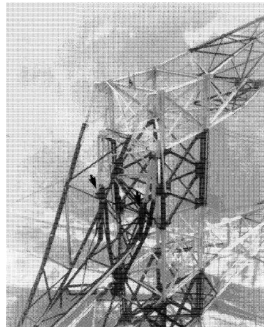
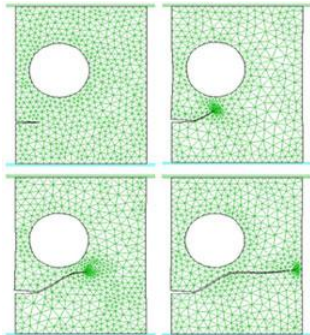


Rupture et plasticité



Département de Mécanique, Ecole Polytechnique, 2009–2010

Rupture et plasticité : plan du cours

Comportements non linéaires des matériaux solides

Amphi 1

Rupture fragile

- ▶ **Singularités de contrainte et ténacité des matériaux**

Amphi 2

- ▶ Analyse énergétique de la propagation d'une fissure I

Amphi 3

- ▶ Analyse énergétique de la propagation d'une fissure II.
Fissuration par fatigue

Amphi 4

Plasticité

- ▶ Comportement élasto-plastique

Amphi 5

- ▶ Dissipation plastique

Amphi 6

- ▶ Structures élasto-plastiques standards

Amphi 7

Charges limites

Amphi 8

Principales conclusions de l'amphi 1

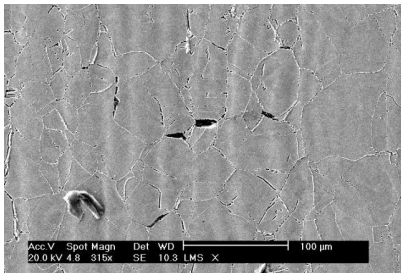
- ▶ Nécessité de traduire des **transitions** entre régimes de comportement.
- ▶ Présence nécessaire de **défauts** microscopiques (microfissures, dislocations)
- ▶ Matériaux **fragiles** sensibles au **clivage**. Critère de la contrainte normale maximale :

$$\sup_{|\underline{n}|=1} \sigma(\underline{n}) \leq \sigma_0$$

- ▶ Matériaux **ductiles** sensibles au **cisaillement**.

Mécanique linéaire de la Rupture (amphis 2, 3 et 4)

Objectifs : en restant dans le cadre de l'élasticité linéaire...



...expliquer comment la présence de micro-défauts fragilise un élément de volume de matériau.

.... dimensionner une structure en présence de fissures.

- ▶ **Ténacité d'un matériau — Taille critique des défauts.** (amphi 2)
- ▶ Comprendre la nature des forces permettant l'avancée des fissures (amphi 3)
- ▶ Analyser des structures à la rupture fragile ou par fatigue (amphi 4)

Exemple : le de Havilland Comet



- ▶ Premier vol : 1949 ;
- ▶ Service commercial : 1952 ;
- ▶ 2 crashes en 1954 (pas de survivants) ;
- ▶ **Cause : éclatement du fuselage en vol, par rupture en fatigue**
(essais pressurisation / dépressurisation : ≈ 3000 cycles)

Singularités de contrainte en élasticité et ténacité des matériaux

1. Concentration de contrainte
2. Singularité de contrainte en fond d'entaille
3. Singularités de contrainte en pointe de fissure
4. Ténacité des matériaux
5. Exemple : réservoir sous pression

Cadre de travail : élasticité linéaire en HPP

Hypothèse des petites perturbations :

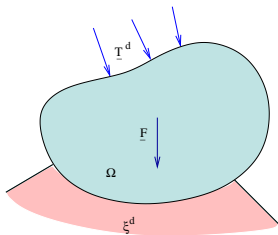
- ▶ Configuration actuelle = configuration initiale;
- ▶ Tenseur des déformations linéarisées.

Evolution quasi-statique :

- ▶ Les termes d'accélération sont négligés.

Matériau élastique linéaire :

- ▶ Homogène et isotrope.



Equations de compatibilité :

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \frac{1}{2} (\nabla \underline{u} + {}^T \nabla \underline{u}),$$

Equations d'équilibre :

$$\text{div} \underline{\underline{\sigma}} + \underline{F} = 0,$$

Equations de comportement :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{C}} : \underline{\underline{\varepsilon}},$$

Conditions aux limites :

$$\underline{T} = \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{n} = \underline{T}^d \quad \text{sur } S_{\underline{T}},$$

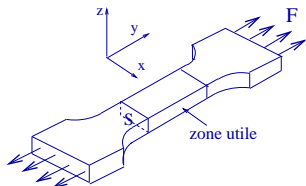
$$\underline{u} = \underline{u}^d \quad \text{sur } S_{\underline{u}}.$$

Plan

1. Concentration de contrainte
2. Singularité de contrainte en fond d'entaille
3. Singularités de contrainte en pointe de fissure
4. Ténacité des matériaux
5. Exemple : réservoir sous pression

Essai de traction uniaxiale sur éprouvette pleine ou trouée

Eprouvette pleine

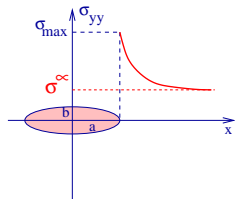
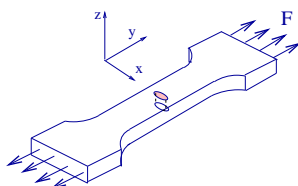


$$\underline{\underline{\sigma}} = \sigma^\infty \underline{e}_y \otimes \underline{e}_y, \quad \sigma^\infty = F/S$$

zone utile :

$\underline{\underline{\sigma}}$ uniforme, uniaxial.

Eprouvette trouée



$$\underline{\underline{\sigma}} = \sigma_{xx} \underline{e}_x \otimes \underline{e}_x + \sigma_{xy} \underline{e}_x \otimes \underline{e}_y + \sigma_{yy} \underline{e}_y \otimes \underline{e}_y, \\ \sigma_{ij}(x, y, z).$$

zone utile :

$\underline{\underline{\sigma}}$ non uniforme, multiaxial.

Champ de contrainte **perturbé** par la présence du **trou** (condition de bord libre).

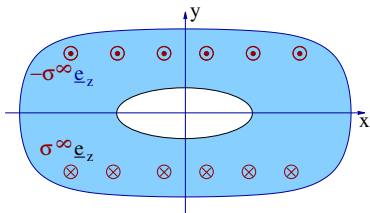
Trou elliptique (cas antiplan, plus simple)

- ▶ **Déformations anti-planes :**

$$\underline{u}(x, y) = u_z \underline{e}_z.$$

$$\sigma_{xz}(x, y) = 2\mu \varepsilon_{xz}(x, y) = \mu \frac{\partial u_z}{\partial x}$$

$$\sigma_{yz}(x, y) = 2\mu \varepsilon_{yz}(x, y) = \mu \frac{\partial u_z}{\partial y}$$



- ▶ **Equations d'équilibre** (forces de volume nulles) :

$$\frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial y} = 0 \quad (\text{selon } \underline{e}_z), \quad 0 = 0 \quad (\text{selon } \underline{e}_x, \underline{e}_y).$$

- ▶ **Matériau homogène** ($\mu = \text{constante}$) :

$$\Delta u_z(x, y) = 0.$$

i.e. la fonction u_z est harmonique.

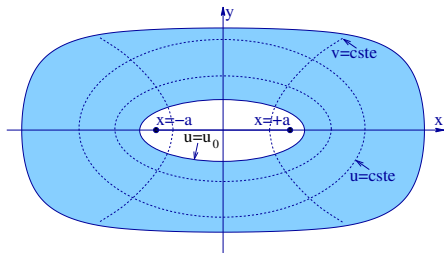
Trou elliptique (cas antiplan, plus simple)

$$x = a \operatorname{ch} u \cos v$$

$$y = a \operatorname{sh} u \sin v$$

$$\Delta u_z = \frac{1}{g} \left[\frac{\partial^2}{\partial u^2} + \frac{\partial^2}{\partial v^2} \right] u_z$$

$$g = a^2 [\operatorname{ch} 2u - \cos 2v] / 2$$



Surface du trou : $u = u_0$. Axes : $A = a \operatorname{ch} u_0$, $B = a \operatorname{sh} u_0$.

Solution, tous calculs faits (condition $\underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{\underline{n}} = \underline{\underline{0}}$ à la surface du trou) :

$$u_z = \frac{\sigma^\infty}{\mu} a e^{u_0} \operatorname{ch}(u - u_0) \sin v$$

$$\sigma_{xz} = \mu \frac{\partial u_z}{\partial x}, \quad \sigma_{yz} = \mu \frac{\partial u_z}{\partial y}$$

Contrainte circonférentielle à la surface du trou :

$$\sigma_{nt} = (\underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{\underline{n}}) \cdot \underline{\underline{t}} = \sigma_{xz} t_x + \sigma_{yz} t_y \quad \text{i.e.}$$

$$\sigma_{nt} = a \sigma^\infty \frac{e^{u_0} \cos v}{\sqrt{g(u_0, v)}} \quad (0 \leq v \leq 2\pi)$$

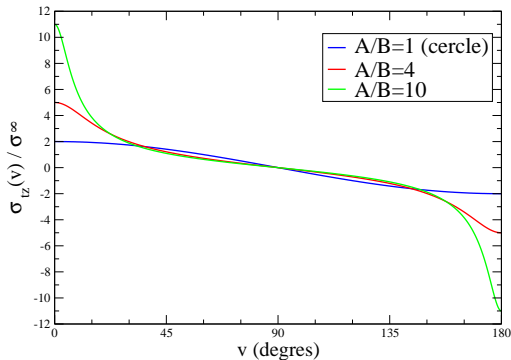
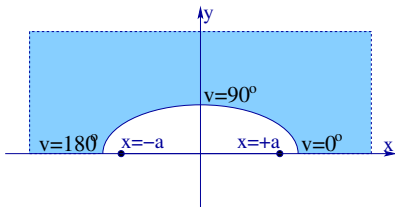
Trou elliptique (cas antiplan) : concentration de contrainte

Contrainte circonférentielle à la surface du trou :

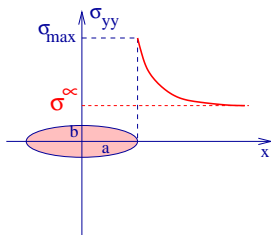
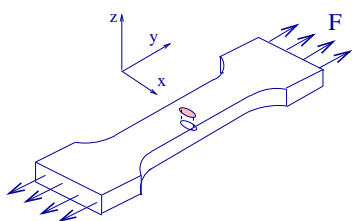
$$\sigma_{nt}(v) = a\sigma^\infty \frac{e^{u_0} \cos v}{\sqrt{g(u_0, v)}} \quad (0 \leq v \leq 2\pi)$$

Concentration de contrainte (rappel : axes du trou $A = a \operatorname{ch} u_0$, $B = a \operatorname{sh} u_0$) :

$$R = \max_{0 \leq v \leq 2\pi} \sigma_{nt}(v) / \sigma^\infty = \sigma_{nt}(0) / \sigma^\infty, \quad \text{soit } \boxed{R = 1 + A/B}$$



Trou elliptique (déformation plane) : concentration de contrainte



$$\underline{\underline{\sigma}} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & 0 \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\sigma_{ij}(x, y, z)$$

Contrainte normale maximale :

$$\sup_{\underline{x} \in \text{partie utile}} \sup_{|\underline{n}|=1} \underline{n} \cdot \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{n} = \sigma_{yy}(a, 0) = R\sigma^{\infty}.$$

Facteur de concentration de contrainte (plaque infinie, homogène isotrope) :

$$R = 1 + 2A/B \quad (\text{déformation plane})$$

En règle générale, R inversement proportionnel au rayon de courbure du défaut ;

Lorsque le trou devient une fissure (courbure $\rightarrow \infty$) :

$$B/A \rightarrow 0, \quad R \rightarrow +\infty.$$

Autres exemples de concentration de contrainte

- ▶ Trou circulaire, chargement uniaxial (antiplan) :

$$R = 2$$

- ▶ Trou circulaire, chargement uniaxial (contrainte plane) :

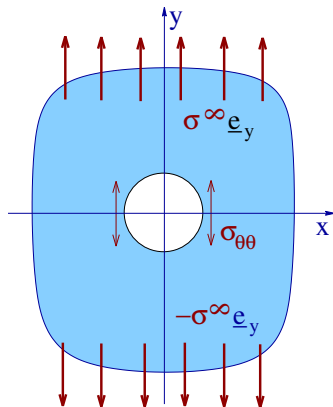
$$R = 3$$

- ▶ Cavité sphérique, chargement uniaxial (3D) :

$$R = 1 + \frac{13 - 5\nu}{7 - 5\nu}$$

- ▶ Inclusion rigide circulaire, chargement uniaxial (contrainte plane) :

$$R = \frac{5 + \nu}{(3 - \nu)(1 + \nu)}$$



Trou elliptique très aplati : cas-limite de la fissure

Retour sur l'exemple antiplan :

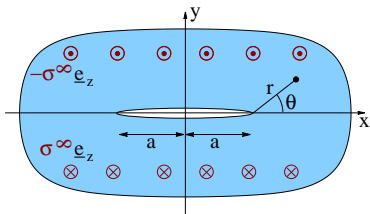
▶ Limite $u_0 \rightarrow 0$: **fissure**

▶ Excentricité

$$B/A = \text{sh } u_0 / \text{ch } u_0 \rightarrow 0.$$

On établit (cf. infra) que

$$u_z = \frac{\sigma^\infty}{\mu} \sqrt{2ar} \sin \frac{\theta}{2} + O(r)$$



Comportement du déplacement en \sqrt{r} au voisinage de la pointe de fissure.

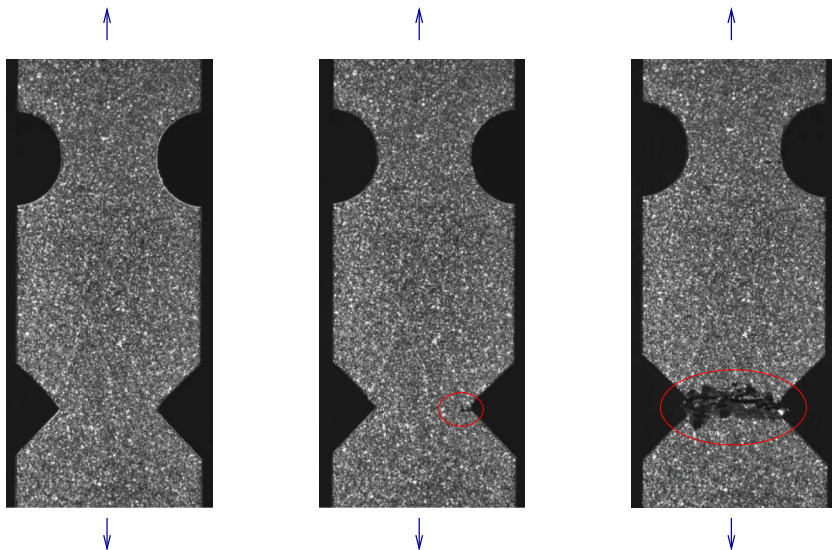
⇒ **contraintes singulières en pointe de fissure**

Preuve : Comportement au voisinage de l'extrémité droite :

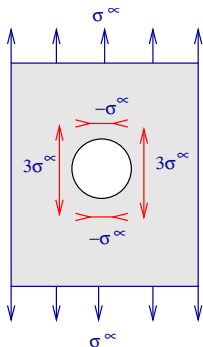
$$\begin{cases} x = a \text{ch } u \cos v \\ y = a \text{sh } u \sin v \end{cases} \text{ et } \begin{cases} x = a + r \cos \theta + o(r) \\ y = r \sin \theta + o(r) \end{cases} \implies \begin{cases} u = \sqrt{2r/a} \cos(\theta/2) \\ v = \sqrt{2r/a} \sin(\theta/2) \end{cases}$$

$$u_z = \frac{\sigma^\infty}{\mu} a e^{u_0} \text{ch } u \sin v$$

Un V est plus dangereux qu'un U

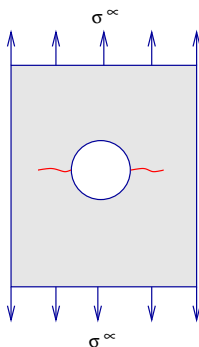


Nonlinéarité de l'amorçage et de la propagation d'une fissure

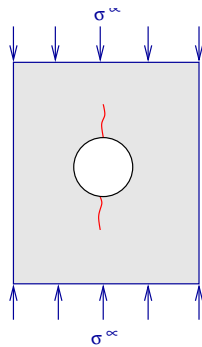


A configuration donnée, le problème d'élasticité est linéaire,

$$\sigma^\infty \rightarrow -\sigma^\infty, \quad \underline{\underline{\sigma}} \rightarrow -\underline{\underline{\sigma}},$$



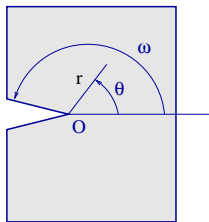
L'amorçage de la fissuration (puis la propagation), basé sur le critère (non symétrique) de la contrainte normale maximale, rend le problème **non linéaire**.



Plan

1. Concentration de contrainte
- 2. Singularité de contrainte en fond d'entaille**
3. Singularités de contrainte en pointe de fissure
4. Ténacité des matériaux
5. Exemple : réservoir sous pression

Singularité de contrainte en fond d'entaille



- ▶ Matériau élastique linéaire, homogène, isotrope.
- ▶ Géométrie plane. Déformations planes ou anti-planes. Localement, entaille d'ouverture $2(\pi - \omega)$.
- ▶ Rappel : pour une entaille émoussée
 - $\text{Sup } \sigma(\underline{n}) = R \sigma^\infty$, $R \propto$ courbure du défaut.
 - Si courbure $\rightarrow \infty$, **contraintes singulières en fond d'entaille.**

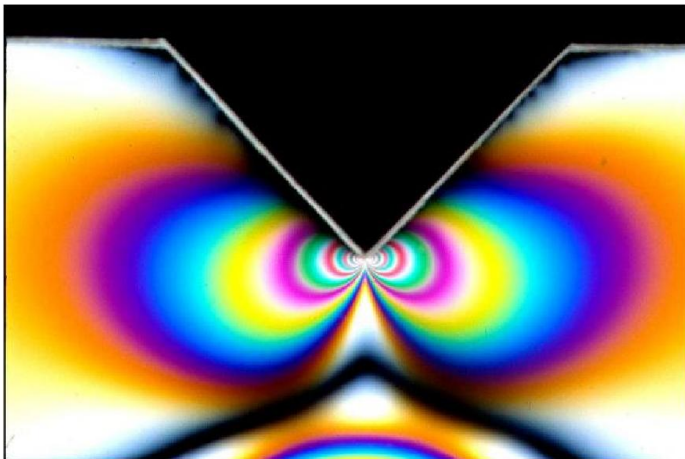
Quel que soit le corps considéré et le chargement appliqué, le champ de contrainte solution du problème d'élasticité plane, linéaire, isotrope, posé sur un corps contenant une entaille (à surface libre) d'angle $\omega \geq \pi/2$ est singulier en fond d'entaille :

$$\sigma_{ij} = r^\alpha f_{ij}(\theta) + \sigma_{ij}^{\text{reg}}(r, \theta) \quad \text{avec } \alpha < 0, \quad \lim_{r \rightarrow 0} \sigma_{ij}^{\text{reg}}(r, \theta) < \infty .$$

- ▶ L'exposant $\alpha < 0$ ne dépend que de la géométrie d'entaille (ω). Il est indépendant de la géométrie du corps, du chargement et des modules élastiques (isotropes).
- ▶ Les fonctions f_{ij} dépendent de la géométrie du corps et du chargement appliqué.

Visualisation d'une singularité de contrainte

Photoélasticimétrie : visualisation des différences entre contraintes principales.

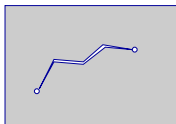


©J. Salençon.

Concentration vs. singularité de contrainte



- ▶ Lorsqu'il y a **concentration de contrainte**, la contrainte s'élève mais reste finie.
- ▶ Lorsqu'il y a **singularité de contrainte**, la contrainte devient (asymptotiquement) infinie. **Impossible** d'utiliser le critère de la contrainte normale maximale (rupture dès application d'une charge infinitésimale).
- ▶ La signification physique d'une contrainte infinie peut être mise en doute (OK en dehors d'un tout petit volume). Traduit une très grande concentration de contrainte locale.

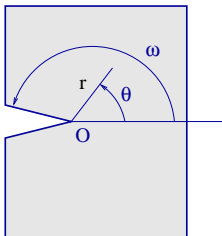


Pour arrêter la propagation de certaines fissures : percer un trou !

Démonstration (limitée au cas antiplan, plus simple) 1/3

(Cas des déformations planes, un peu plus technique, traité dans le poly.)

Rappel :
$$\begin{cases} \underline{u} = u_z(r, \theta) & \text{avec } \Delta u_z = 0 \\ \sigma_{xz}, \sigma_{yz} \neq 0 \end{cases}$$



- ▶ Chercher une expression **asymptotique de** u_z pour $r \rightarrow 0$:

$$u_z(r, \theta) = r^{\alpha+1} g(\theta) \quad \text{au voisinage de } O.$$

- ▶ Laplacien en coordonnées polaires :

$$\begin{aligned} \Delta u &= \frac{\partial^2 u_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_z}{\partial \theta^2} \\ &= r^{\alpha-1} [(\alpha+1)^2 g(\theta) + g''(\theta)] = 0. \end{aligned}$$

Solution :
$$g(\theta) = A \cos[(\alpha+1)\theta] + B \sin[(\alpha+1)\theta]$$

- ▶ Comportement asymptotique des contraintes :

$$\sigma_{rz} = \mu \frac{\partial u_z}{\partial r} = \mu(\alpha+1)r^\alpha g, \quad \sigma_{\theta z} = \mu \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} = \mu r^\alpha g'$$

Démonstration (cas antiplan) 2/3

Solution : $g(\theta) = A \cos[(\alpha + 1)\theta] + B \sin[(\alpha + 1)\theta].$

- Conditions aux limites $\underline{T} = \underline{0}$, $\theta = \pm\omega$, ($\sigma_{\theta z}$ seule composante $\neq 0$ de \underline{T}) :

$$\sigma_{\theta z} = \mu r^\alpha g'(\theta), \quad \sigma_{\theta z} = 0 \text{ pour } \theta = \pm\omega \implies g'(\pm\omega) = 0.$$

- Système à résoudre pour déterminer A, B :

$$\begin{bmatrix} \cos[(\alpha + 1)\omega] & -\sin[(\alpha + 1)\omega] \\ \cos[(\alpha + 1)\omega] & \sin[(\alpha + 1)\omega] \end{bmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Une solution non nulle existe si et seulement si le déterminant du système est nul :

$$\cos[(\alpha + 1)\omega] \sin[(\alpha + 1)\omega] = 0,$$

$$\alpha = \frac{\pi}{2\omega} + \frac{k\pi}{\omega} - 1 \quad \text{ou bien} \quad \alpha = \frac{k\pi}{\omega} - 1.$$

Démonstration (cas antiplan) 3/3

- ▶ Solutions α conduisant à des **contraintes singulières** ?

$$\underline{\underline{\sigma}} \sim \underline{\underline{\nabla u}} \sim r^\alpha \underline{\underline{F}}(\theta) \quad \text{singulier si } \alpha < 0.$$

- ▶ Solutions α conduisant à une **énergie élastique finie** :

$$\int_{\Omega} \frac{1}{2} \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{S}} : \underline{\underline{\sigma}} \, d\Omega < \infty \implies \int r^{2\alpha} \, r \, dr < \infty \implies \alpha > -1.$$

Solutions singulières d'énergie finie si $-1 < \alpha < 0$.

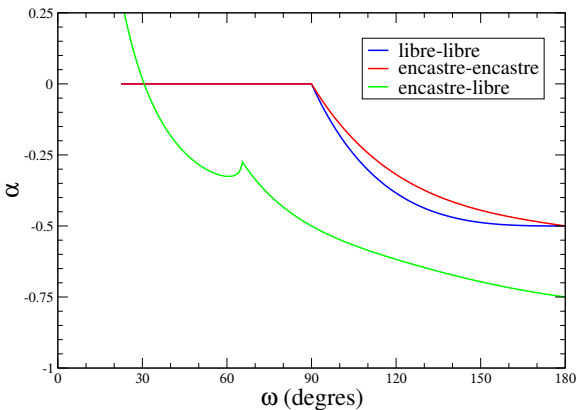
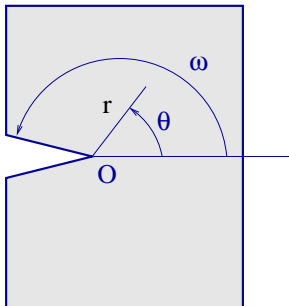
- ▶ La seule solution dans cet intervalle est :

$$k = 0, \quad \alpha = \frac{\pi}{2\omega} - 1, \quad (\text{rappel } \omega > \pi/2 \text{ donc } \alpha < 0).$$

- On a montré que **certaines solutions singulières peuvent exister**.
- On peut montrer (plus difficile) que **toutes les solutions** sont de la forme :

$$\underline{\underline{\sigma}} = r^\alpha \underline{\underline{F}}(\theta) + \underline{\underline{\sigma}}^{\text{reg}}, \quad \underline{\underline{\sigma}}^{\text{reg}} < +\infty.$$

Entaille (contrainte plane) [Williams, 1952]

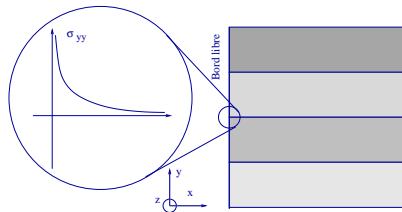
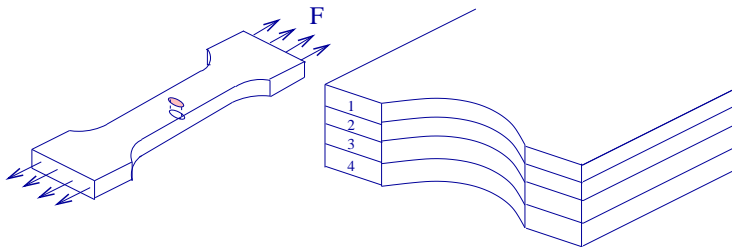


$$\sigma_{ij} = r^\alpha f_{ij}(\theta) + \sigma_{ij}^{\text{reg}}(r, \theta) \quad \text{avec } \alpha < 0, \quad \lim_{r \rightarrow 0} \sigma_{ij}^{\text{reg}}(r, \theta) < \infty.$$

La fissure correspond au cas libre-libre avec $\omega = 180^\circ$, soit $\alpha = -1/2$.

Singularités de contraintes dans les composites

Même pour des bords très réguliers !

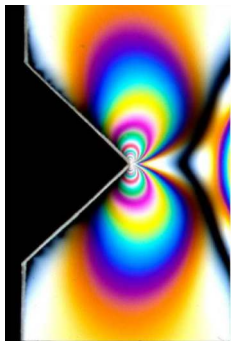


- ▶ Couches de raideurs différentes.
- ▶ Bord libre.
- ▶ Etat de contrainte **triaxial**.
- ▶ **Singularité de contrainte** selon Oy au voisinage du point triple.
- ▶ Dépend de la séquence d'empilement.

Plan

1. Concentration de contrainte
2. Singularité de contrainte en fond d'entaille
- 3. Singularités de contrainte en pointe de fissure**
4. Ténacité des matériaux
5. Exemple : réservoir sous pression

Singularités de contrainte en pointe de fissure



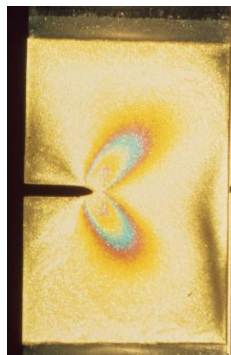
← **Entaille** : $\omega = 3\pi/4$.

Fissure : $\omega = \pi$. →

- En déformations anti-planes :

$$\alpha = \frac{\pi}{2\omega} - 1 = -1/2.$$

- Même singularité trouvée en déformations planes et en 3D.



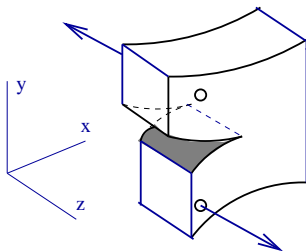
Le champ de contrainte présente une singularité en $r^{-1/2}$ en pointe de fissure :

$$\sigma_{ij} \sim \frac{f_{ij}(\theta)}{\sqrt{r}} \quad \text{au voisinage de } r = 0, \quad (u_i \sim g_i \sqrt{r}).$$

où les fonctions f_{ij} dépendent de la géométrie du corps considéré et du chargement appliqué.

Mode antiplan de rupture (appelé mode III)

Mode III de rupture : cas limite ($\omega = \pi$) de l'entaille sous chargement antiplan.
(exemple : déchirement d'une feuille de papier) :



Mode III

$$\sigma_{rz} \sim \frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi r}} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right),$$

$$\sigma_{\theta z} \sim \frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi r}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right),$$

$$u_z \sim \frac{2K_{III}}{\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right).$$

Autres σ_{ij} et u_i nuls.

Discontinuité de déplacement :

$$\llbracket \underline{u} \rrbracket \stackrel{\text{déf}}{=} \underline{u}(r, +\pi) - \underline{u}(r, -\pi) = \frac{4K_{III}}{\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \underline{e}_z.$$

Mode III : mode de cisaillement anti-plan.

Modes plans de rupture (appelés modes I et II)

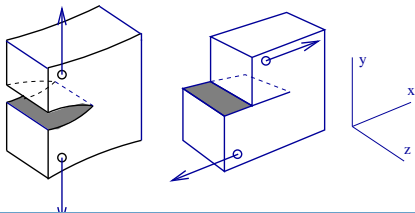
$$u_r \sim \frac{K_I}{4\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \left[(5-8\nu) \cos \frac{\theta}{2} - \cos \frac{3\theta}{2} \right] + \frac{K_{II}}{4\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \left[(-5+8\nu) \sin \frac{\theta}{2} + 3 \sin \frac{3\theta}{2} \right],$$

$$u_\theta \sim \frac{K_I}{4\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \left[(-7+8\nu) \sin \frac{\theta}{2} + \sin \frac{3\theta}{2} \right] + \frac{K_{II}}{4\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \left[(-7+8\nu) \cos \frac{\theta}{2} + 3 \cos \frac{3\theta}{2} \right].$$

où K_I et K_{II} dépendent de la géométrie du corps et du chargement appliqué.

Discontinuité de déplacement :

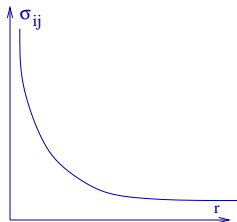
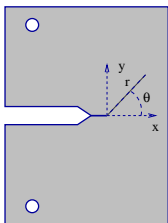
$$[\underline{u}] = \underline{u}(r, +\pi) - \underline{u}(r, -\pi) \sim \frac{4(1-\nu)K_I}{\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \underline{e}_y + \frac{4(1-\nu)K_{II}}{\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \underline{e}_x.$$



Superposition de 2 modes :

- ▶ Mode I pur ($K_{II} = 0$) :
mode d'ouverture.
- ▶ Mode II pur : ($K_I = 0$) :
mode de cisaillement plan.

Singularité de contrainte pour les modes I et II



$$\sigma_{rr} \sim \frac{K_I}{4\sqrt{2\pi r}} \left[5 \cos \frac{\theta}{2} - \cos \frac{3\theta}{2} \right] + \frac{K_{II}}{4\sqrt{2\pi r}} \left[-5 \sin \frac{\theta}{2} + 3 \sin \frac{3\theta}{2} \right],$$

$$\sigma_{\theta\theta} \sim \frac{K_I}{4\sqrt{2\pi r}} \left[3 \cos \frac{\theta}{2} + \cos \frac{3\theta}{2} \right] + \frac{K_{II}}{4\sqrt{2\pi r}} \left[-3 \sin \frac{\theta}{2} - 3 \sin \frac{3\theta}{2} \right],$$

$$\sigma_{r\theta} \sim \frac{K_I}{4\sqrt{2\pi r}} \left[\sin \frac{\theta}{2} + \sin \frac{3\theta}{2} \right] + \frac{K_{II}}{4\sqrt{2\pi r}} \left[\cos \frac{\theta}{2} + 3 \cos \frac{3\theta}{2} \right].$$

Facteurs d'intensité des contraintes K_I , K_{II} , K_{III} .

Comment mesurer l'intensité d'une contrainte infinie ?

- ▶ L'exposant $r^{-1/2}$ est **universel** : identique pour toutes les fissures, quelle que soit leur forme.
- ▶ L'intensité de la singularité peut être mesurée par les **facteurs d'intensité des contraintes** K_I , K_{II} , K_{III} qui dépendent du chargement et de la géométrie de l'éprouvette.
- ▶ Analyse dimensionnelle :

$$\sigma \sim K/\sqrt{r} \implies K \text{ se mesure en } \boxed{\text{MPa}\sqrt{\text{m}}}.$$

En général K est relié à une contrainte σ liées aux efforts appliqués et à une longueur ℓ liée à la taille de la fissure :

$$K = \sigma \sqrt{\pi\ell} f(\ell, \text{géométrie structure}).$$

- ▶ Il faut savoir **mesurer** (pas facile de mesurer une singularité) ou **calculer** ces facteurs pour chaque géométrie et type de chargement : analytiquement (rarement), numériquement (souvent).
- ▶ Il existe des catalogues **Handbooks of stress intensity factors** regroupant les cas connus.

Exemples courants

Fissure de longueur ℓ dans un milieu infini.

$$\underline{\underline{\sigma}} = \sigma \underline{e}_y \otimes \underline{e}_y.$$

Vecteur contrainte qui agirait sur le plan de la fissure en l'absence de fissure :

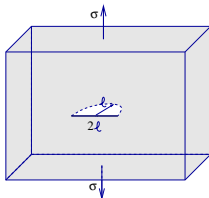
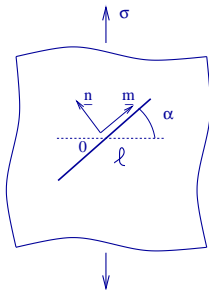
$$\underline{T} = \sigma \cos^2 \alpha \underline{n} + \sigma \cos \alpha \sin \alpha \underline{m}.$$

Facteurs d'intensité de contrainte (résultat exact) :

$$K_I = \sigma \cos^2 \alpha \sqrt{\pi \ell / 2}, \quad K_{II} = \sigma \cos \alpha \sin \alpha \sqrt{\pi \ell / 2}.$$

Fissure semi-circulaire débouchante peu profonde dans une plaque infinie : en fond de fissure, on a

$$K_I = \sigma \sqrt{1.2 \pi \ell} \quad (\text{approché}).$$



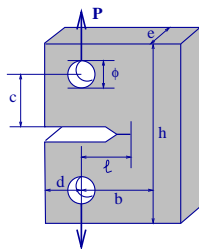
Exemples courants (suite)



Barreau en flexion pure :

Pour $\frac{L}{h} > 4$ $K_I = f\left(\frac{\ell}{2h}\right) \sigma \sqrt{\pi \ell}$, $\sigma = \frac{3M}{2bh^2}$,

$f(m) = 1.122 - 1.4m + 7.33m^2 \dots$ (approché).



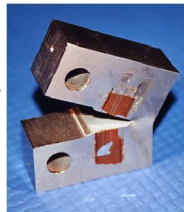
Eprouvette normalisée CT (Compact Tensile) :

Données géométriques :

$$\phi = d = \frac{b}{4}, \quad e = \frac{b}{2}, \quad h = 1,2b, \quad c = 0,275b.$$

Pour $0,3 < \frac{\ell}{b} < 0,7$ $K_I = \frac{P\sqrt{\ell}}{be} f\left(\frac{\ell}{b}\right)$,

$$f(m) \simeq 29,6 - 185,5m + 655,7m^2 - 1017m^3 + 638,9m^4$$



Plan

1. Concentration de contrainte
2. Singularité de contrainte en fond d'entaille
3. Singularités de contrainte en pointe de fissure
4. Ténacité des matériaux
5. Exemple : réservoir sous pression

Comment prédire la propagation des fissures ? la théorie d'Irwin

Application du critère de la contrainte normale maximale impossible en présence de fissures.

Théorie d'Irwin (1957). Hypothèses :

- ▶ **H1** : Le mode I (ouverture) est le plus dangereux dans les matériaux fragiles.
- ▶ **H2** : Il existe une valeur critique de K_I , appelée **ténacité** et notée K_{Ic} , telle que :

$$K_I < K_{Ic} \implies \dot{\ell} = 0 \quad : \text{fissure fixe,}$$

$$K_I = K_{Ic} \implies \dot{\ell} > 0 \quad : \text{avancée de la fissure.}$$

- ▶ **H3** : Cette ténacité K_{Ic} est *une caractéristique du matériau* indépendante de la géométrie de l'éprouvette.

Il s'agit (une fois encore) d'une **loi à seuil**. Elle porte sur le **facteur d'intensité des contraintes en mode I** et non plus sur les contraintes.

Alliage d'aluminium	$K_{Ic} \simeq 30 \text{ MPa}\sqrt{\text{m}}$
Alliage de titane	$K_{Ic} \simeq 100 \text{ MPa}\sqrt{\text{m}}$
Acier trempé	$K_{Ic} \simeq 120 \text{ MPa}\sqrt{\text{m}}$

Polymère	$K_{Ic} \simeq 3 \text{ MPa}\sqrt{\text{m}}$
Bois	$K_{Ic} \simeq 2 \text{ MPa}\sqrt{\text{m}}$
Béton	$K_{Ic} \simeq 1 \text{ MPa}\sqrt{\text{m}}$

Application du critère au dimensionnement

Soit une structure dont on sait qu'elle contient une fissure de géométrie donnée, ou dont on craint qu'elle contienne une certaine forme de fissure.

Etape 1 : Déterminer le K_I de la fissure (avec σ fonction du chargement appliqué) :

$$K_I = \sigma \sqrt{\pi \ell} f(\ell, \text{géométrie structure}),$$

Etape 2 : Appliquer le critère du K_{Ic} . Deux types de problèmes se posent :

- ▶ **1^{er} type de problème :** A longueur ℓ de fissure donnée, déterminer le chargement maximal admissible, pour respecter la tenue aux défauts :

$$K_I < K_{Ic} \implies \sigma < \sigma_c = \frac{K_{Ic}}{\sqrt{\pi \ell} f(\ell)}.$$

Tout chargement au-dessus de σ_c met la structure en danger de rupture par propagation de la fissure.

- ▶ **2^e type de problème :** A chargement σ donné (charge de service), déterminer la longueur maximale des fissures acceptables :

$$\sigma \sqrt{\pi \ell} f(\ell) < K_{Ic} \implies \ell \leq \ell_c, \quad \text{avec} \quad \ell_c f^2(\ell_c) = \frac{1}{\pi} \left(\frac{K_{Ic}}{\sigma} \right)^2.$$

ℓ_c : **taille critique de défaut** (de géométrie donnée) admissible dans la structure.

Taille critique des défauts

A chargement σ donné (charge de service), déterminer la longueur maximale des fissures acceptables :

$$\sigma\sqrt{\pi l}f(l) < K_{Ic} \implies l \leq l_c, \quad \text{avec} \quad l_c f^2(l_c) = \frac{1}{\pi} \left(\frac{K_{Ic}}{\sigma} \right)^2.$$

l_c : **taille critique de défaut** (de géométrie donnée) admissible dans la structure.

- Autre interprétation de la ténacité : **mesure la tolérance aux défauts.**
- Une structure contenant des défauts de taille supérieure à la taille critique est potentiellement dangereuse.
- **Très grande importance des moyens de contrôle non destructif** : Si on ne sait pas détecter (à temps) les défauts de taille critique, la structure est dangereuse.

Exemple :

- *Taille critique des défauts sous charge de service : 5mm ;*
- *fissures détectables : 1cm.*

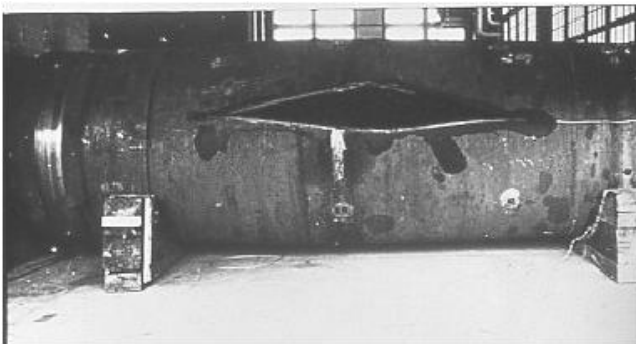
La structure est dangereuse : une fissure de 7mm pourra conduire à une rupture brutale et n'aura pas été détectée avant la mise sous charge.

Plan

1. Concentration de contrainte
2. Singularité de contrainte en fond d'entaille
3. Singularités de contrainte en pointe de fissure
4. Ténacité des matériaux
5. Exemple : réservoir sous pression

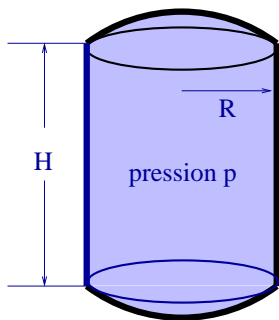
Exemple : réservoir sous pression

Objectif : dimensionner un réservoir.



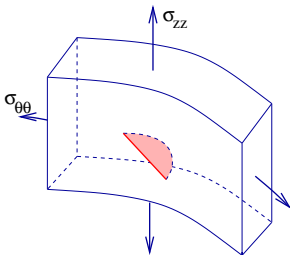
- ▶ Longue série d'accidents sur réservoir à poudre de la NASA après la guerre.
- ▶ Remarquer la fissure parallèle à l'axe du réservoir.

Le problème à résoudre



- ▶ Pression interne $p_{max} = 50$ MPa.
- ▶ **Choix entre plusieurs nuances d'acier** caractérisées par leur contrainte ultime σ_u et leur ténacité.
 - Contrainte ultime : **contrainte maximale supportable par le matériau sans défaut** :
 $\sigma_{eq} \leq \sigma_u$.
 - Ténacité : caractérise la **tolérance aux défauts** de l'acier.
- ▶ Données :
 - nuance A : $\sigma_u = 1250$ MPa, $K_{Ic} = 90$ MPa \sqrt{m} .
 - nuance B : $\sigma_u = 900$ MPa, $K_{Ic} = 120$ MPa \sqrt{m} .
 - nuance C : $\sigma_u = 650$ MPa, $K_{Ic} = 190$ MPa \sqrt{m} .

Sensibilité aux défauts



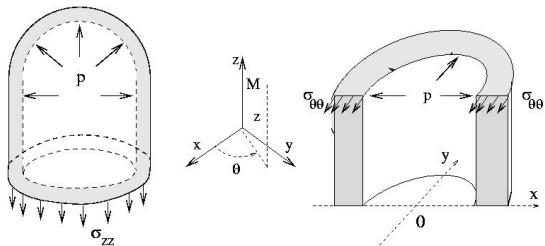
- ▶ **Défauts dangereux (car difficilement visibles) : fissures débouchant sur la face interne.**
- ▶ Le système de contrôle non destructif ne détecte que les fissures d'un diamètre supérieur à 1cm.
- ▶ $R \gg l \sim e$: on peut assimiler le cylindre à une plaque infinie :

$$K_I = 1.1\sigma\sqrt{\pi l}$$

(σ : contrainte normale d'ouverture de la fissure).

Question posée : Quelle est la nuance d'acier qui supporte la contrainte appliquée, qui tolère les défauts d'une taille inférieure à la limite de détection et qui conduit à l'épaisseur minimale du réservoir.

Estimation des contraintes dans le réservoir



Directions principales de contrainte : $\underline{e}_r, \underline{e}_\theta, \underline{e}_z$.

Equilibre de la moitié supérieure du réservoir : coupe horizontale :

Résultante efforts pression sur 1/2 réservoir = $2\pi Re\sigma_{zz}\underline{e}_z$. $\implies \sigma_{zz} \approx pR/2e$.

Equilibre de la moitié droite du réservoir : coupe verticale :

$$\sigma_{\theta\theta} = pR/e.$$

Par ailleurs $\sigma_{rr} \sim p$. Donc, si $e \ll R$:

$$\sigma_{\theta\theta} > \sigma_{zz} \gg \sigma_{rr},$$

$$\underline{\underline{\sigma}} \approx \frac{pR}{e} \underline{e}_\theta \otimes \underline{e}_\theta + \frac{pR}{2e} \underline{e}_z \otimes \underline{e}_z.$$

Les fissures parallèles à l'axe du réservoir sont les plus dangereuses (cf photo intro).

Dimensionnement vis-à-vis des défauts

Cas le plus défavorable : fissure verticale de rayon ℓ :

$$K_I = 1.1\sigma\sqrt{\pi\ell} = 1.1\frac{pR}{e}\sqrt{\pi\ell},$$

où $\sigma = \sigma_{\theta\theta}$. L'épaisseur e doit être telle qu'en appliquant le critère du K_{Ic} les fissures de rayon $\ell < 0.5\text{cm}$ ne se propagent pas :

$$e \geq e_R = pR \frac{1.1\sqrt{\pi\ell}}{K_{Ic}}.$$

nuance A : $e = 15,3 \text{ cm}$, nuance B : $e = 11,5 \text{ cm}$, nuance C : $e = 7,3 \text{ cm}$.

Dimensionnement vis-à-vis de la contrainte ultime

$$\underline{\underline{\sigma}} = \frac{pR}{e} \underline{e}_\theta \otimes \underline{e}_\theta + \frac{pR}{2e} \underline{e}_z \otimes \underline{e}_z, \quad \underline{\underline{s}} = -\frac{pR}{2e} \underline{e}_r \otimes \underline{e}_r + \frac{pR}{2e} \underline{e}_\theta \otimes \underline{e}_\theta,$$

$$\sigma_{\text{eq}} = \left(\frac{3}{2} (s_{rr}^2 + s_{\theta\theta}^2 + s_{zz}^2) \right)^{1/2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{pR}{e}.$$

L'épaisseur minimale e_u trouvée en imposant $\sigma_{\text{eq}} \leq \sigma_u$:

$$e \geq e_u = pR \frac{\sqrt{3}}{2\sigma_u}.$$

Pour la pression de service imposée, les épaisseurs nécessaires sont alors :

nuance A : $e = 6,9$ cm, nuance B : $e = 9,6$ cm, nuance C : $e = 13,3$ cm.

Récapitulation

	K_{Ic} (MPa \sqrt{m})	σ_u (MPa)	e_R (cm)	e_u (cm)
A	90	1250	15.3	6.9
B	120	900	11.5	9.6
C	190	650	7.3	13.3

⇒ Le meilleur choix est la nuance B avec épaisseur 11.5cm.

Conclusion

- ▶ **Concentration de contrainte** sur des défauts de faible rayon de courbure.
- ▶ **Singularité de contrainte** en pointe d'entaille ou de fissure.
- ▶ **Nouvelle propriété matériau : ténacité**. Critère de propagation des défauts de type « loi à seuil ».
- ▶ **Taille critique de défauts**.
- ▶ **Théorie efficace** qui permet effectivement le dimensionnement des structures.
- ▶ **Cependant** cette théorie est basée sur le caractère infini des contraintes en pointe de fissure. HPP ?