 \quad \text{si} \quad f(\underline{\underline{\sigma}}) = 0, \\ \underline{\underline{X}} &= \underline{\underline{H}} : \underline{\underline{\epsilon}}^P, & R &= R(p), \quad p(t) = \int_0^t \dot{\lambda}(s) ds. \end{aligned}$$

Levée de l'indétermination sur le multiplicateur plastique

La loi de comportement permet-elle de calculer de façon unique la vitesse de déformation $\underline{\dot{\epsilon}}$ associée à une variation de contrainte $\underline{\dot{\sigma}}$?

Levée de l'indétermination sur le multiplicateur plastique

La loi de comportement permet-elle de calculer de façon unique la vitesse de déformation $\underline{\dot{\epsilon}}$ associée à une variation de contrainte $\underline{\dot{\sigma}}$?

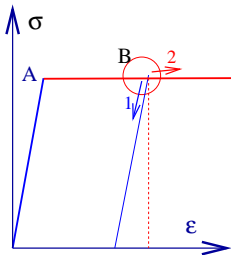


Non si l'écrouissage est nul (plasticité parfaite)

$\dot{\epsilon}$ indéterminé.

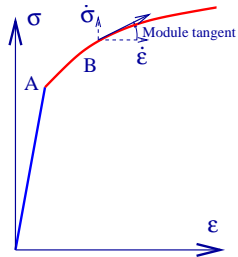
Levée de l'indétermination sur le multiplicateur plastique

La loi de comportement permet-elle de calculer de façon unique la vitesse de déformation $\underline{\dot{\epsilon}}$ associée à une variation de contrainte $\underline{\dot{\sigma}}$?



Non si l'écrouissage est nul (plasticité parfaite)

$\dot{\epsilon}$ indéterminé.



Oui si l'écrouissage est positif.

$\dot{\epsilon} = \dot{\sigma} / E_{\text{tangent}}$ déterminé sans équivoque.

Démonstration

- ▶ En régime élastique ou en décharge : $\underline{\underline{\dot{\epsilon}}} = \underline{\underline{S}} : \underline{\underline{\dot{\sigma}}}$.

Démonstration

- ▶ En régime élastique ou en décharge : $\underline{\dot{\underline{\epsilon}}} = \underline{\underline{\underline{S}}}: \underline{\dot{\underline{\sigma}}}$.
- ▶ Seul le cas de la **charge** nécessite une démonstration.
Charge si $f = 0$ à t et à $t + dt$, donc si $\dot{f} = 0$.

Démonstration

► En régime élastique ou en décharge : $\underline{\dot{\underline{\epsilon}}} = \underline{\underline{\underline{S}}}: \underline{\dot{\underline{\sigma}}}$.

► Seul le cas de la **charge** nécessite une démonstration.

Charge si $f = 0$ à t et à $t + dt$, donc si $\dot{f} = 0$.

$$f = \mathcal{F}(\underline{\underline{\sigma}} - \underline{\underline{X}}) - R = 0 \quad \Longrightarrow \quad \dot{f} = \underline{\underline{N}}:(\underline{\dot{\underline{\sigma}}} - \underline{\dot{\underline{X}}}) - h\dot{p} = 0$$

$$\text{avec } \underline{\underline{N}} = \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \underline{\underline{\sigma}}}(\underline{\underline{\sigma}} - \underline{\underline{X}}), \quad h = \frac{\partial R}{\partial p}(p)$$

Démonstration

► En régime élastique ou en décharge : $\underline{\underline{\dot{\epsilon}}} = \underline{\underline{S}} : \underline{\underline{\dot{\sigma}}}$.

► Seul le cas de la **charge** nécessite une démonstration.

Charge si $f = 0$ à t et à $t + dt$, donc si $\dot{f} = 0$.

$$f = \mathcal{F}(\underline{\underline{\sigma}} - \underline{\underline{X}}) - R = 0 \implies \dot{f} = \underline{\underline{N}} : (\underline{\underline{\dot{\sigma}}} - \underline{\underline{\dot{X}}}) - h\dot{p} = 0$$

$$\text{avec } \underline{\underline{N}} = \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \underline{\underline{\sigma}}}(\underline{\underline{\sigma}} - \underline{\underline{X}}), \quad h = \frac{\partial R}{\partial p}(p)$$

Il vient : $\underline{\underline{N}} : \underline{\underline{\dot{\sigma}}} - \dot{\lambda}(\underline{\underline{N}} : \underline{\underline{H}} : \underline{\underline{N}} + h) = 0$ (rappel : $\dot{p} = \dot{\lambda}$, $\underline{\underline{\dot{X}}} = \underline{\underline{H}} : \underline{\underline{\dot{\epsilon}}}^P = \dot{\lambda} \underline{\underline{H}} : \underline{\underline{N}}$.)

$$\dot{\lambda} = \frac{(\underline{\underline{N}} : \underline{\underline{\dot{\sigma}}})^+}{\underline{\underline{N}} : \underline{\underline{H}} : \underline{\underline{N}} + h},$$

(si dénominateur > 0).

Démonstration

► En régime élastique ou en décharge : $\underline{\underline{\dot{\epsilon}}} = \underline{\underline{S}} : \underline{\underline{\dot{\sigma}}}$.

► Seul le cas de la **charge** nécessite une démonstration.

Charge si $f = 0$ à t et à $t + dt$, donc si $\dot{f} = 0$.

$$f = \mathcal{F}(\underline{\underline{\sigma}} - \underline{\underline{X}}) - R = 0 \implies \dot{f} = \underline{\underline{N}} : (\underline{\underline{\dot{\sigma}}} - \underline{\underline{\dot{X}}}) - h\dot{p} = 0$$

$$\text{avec } \underline{\underline{N}} = \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \underline{\underline{\sigma}}}(\underline{\underline{\sigma}} - \underline{\underline{X}}), \quad h = \frac{\partial R}{\partial p}(p)$$

Il vient : $\underline{\underline{N}} : \underline{\underline{\dot{\sigma}}} - \dot{\lambda}(\underline{\underline{N}} : \underline{\underline{H}} : \underline{\underline{N}} + h) = 0$ (rappel : $\dot{p} = \dot{\lambda}$, $\underline{\underline{\dot{X}}} = \underline{\underline{H}} : \underline{\underline{\dot{\epsilon}}}^P = \dot{\lambda} \underline{\underline{H}} : \underline{\underline{N}}$.)

$$\dot{\lambda} = \frac{(\underline{\underline{N}} : \underline{\underline{\dot{\sigma}}})^+}{\underline{\underline{N}} : \underline{\underline{H}} : \underline{\underline{N}} + h}, \quad (\text{si dénominateur} > 0).$$

$$\underline{\underline{\dot{\epsilon}}} = \underline{\underline{S}} : \underline{\underline{\dot{\sigma}}} + \dot{\lambda} \underline{\underline{N}} \implies \underline{\underline{\dot{\epsilon}}} = \underline{\underline{S}}^{\text{ep}} : \underline{\underline{\dot{\sigma}}}, \quad \text{où } \underline{\underline{S}}^{\text{ep}} = \underline{\underline{S}} + \frac{\underline{\underline{N}} \otimes \underline{\underline{N}}}{\underline{\underline{N}} : \underline{\underline{H}} : \underline{\underline{N}} + h}.$$

Le tenseur de souplesse tangent $\underline{\underline{S}}^{\text{ep}}$ est **anisotrope** et dépend de $(\underline{\underline{\sigma}}, \underline{\underline{X}}, p)$.

Conclusions

- ▶ **Surface seuil de plasticité** fixe (plasticité parfaite) ou variable (écrouissage).

Conclusions

- ▶ **Surface seuil de plasticité** fixe (plasticité parfaite) ou variable (écrouissage).
- ▶ **Règle de normalité** : la vitesse de déformation plastique est une normale extérieure à cette surface seuil.

Conclusions

- ▶ **Surface seuil de plasticité** fixe (plasticité parfaite) ou variable (écrouissage).
- ▶ **Règle de normalité** : la vitesse de déformation plastique est une normale extérieure à cette surface seuil.
- ▶ **Multiplicateur plastique** indéterminé en plasticité parfaite, parfaitement déterminé en plasticité avec écrouissage positif.

Conclusions

- ▶ **Surface seuil de plasticité** fixe (plasticité parfaite) ou variable (écrouissage).
- ▶ **Règle de normalité** : la vitesse de déformation plastique est une normale extérieure à cette surface seuil.
- ▶ **Multiplicateur plastique** indéterminé en plasticité parfaite, parfaitement déterminé en plasticité avec écrouissage positif.
- ▶ **Écriture de la règle de normalité dans le cas d'un critère non différentiable ?**