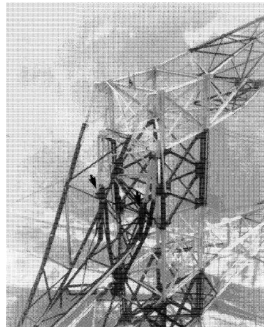
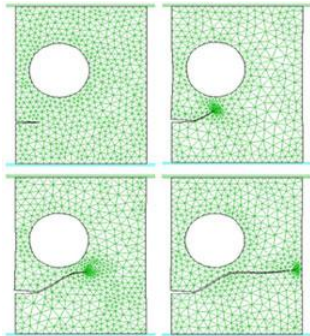


Rupture et plasticité



Département de Mécanique, Ecole Polytechnique, 2009–2010

Objet du cours

Cours de Mécanique des milieux continus (MEC 431) :

- ▶ Description du mouvement d'un milieu continu (déformations, compatibilité) ;
- ▶ Description des efforts intérieurs : notion de contrainte (équilibre) ;
- ▶ Elasticité linéaire (comportement) ;
- ▶ Éléments de calcul des structures en matériau élastique linéaire

Et ensuite ?

Objet du cours

Cours de Mécanique des milieux continus (MEC 431) :

- ▶ Description du mouvement d'un milieu continu (déformations, compatibilité) ;
- ▶ Description des efforts intérieurs : notion de contrainte (équilibre) ;
- ▶ Elasticité linéaire (comportement) ;
- ▶ Éléments de calcul des structures en matériau élastique linéaire

Et ensuite ?

- Dynamique et vibrations des structures (MEC 434, année 2) ;
- Modélisation des structures élancées (MEC 553, année 3) ;
- Méthodes numériques de résolution (MEC 568, année 3) ;

Objet du cours

Cours de Mécanique des milieux continus (MEC 431) :

- ▶ Description du mouvement d'un milieu continu (déformations, compatibilité) ;
- ▶ Description des efforts intérieurs : notion de contrainte (équilibre) ;
- ▶ Élasticité linéaire (comportement) ;
- ▶ Éléments de calcul des structures en matériau élastique linéaire

Et ensuite ?

- Dynamique et vibrations des structures (MEC 434, année 2) ;
- Modélisation des structures élancées (MEC 553, année 3) ;
- Méthodes numériques de résolution (MEC 568, année 3) ;
- **Comportements irréversibles des matériaux et structures (MEC 551)**

Objet du cours :

- ▶ **But : modéliser le comportement des matériaux et des structures hors de leur domaine d'élasticité (les processus de déformation ne sont plus réversibles).**

Objet du cours :

- ▶ **But : modéliser le comportement des matériaux et des structures hors de leur domaine d'élasticité (les processus de déformation ne sont plus réversibles).**
- ▶ **Présenter deux sources d'irréversibilité** conditionnant le dimensionnement des structures :
 - rupture fragile ;
 - plasticité
- ▶ **Notion unitaire de force thermodynamique**, permettant l'analyse des deux types d'irréversibilité
- ▶ **Concepts adaptés au calcul des structures** dans des conditions où leur comportement est irréversible.

Plan du cours

Comportements non linéaires des matériaux solides

Amphi 1

Rupture fragile

- ▶ Singularités de contrainte et ténacité des matériaux Amphi 2
- ▶ Analyse énergétique de la propagation d'une fissure I Amphi 3
- ▶ Analyse énergétique de la propagation d'une fissure II.
Fissuration par fatigue Amphi 4

Plasticité

- ▶ Comportement élasto-plastique Amphi 5
- ▶ Dissipation plastique Amphi 6
- ▶ Structures élasto-plastiques standards Amphi 7

Charges limites

Amphi 8

Equipe enseignante

- ▶ **Amphis** : Marc Bonnet, LMS – Ecole Polytechnique
bonnet@lms.polytechnique.fr
- ▶ **Petites classes** : Eric Lorentz, EDF R et D, Clamart
eric.lorentz@edf.fr
Jean-Jacques Marigo, LMS
marigo@lmm.jussieu.fr
Renaud Masson, CEA, Cadarache,
renaud.masson@cea.fr

Equipe enseignante

- ▶ **Amphis** : Marc Bonnet, LMS – Ecole Polytechnique
bonnet@lms.polytechnique.fr
- ▶ **Petites classes** : Eric Lorentz, EDF R et D, Clamart
eric.lorentz@edf.fr
Jean-Jacques Marigo, LMS
marigo@lmm.jussieu.fr
Renaud Masson, CEA, Cadarache,
renaud.masson@cea.fr
- ▶ **Cours** créé et initialement donné par Pierre Suquet, LMA (CNRS), Marseille.

Organisation pratique du cours

Déroulement du cours :

- ▶ **8 amphis** : 16/09, 23/09, 30/09, 07/10, 14/10, 21/10, 04/11, 18/11 (08h30–10h00, Amphi Gay-Lussac)
- ▶ **9 séances de PC** : 16/09, 23/09, 30/09, 07/10, 14/10, 21/10, 04/11, 18/11, 25/11 (10h15–12h15 ou 13h30–15h30)

Organisation pratique du cours

Déroulement du cours :

- ▶ **8 amphis** : 16/09, 23/09, 30/09, 07/10, 14/10, 21/10, 04/11, 18/11 (08h30–10h00, Amphi Gay-Lussac)
- ▶ **9 séances de PC** : 16/09, 23/09, 30/09, 07/10, 14/10, 21/10, 04/11, 18/11, 25/11 (10h15–12h15 ou 13h30–15h30)

Supports :

- ▶ Polycopié par P. Suquet ;
- ▶ Page internet du cours, accessible à partir de
www.lms.polytechnique.fr/users/bonnet/enseignement.html
ou depuis le catalogue des cours (lien) : documents PDF
 - Polycopié ;
 - Amphis ;
 - Sujets de PC ;
 - Contrôles des années antérieures

Organisation pratique du cours

Déroulement du cours :

- ▶ **8 amphis** : 16/09, 23/09, 30/09, 07/10, 14/10, 21/10, 04/11, 18/11 (08h30–10h00, Amphi Gay-Lussac)
- ▶ **9 séances de PC** : 16/09, 23/09, 30/09, 07/10, 14/10, 21/10, 04/11, 18/11, 25/11 (10h15–12h15 ou 13h30–15h30)

Supports :

- ▶ Polycopié par P. Suquet ;
- ▶ Page internet du cours, accessible à partir de
www.lms.polytechnique.fr/users/bonnet/enseignement.html
ou depuis le catalogue des cours (lien) : documents PDF
 - Polycopié ;
 - Amphis ;
 - Sujets de PC ;
 - Contrôles des années antérieures

Contrôle des connaissances :

- ▶ Devoir (Mécanique de la rupture), sujet distribué le **07/10**, copie à remettre (scolarité) le **06/11**, coefficient 40% ;
- ▶ Examen écrit (Plasticité, analyse limite), le **02/12**, coefficient 60%

Amphi 1 : Comportements non linéaires des matériaux solides

1. Variété des comportements macroscopiques
2. Diversité des mécanismes microscopiques
3. Critères (transition d'un régime de comportement à un autre)
 - Rappels sur les contraintes
 - Critères basés sur le vecteur contrainte.
 - Critères basés sur le tenseur de contrainte
4. Exemples de rupture en torsion

Plan

1. Variété des comportements macroscopiques

2. Diversité des mécanismes microscopiques

3. Critères (transition d'un régime de comportement à un autre)

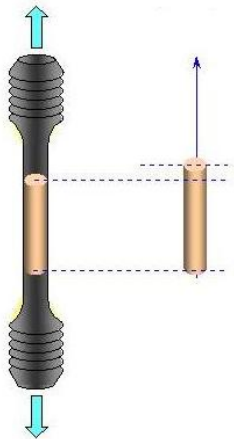
Rappels sur les contraintes

Critères basés sur le vecteur contrainte.

Critères basés sur le tenseur de contrainte

4. Exemples de rupture en torsion

Essai de traction uniaxiale

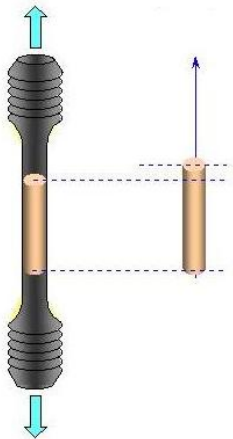


Dans la zone utile de l'éprouvette :

$$\sigma = \frac{F}{S}, \quad \varepsilon = \frac{\Delta L}{L_0}.$$

- ▶ $F, \Delta L$: relatifs à la **structure**.
- σ, ε : relatifs au **matériau**.

Essai de traction uniaxiale



Dans la zone utile de l'éprouvette :

$$\sigma = \frac{F}{S}, \quad \varepsilon = \frac{\Delta L}{L_0}.$$

► $F, \Delta L$: relatifs à la **structure**.

σ, ε : relatifs au **matériau**.

► **Loi de comportement (matériau)**

= relation entre σ et ε (et leurs dérivées en temps...)

► **Equilibre de la structure** : Puissance des efforts intérieurs + puissance des efforts extérieurs = 0

$$\int_V \sigma \dot{\varepsilon} \, d\Omega = F \dot{L}.$$

Régime élastique (le plus souvent linéaire), réversible

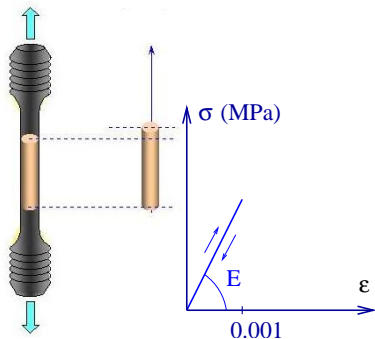
Faibles valeurs de la déformation :

$$0 \leq \varepsilon \leq 10^{-3}$$

Relation linéaire entre contrainte et déformation uniaxiales

$$\sigma = E\varepsilon.$$

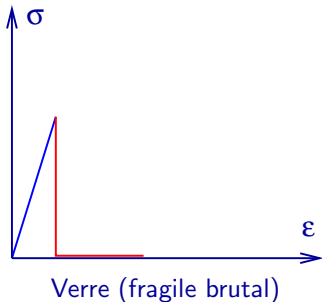
E : Module d'Young,
très variable selon le matériau considéré :



- ▶ $E = 2 \text{ MPa}$ (caoutchouc)
- ...
- ▶ $E = 30\,000 \text{ MPa}$ (béton)
- ▶ $E = 70\,000 \text{ MPa}$ (aluminium)
- ▶ $E = 190\,000 \text{ MPa}$ (acier inox)
- ▶ $E = 400\,000 \text{ MPa}$ (fibres de carbone HM)

Charge au-delà de la limite d'élasticité

(a) Matériaux **fragiles** (céramiques, métaux et polymères à basse température...),

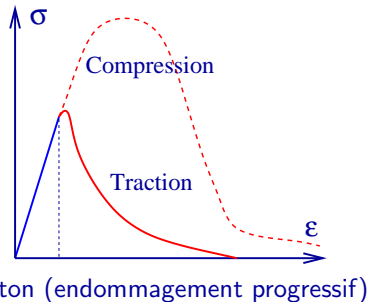
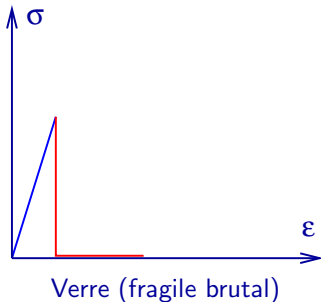


Fragilité :

Faible aptitude à supporter des déformations au-delà du régime élastique.

Charge au-delà de la limite d'élasticité

- (a) Matériaux **fragiles** (céramiques, métaux et polymères à basse température...),
Matériaux **endommageables** (béton, certains composites...)



Fragilité :

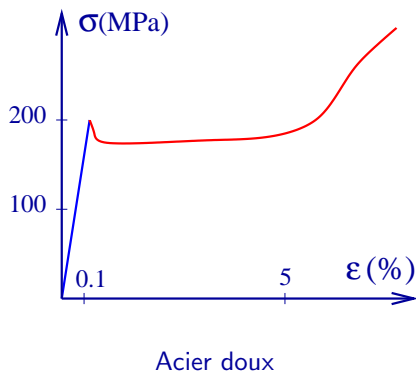
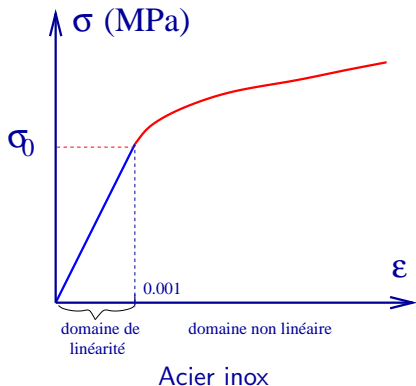
Faible aptitude à supporter des déformations au-delà du régime élastique.

Endommagement :

Dégradation des propriétés (raideur E notamment) au delà du régime élastique.

Charge au-delà de la limite d'élasticité

(b) Matériaux **ductiles** (métaux, certains polymères...)

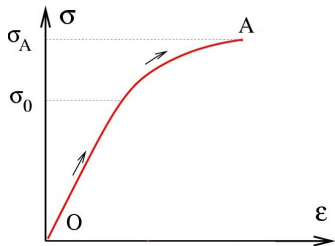


Ductilité : aptitude à supporter des déformations élevées (qq % à qq dizaines de %)

Charge-décharge sur matériaux ductiles

Plasticité : Aptitude à la mise en forme

(après déformation et décharge, il subsiste des déformations permanentes).

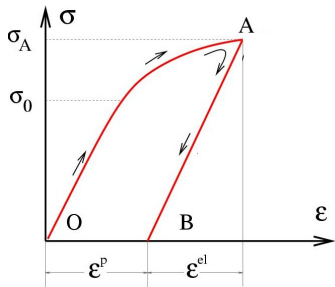


► **Charge** $O \rightarrow A$.

Charge-décharge sur matériaux ductiles

Plasticité : Aptitude à la mise en forme

(après déformation et décharge, il subsiste des déformations permanentes).



► **Charge** $O \rightarrow A$.

► **Décharge** $A \rightarrow B \simeq$ parallèle au trajet élastique.
Déformation résiduelle ϵ^P en B .

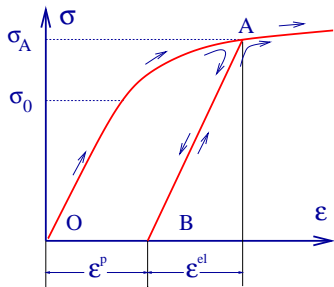
Décomposition de la déformation ϵ : partie élastique ϵ^{el} et partie plastique ϵ^P

$$\epsilon = \epsilon^{el} + \epsilon^P.$$

Charge-décharge sur matériaux ductiles

Plasticité : Aptitude à la mise en forme

(après déformation et décharge, il subsiste des déformations permanentes).



► **Charge** $O \rightarrow A$.

► **Décharge** $A \rightarrow B \simeq$ parallèle au trajet élastique.
Déformation résiduelle ϵ^P en B .

► Charge $B \rightarrow A \simeq A \rightarrow B$.

Limite élastique **initiale** (en partant de 0) : σ_0

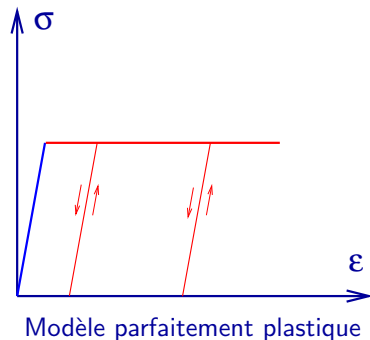
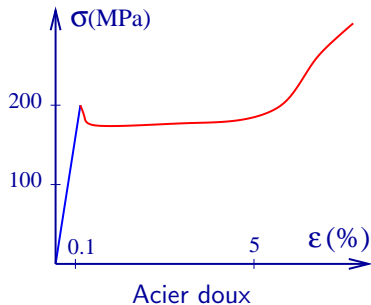
Limite élastique **actuelle** (en partant de B) : σ_A .

Décomposition de la déformation ϵ : partie élastique ϵ^{el} et partie plastique ϵ^P

$$\epsilon = \epsilon^{el} + \epsilon^P.$$

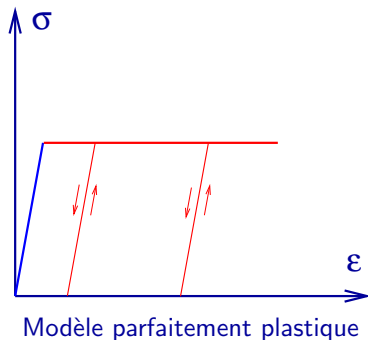
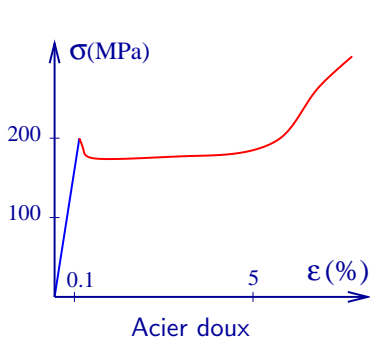
Ecrouissage : la limite d'élasticité dépend de la déformation plastique.

Plasticité parfaite (absence d'écroutissement)



L'acier doux est un acier à **plateau**. La déformation plastique n'affecte quasiment pas la limite d'élasticité.

Plasticité parfaite (absence d'écroutissement)



L'acier doux est un acier à **plateau**. La déformation plastique n'affecte quasiment pas la limite d'élasticité.

Approximation : Modèle élastique parfaitement plastique où la **limite d'élasticité est constante** (absence d'écroutissement).

Comportement complexe de certains matériaux

Exemple du composite Carbone + epoxy $[0,90]$, composé de couches d'unidirectionnels identiques mais croisées à 0^0 et 90^0 :



Comportement complexe de certains matériaux

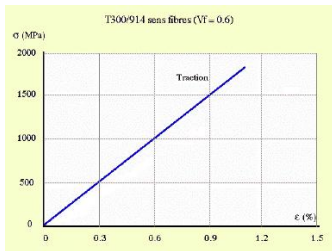
Exemple du composite Carbone + epoxy $[0,90]$, composé de couches d'unidirectionnels identiques mais croisées à 0^0 et 90^0 :



Essai

Comportement complexe de certains matériaux

Exemple du composite Carbone + epoxy $[0,90]$, composé de couches d'unidirectionnels identiques mais croisées à 0^0 et 90^0 :

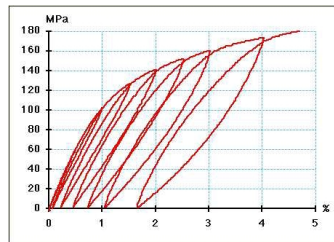
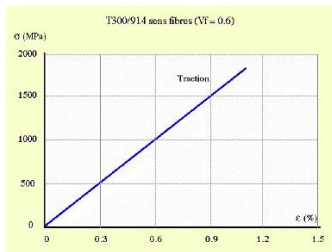


Essai

Traction à 0^0 :
Comportement fragile

Comportement complexe de certains matériaux

Exemple du composite Carbone + epoxy [0,90], composé de couches d'unidirectionnels identiques mais croisées à 0^0 et 90^0 :



Essai

Traction à 0^0 :
Comportement fragile

Traction à 45^0 :
Comportement plastique

Récapitulation. Premiers enseignements

- ▶ Il existe une **grande variété de comportements**.

Extrêmes : le **comportement fragile** et le **comportement élasto-plastique**

- **Fragile** : pas de déformation plastique avant rupture.
 - **Ductile** (ou plastique) : déformations plastiques substantielles avant rupture.
- ▶ La nature du comportement (fragile, ductile) n'est pas intrinsèque, mais dépend de la température ou d'autres facteurs (hygrométrie pour le bois...).
 - ▶ Dans tous les cas, il faut exprimer une **transition** entre un régime de comportement et un autre (limite d'élasticité, seuil d'endommagement).

⇒ mécanismes microscopiques, essais multiaxiaux.

Plan

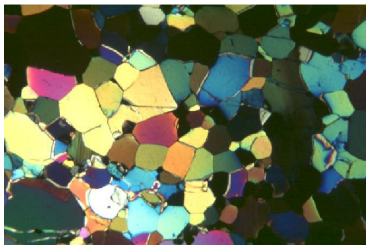
1. Variété des comportements macroscopiques
- 2. Diversité des mécanismes microscopiques**
3. Critères (transition d'un régime de comportement à un autre)
 - Rappels sur les contraintes
 - Critères basés sur le vecteur contrainte.
 - Critères basés sur le tenseur de contrainte
4. Exemples de rupture en torsion

Diversité des mécanismes microscopiques

Les mécanismes sont différents :

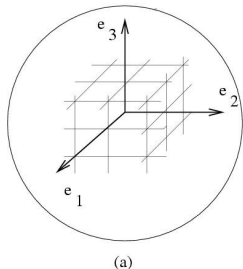
- ▶ selon les comportements : fragile, ductile ;
- ▶ selon la microstructure des matériaux : métaux (cristallins), verres (amorphes), polymères, composites, céramiques...

Métal = Matériau polycristallin



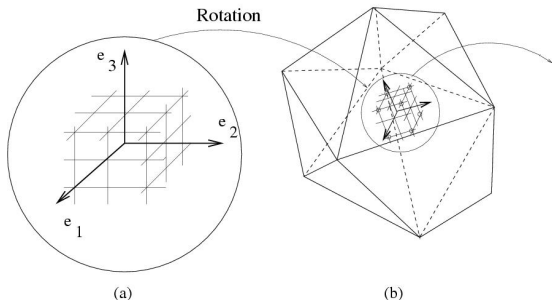
Polycrystal = Assemblage de grains élémentaires.

Echelles



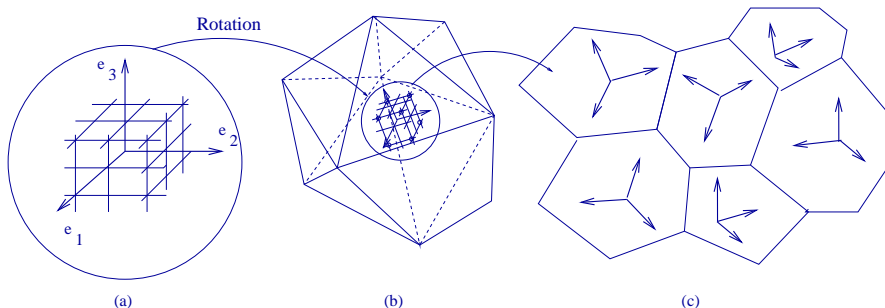
- (a) **Echelle atomique** (nanomètre ou moins) : **réseau périodique**.
structure cristallographique (cubique centrée, cubique faces centrées, hexagonale...)

Echelles



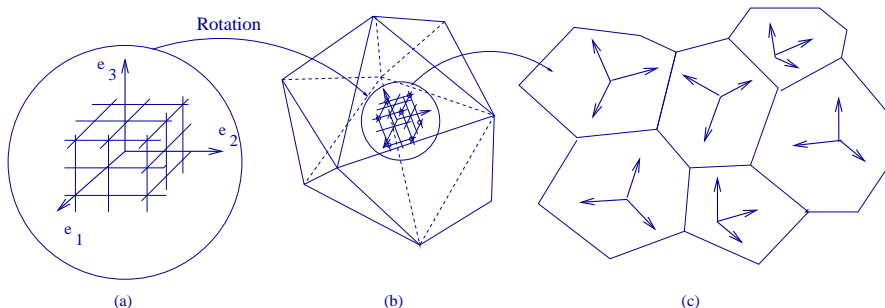
- (a) **Echelle atomique** (nanomètre ou moins) : **réseau périodique**.
structure cristallographique (cubique centrée, cubique faces centrées, hexagonale...)
- (b) **Echelle microscopique** (1 à quelques dizaines de microns) : **monocristal**.
orientation fixe du réseau.

Echelles



- (a) **Echelle atomique** (nanomètre ou moins) : **réseau périodique**.
structure cristallographique (cubique centrée, cubique faces centrées, hexagonale...)
- (b) **Echelle microscopique** (1 à quelques dizaines de microns) : **monocristal**.
orientation fixe du réseau.
- (c) **Echelle mésoscopique** (centaine de microns) : **polycristal**.

Echelles



- (a) **Echelle atomique** (nanomètre ou moins) : **réseau périodique**.
structure cristallographique (cubique centrée, cubique faces centrées, hexagonale...)
- (b) **Echelle microscopique** (1 à quelques dizaines de microns) : **monocristal**.
orientation fixe du réseau.
- (c) **Echelle mésoscopique** (centaine de microns) : **polycristal**.
- (d) **Echelle macroscopique, laboratoire** (centimètre) : éprouvette.
- (e) **Echelle macroscopique, ingénieur** (centimètre, mètre, kilomètre) :
structures.

Mécanismes de rupture fragile : clivage

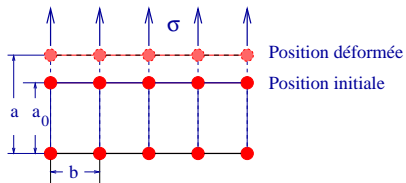
Faciès de rupture fragile à l'échelle du polycristal



Clivage : surfaces lisses et planes. Dépendent de l'orientation des grains.

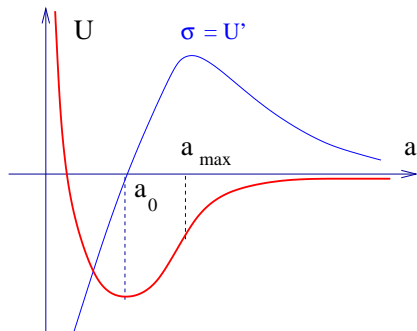
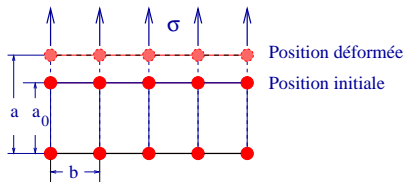
Mécanisme de clivage à l'échelle atomique

Clivage : séparation le long d'un plan atomique.



Mécanisme de clivage à l'échelle atomique

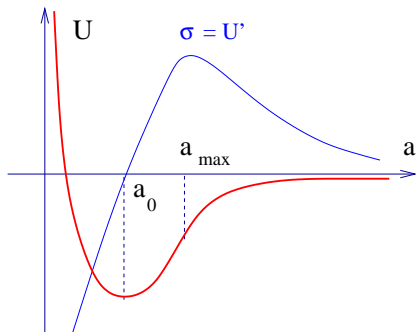
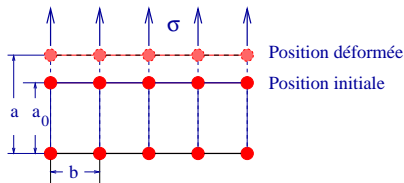
Clivage : séparation le long d'un plan atomique.



U **potentiel interatomique** : Minimiser $U(a) - \sigma a$.

Mécanisme de clivage à l'échelle atomique

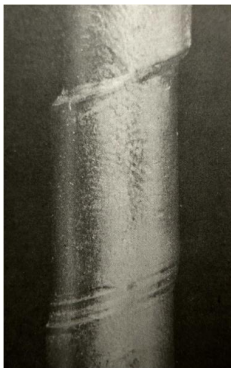
Clivage : séparation le long d'un plan atomique.



U **potentiel interatomique** : Minimiser $U(a) - \sigma a$.

Le clivage est activé par la contrainte normale aux plans atomiques faibles.
Mécanisme dominant dans les matériaux fragiles.

Mécanismes de déformation plastique (métaux) : glissement

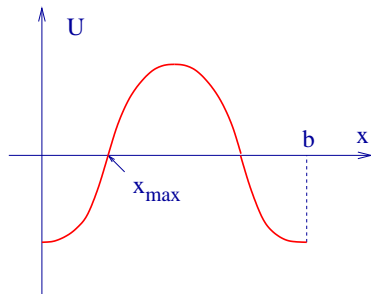
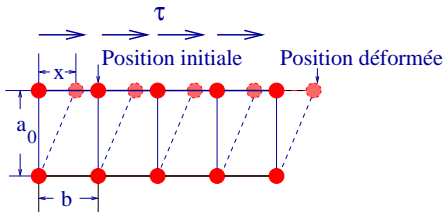


Traction sur monocristal de Zinc

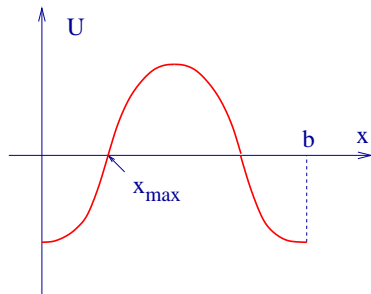
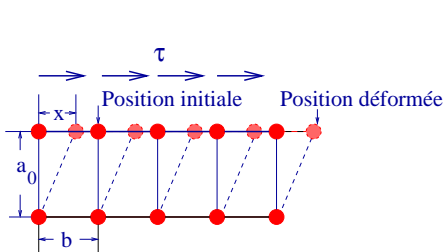


Compression sur monocristal d'Aluminium

Glissement



Glissement



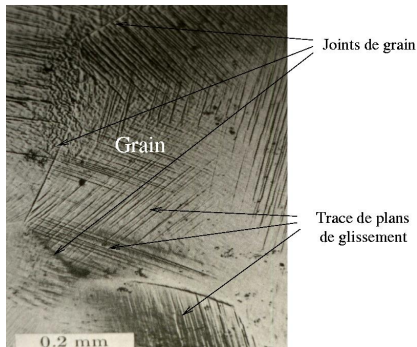
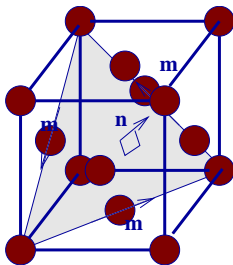
Le glissement est activé par la contrainte de cisaillement sur les plans atomiques dont les liaisons sont les plus faibles.

Dans les matériaux cubiques faces centrées (CFC) ce sont les plans denses.

Glissement = mécanisme dominant en Plasticité.

Le glissement laisse le réseau globalement invariant, ce qui permet de multiplier les glissements et d'augmenter la déformation.

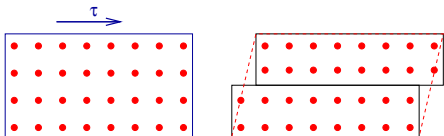
Glissement : exemple du cuivre (structure cubique faces centrées)



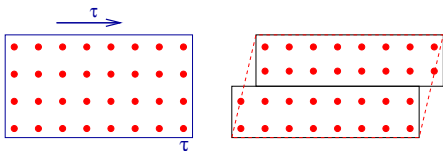
- ▶ 4 plans denses ;
- ▶ Le glissement respecte l'invariance du réseau atomique : 3 directions invariantes par plan

⇒ **12 systèmes de glissement.**

Le glissement en bloc est-il possible ?



Le glissement en bloc est-il possible ?

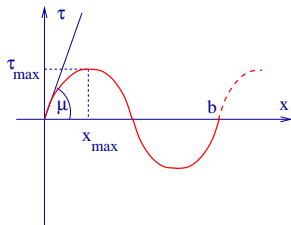
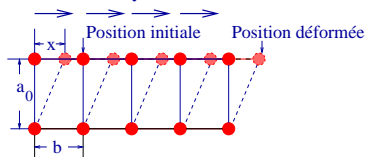


Contrainte de cisaillement **périodique** :

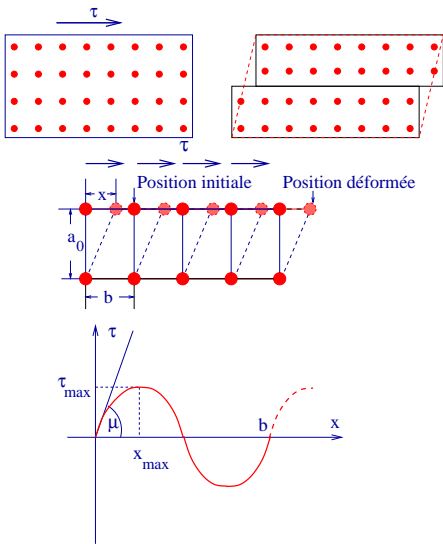
$$\tau \simeq \tau_{\max} \sin \frac{2\pi x}{b}, \quad \gamma = \frac{x}{a_0}.$$

A l'origine :

$$\mu = \frac{\partial \tau}{\partial \gamma} = \frac{2\pi a_0}{b} \tau_{\max},$$



Le glissement en bloc est-il possible ?



Contrainte de cisaillement **périodique** :

$$\tau \simeq \tau_{\max} \sin \frac{2\pi x}{b}, \quad \gamma = \frac{x}{a_0}.$$

A l'origine :

$$\mu = \frac{\partial \tau}{\partial \gamma} = \frac{2\pi a_0}{b} \tau_{\max},$$

$$\Rightarrow \tau_{\max} \simeq \frac{\mu}{2\pi} \simeq \frac{\mu}{6} \quad (a_0 \simeq b).$$

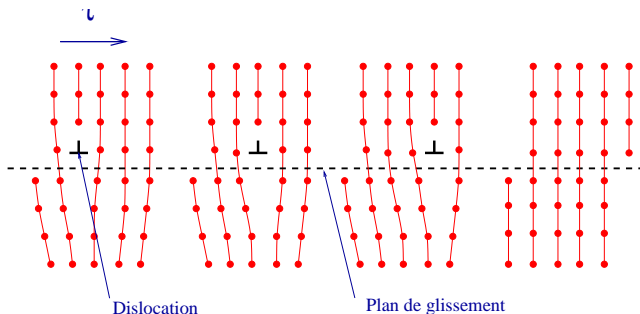
Cette valeur théorique n'est observée que dans les échantillons de très petite taille : « whiskers » .

Valeurs communément observées :

$$\tau_{\max} \simeq \mu/1000.$$

\Rightarrow **Glissement en bloc impossible.**
Calcul et résultat analogue pour le clivage.

Glissement progressif : dislocations.

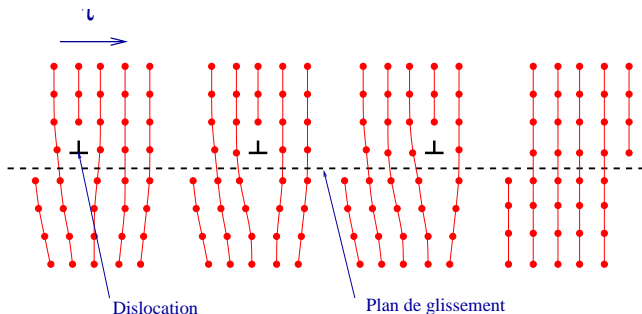


Défauts dans la structure atomique du réseau : $O(10^{13}) / \text{cm}^3$

Analogie : **un pli dans un tapis est plus facile à déplacer qu'un tapis en bloc !**



Glissement progressif : dislocations.



Défauts dans la structure atomique du réseau : $O(10^{13}) / \text{cm}^3$

Analogie : **un pli dans un tapis est plus facile à déplacer qu'un tapis en bloc !**



⇒ **Ordre de grandeur de la contrainte de cisaillement correct.**

Enseignements à tirer pour un polycristal

Orientation aléatoire des grains.

- ▶ **Clivage** : activé par la **contrainte normale** au plan sur lequel le clivage se produit.
- ▶ **Glissement** : activé par la **contrainte de cisaillement** dans la direction dans laquelle se produit le glissement.
- ▶ **La présence de défauts est nécessaire** pour expliquer les ordres de grandeur des contraintes de clivage ou de glissement. Microfissures, dislocations...

Plan

1. Variété des comportements macroscopiques
2. Diversité des mécanismes microscopiques
- 3. Critères (transition d'un régime de comportement à un autre)**
 - Rappels sur les contraintes
 - Critères basés sur le vecteur contrainte.
 - Critères basés sur le tenseur de contrainte
4. Exemples de rupture en torsion

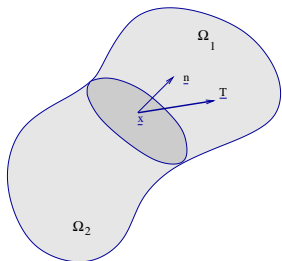
Plan

1. Variété des comportements macroscopiques
2. Diversité des mécanismes microscopiques
- 3. Critères (transition d'un régime de comportement à un autre)**
 - Rappels sur les contraintes
 - Critères basés sur le vecteur contrainte.
 - Critères basés sur le tenseur de contrainte
4. Exemples de rupture en torsion

Notion de vecteur contrainte

Sert à la description des **efforts intérieurs**.

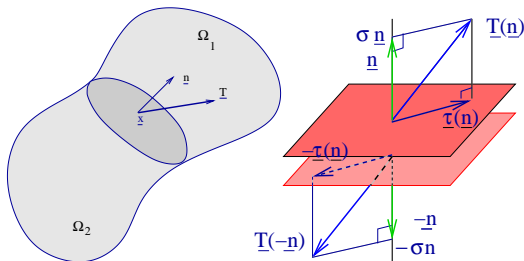
$\underline{T}(\underline{n})$: **densité surfacique d'efforts** exercés par Ω_1 sur Ω_2 sur la **facette de normale \underline{n}** .



Notion de vecteur contrainte

Sert à la description des **efforts intérieurs**.

$\underline{T}(\underline{n})$: **densité surfacique d'efforts** exercés par Ω_1 sur Ω_2 sur la **facette de normale \underline{n}** .

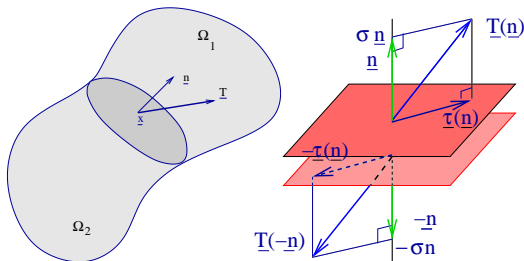


► $\underline{T}(-\underline{n}) = -\underline{T}(\underline{n})$:
action-réaction

Notion de vecteur contrainte

Sert à la description des **efforts intérieurs**.

$\underline{T}(\underline{n})$: **densité surfacique d'efforts** exercés par Ω_1 sur Ω_2 sur la **facette de normale** \underline{n} .



► $\underline{T}(-\underline{n}) = -\underline{T}(\underline{n})$:
action-réaction

► $\sigma = \underline{T} \cdot \underline{n} = T_i n_i$:
contrainte normale

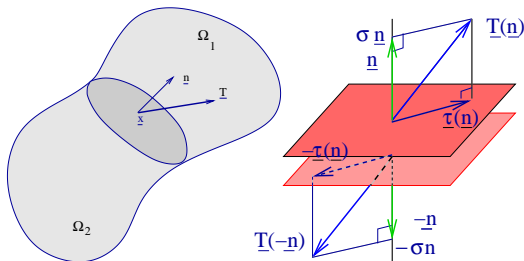
$\sigma > 0$: traction ;

$\sigma < 0$: compression

Notion de vecteur contrainte

Sert à la description des **efforts intérieurs**.

$\underline{T}(\underline{n})$: **densité surfacique d'efforts** exercés par Ω_1 sur Ω_2 sur la **facette de normale** \underline{n} .



- ▶ $\underline{T}(-\underline{n}) = -\underline{T}(\underline{n})$:
action-réaction
- ▶ $\sigma = \underline{T} \cdot \underline{n} = T_i n_i$:
contrainte normale
 - $\sigma > 0$: traction ;
 - $\sigma < 0$: compression
- ▶ $\underline{\tau}(\underline{n}) = \underline{T} - \sigma \underline{n}$:
contrainte **tangentielle**, ou
de cisaillement.

Tenseur des contraintes de Cauchy.

L'état de contrainte (traction, compression, cisaillement) **dépend de la facette** \underline{n} sur laquelle on considère $\underline{T}(\underline{n})$:

$$\exists \underline{\underline{\sigma}} \in \mathbb{R}^3 \otimes \mathbb{R}^3 : \quad \underline{T}(\underline{n}) = \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{n}.$$

Tenseur des contraintes de Cauchy.

L'état de contrainte (traction, compression, cisaillement) **dépend de la facette** \underline{n} sur laquelle on considère $\underline{T}(\underline{n})$:

$$\exists \underline{\underline{\sigma}} \in \mathbb{R}^3 \otimes \mathbb{R}^3 : \quad \underline{T}(\underline{n}) = \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{n}.$$

Propriétés du tenseur des contraintes $\underline{\underline{\sigma}}$:

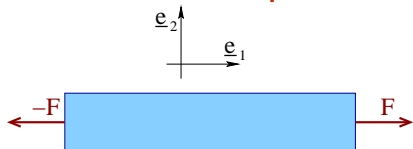
- ▶ $\underline{\underline{\sigma}}$ est **symétrique**.
- ▶ $\underline{\underline{\sigma}}$ est **diagonalisable** :

$$\exists (\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3) : \quad \underline{\underline{\sigma}} = \sigma_1 \underline{e}_1 \otimes \underline{e}_1 + \sigma_2 \underline{e}_2 \otimes \underline{e}_2 + \sigma_3 \underline{e}_3 \otimes \underline{e}_3$$

Propriété caractéristique : le cisaillement est nul sur les facettes principales de contrainte.

Quelques exemples (pour se rafraîchir la mémoire)

Traction simple

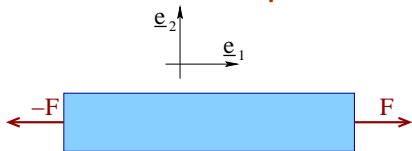


$$\underline{\underline{\sigma}} = \sigma \underline{e}_1 \otimes \underline{e}_1,$$

$$\sigma = F/S.$$

Quelques exemples (pour se rafraîchir la mémoire)

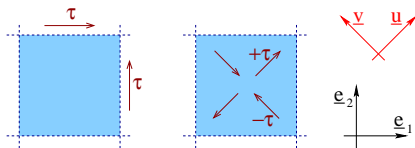
Traction simple



$$\underline{\underline{\sigma}} = \sigma \underline{e}_1 \otimes \underline{e}_1,$$

$$\sigma = F/S.$$

Cisaillement pur



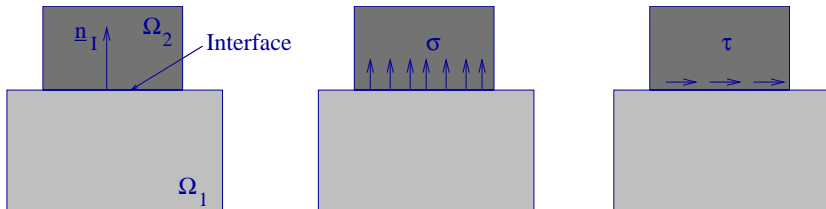
$$\underline{\underline{\sigma}} = \tau (\underline{e}_1 \otimes \underline{e}_2 + \underline{e}_2 \otimes \underline{e}_1),$$

$$\underline{\underline{\sigma}} = \tau \underline{u} \otimes \underline{u} - \tau \underline{v} \otimes \underline{v}.$$

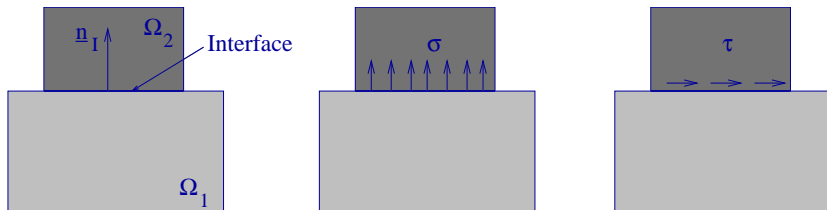
Plan

1. Variété des comportements macroscopiques
2. Diversité des mécanismes microscopiques
- 3. Critères (transition d'un régime de comportement à un autre)**
 - Rappels sur les contraintes
 - Critères basés sur le vecteur contrainte.
 - Critères basés sur le tenseur de contrainte
4. Exemples de rupture en torsion

Interfaces à résistance limitée

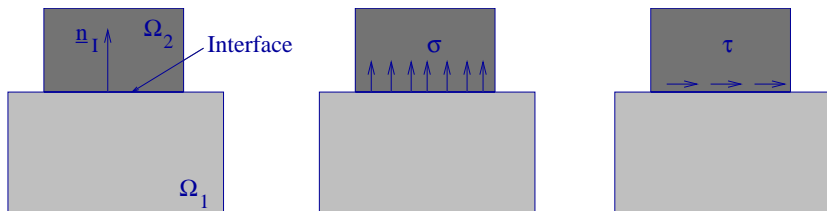


Interfaces à résistance limitée



Décollement (Contrainte normale) : $\sigma(\underline{n}_I) \leq \sigma_c$.

Interfaces à résistance limitée



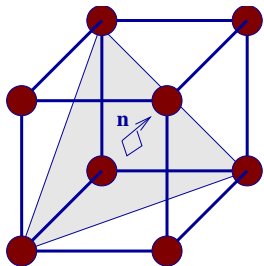
Décollement (Contrainte normale) : $\sigma(\underline{n}_I) \leq \sigma_c$.

Cisaillement (Contraintes tangentielles) : $|\underline{\tau}(\underline{n}_I)| \leq \tau_c$.

σ_c et τ_c : caractéristiques « matériau » de l'interface.

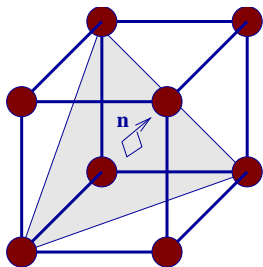
Monocristal : critère de clivage

Plans de clivage facile, de normale $\underline{n}^{(p)}$.



Monocristal : critère de clivage

Plans de clivage facile, de normale $\underline{n}^{(p)}$.

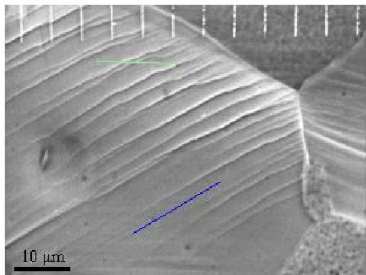
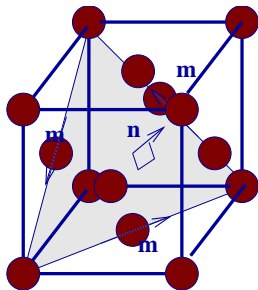


$$\sup_{p=1, \dots, P} \sigma(\underline{n}^{(p)}) \leq \sigma_c$$

- ▶ Si $\sup_{p=1, \dots, P} \sigma(\underline{n}^{(p)}) < \sigma_c$:
pas de clivage ;
- ▶ Si $\exists p$ tel que $\sigma(\underline{n}^{(p)}) = \sigma_c$:
clivage sur le(s) plan(s) p où la contrainte critique est atteinte.

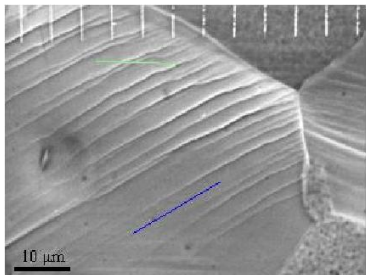
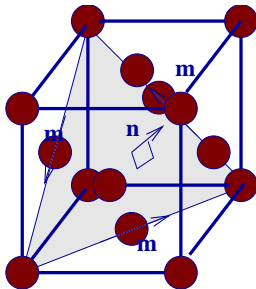
Monocristal : critère de glissement

P plans de glissement, N systèmes de glissement $(\underline{n}^{(k)}, \underline{m}^{(k)})$.



Monocristal : critère de glissement

P plans de glissement, N systèmes de glissement $(\underline{n}^{(k)}, \underline{m}^{(k)})$.

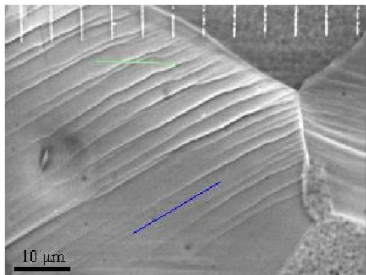
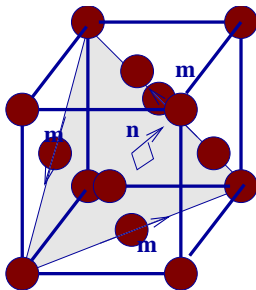


Cission réduite sur le système k :

$$\tau^{(k)} = (\underline{\sigma} \cdot \underline{n}^{(k)}) \cdot \underline{m}^{(k)} = \underline{m}^{(k)} \cdot \underline{\sigma} \cdot \underline{n}^{(k)}.$$

Monocristal : critère de glissement

P plans de glissement, N systèmes de glissement ($\underline{n}^{(k)}$, $\underline{m}^{(k)}$).



Cission réduite sur le système k :

$$\tau^{(k)} = (\underline{\sigma} \cdot \underline{n}^{(k)}) \cdot \underline{m}^{(k)} = \underline{m}^{(k)} \cdot \underline{\sigma} \cdot \underline{n}^{(k)}.$$

$$\text{Sup}_{k=1, \dots, P} \tau^{(k)} \leq \tau_c$$

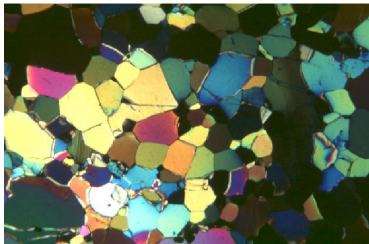
► Si $\text{Sup}_{k=1, \dots, P} \tau^{(k)} < \tau_c$:

pas de glissement ;

► Si $\exists k$ tel que $\tau^{(k)} = \tau_c$:

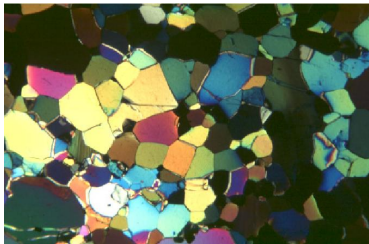
glissement sur le(s) plan(s) de normale $\underline{n}^{(k)}$
et dans la direction $\underline{m}^{(k)}$.

Polycristal isotrope : critère de clivage, critère de glissement.



- ▶ Orientation aléatoire des grains.
⇒ Pas de plan privilégié.
- ▶ Matériau fragile : **clivage**.
- ▶ Matériau ductile : **glissement**.

Polycristal isotrope : critère de clivage, critère de glissement.



Clivage :

$$\sup_{|\underline{n}|=1} \sigma(\underline{n}) \leq \sigma_0$$

Critère de la contrainte normale maximale.

Glissement :

$$\sup_{|\underline{n}|=1} |\underline{\tau}(\underline{n})| \leq k$$

Critère du cisaillement maximal (Tresca)

- ▶ Orientation aléatoire des grains.
 ⇒ Pas de plan privilégié.
- ▶ Matériau fragile : **clivage**.
- ▶ Matériau ductile : **glissement**.

Contrainte normale maximale.

Dans la base principale de contrainte ($\sigma_1 \leq \sigma_2 \leq \sigma_3$) :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{pmatrix}, \quad \underline{n} = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix}, \quad \underline{T}(\underline{n}) = \begin{pmatrix} \sigma_1 n_1 \\ \sigma_2 n_2 \\ \sigma_3 n_3 \end{pmatrix}$$

$$\sigma(\underline{n}) = \underline{n} \cdot \underline{T}(\underline{n}) = \sigma_3 - (\sigma_3 - \sigma_1)n_1^2 - (\sigma_3 - \sigma_2)n_2^2 \leq \sigma_3.$$

$$(n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1)$$

Maximum = σ_3

atteint pour $n_1 = n_2 = 0, n_3 = 1$.

Contrainte normale maximale.

Dans la base principale de contrainte ($\sigma_1 \leq \sigma_2 \leq \sigma_3$) :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{pmatrix}, \quad \underline{\underline{n}} = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix}, \quad \underline{\underline{T}}(\underline{\underline{n}}) = \begin{pmatrix} \sigma_1 n_1 \\ \sigma_2 n_2 \\ \sigma_3 n_3 \end{pmatrix}$$

$$\sigma(\underline{\underline{n}}) = \underline{\underline{n}} \cdot \underline{\underline{T}}(\underline{\underline{n}}) = \sigma_3 - (\sigma_3 - \sigma_1)n_1^2 - (\sigma_3 - \sigma_2)n_2^2 \leq \sigma_3.$$

$$(n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1)$$

Maximum = σ_3 atteint pour $n_1 = n_2 = 0$, $n_3 = 1$.

La contrainte normale maximale est égale à la plus grande contrainte principale σ_3 . Elle est atteinte sur la facette principale de normale $\underline{\underline{e}}_3$.

$$\text{Sup}_{|\underline{\underline{n}}|=1} \sigma(\underline{\underline{n}}) = \sigma_3 \leq \sigma_0.$$

σ_0 : contrainte limite en **traction simple** du matériau

Critère de Tresca (cisaillement maximal) : $\text{Sup } |\underline{\tau}(\underline{n})| < k$

Dans la base principale de contrainte ($\sigma_1 \leq \sigma_2 \leq \sigma_3$) :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{pmatrix}, \quad \underline{n} = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix}, \quad \underline{T}(\underline{n}) = \begin{pmatrix} \sigma_1 n_1 \\ \sigma_2 n_2 \\ \sigma_3 n_3 \end{pmatrix}$$

$$|\underline{T}(\underline{n})|^2 = |\underline{\tau}(\underline{n})|^2 + \sigma(\underline{n})^2 = \sigma_1^2 n_1^2 + \sigma_2^2 n_2^2 + \sigma_3^2 n_3^2$$

$$|\underline{\tau}(\underline{n})|^2 = \left(\frac{\sigma_3 - \sigma_1}{2}\right)^2 - \left(\sigma(\underline{n}) - \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2}\right)^2 - (\sigma_2 - \sigma_1)(\sigma_3 - \sigma_2)n_2^2.$$

Critère de Tresca (cisaillement maximal) : $\text{Sup } |\underline{\tau}(\underline{n})| < k$

Dans la base principale de contrainte ($\sigma_1 \leq \sigma_2 \leq \sigma_3$) :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{pmatrix}, \quad \underline{n} = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix}, \quad \underline{T}(\underline{n}) = \begin{pmatrix} \sigma_1 n_1 \\ \sigma_2 n_2 \\ \sigma_3 n_3 \end{pmatrix}$$

$$|\underline{T}(\underline{n})|^2 = |\underline{\tau}(\underline{n})|^2 + \sigma(\underline{n})^2 = \sigma_1^2 n_1^2 + \sigma_2^2 n_2^2 + \sigma_3^2 n_3^2$$

$$|\underline{\tau}(\underline{n})|^2 = \left(\frac{\sigma_3 - \sigma_1}{2}\right)^2 - \left(\sigma(\underline{n}) - \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2}\right)^2 - (\sigma_2 - \sigma_1)(\sigma_3 - \sigma_2)n_2^2.$$

Maximum atteint pour $n_2 = 0$, $\sigma(\underline{n}) = \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2}$ i.e. $n_1 = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$, $n_3 = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Critère de Tresca (cisaillement maximal) : $\text{Sup } |\underline{\tau}(\underline{n})| < k$

Dans la base principale de contrainte ($\sigma_1 \leq \sigma_2 \leq \sigma_3$) :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{pmatrix}, \quad \underline{n} = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix}, \quad \underline{T}(\underline{n}) = \begin{pmatrix} \sigma_1 n_1 \\ \sigma_2 n_2 \\ \sigma_3 n_3 \end{pmatrix}$$

$$|\underline{T}(\underline{n})|^2 = |\underline{\tau}(\underline{n})|^2 + \sigma(\underline{n})^2 = \sigma_1^2 n_1^2 + \sigma_2^2 n_2^2 + \sigma_3^2 n_3^2$$

$$|\underline{\tau}(\underline{n})|^2 = \left(\frac{\sigma_3 - \sigma_1}{2}\right)^2 - \left(\sigma(\underline{n}) - \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2}\right)^2 - (\sigma_2 - \sigma_1)(\sigma_3 - \sigma_2)n_2^2.$$

Maximum atteint pour $n_2 = 0$, $\sigma(\underline{n}) = \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2}$ i.e. $n_1 = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$, $n_3 = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Le cisaillement maximal est égal à la moitié de la plus grande différence entre contraintes principales. Il est atteint sur les facettes qui ont pour normale l'une des bissectrices des directions \underline{e}_1 et \underline{e}_3 .

$$2 \text{ Sup}_{|\underline{n}|=1} |\underline{\tau}(\underline{n})| = \sigma_3 - \sigma_1 \leq \sigma_0. \quad \text{où } \sigma_0 = 2k$$

k : contrainte limite en **cisaillement**; σ_0 : contrainte limite en **traction simple**

Propriétés du critère de Tresca

- ▶ Le critère de Tresca (ou du cisaillement maximal) est insensible à la pression :

$$\underline{\underline{\sigma}}^* = \underline{\underline{\sigma}} - p \underline{\underline{i}} \implies \begin{cases} \sigma_1^* = \sigma_1 - p, \\ \sigma_2^* = \sigma_2 - p, \\ \sigma_3^* = \sigma_3 - p \end{cases}$$

Propriétés du critère de Tresca

- Le critère de Tresca (ou du cisaillement maximal) est insensible à la pression :

$$\underline{\underline{\sigma}}^* = \underline{\underline{\sigma}} - p\underline{\underline{i}} \implies \begin{cases} \sigma_1^* = \sigma_1 - p, \\ \sigma_2^* = \sigma_2 - p, \\ \sigma_3^* = \sigma_3 - p \end{cases}$$

De façon plus générale :

$$\underline{\underline{T}}^*(\underline{\underline{n}}) = \underline{\underline{T}}(\underline{\underline{n}}) - p\underline{\underline{n}}, \implies \boxed{\sigma^*(\underline{\underline{n}}) = \sigma(\underline{\underline{n}}) - p, \quad \tau^*(\underline{\underline{n}}) = \tau(\underline{\underline{n}}).}$$

Propriétés du critère de Tresca

- ▶ Le critère de Tresca (ou du cisaillement maximal) est insensible à la pression :

$$\underline{\underline{\sigma}}^* = \underline{\underline{\sigma}} - p\underline{\underline{i}} \implies \begin{cases} \sigma_1^* = \sigma_1 - p, \\ \sigma_2^* = \sigma_2 - p, \\ \sigma_3^* = \sigma_3 - p \end{cases}$$

De façon plus générale :

$$\underline{\underline{T}}^*(\underline{\underline{n}}) = \underline{\underline{T}}(\underline{\underline{n}}) - p\underline{\underline{n}}, \implies \sigma^*(\underline{\underline{n}}) = \sigma(\underline{\underline{n}}) - p, \quad \tau^*(\underline{\underline{n}}) = \tau(\underline{\underline{n}}).$$

- ▶ Le critère de Tresca ne dépend pas de la contrainte principale intermédiaire σ_2 :

$$\text{Sup}_{\underline{\underline{n}}=1} |\underline{\underline{T}}(\underline{\underline{n}})| = \frac{\sigma_3 - \sigma_1}{2}.$$

Plan

1. Variété des comportements macroscopiques
2. Diversité des mécanismes microscopiques
- 3. Critères (transition d'un régime de comportement à un autre)**
 - Rappels sur les contraintes
 - Critères basés sur le vecteur contrainte.
 - Critères basés sur le tenseur de contrainte
4. Exemples de rupture en torsion

Critères basés sur le tenseur de contrainte

- ▶ Accord du critère de Tresca avec l'expérience pas toujours bon.
- ▶ Contraintes principales parfois lourdes à calculer.
- ▶ Critère non différentiable, source de difficultés en calcul numérique

Critères basés sur le tenseur de contrainte

- ▶ Accord du critère de Tresca avec l'expérience pas toujours bon.
- ▶ Contraintes principales parfois lourdes à calculer.
- ▶ Critère non différentiable, source de difficultés en calcul numérique

⇒ **On exprime souvent les critères en fonction du tenseur des contraintes :**

$$f(\underline{\underline{\sigma}}) \leq 0.$$

Critères basés sur le tenseur de contrainte

- ▶ Accord du critère de Tresca avec l'expérience pas toujours bon.
- ▶ Contraintes principales parfois lourdes à calculer.
- ▶ Critère non différentiable, source de difficultés en calcul numérique

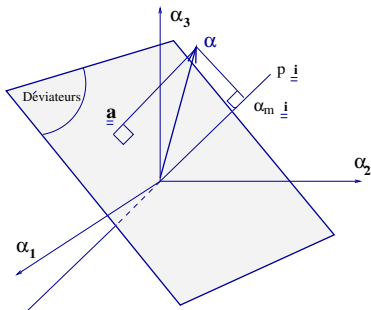
⇒ **On exprime souvent les critères en fonction du tenseur des contraintes :**

$$f(\underline{\underline{\sigma}}) \leq 0.$$

Fonction f permettant d'exprimer une limitation du cisaillement ?

Parties sphérique et déviatorique de $\underline{\underline{\sigma}}$

Décomposition **orthogonale** de $\underline{\underline{\sigma}}$ en **partie sphérique** et **déviateur** :



$$\underline{\underline{\sigma}} = \sigma_m \underline{\underline{i}} + \underline{\underline{s}},$$

en utilisant la décomposition **orthogonale** de tout $\underline{\underline{\alpha}} \in \mathbb{R}^3 \otimes_s \mathbb{R}^3$:

$$\underline{\underline{\alpha}} = \alpha_m \underline{\underline{i}} + \underline{\underline{a}},$$

$$\alpha_m = \frac{1}{3} \text{tr}(\underline{\underline{\alpha}}), \quad \text{tr}(\alpha_m \underline{\underline{i}}) = \text{tr}(\underline{\underline{\alpha}}),$$

$$\implies \text{tr}(\underline{\underline{a}}) = 0, \quad \implies \underline{\underline{i}} : \underline{\underline{a}} = \text{tr}(\underline{\underline{a}}) = 0.$$

Critère de von Mises

Rappel : l'addition d'une pression ne change pas le cisaillement

$$\underline{\underline{\sigma}}^* = \underline{\underline{\sigma}} - p \underline{\underline{j}} \implies \tau^*(\underline{n}) = \tau(\underline{n}).$$

En particulier (avec $p = \sigma_m$) :

$\underline{\underline{\sigma}}$ et $\underline{\underline{s}}$ ont même vecteur cisaillement sur toutes les facettes.

Critère de von Mises

Rappel : l'addition d'une pression ne change pas le cisaillement

$$\underline{\underline{\sigma}}^* = \underline{\underline{\sigma}} - p \underline{\underline{j}} \implies \tau^*(\underline{n}) = \tau(\underline{n}).$$

En particulier (avec $p = \sigma_m$) :

$\underline{\underline{\sigma}}$ et $\underline{\underline{s}}$ ont même vecteur cisaillement sur toutes les facettes.

Conséquence : mesure du cisaillement par $\|\underline{\underline{s}}\|^2 = s_{ij}s_{ij}$, ou par la **contrainte équivalente** :

$$\sigma^{\text{eq}} = \sqrt{\frac{3}{2} \|\underline{\underline{s}}\|^2}$$

$$\text{i.e. } \sigma^{\text{eq}} = \left(\frac{3}{2} \underline{\underline{s}} : \underline{\underline{s}} \right)^{1/2} = \left(\frac{3}{2} s_{ij}s_{ij} \right)^{1/2}$$

Critère de von Mises

Rappel : l'addition d'une pression ne change pas le cisaillement

$$\underline{\underline{\sigma}}^* = \underline{\underline{\sigma}} - p \underline{\underline{j}} \implies \tau^*(\underline{n}) = \tau(\underline{n}).$$

En particulier (avec $p = \sigma_m$) :

$\underline{\underline{\sigma}}$ et $\underline{\underline{s}}$ ont même vecteur cisaillement sur toutes les facettes.

Conséquence : mesure du cisaillement par $\|\underline{\underline{s}}\|^2 = s_{ij}s_{ij}$, ou par la **contrainte équivalente** :

$$\sigma^{\text{eq}} = \sqrt{\frac{3}{2} \|\underline{\underline{s}}\|^2}$$

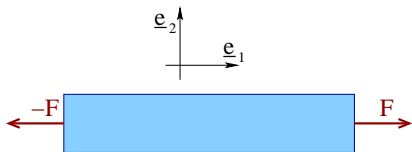
$$\text{i.e. } \sigma^{\text{eq}} = \left(\frac{3}{2} \underline{\underline{s}} : \underline{\underline{s}} \right)^{1/2} = \left(\frac{3}{2} s_{ij}s_{ij} \right)^{1/2}$$

Critère de von Mises :

$$\sigma^{\text{eq}} \leq \sigma_0.$$

Exemples

Traction simple



$$\underline{\underline{\sigma}} = \sigma \underline{e}_1 \otimes \underline{e}_1,$$

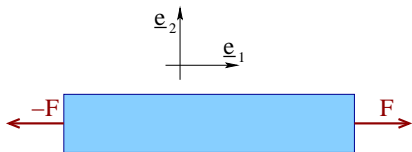
$$\text{tr}(\underline{\underline{\sigma}}) = \sigma,$$

$$\underline{\underline{s}} = \sigma \left(\frac{2}{3} \underline{e}_1 \otimes \underline{e}_1 - \frac{1}{3} \underline{e}_2 \otimes \underline{e}_2 - \frac{1}{3} \underline{e}_3 \otimes \underline{e}_3 \right),$$

$$\sigma^{\text{eq}} = \sigma.$$

Exemples

Traction simple



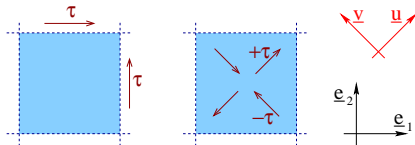
$$\underline{\underline{\sigma}} = \sigma \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1,$$

$$\text{tr}(\underline{\underline{\sigma}}) = \sigma,$$

$$\underline{\underline{s}} = \sigma \left(\frac{2}{3} \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 - \frac{1}{3} \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2 - \frac{1}{3} \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_3 \right),$$

$$\sigma^{\text{eq}} = \sigma.$$

Cisaillement pur



$$\underline{\underline{\sigma}} = \tau (\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_1),$$

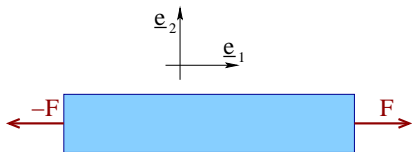
$$\text{tr}(\underline{\underline{\sigma}}) = 0$$

$$\underline{\underline{s}} = \underline{\underline{\sigma}},$$

$$\sigma^{\text{eq}} = \sqrt{3} |\tau|.$$

Exemples

Traction simple



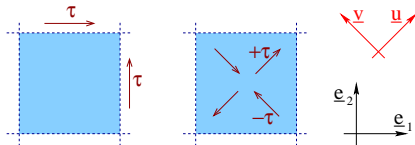
$$\underline{\underline{\sigma}} = \sigma \underline{e}_1 \otimes \underline{e}_1,$$

$$\text{tr}(\underline{\underline{\sigma}}) = \sigma,$$

$$\underline{\underline{s}} = \sigma \left(\frac{2}{3} \underline{e}_1 \otimes \underline{e}_1 - \frac{1}{3} \underline{e}_2 \otimes \underline{e}_2 - \frac{1}{3} \underline{e}_3 \otimes \underline{e}_3 \right),$$

$$\sigma^{\text{eq}} = \sigma.$$

Cisaillement pur



$$\underline{\underline{\sigma}} = \tau (\underline{e}_1 \otimes \underline{e}_2 + \underline{e}_2 \otimes \underline{e}_1),$$

$$\text{tr}(\underline{\underline{\sigma}}) = 0$$

$$\underline{\underline{s}} = \underline{\underline{\sigma}},$$

$$\sigma^{\text{eq}} = \sqrt{3} |\tau|.$$

σ^{eq} : scalaire permettant de comparer un état de contrainte triaxial à un état de contrainte uniaxial équivalent (normes du cisaillement égales).

C'est la raison d'être du facteur $3/2$ dans la définition de σ^{eq} .

Propriétés du critère de von Mises

- ▶ Le critère de von Mises est insensible à la pression :

$$\underline{\underline{\sigma}}^* = \underline{\underline{\sigma}} - p\underline{\underline{i}} \implies \underline{\underline{s}}^* = \underline{\underline{s}}, \implies \sigma^{\text{eq}*} = \sigma^{\text{eq}}.$$

Propriétés du critère de von Mises

- ▶ Le critère de von Mises est insensible à la pression :

$$\underline{\underline{\sigma}}^* = \underline{\underline{\sigma}} - p\underline{\underline{i}} \implies \underline{\underline{s}}^* = \underline{\underline{s}}, \implies \sigma^{\text{eq}*} = \sigma^{\text{eq}}.$$

- ▶ Le critère de von Mises **dépend** de la contrainte principale intermédiaire σ_2 :

$$(\sigma^{\text{eq}})^2 = \frac{1}{2} \left[(\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_2 - \sigma_1)^2 + (\sigma_3 - \sigma_2)^2 \right]$$

Il est donc **différent** du critère de Tresca.

Propriétés du critère de von Mises

- ▶ Le critère de von Mises est insensible à la pression :

$$\underline{\underline{\sigma}}^* = \underline{\underline{\sigma}} - p \underline{\underline{i}} \implies \underline{\underline{s}}^* = \underline{\underline{s}}, \implies \sigma^{\text{eq}*} = \sigma^{\text{eq}}.$$

- ▶ Le critère de von Mises **dépend** de la contrainte principale intermédiaire σ_2 :

$$(\sigma^{\text{eq}})^2 = \frac{1}{2} \left[(\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_2 - \sigma_1)^2 + (\sigma_3 - \sigma_2)^2 \right]$$

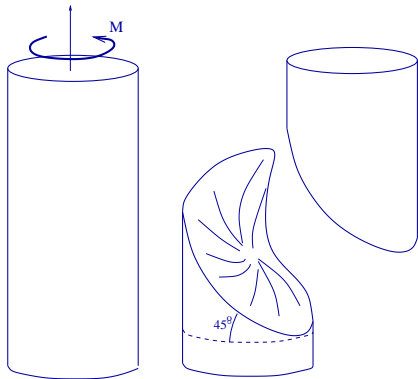
Il est donc **différent** du critère de Tresca.

- ▶ σ_0 : limite en **traction simple** du matériau (pour le phénomène considéré) ;
 $\sigma_0/\sqrt{3}$: limite en **cisaillement** du matériau

Plan

1. Variété des comportements macroscopiques
2. Diversité des mécanismes microscopiques
3. Critères (transition d'un régime de comportement à un autre)
 - Rappels sur les contraintes
 - Critères basés sur le vecteur contrainte.
 - Critères basés sur le tenseur de contrainte
- 4. Exemples de rupture en torsion**

Rupture en torsion d'une craie

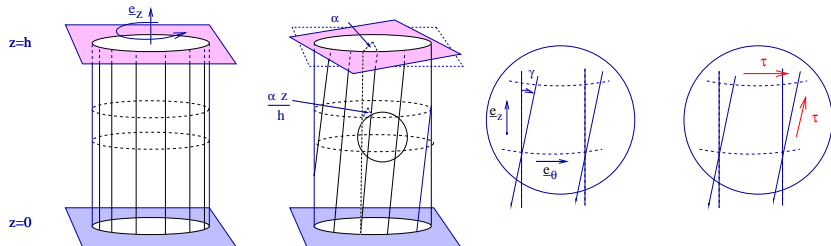


Partant de la forme de la surface de rupture, peut-on trouver :

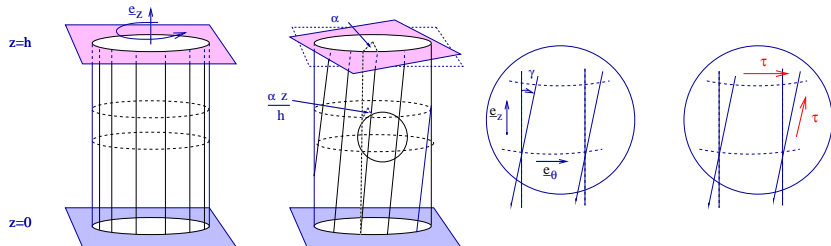
- ▶ le critère de rupture de la craie ?
- ▶ le type de comportement de la craie ?

Rupture en cisaillement ou rupture en traction ?

Analyse des déformations et contraintes



Analyse des déformations et contraintes



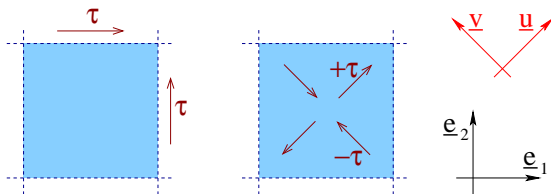
Déformation : glissement simple entre les directions \underline{e}_θ et \underline{e}_z :

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \frac{\alpha r}{2h} (\underline{e}_\theta \otimes \underline{e}_z + \underline{e}_z \otimes \underline{e}_\theta),$$

Contrainte : cisaillement simple (ou pur) entre les directions \underline{e}_θ et \underline{e}_z :

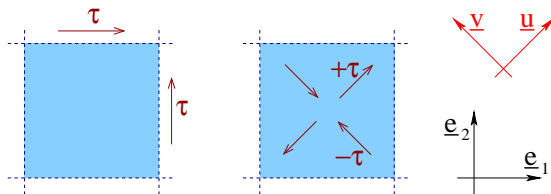
$$\underline{\underline{\sigma}} = \frac{\mu \alpha r}{h} (\underline{e}_\theta \otimes \underline{e}_z + \underline{e}_z \otimes \underline{e}_\theta).$$

Subtilités du cisaillement



$$\underline{\underline{\sigma}} = \tau (\underline{e}_1 \otimes \underline{e}_2 + \underline{e}_2 \otimes \underline{e}_1), \quad \underline{\underline{\sigma}} = \tau \underline{u} \otimes \underline{u} - \tau \underline{v} \otimes \underline{v}.$$

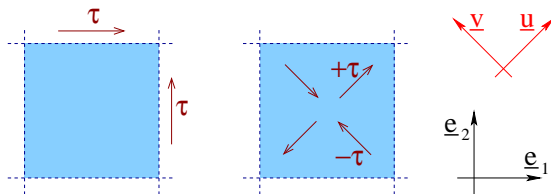
Subtilités du cisaillement



$$\underline{\underline{\sigma}} = \tau (\underline{e}_1 \otimes \underline{e}_2 + \underline{e}_2 \otimes \underline{e}_1), \quad \underline{\underline{\sigma}} = \tau \underline{u} \otimes \underline{u} - \tau \underline{v} \otimes \underline{v}.$$

La facette à $+45^\circ$ de normale \underline{u} est soumise à une **traction** d'intensité τ .

Subtilités du cisaillement

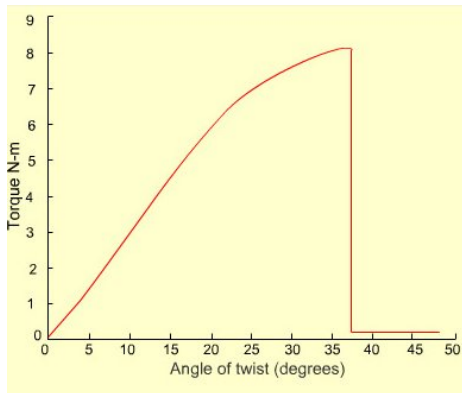


$$\underline{\underline{\sigma}} = \tau (\underline{e}_1 \otimes \underline{e}_2 + \underline{e}_2 \otimes \underline{e}_1), \quad \underline{\underline{\sigma}} = \tau \underline{u} \otimes \underline{u} - \tau \underline{v} \otimes \underline{v}.$$

La facette à $+45^\circ$ de normale \underline{u} est soumise à une **traction** d'intensité τ .

- ▶ Le critère de rupture est donc un critère de **contrainte normale maximale**.
- ▶ La craie est donc de type **fragile** (surprise?).

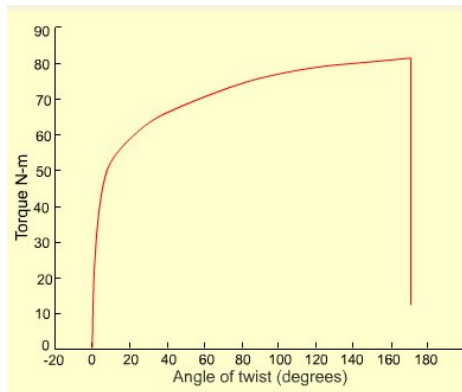
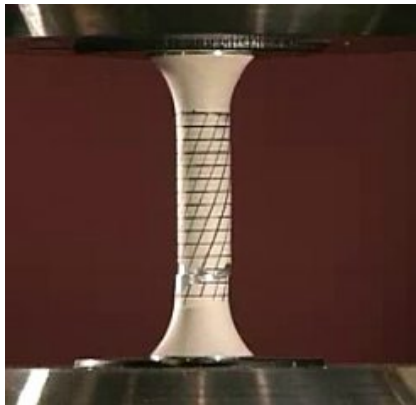
Rupture d'un matériau fragile



Rupture par traction (torsion, os de dinde).

instruct1.cit.cornell.edu/courses/virtual_lab/intro.shtml

Rupture d'un matériau ductile



Plastification et rupture par cisaillement (torsion, aluminium).

instruct1.cit.cornell.edu/courses/virtual_lab/intro.shtml

Conclusion

- ▶ **Présence nécessaire de défauts microscopiques** (microfissures, dislocations).

Conclusion

- ▶ **Présence nécessaire de défauts microscopiques** (microfissures, dislocations).
- ▶ **Nécessité de traduire des transitions entre régimes de comportement.**

Conclusion

- ▶ **Présence nécessaire de défauts microscopiques** (microfissures, dislocations).
- ▶ **Nécessité de traduire des transitions entre régimes de comportement.**
- ▶ **Matériaux fragiles sensibles au clivage.** Critère de la contrainte normale maximale :

$$\sup_{\underline{n}=1} \sigma(\underline{n}) \leq \sigma_0.$$

Conclusion

- ▶ **Présence nécessaire de défauts microscopiques** (microfissures, dislocations).
- ▶ **Nécessité de traduire des transitions entre régimes de comportement.**
- ▶ **Matériaux fragiles sensibles au clivage.** Critère de la contrainte normale maximale :

$$\sup_{\underline{n}=1} \sigma(\underline{n}) \leq \sigma_0.$$

- ▶ **Matériaux ductiles sensibles au cisaillement.**

Critère de Tresca

$$\sup_{\underline{n}=1} |\underline{\tau}(\underline{n})| \leq k.$$

Critère de von Mises

$$\sigma^{\text{eq}} \leq \sigma_0.$$

- ▶ **Un état de contrainte est subtil.** Attention aux conclusions hâtives !