

# Identification et inversion

**Marc Bonnet**

Propagation des Ondes: Etudes Mathématiques et Simulation (POEMS)  
UMR 7231 CNRS-INRIA-ENSTA  
Unité de Mathématiques Appliquées  
ENSTA Paris

*[mbonnet@ensta.fr](mailto:mbonnet@ensta.fr)*

*[www.ensta.fr/~mbonnet/index/enseignement.html](http://www.ensta.fr/~mbonnet/index/enseignement.html)*

Master (MS)2SC, 2019–2020

# Plan général

## Partie 1: Généralités

Séance 1: Problèmes inverses, identification: notions, motivations, exemples

## Partie 2: Identification en mécanique des solides

Séance 2: Identification: champs virtuels, erreur en relation de comportement

Séance 5: Mesures de champs, exemple de l'essai essai brésilien (GP)

Séance 9: Identification sur mesures de champs, TP CORRELI (GP)

## Partie 3: Outils: algèbre linéaire, moindres carrés, optimisation

Séance 3: Moindres carrés linéaires, notion de conditionnement

Séance 4: Principales méthodes d'optimisation: principes

Séance 10: Outils matlab (ODE, toolbox optimisation...) (GP)

## Partie 4: Problèmes mal posés et leur régularisation

Séances 6, 7: Régularisation des problèmes mal posés, exemples.

## Partie 5: Approches bayésiennes

Séances 7, 8: méthodes bayésiennes, assimilation, filtrage de Kalman.

# Plan général

**Partie 1:** Généralités

**Partie 2:** Identification en mécanique des solides

**Partie 3:** Outils: algèbre linéaire, moindres carrés, optimisation

**Partie 4:** Problèmes mal posés et leur régularisation

**Partie 5:** Approches bayésiennes

## 1. Généralités: inversion et identification; problèmes mal posés

## 2. Exemples de problèmes inverses

- Gravimétrie

- Identification de sources ou de sollicitations

- Reconstruction de conditions aux limites inaccessibles

- Problèmes inverses en vibrations de structures

- Autres exemples

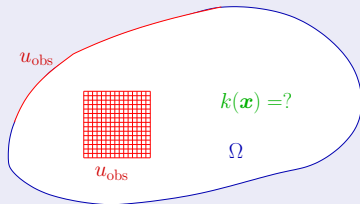
## Notion d'inversion

- Améliorer la connaissance et la compréhension d'un système physique donné nécessite la collecte puis l'exploitation de données expérimentales.
- Souvent: information recherchée "cachée" dans le système physique  
Mesure: conséquence d'une cause qui est la vraie grandeur d'intérêt.

## Notion d'inversion

- Améliorer la connaissance et la compréhension d'un système physique donné nécessite la collecte puis l'exploitation de données expérimentales.
- Souvent: information recherchée "cachée" dans le système physique  
Mesure: conséquence d'une cause qui est la vraie grandeur d'intérêt.

### Exemple



$$\operatorname{div}(k \nabla u) = f$$

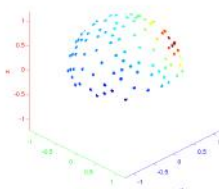
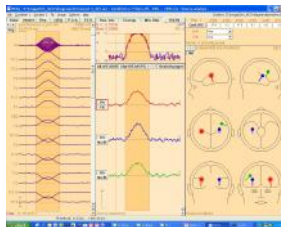
$$k \nabla u \cdot \mathbf{n} = q^D$$

dans  $\Omega$  (équation locale d'équilibre)

sur  $\partial\Omega$  (flux imposé)

Identifier  $f(\mathbf{x})$  ou  $k(\mathbf{x})$  à partir de la mesure du champ  $u|_{\partial\Omega}$  ou  $u_{\Omega}$ .

## Exemple: tomographie électrostatique



Reconstruire l'activité électrique cérébrale (sources). Mesures = potentiels (électrodes)

## Notion d'inversion

- Analyse des données expérimentales: repose sur formulation mathématique de la physique sous-jacente:

$$\mathcal{G}(\mathbf{p}, \mathbf{d}) = \mathbf{0} \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{p}: \text{grandeurs cachées (à identifier)} \\ \mathbf{d}: \text{grandeurs mesurables} \end{array} \right.$$



## Notion d'inversion

- Analyse des données expérimentales: repose sur formulation mathématique de la physique sous-jacente:

$$\mathcal{G}(\mathbf{p}, \mathbf{d}) = 0 \quad \begin{cases} \mathbf{p}: \text{grandeurs cachées (à identifier)} \\ \mathbf{d}: \text{grandeurs mesurables} \end{cases}$$

### Exemple

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(k \nabla u) &= 0 \text{ dans } \Omega \text{ (équation locale d'équilibre)} & \mathbf{p} &\leftarrow k(\cdot) \\ k \nabla u \cdot \mathbf{n} &= q^D \text{ sur } \partial\Omega \text{ (flux imposé)} & \mathbf{d} &\leftarrow u(\cdot) \end{aligned}$$

## Notion d'inversion

- Analyse des données expérimentales: repose sur formulation mathématique de la physique sous-jacente:

$$\mathcal{G}(\mathbf{p}, \mathbf{d}) = \mathbf{0} \quad \begin{cases} \mathbf{p}: \text{grandeurs cachées (à identifier)} \\ \mathbf{d}: \text{grandeurs mesurables} \end{cases}$$

### Exemple

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(k \nabla u) &= 0 \text{ dans } \Omega \text{ (équation locale d'équilibre)} & \mathbf{p} &\leftarrow k(\cdot) \\ k \nabla u \cdot \mathbf{n} &= q^D \text{ sur } \partial\Omega \text{ (flux imposé)} & \mathbf{d} &\leftarrow u(\cdot) \end{aligned}$$

- Complexité des modèles permettant une description physique raisonnable
  - Résolution analytique le plus souvent non envisageable;
  - Recours aux méthodes numériques;
  - Calcul scientifique: progrès fulgurants conceptuels et matériels

## 1. Généralités: inversion et identification; problèmes mal posés

## 2. Exemples de problèmes inverses

Gravimétrie

Identification de sources ou de sollicitations

Reconstruction de conditions aux limites inaccessibles

Problèmes inverses en vibrations de structures

Autres exemples

## Qu'est-ce qu'un problème inverse?

**Mesure indirecte:** quantifier une grandeur  $p$  expérimentalement inaccessible à l'aide de mesures d'une grandeur  $d$  accessible.

- (i) Le modèle physique adopté donne  $d$  connaissant  $p$ :  
(équations différentielles, aux dérivées partielles, variationnelles, intégrales...)

$\mathcal{G}(p, d) = 0$	implicite
$d = \mathcal{G}(p)$	explicite

exemple:  $\int_{\Omega} k \nabla u \cdot \nabla w \, dV - \int_{\partial\Omega} q^D w \, dS = 0 \quad \forall w$

⇒ nécessité d'*inverser* le modèle physique.

## Qu'est-ce qu'un problème inverse?

**Mesure indirecte:** quantifier une grandeur  $p$  expérimentalement inaccessible à l'aide de mesures d'une grandeur  $d$  accessible.

- (i) Le modèle physique adopté donne  $d$  connaissant  $p$ :  
(équations différentielles, aux dérivées partielles, variationnelles, intégrales...)

$\mathcal{G}(p, d) = 0$	implicite
$d = \mathcal{G}(p)$	explicite

exemple:  $\int_{\Omega} k \nabla u \cdot \nabla w \, dV - \int_{\partial\Omega} q^D w \, dS = 0 \quad \forall w$

⇒ nécessité d'inverser le modèle physique.

- (ii) L'inversion est *un problème mathématique mal posé*.
- Problème mathématique bien posé (définition, Hadamard): problème dont la solution (a) existe, (b) est unique, (c) dépend continûment de la donnée.
  - Problème mathématique mal posé: une au moins des conditions (a), (b) (c) est violée.

**Problème inverse:** Exploitation quantitative et interprétation de données expérimentales pour des situations de modélisation complexe. Demande la résolution d'un problème mal posé.

## Inventaire (non exhaustif)

**Reconstruction** des caractéristiques  
physiques du sous-sol

- données sismiques,
- données gravimétriques ...

Connaissance scientifique  
Prospection, inspection

## Inventaire (non exhaustif)

**Reconstruction** des caractéristiques physiques du sous-sol

- données sismiques,
- données gravimétriques ...

Connaissance scientifique  
Prospection, inspection

### Contrôle non destructif

- surveillance (ouvrages, installations industrielles)
- identification (défauts, fissures, ... )

Données (mesures externes):

- ultrasons
- courants de Foucault
- thermographie

## Inventaire (non exhaustif)

**Reconstruction** des caractéristiques physiques du sous-sol

- données sismiques,
- données gravimétriques ...

Connaissance scientifique  
Prospection, inspection

### Contrôle non destructif

- surveillance (ouvrages, installations industrielles)
- identification (défauts, fissures, ... )

Données (mesures externes):

- ultrasons
- courants de Foucault
- thermographie

### Tomographie, imagerie médicale



## Inventaire (non exhaustif)

**Reconstruction** des caractéristiques physiques du sous-sol

- données sismiques,
- données gravimétriques ...

Connaissance scientifique  
Prospection, inspection

### Contrôle non destructif

- surveillance (ouvrages, installations industrielles)
- identification (défauts, fissures, ... )

Données (mesures externes):

- ultrasons
- courants de Foucault
- thermographie

### Tomographie, imagerie médicale

**Reconstruction** de températures, flux thermiques, ...

## Inventaire (non exhaustif)

**Reconstruction** des caractéristiques physiques du sous-sol

- données sismiques,
- données gravimétriques ...

Connaissance scientifique  
Prospection, inspection

### Contrôle non destructif

- surveillance (ouvrages, installations industrielles)
- identification (défauts, fissures, ... )

Données (mesures externes):

- ultrasons
- courants de Foucault
- thermographie

### Tomographie, imagerie médicale

**Reconstruction** de températures, flux thermiques, ...

### identification

- paramètres de comportement mécanique
- distributions de conductivités
- recalage de modélisations

## Inventaire (non exhaustif)

**Reconstruction** des caractéristiques physiques du sous-sol

- données sismiques,
- données gravimétriques ...

Connaissance scientifique  
Prospection, inspection

### Contrôle non destructif

- surveillance (ouvrages, installations industrielles)
- identification (défauts, fissures, ... )

Données (mesures externes):

- ultrasons
- courants de Foucault
- thermographie

### Tomographie, imagerie médicale

**Reconstruction** de températures, flux thermiques, ...

### identification

- paramètres de comportement mécanique
- distributions de conductivités
- recalage de modélisations

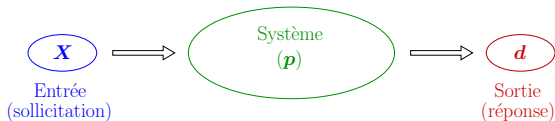
### Déconvolution

- reconstruction d'images brouillées,
  - interprétation de mesures en dynamique
- ... et bien d'autres !

## Problèmes directs, problèmes inverses

**Problème direct** (mécanique, thermique, acoustique, électromagnétique...):

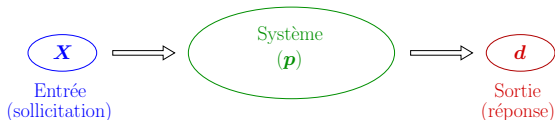
- Calcul de la *réponse*  $d$  (déplacement, contrainte, température, ... )  
à des *sollicitations*  $X$  (forces, conditions aux limites, sources ... )



## Problèmes directs, problèmes inverses

**Problème direct** (mécanique, thermique, acoustique, électromagnétique...):

- Calcul de la *réponse*  $d$  (déplacement, contrainte, température, ... )  
à des *sollicitations*  $X$  (forces, conditions aux limites, sources ... )

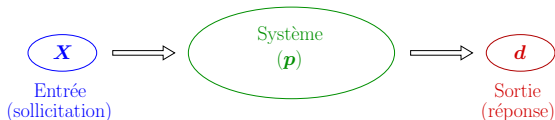


- Le système (ex.: structure mécanique) dépend de paramètres  $p$ :  
→ géométrie (région de l'espace occupée), caractéristiques des matériaux constitutifs, liaisons cinématiques ...

## Problèmes directs, problèmes inverses

**Problème direct** (mécanique, thermique, acoustique, électromagnétique...):

- Calcul de la *réponse*  $\mathbf{d}$  (déplacement, contrainte, température, ...) à des *sollicitations*  $\mathbf{X}$  (forces, conditions aux limites, sources ...)



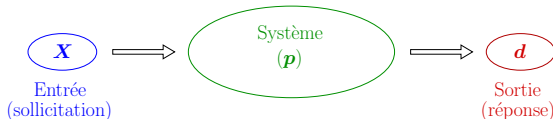
- Le système (ex.: structure mécanique) dépend de paramètres  $\mathbf{p}$ :  
 → géométrie (région de l'espace occupée), caractéristiques des matériaux constitutifs, liaisons cinématiques ...
- Equations de la physique: réponse  $\mathbf{d}$  fonction implicite de  $\mathbf{X}, \mathbf{p}$ :

Trouver  $\mathbf{d} = \mathbf{d}(\mathbf{p}; \mathbf{X})$  tel que  $\mathcal{G}(\mathbf{p}, \mathbf{d}; \mathbf{X}) = \mathbf{0}$  ( $\mathbf{X} \in \mathcal{X}, \mathbf{p} \in \mathcal{P}$  donnés)

## Problèmes directs, problèmes inverses

**Problème direct** (mécanique, thermique, acoustique, électromagnétique...):

- Calcul de la *réponse*  $\mathbf{d}$  (déplacement, contrainte, température, ...) à des *sollicitations*  $\mathbf{X}$  (forces, conditions aux limites, sources ...)



- Le système (ex.: structure mécanique) dépend de paramètres  $\mathbf{p}$ :
  - géométrie (région de l'espace occupée), caractéristiques des matériaux constitutifs, liaisons cinématiques ...
- Equations de la physique: réponse  $\mathbf{d}$  fonction implicite de  $\mathbf{X}, \mathbf{p}$ :

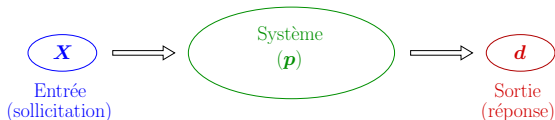
Trouver  $\mathbf{d} = \mathbf{d}(\mathbf{p}; \mathbf{X})$  tel que  $\mathcal{G}(\mathbf{p}, \mathbf{d}; \mathbf{X}) = \mathbf{0}$  ( $\mathbf{X} \in \mathcal{X}, \mathbf{p} \in \mathcal{P}$  donnés)

- En général, le problème direct est *bien posé* (au sens d'Hadamard):
  - Existence d'une solution
  - Unicité de la solution
  - Stabilité de la réponse par rapport aux erreurs (données, discrétisation ...)

## Problèmes directs, problèmes inverses

**Problème direct** (mécanique, thermique, acoustique, électromagnétique...):

- Calcul de la *réponse*  $\mathbf{d}$  (déplacement, contrainte, température, ...) à des *sollicitations*  $\mathbf{X}$  (forces, conditions aux limites, sources ...)



- Le système (ex.: structure mécanique) dépend de paramètres  $\mathbf{p}$ :
  - géométrie (région de l'espace occupée), caractéristiques des matériaux constitutifs, liaisons cinématiques ...
- Equations de la physique: réponse  $\mathbf{d}$  fonction implicite de  $\mathbf{X}, \mathbf{p}$ :

Trouver  $\mathbf{d} = \mathbf{d}(\mathbf{p}; \mathbf{X})$  tel que  $\mathcal{G}(\mathbf{p}, \mathbf{d}; \mathbf{X}) = \mathbf{0}$  ( $\mathbf{X} \in \mathcal{X}, \mathbf{p} \in \mathcal{P}$  donnés)

- En général, le problème direct est *bien posé* (au sens d'Hadamard):
  - Existence d'une solution
  - Unicité de la solution
  - Stabilité de la réponse par rapport aux erreurs (données, discrétisation ...)
- Modèle physique parfois *explicite*  $\mathbf{d} = \mathcal{G}(\mathbf{p}; \mathbf{X})$  (gravimétrie, certains pbs linéarisés)



## Problèmes directs, problèmes inverses

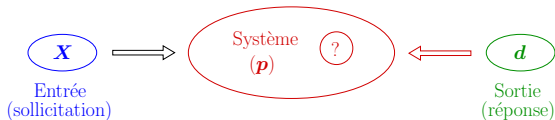
**Problème inverse** Ignorance au moins partielle du système.

- informations manquantes concernant
  - la géométrie, les matériaux, les conditions initiales...

## Problèmes directs, problèmes inverses

**Problème inverse** Ignorance au moins partielle du système.

- informations manquantes concernant
  - la géométrie, les matériaux, les conditions initiales...
- Problème inverse: reconstruire au mieux l'information manquante
  - disposer d'informations (éventuellement partielles)  $\mathbf{d}^{\text{obs}}$  sur la sortie  $\mathbf{d}$

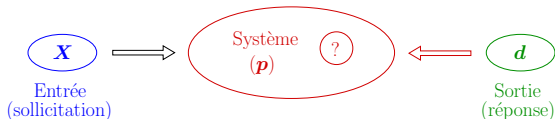


Trouver  $\mathbf{p} \in \mathcal{P}$  tel que  $\mathcal{G}(\mathbf{p}, \mathbf{d}^{\text{obs}}; \mathbf{X}) = \mathbf{0}$  ( $\mathbf{X} \in \mathcal{X}, \mathbf{d} \in \mathcal{D}$  donnés)

## Problèmes directs, problèmes inverses

**Problème inverse** Ignorance au moins partielle du système.

- informations manquantes concernant
  - la géométrie, les matériaux, les conditions initiales...
- Problème inverse: reconstruire au mieux l'information manquante
  - disposer d'informations (éventuellement partielles)  $\mathbf{d}^{\text{obs}}$  sur la sortie  $\mathbf{d}$



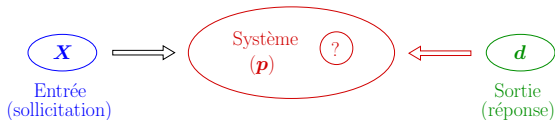
Trouver  $\mathbf{p} \in \mathcal{P}$  tel que  $\mathcal{G}(\mathbf{p}, \mathbf{d}^{\text{obs}}; \mathbf{X}) = \mathbf{0}$  ( $\mathbf{X} \in \mathcal{X}, \mathbf{d} \in \mathcal{D}$  donnés)

- En général, le problème inverse est *mal posé* (au sens d'Hadamard), au moins une des conditions suivantes n'étant pas vérifiée:
  - Existence d'une solution
  - Unicité de la solution
  - Stabilité de la réponse par rapport aux erreurs (données, discrétisation ... )

## Problèmes directs, problèmes inverses

**Problème inverse** Ignorance au moins partielle du système.

- informations manquantes concernant
  - la géométrie, les matériaux, les conditions initiales...
- Problème inverse: reconstruire au mieux l'information manquante
  - disposer d'informations (éventuellement partielles)  $d^{\text{obs}}$  sur la sortie  $d$



Trouver  $p \in \mathcal{P}$  tel que  $\mathcal{G}(p, d^{\text{obs}}; X) = 0$  ( $X \in \mathcal{X}, d \in \mathcal{D}$  donnés)

- En général, le problème inverse est *mal posé* (au sens d'Hadamard), au moins une des conditions suivantes n'étant pas vérifiée:
  - Existence d'une solution
  - Unicité de la solution
  - Stabilité de la réponse par rapport aux erreurs (données, discrétisation ...)
- Variante: identification de sources

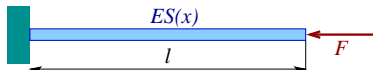
Trouver  $X \in \mathcal{X}$  tel que  $\mathcal{G}(p, d^{\text{obs}}; X) = 0$  ( $p \in \mathcal{P}, d \in \mathcal{D}$  donnés)

## Problèmes mal posés (1932)

Mais il est remarquable, d'autre part, qu'on trouve un guide sûr dans l'interprétation physique : un problème analytique est toujours correctement posé (au sens précédemment indiqué), quand il est la traduction d'une question mécanique ou physique; et nous avons vu que ceci est le cas du problème de Cauchy dans les exemples notés en premier lieu.

Au contraire, aucun des problèmes physiques en rapport avec  $\Delta u = 0$  ne se formule analytiquement sous la forme de Cauchy <sup>(2)</sup>. Chacun d'eux conduit à des énoncés tels que celui de Dirichlet, c'est-à-dire avec une seule donnée numérique en chaque point de la frontière. C'est aussi le cas de l'équation de la chaleur. Tout ceci est d'accord avec le fait que les données de Cauchy, si elles ne sont pas analytiques, ne sont pas de nature à déterminer une solution d'une quelconque de ces deux équations.

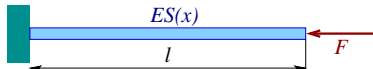
## Exemple de problème mal posé: barre à raideur variable



$$\int_0^{\ell} ES(x)u'(x)w'(x)dx - Fw(\ell) = 0 \quad (\forall w, w(0) = 0)$$

- Problème direct **linéaire, bien posé**:  $ES(x)$  donné,  $u(x)$  inconnu;
- Problème inverse **linéaire, mal posé**:  $ES(x)$  inconnu,  $u(x)$  donné;

## Exemple de problème mal posé: barre à raideur variable



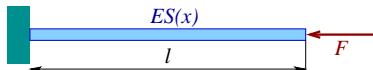
$$\int_0^{\ell} ES(x)u'(x)w'(x)dx - Fw(\ell) = 0 \quad (\forall w, w(0) = 0)$$

- Problème direct **linéaire, bien posé**:  $ES(x)$  donné,  $u(x)$  inconnu;
- Problème inverse **linéaire, mal posé**:  $ES(x)$  inconnu,  $u(x)$  donné;

$$\{F\} = [G]\{ES\},$$

$$\begin{cases} G_{i,j} = u_i - u_{i-1} \\ G_{i,i+1} = u_i - u_{i+1} \end{cases}$$

## Exemple de problème mal posé: barre à raideur variable

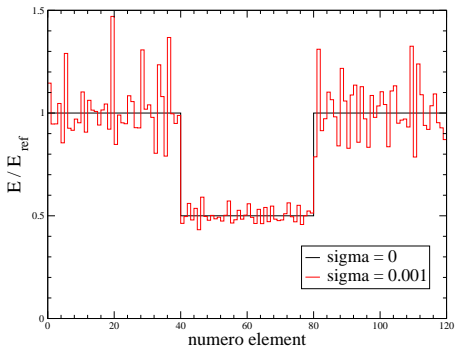


$$\int_0^{\ell} ES(x)u'(x)w'(x)dx - Fw(\ell) = 0 \quad (\forall w, w(0) = 0)$$

- Problème direct **linéaire, bien posé**:  $ES(x)$  donné,  $u(x)$  inconnu;
- Problème inverse **linéaire, mal posé**:  $ES(x)$  inconnu,  $u(x)$  donné;

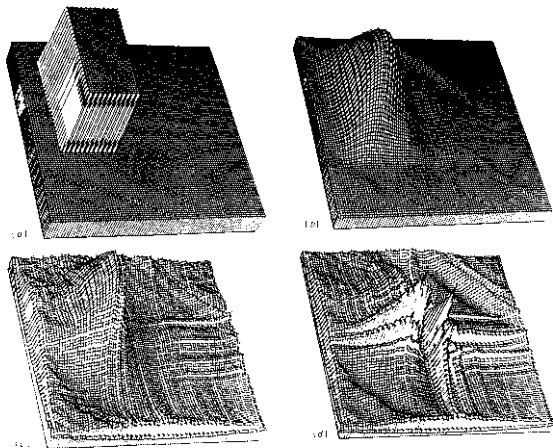
$$\{F\} = [G]\{ES\},$$

$$\begin{cases} G_{i,j} = u_j - u_{j-1} \\ G_{i,i+1} = u_i - u_{i+1} \end{cases}$$





## Exemple de problème mal posé: reconstruction d'un champ de conductivité (simulation)



(a) conductivité à identifier; (b) reconstruction sans bruit, (c) reconstruction 3% bruit (11 itérations), (d) reconstruction 3% bruit (50 itérations).

Kohn R.V., McKenney A., *Inverse Problems* 6:389–414 (1990).

## Résolution des problèmes inverses: considérations générales

### Deux sortes de situations:

#### (a) Problèmes bien posés

- Existence et unicité de  $\mathbf{p}$  pour  $\mathbf{d}$  donné
- Continuité de  $\mathbf{p}$  pour des petites perturbations de  $\mathbf{d}$ :  $|\delta\mathbf{p}| \leq C |\delta\mathbf{d}|$

Comprend les problèmes “classiques” de la Mécanique

#### (b) Problèmes mal posés: *au moins une des conditions ci-dessus est violée*

## Résolution des problèmes inverses: considérations générales

### Deux sortes de situations:

#### (a) Problèmes bien posés

- Existence et unicité de  $\mathbf{p}$  pour  $\mathbf{d}$  donné
- Continuité de  $\mathbf{p}$  pour des petites perturbations de  $\mathbf{d}$ :  $|\delta \mathbf{p}| \leq C |\delta \mathbf{d}|$

Comprend les problèmes "classiques" de la Mécanique

#### (b) Problèmes mal posés: *au moins une des conditions ci-dessus est violée*

### Causes d'incertitude nombreuses:

- Origine expérimentale des données  $\implies$  existence d'erreurs de mesure ;
- Données réelles en nombre fini, mais représentation mathématique par des fonctions ;
- Altération des données par la méthode d'inversion: interpolation, discrétisation, représentation informatique des nombres ;
- Incertitudes dans le choix du modèle physique.

## Résolution des problèmes inverses: considérations générales

### Deux sortes de situations:

#### (a) Problèmes bien posés

- Existence et unicité de  $\mathbf{p}$  pour  $\mathbf{d}$  donné
- Continuité de  $\mathbf{p}$  pour des petites perturbations de  $\mathbf{d}$ :  $|\delta \mathbf{p}| \leq C |\delta \mathbf{d}|$

Comprend les problèmes "classiques" de la Mécanique

#### (b) Problèmes mal posés: *au moins une des conditions ci-dessus est violée*

### Causes d'incertitude nombreuses:

- Origine expérimentale des données  $\implies$  existence d'erreurs de mesure ;
- Données réelles en nombre fini, mais représentation mathématique par des fonctions ;
- Altération des données par la méthode d'inversion: interpolation, discrétisation, représentation informatique des nombres ;
- Incertitudes dans le choix du modèle physique.

### Sensibilité des P.I. aux incertitudes

- Changement d'optique vis-à-vis du concept de solution: tout  $\mathbf{p}$  reproduisant la mesure  $\mathbf{d}$  "à  $\varepsilon$  près" est *a priori* acceptable.

## Résolution des problèmes inverses: considérations générales

### Incorporation d'informations a priori complémentaires:

- bornes ou encadrements
- hypothèses de régularité
- représentation des inconnues
- incertitudes expérimentales, de modélisation ...

## Résolution des problèmes inverses: considérations générales

### Incorporation d'informations a priori complémentaires:

- bornes ou encadrements
- hypothèses de régularité
- représentation des inconnues
- incertitudes expérimentales, de modélisation ...

### Théorie(s) de l'inversion: (re)formulations mathématiques et techniques algorithmiques adaptées au caractère mal posé

- Champ de recherches actif et multidisciplinaire
- Recours au calcul numérique intensif
- Champs d'application croissant avec le développement du calcul numérique

## (Non-)solvabilité exacte

Trouver  $\boldsymbol{p} \in \mathcal{P}$  tel que  $\mathcal{G}(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{d}^{\text{obs}}; \boldsymbol{X}) = \mathbf{0}$  ( $\boldsymbol{X} \in \mathcal{X}, \boldsymbol{d}^{\text{obs}} \in \mathcal{D}$  donnés)

- Existence et unicité des solutions non garanties.

## (Non-)solvabilité exacte

Trouver  $\boldsymbol{p} \in \mathcal{P}$  tel que  $\mathcal{G}(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{d}^{\text{obs}}; \boldsymbol{X}) = \mathbf{0}$  ( $\boldsymbol{X} \in \mathcal{X}, \boldsymbol{d}^{\text{obs}} \in \mathcal{D}$  donnés)

- Existence et unicité des solutions non garanties.
- En général,

$$\text{Dim}(\mathcal{D}) \neq \text{Dim}(\mathcal{P})$$

(dimensions finies en pratique après discrétisation), et on cherche à disposer de données **surdéterminées**:

$$\text{Dim}(\mathcal{D}) > \text{Dim}(\mathcal{P})$$

voire, si possible

$$\text{Dim}(\mathcal{D}) \gg \text{Dim}(\mathcal{P})$$



## (Non-)solvabilité exacte

Trouver  $\boldsymbol{p} \in \mathcal{P}$  tel que  $\mathcal{G}(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{d}^{\text{obs}}; \boldsymbol{X}) = \mathbf{0}$  ( $\boldsymbol{X} \in \mathcal{X}, \boldsymbol{d}^{\text{obs}} \in \mathcal{D}$  donnés)

- Existence et unicité des solutions non garanties.
- En général,

$$\text{Dim}(\mathcal{D}) \neq \text{Dim}(\mathcal{P})$$

(dimensions finies en pratique après discrétisation), et on cherche à disposer de données **surdéterminées**:

$$\text{Dim}(\mathcal{D}) > \text{Dim}(\mathcal{P})$$

voire, si possible

$$\text{Dim}(\mathcal{D}) \gg \text{Dim}(\mathcal{P})$$

- Solvabilité exacte de l'équation surdéterminée généralement impossible:
  - Description **approchée** de la réalité par le modèle physique  $\mathcal{G}(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{d}; \boldsymbol{X}) = \mathbf{0}$
  - Incertitudes sur les valeurs observées  $\boldsymbol{d}^{\text{obs}}$  de  $\boldsymbol{d}$

## Reformulation comme problèmes d'optimisation

Conséquence: reformulation fréquente de l'inversion comme une **minimisation**:

$$\boldsymbol{p}^* = \arg \min_{\boldsymbol{p} \in \mathcal{P}} \mathcal{J}(\boldsymbol{p}), \quad \mathcal{J}(\boldsymbol{p}) = \|\boldsymbol{d}(\boldsymbol{p}; \boldsymbol{X}) - \boldsymbol{d}^{\text{obs}}\|$$

## Reformulation comme problèmes d'optimisation

Conséquence: reformulation fréquente de l'inversion comme une **minimisation**:

$$\mathbf{p}^* = \arg \min_{\mathbf{p} \in \mathcal{P}} \mathcal{J}(\mathbf{p}), \quad \mathcal{J}(\mathbf{p}) = \|\mathbf{d}(\mathbf{p}; \mathbf{X}) - \mathbf{d}^{\text{obs}}\|$$

- $\mathbf{p} \mapsto \mathbf{d}(\mathbf{p}; \mathbf{X})$ : problème direct
- Beaucoup de choix possibles pour  $\|\cdot\|$  (norme  $L^2$  très utilisée car différentiable)
- La fonction-coût  $\mathcal{J}(\mathbf{p})$  n'a pas *a priori* de propriétés garantissant l'unicité ou le caractère global de  $\mathbf{p}^*$ .
- Caractère **implicite** de la dépendance de  $\mathcal{J}$  en  $\mathbf{p}$ :

$$\mathcal{J}(\mathbf{p}) = J(\mathbf{d}, \mathbf{p}) \quad \text{avec } \mathcal{G}(\mathbf{p}, \mathbf{d}; \mathbf{X}) = 0$$

## Inversion ou identification

**Problème inverse:** recherche d'une grandeur décrite par une *fonction*

→ Exemples: (a) champs (modules, forces, sources dépendant du temps...); (b) forme ou topologie du domaine; (c) comportement dépendant de la solution...

Discrétisation → grand nombre d'inconnues;

Forte sensibilité aux incertitudes, régularisation nécessaire.

## Inversion ou identification

**Problème inverse:** recherche d'une grandeur décrite par une *fonction*

- Exemples: (a) champs (modules, forces, sources dépendant du temps...); (b) forme ou topologie du domaine; (c) comportement dépendant de la solution...

Discrétisation → grand nombre d'inconnues;

Forte sensibilité aux incertitudes, régularisation nécessaire.

**Problème d'identification:** recherche d'une grandeur décrite par un *ensemble fini de paramètres*

- Exemples: (a) modèles de comportement et autres jeux de paramètres physiques; (b) discrétisations parcimonieuses...

Nombre *a priori* restreint d'inconnues;

Moindre sensibilité aux incertitudes, régularisation parfois facultative.

## Inversion ou identification

**Problème inverse:** recherche d'une grandeur décrite par une *fonction*

- Exemples: (a) champs (modules, forces, sources dépendant du temps...); (b) forme ou topologie du domaine; (c) comportement dépendant de la solution...

Discrétisation → grand nombre d'inconnues;

Forte sensibilité aux incertitudes, régularisation nécessaire.

**Problème d'identification:** recherche d'une grandeur décrite par un *ensemble fini de paramètres*

- Exemples: (a) modèles de comportement et autres jeux de paramètres physiques; (b) discrétisations parcimonieuses...

Nombre *a priori* restreint d'inconnues;

Moindre sensibilité aux incertitudes, régularisation parfois facultative.

- Les deux types de problèmes conduisent souvent à la minimisation d'une fonction-coût.
- Dans certains cas, une paramétrisation parcimonieuse d'un problème inverse constitue en soi une *régularisation*.

## 1. Généralités: inversion et identification; problèmes mal posés

## 2. Exemples de problèmes inverses

Gravimétrie

Identification de sources ou de sollicitations

Reconstruction de conditions aux limites inaccessibles

Problèmes inverses en vibrations de structures

Autres exemples

## 1. Généralités: inversion et identification; problèmes mal posés

## 2. Exemples de problèmes inverses

### Gravimétrie

Identification de sources ou de sollicitations

Reconstruction de conditions aux limites inaccessibles

Problèmes inverses en vibrations de structures

Autres exemples



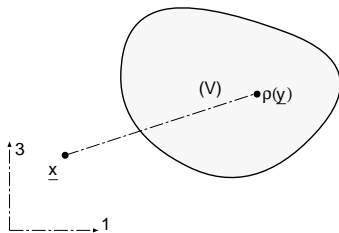
# Gravimétrie

**Modèle physique (accélération de la pesanteur dans la direction  $e$ ):**

$$g(\mathbf{x}) = \mathbb{G} \mathbf{e} \cdot \left\{ \nabla_{\mathbf{x}} \int_V \frac{1}{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|} \rho(\mathbf{y}) dV \right\}$$

$$=: \mathcal{G}(\rho)(\mathbf{x})$$

( $\mathbb{G} \approx 6.67408 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$ :  
constante universelle de la gravitation)



**Ce modèle physique est explicite.**

- Structure: équation intégrale de Fredholm de première espèce (cf. plus loin).
- Problème:  $\mathcal{G}^{-1}$  **non continu**  
 $\implies$  non-continuité de  $\rho(\cdot)$  par rapport à la donnée  $g(\cdot)$ .

**Problème inverse:** Déterminer la fonction  $\rho(\cdot)$  à partir de mesures  $g(\mathbf{x})$ ,  $\mathbf{x} \in \mathcal{M}$ .

# Gravimétrie



**GRACE**  
Gravity Recovery and Climate Experiment

CSR GFZ NASA AIR

HOME SCIENCE OPERATIONS MISSION FLIGHT SYSTEMS CSR

GAMES EDUCATION PUBLICATIONS GALLERY SEARCH

search

[Mission](#)  
[Operations](#)  
[Status](#)  
 (Updated:  
 2011-01-19)

[The GGM03  
 Models](#)

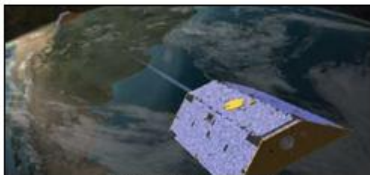
[Science Data  
 Products](#)

[Level-3 Data  
 Products](#)

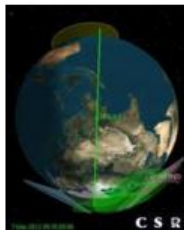
[GRACE  
 Science  
 Team  
 Meeting](#)

[Mission](#)

GRACE, twin satellites launched in March 2002, are making detailed measurements of Earth's gravity field which will lead to discoveries about gravity and Earth's natural systems. These discoveries could have far-reaching benefits to society and the world's population.



Orbiting Twins - The GRACE satellites



[Current Orbit Data](#)

Mission Elapsed Time	
Days	Hours
3643	07

Source: <http://www.csr.utexas.edu/grace/>

## Gravimétrie

**Multiplicité des solutions:** Soit  $f(\mathbf{y})$  définie sur  $V$  et telle que:

$$(\forall \mathbf{y} \in \partial V) \quad f(\mathbf{y}) = \frac{\partial}{\partial n} f(\mathbf{y}) = 0$$

Compte tenu de

$$\Delta_{\mathbf{y}}(1/\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|) = 0 \quad (\forall \mathbf{y} \in V)$$

la troisième formule de Green donne:

$$\begin{aligned} & \int_V \frac{1}{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|} \Delta f \, dV \\ &= \int_{\partial V} \left\{ \frac{1}{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|} \frac{\partial f}{\partial n} - f \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|} \right\} dS \\ &= 0 \end{aligned}$$

Distributions  $\rho$  et  $\rho + \Delta f$  indiscernables du point de vue du champ  $\mathbf{g}$  créé à l'extérieur de  $V$ .

## Gravimétrie

**Multiplicité des solutions:** Soit  $f(\mathbf{y})$  définie sur  $V$  et telle que:

$$(\forall \mathbf{y} \in \partial V) \quad f(\mathbf{y}) = \frac{\partial}{\partial n} f(\mathbf{y}) = 0$$

Compte tenu de

$$\Delta_{\mathbf{y}}(1/\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|) = 0 \quad (\forall \mathbf{y} \in V)$$

la troisième formule de Green donne:

$$\begin{aligned} & \int_V \frac{1}{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|} \Delta f \, dV \\ &= \int_{\partial V} \left\{ \frac{1}{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|} \frac{\partial f}{\partial n} - f \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|} \right\} dS \\ &= 0 \end{aligned}$$

Distributions  $\rho$  et  $\rho + \Delta f$  indiscernables du point de vue du champ  $\mathbf{g}$  créé à l'extérieur de  $V$ .

- Sous-détermination essentielle
- Nécessité d'informations supplémentaires indépendantes.

# Gravimétrie

**Multiplicité des solutions:** Soit  $f(\mathbf{y})$  définie sur  $V$  et telle que:

$$(\forall \mathbf{y} \in \partial V) \quad f(\mathbf{y}) = \frac{\partial}{\partial n} f(\mathbf{y}) = 0$$

Compte tenu de

$$\Delta_{\mathbf{y}}(1/\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|) = 0 \quad (\forall \mathbf{y} \in V)$$

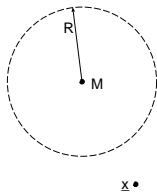
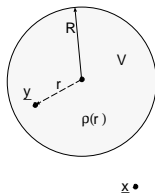
la troisième formule de Green donne:

$$\begin{aligned} & \int_V \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} \Delta f \, dV \\ &= \int_{\partial V} \left\{ \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} \frac{\partial f}{\partial n} - f \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} \right\} dS \\ &= 0 \end{aligned}$$

Distributions  $\rho$  et  $\rho + \Delta f$  indiscernables du point de vue du champ  $\mathbf{g}$  créé à l'extérieur de  $V$ .

- Sous-détermination essentielle
- Nécessité d'informations supplémentaires indépendantes.

exemple d'indétermination:



masse concentrée:

$$M = 4\pi \int_0^R \rho(r) dr$$

## 1. Généralités: inversion et identification; problèmes mal posés

## 2. Exemples de problèmes inverses

Gravimétrie

Identification de sources ou de sollicitations

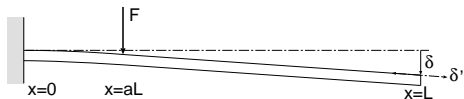
Reconstruction de conditions aux limites inaccessibles

Problèmes inverses en vibrations de structures

Autres exemples

## Identification de sources ou de sollicitations

**Exemple:** reconstruction d'une charge ponctuelle appliquée à une poutre élastique.



Problème direct:

- $F, aL$  (entrée) et  $L, EI$  (système) donnés
- $\delta(x)$  (sortie) inconnu

## Identification de sources ou de sollicitations

**Exemple:** reconstruction d'une charge ponctuelle appliquée à une poutre élastique.



Problème direct:

- $F, aL$  (entrée) et  $L, EI$  (système) donnés
- $\delta(x)$  (sortie) inconnu

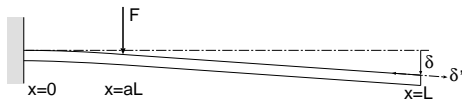
Problème inverse:

- $\delta(L), \delta'(L)$  (sortie) et  $L, EI$  (système) donnés
- $F, aL$  (entrée) inconnus



## Identification de sources ou de sollicitations

**Exemple:** reconstruction d'une charge ponctuelle appliquée à une poutre élastique.



Problème direct:

- $F, aL$  (entrée) et  $L, EI$  (système) donnés
- $\delta(x)$  (sortie) inconnu

Problème inverse:

- $\delta(L), \delta'(L)$  (sortie) et  $L, EI$  (système) donnés
- $F, aL$  (entrée) inconnus

Solution analytique (données exactes):

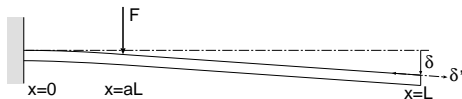
$$aL = 3\left(L - \frac{\delta}{\delta'}\right) \quad F = 2EI\delta'(aL)^{-2}$$

Perturbation relative sur  $\delta$  et  $\delta'$ :

$$\begin{aligned} \delta'_{mesure} &= \delta'_{exact}(1 + \varepsilon) \\ (\delta/\delta')_{mesure} &= (\delta/\delta')_{exact}(1 + \varepsilon') \end{aligned}$$

## Identification de sources ou de sollicitations

**Exemple:** reconstruction d'une charge ponctuelle appliquée à une poutre élastique.



Problème direct:

- $F, aL$  (entrée) et  $L, EI$  (système) donnés
- $\delta(x)$  (sortie) inconnu

Problème inverse:

- $\delta(L), \delta'(L)$  (sortie) et  $L, EI$  (système) donnés
- $F, aL$  (entrée) inconnus

Solution analytique (données exactes):

$$aL = 3\left(L - \frac{\delta}{\delta'}\right) \quad F = 2EI\delta'(aL)^{-2}$$

Perturbation relative sur  $\delta$  et  $\delta'$ :

$$\begin{aligned} \delta'_{mesure} &= \delta'_{exact}(1 + \varepsilon) \\ (\delta/\delta')_{mesure} &= (\delta/\delta')_{exact}(1 + \varepsilon') \end{aligned}$$

Erreur de reconstruction sur  $F$ :

$$e := \frac{F_{mesure}}{F_{exact}} - 1 = \frac{\varepsilon - \varepsilon' \frac{3-a}{a}}{1 + \varepsilon' \frac{3-a}{a}}$$

L'amplification de l'erreur expérimentale augmente quand  $a$  diminue.

$a$	0.25	0.10	0.05	$(\varepsilon = \varepsilon' = 0.01)$
$e$	0.12	0.24	0.38	

## 1. Généralités: inversion et identification; problèmes mal posés

## 2. Exemples de problèmes inverses

Gravimétrie

Identification de sources ou de sollicitations

**Reconstruction de conditions aux limites inaccessibles**

Problèmes inverses en vibrations de structures

Autres exemples

# Reconstruction de conditions aux limites inaccessibles

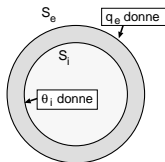
## Exemple en thermique: conduite.

Equation locale de la conduction ( $\theta$ : température):

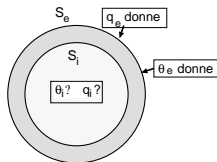
$$k\Delta\theta\left(-\rho c \frac{\partial\theta}{\partial t}\right) = 0$$

Flux imposé sur  $S_e$ :

$$k \frac{\partial\theta}{\partial n} = q_e \quad \text{sur } S_e$$



Probleme direct



Probleme inverse

# Reconstruction de conditions aux limites inaccessibles

## Exemple en thermique: conduite.

Equation locale de la conduction ( $\theta$ : température):

$$k\Delta\theta\left(-\rho c \frac{\partial\theta}{\partial t}\right) = 0$$

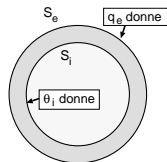
Flux imposé sur  $S_e$ :

$$k \frac{\partial\theta}{\partial n} = q_e \quad \text{sur } S_e$$

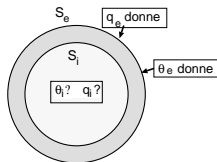
**Problème direct:** donnée sur  $S_i$ :

$$\theta = \theta_i \quad \text{ou bien} \quad k \frac{\partial\theta}{\partial n} = q_i \quad \text{sur } S_i$$

Calcul de  $\theta(x, t)$  dans le domaine d'étude.



Probleme direct



Probleme inverse

# Reconstruction de conditions aux limites inaccessibles

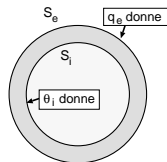
## Exemple en thermique: conduite.

Equation locale de la conduction ( $\theta$ : température):

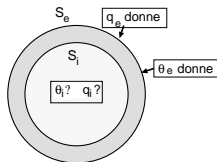
$$k\Delta\theta\left(-\rho c \frac{\partial\theta}{\partial t}\right) = 0$$

Flux imposé sur  $S_e$ :

$$k \frac{\partial\theta}{\partial n} = q_e \quad \text{sur } S_e$$



Probleme direct



Probleme inverse

**Problème direct:** donnée sur  $S_i$ :

$$\theta = \theta_i \quad \text{ou bien} \quad k \frac{\partial\theta}{\partial n} = q_i \quad \text{sur } S_i$$

Calcul de  $\theta(x, t)$  dans le domaine d'étude.

**Problème inverse:** aucune donnée sur  $S_i$ , température donnée sur  $S_e$

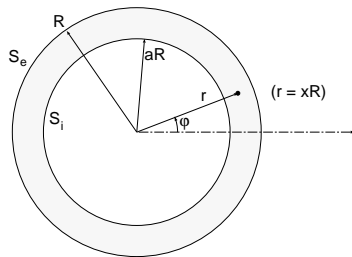
$$\theta = \theta_e \quad \text{sur } S_e$$

calcul de  $\theta_i, q_i$  sur  $S_i$

# Reconstruction de conditions aux limites inaccessibles: exemple analytique

Equation de la chaleur (équilibre):

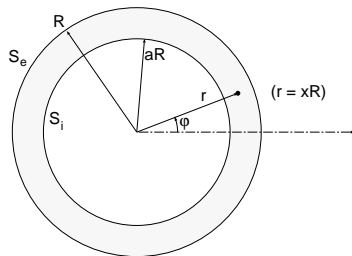
$$\Delta\theta := \frac{\partial^2\theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial\theta}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial\theta}{\partial\varphi} = 0$$



# Reconstruction de conditions aux limites inaccessibles: exemple analytique

Equation de la chaleur (équilibre):

$$\Delta\theta := \frac{\partial^2\theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial\theta}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial\theta}{\partial\varphi} = 0$$



Solution générale

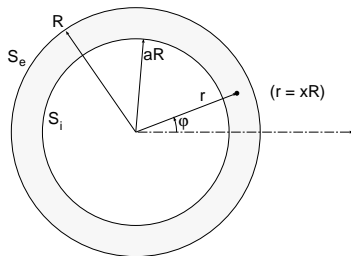
$$\theta(r, \varphi) = a_0 + b_0 \operatorname{Log} r + \sum_{n \geq 1} \left\{ (a_n r^n + a_{-n} r^{-n}) \cos n\varphi + (b_n r^n + b_{-n} r^{-n}) \sin n\varphi \right\}$$



# Reconstruction de conditions aux limites inaccessibles: exemple analytique

Equation de la chaleur (équilibre):

$$\Delta\theta := \frac{\partial^2\theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial\theta}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2\theta}{\partial\varphi^2} = 0$$



Solution générale

$$\theta(r, \varphi) = a_0 + b_0 \text{Log } r + \sum_{n \geq 1} \left\{ (a_n r^n + a_{-n} r^{-n}) \cos n\varphi + (b_n r^n + b_{-n} r^{-n}) \sin n\varphi \right\}$$

Données sur la frontière externe  $S_e$ :

$$\theta(R, \varphi) = f(\varphi) = \alpha_0 + \sum_{n \geq 1} \alpha_n \cos n\varphi + \beta_n \sin n\varphi$$

$$\partial_n \theta(R, \varphi) = \partial_r \theta(R, \varphi) = g(\varphi) = \gamma_0 + \sum_{n \geq 1} \gamma_n \cos n\varphi + \delta_n \sin n\varphi$$

## Reconstruction de conditions aux limites inaccessibles: exemple analytique

Champ de température solution ( $a \leq x \leq 1$ ):

$$\theta(xR, \varphi) = \alpha_0 + \gamma_0 R \operatorname{Log} x + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} \left[ \left( \alpha_n + \frac{R}{n} \gamma_n \right) \cos n\varphi + \left( \beta_n + \frac{R}{n} \delta_n \right) \sin n\varphi \right] x^n + \left[ \left( \alpha_n - \frac{R}{n} \gamma_n \right) \cos n\varphi + \left( \beta_n - \frac{R}{n} \delta_n \right) \sin n\varphi \right] x^{-n}$$

## Reconstruction de conditions aux limites inaccessibles: exemple analytique

Champ de température solution ( $a \leq x \leq 1$ ):

$$\theta(xR, \varphi) = \alpha_0 + \gamma_0 R \operatorname{Log} x + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} \left[ \left( \alpha_n + \frac{R}{n} \gamma_n \right) \cos n\varphi + \left( \beta_n + \frac{R}{n} \delta_n \right) \sin n\varphi \right] x^n + \left[ \left( \alpha_n - \frac{R}{n} \gamma_n \right) \cos n\varphi + \left( \beta_n - \frac{R}{n} \delta_n \right) \sin n\varphi \right] x^{-n}$$

- Donnée erronée:  $\hat{\alpha}_N = \alpha_N(1 + \varepsilon)$
- Erreur commise sur  $\theta$ :  $\hat{\theta} - \theta = \varepsilon \alpha_N (x^N + x^{-N})/2$
- Amplification de l'erreur de mesure  $A = (x^N + x^{-N})/2$

## Reconstruction de conditions aux limites inaccessibles: exemple analytique

Champ de température solution ( $a \leq x \leq 1$ ):

$$\theta(xR, \varphi) = \alpha_0 + \gamma_0 R \operatorname{Log} x + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} \left[ \left( \alpha_n + \frac{R}{n} \gamma_n \right) \cos n\varphi + \left( \beta_n + \frac{R}{n} \delta_n \right) \sin n\varphi \right] x^n + \left[ \left( \alpha_n - \frac{R}{n} \gamma_n \right) \cos n\varphi + \left( \beta_n - \frac{R}{n} \delta_n \right) \sin n\varphi \right] x^{-n}$$

- Donnée erronée:  $\hat{\alpha}_N = \alpha_N(1 + \varepsilon)$
- Erreur commise sur  $\theta$ :  $\hat{\theta} - \theta = \varepsilon \alpha_N (x^N + x^{-N})/2$
- Amplification de l'erreur de mesure  $A = (x^N + x^{-N})/2$

Par exemple:

$$x = 0.9 \rightarrow A = 2.87 (N = 10) \quad A = 8.23 (N = 20)$$

$$x = 0.8 \rightarrow A = 9.31 (N = 10) \quad A = 86.7 (N = 20)$$

## Reconstruction de conditions aux limites inaccessibles: exemple analytique

Champ de température solution ( $a \leq x \leq 1$ ):

$$\theta(xR, \varphi) = \alpha_0 + \gamma_0 R \operatorname{Log} x + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} \left[ \left( \alpha_n + \frac{R}{n} \gamma_n \right) \cos n\varphi + \left( \beta_n + \frac{R}{n} \delta_n \right) \sin n\varphi \right] x^n + \left[ \left( \alpha_n - \frac{R}{n} \gamma_n \right) \cos n\varphi + \left( \beta_n - \frac{R}{n} \delta_n \right) \sin n\varphi \right] x^{-n}$$

- Donnée erronée:  $\hat{\alpha}_N = \alpha_N(1 + \varepsilon)$
- Erreur commise sur  $\theta$ :  $\hat{\theta} - \theta = \varepsilon \alpha_N (x^N + x^{-N})/2$
- Amplification de l'erreur de mesure  $A = (x^N + x^{-N})/2$

Par exemple:

$$x = 0.9 \rightarrow A = 2.87 (N = 10) \quad A = 8.23 (N = 20)$$

$$x = 0.8 \rightarrow A = 9.31 (N = 10) \quad A = 86.7 (N = 20)$$

Bruits expérimentaux de mode de Fourier élevé très pénalisants:  $a \searrow \implies A \nearrow$

## Reconstruction de conditions aux limites: cas bien posé

Données sur les frontières interne  $S_i$  et externe  $S_e$ :

$$\theta(aR, \varphi) = f(\varphi) = \alpha_0 + \sum_{n \geq 1} \alpha_n \cos n\varphi + \beta_n \sin n\varphi$$

$$\partial_n \theta(R, \varphi) = \partial_r \theta(R, \varphi) = g(\varphi) = \gamma_0 + \sum_{n \geq 1} \gamma_n \cos n\varphi + \delta_n \sin n\varphi$$

Champ de température solution ( $a \leq x \leq 1$ ):

$$\theta(xR, \varphi) = \alpha_0 + \gamma_0 R \operatorname{Log} x$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} \left[ \left( \alpha_n + a^{-n} \frac{R}{n} \gamma_n \right) \cos n\varphi + \left( \beta_n + a^{-n} \frac{R}{n} \delta_n \right) \sin n\varphi \right] \frac{x^n}{a^n + a^{-n}}$$

$$+ \left[ \left( \alpha_n - a^{-n} \frac{R}{n} \gamma_n \right) \cos n\varphi + \left( \beta_n - a^{-n} \frac{R}{n} \delta_n \right) \sin n\varphi \right] \frac{x^{-n}}{a^n + a^{-n}}$$

## Reconstruction de conditions aux limites: cas bien posé

Données sur les frontières interne  $S_i$  et externe  $S_e$ :

$$\theta(aR, \varphi) = f(\varphi) = \alpha_0 + \sum_{n \geq 1} \alpha_n \cos n\varphi + \beta_n \sin n\varphi$$

$$\partial_n \theta(R, \varphi) = \partial_r \theta(R, \varphi) = g(\varphi) = \gamma_0 + \sum_{n \geq 1} \gamma_n \cos n\varphi + \delta_n \sin n\varphi$$

Champ de température solution ( $a \leq x \leq 1$ ):

$$\theta(xR, \varphi) = \alpha_0 + \gamma_0 R \operatorname{Log} x$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} \left[ \left( \alpha_n + a^{-n} \frac{R}{n} \gamma_n \right) \cos n\varphi + \left( \beta_n + a^{-n} \frac{R}{n} \delta_n \right) \sin n\varphi \right] \frac{x^n}{a^n + a^{-n}}$$

$$+ \left[ \left( \alpha_n - a^{-n} \frac{R}{n} \gamma_n \right) \cos n\varphi + \left( \beta_n - a^{-n} \frac{R}{n} \delta_n \right) \sin n\varphi \right] \frac{x^{-n}}{a^n + a^{-n}}$$

- Donnée erronée:

$$\hat{\alpha}_N = \alpha_N(1 + \varepsilon)$$

- Erreur commise sur  $\theta$ :

$$\hat{\theta} - \theta = \frac{1}{2} \varepsilon \alpha_N \frac{(x^N + x^{-N})}{a^N + a^{-N}}$$

- Pas d'amplification de l'erreur de mesure:

$$|\hat{\theta} - \theta| \leq \varepsilon \alpha_N / 2$$

## 1. Généralités: inversion et identification; problèmes mal posés

## 2. Exemples de problèmes inverses

Gravimétrie

Identification de sources ou de sollicitations

Reconstruction de conditions aux limites inaccessibles

**Problèmes inverses en vibrations de structures**

Autres exemples



## Problèmes inverses en vibrations de structures

Structures en service: informations sur comportement vibratoire

- mesures de fréquences propres,
- mesures de déplacements modaux.

## Problèmes inverses en vibrations de structures

Structures en service: informations sur comportement vibratoire

- mesures de fréquences propres,
- mesures de déplacements modaux.

**Problème direct:** structure parfaitement connue, donc données modales mesurées surabondantes.

$$[K]\{X\} - \omega^2[M]\{X\} = 0 \longrightarrow \omega, \{X\}$$

## Problèmes inverses en vibrations de structures

Structures en service: informations sur comportement vibratoire

- mesures de fréquences propres,
- mesures de déplacements modaux.

**Problème direct:** structure parfaitement connue, donc données modales mesurées surabondantes.

$$[K]\{X\} - \omega^2[M]\{X\} = 0 \longrightarrow \omega, \{X\}$$

**Problème inverse:** ignorance partielle de la structure

$$\omega_i, \{X_i\} \longrightarrow [K], [M]$$

$[K], [M]$  dépendent de paramètres:  $E(x), S(x), I(x), \rho(x), \dots$

## Problèmes inverses en vibrations de structures

Structures en service: informations sur comportement vibratoire

- mesures de fréquences propres,
- mesures de déplacements modaux.

**Problème direct:** structure parfaitement connue, donc données modales mesurées surabondantes.

$$[K]\{X\} - \omega^2[M]\{X\} = 0 \longrightarrow \omega, \{X\}$$

**Problème inverse:** ignorance partielle de la structure

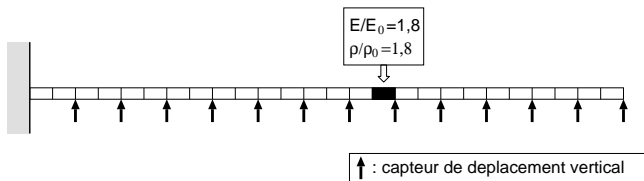
$$\omega_i, \{X_i\} \longrightarrow [K], [M]$$

$[K], [M]$  dépendent de paramètres:  $E(x), S(x), I(x), \rho(x), \dots$

### Applications

- Recalage du modèle (évolution, dégradation au cours du fonctionnement),
- Identification de C.L. imparfaitement connues.
- Surveillance, détection ou quantification de défauts.

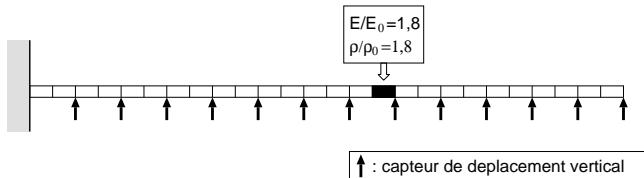
## Problèmes inverses en vibrations de structures: exemple de sensibilité aux données imparfaites



Reconstruire  $EI(x)$ ,  $\rho(x)$  à partir des données  $\omega_i$  ( $1 \leq i \leq n_f$ ) et  $u_{ij}$  ( $1 \leq j \leq n_c$ ).

- 52 éléments, 26 macro-éléments ;
- $n_f = 10$  modes mesurés,  $n_c = 13$  capteurs ;
- Macro 16:  $EI(x) = 1,8EI_0$ ,  $\rho(x) = 1,8\rho_0$  ;
- Autres macros:  $EI(x) = EI_0$ ,  $\rho(x) = \rho_0$

## Problèmes inverses en vibrations de structures: exemple de sensibilité aux données imparfaites

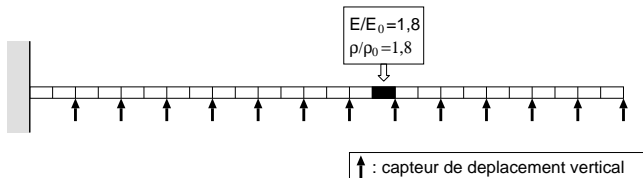


Reconstruire  $EI(x)$ ,  $\rho(x)$  à partir des données  $\omega_i$  ( $1 \leq i \leq n_f$ ) et  $u_{ij}$  ( $1 \leq j \leq n_c$ ).

Minimisation d'un écart quadratique

$$\min_{EI, \rho} \sum_{i=1}^{n_f} \left( [f_i^{mes} - f_i(EI, \rho)]^2 + \sum_{j=1}^{n_c} [u_{ij}^{mes} - u_{ij}(EI, \rho)]^2 \right)$$

## Problèmes inverses en vibrations de structures: exemple de sensibilité aux données imparfaites



Reconstruire  $EI(x)$ ,  $\rho(x)$  à partir des données  $\omega_i$  ( $1 \leq i \leq n_f$ ) et  $u_{ij}$  ( $1 \leq j \leq n_c$ ).

Minimisation d'un écart quadratique

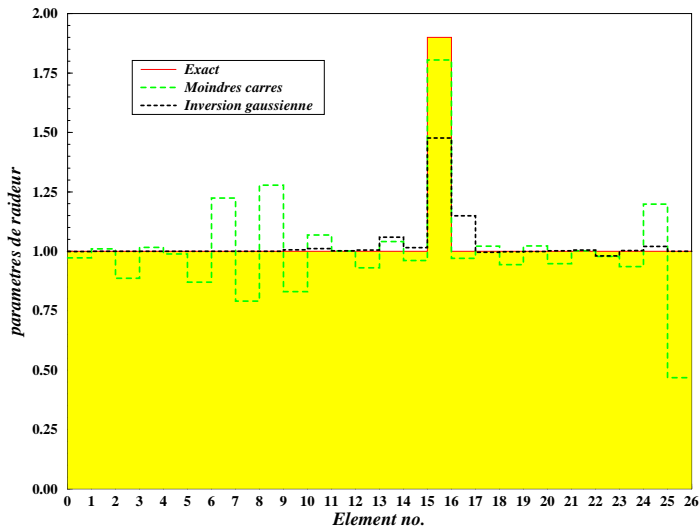
$$\min_{EI, \rho} \sum_{i=1}^{n_f} \left( [f_i^{mes} - f_i(EI, \rho)]^2 + \sum_{j=1}^{n_c} [u_{ij}^{mes} - u_{ij}(EI, \rho)]^2 \right)$$

Données synthétiques exactes ou bruitées par

$$(\text{donnée bruitée}) = (\text{donnée exacte}) \times (1 + r)$$

$r$ : v.a. uniforme ( $\langle r \rangle = 0, \sigma = 10^{-3}$ )

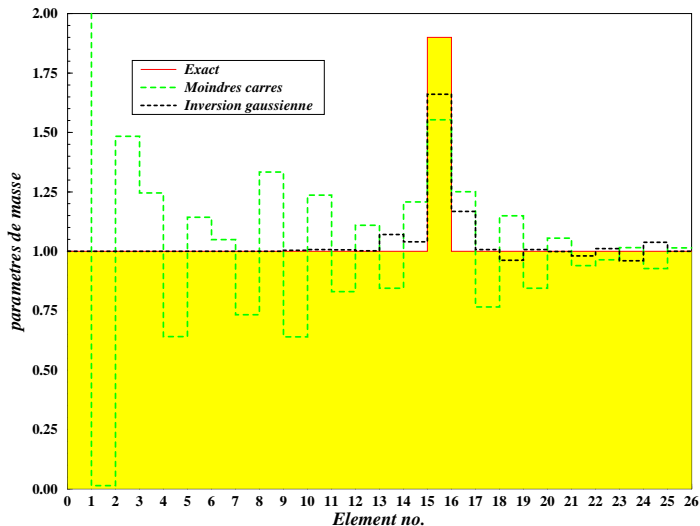
# Problèmes inverses en vibrations de structures: exemple de sensibilité aux données imparfaites



Reconstruction des paramètres de raideur



# Problèmes inverses en vibrations de structures: exemple de sensibilité aux données imparfaites



Reconstruction des paramètres de masse

## 1. Généralités: inversion et identification; problèmes mal posés

## 2. Exemples de problèmes inverses

Gravimétrie

Identification de sources ou de sollicitations

Reconstruction de conditions aux limites inaccessibles

Problèmes inverses en vibrations de structures

Autres exemples

# Identification de champs de diffusivité thermique

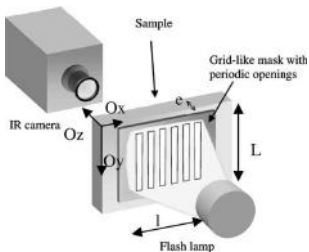


Fig. 1. Scheme of the flash experiment described by Krapez et al. [12].

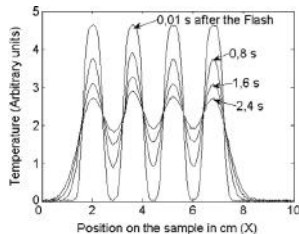


Fig. 2. Temperature profiles after the flash simulated with relation (3.13).

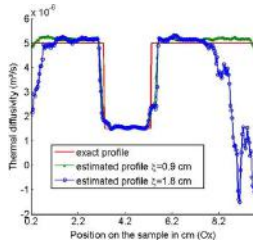
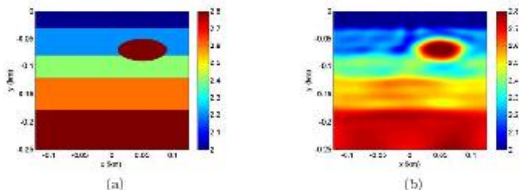


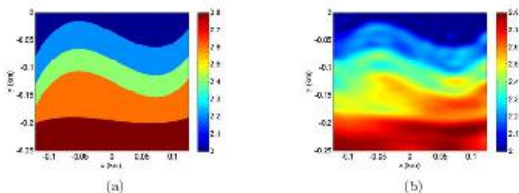
Fig. 9. Diffusivity profiles obtained from relation (4.34) with the first three modes of the SVD, in the case of a larger defect.

Bamford, M., Batsale, J. C., Fudym, O., *Infrared Phys. Technol.*, **52**:1–13 (2009).

# Identification en géophysique

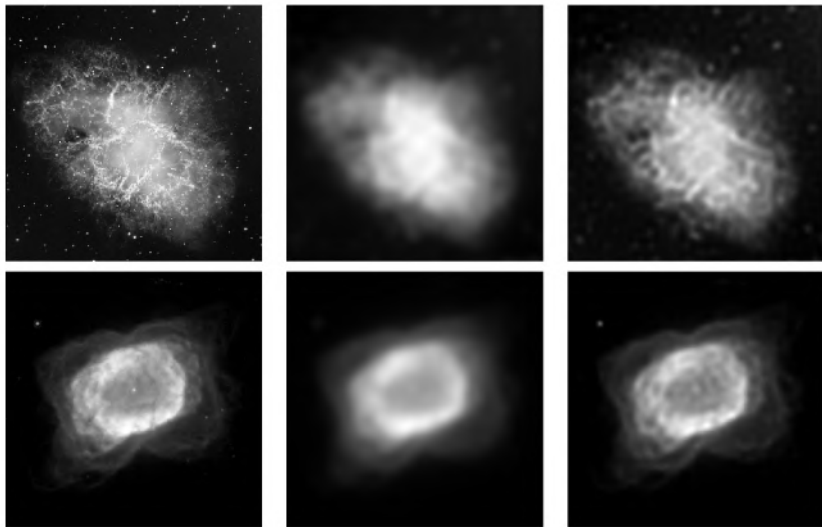


**Figure 6.** A 2D target shear wave velocity profile with 5 layers and inclusion (Layer:  $c_s = 2.0\text{km/s}$ ,  $2.2\text{km/s}$ ,  $2.4\text{km/s}$ ,  $2.6\text{km/s}$ , and  $2.8\text{km/s}$  from top to bottom, Inclusion:  $c_s = 2.8\text{km/s}$ ) (b) Reconstructed profile

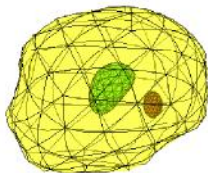


**Figure 7.** A 2D target shear wave velocity profile with 5 curved layers (Layer:  $c_s = 2.0\text{km/s}$ ,  $2.2\text{km/s}$ ,  $2.4\text{km/s}$ ,  $2.6\text{km/s}$ , and  $2.8\text{km/s}$  from top to bottom) (b) Reconstructed profile

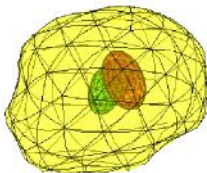
# Déconvolution d'images brouillées



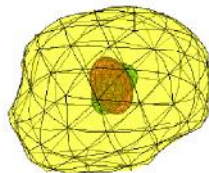
# Imagerie médicale par tomographie optique



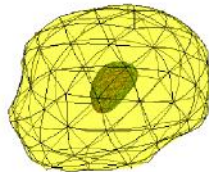
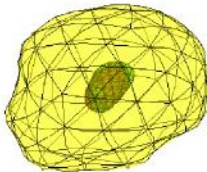
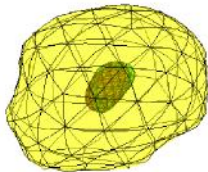
iter: 19



iter: 35



iter: 51



# Plan général

**Partie 1:** Généralités

**Partie 2:** Identification en mécanique des solides

**Partie 3:** Outils: algèbre linéaire, moindres carrés, optimisation

**Partie 4:** Problèmes mal posés et leur régularisation

**Partie 5:** Approches bayésiennes

### 3. Identification de paramètres

### 4. Méthodes d'identification basées sur des champs virtuels

Méthode des champs virtuels (MCV)

Méthode de l'écart à l'équilibre

### 5. Fonctionnelles d'erreur en relation de comportement (ERC)

Concept d'ERC, lien avec les principes variationnels

ERC et identification en élasticité linéaire: statique

ERC et identification en élasticité linéaire: dynamique



### 3. Identification de paramètres

#### 4. Méthodes d'identification basées sur des champs virtuels

Méthode des champs virtuels (MCV)

Méthode de l'écart à l'équilibre

#### 5. Fonctionnelles d'erreur en relation de comportement (ERC)

Concept d'ERC, lien avec les principes variationnels

ERC et identification en élasticité linéaire: statique

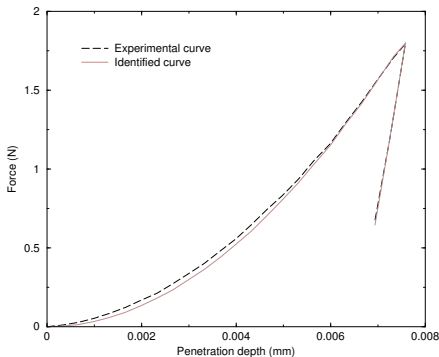
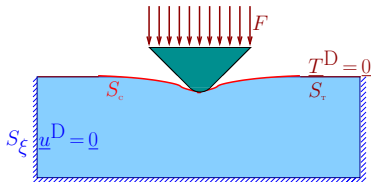
ERC et identification en élasticité linéaire: dynamique

## Problème d'identification

- Objectif principal: identification de paramètres  $p$  associés à des modèles de comportement (linéaires ou non).
- Le problème direct est soluble si  $p$  est connu;
- Dans le cas contraire, l'identification de  $p$  nécessite une information (d'origine expérimentale) supplémentaire: données **surabondantes** par rapport aux C.L. du problème direct

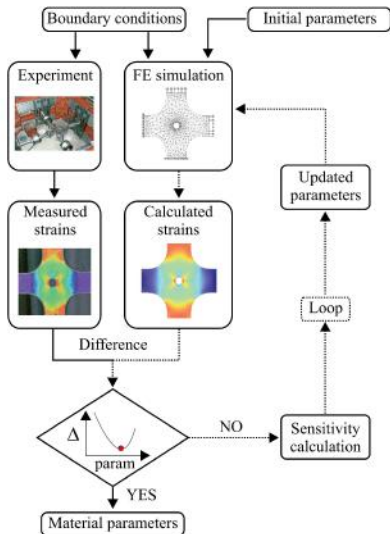
## Problème d'identification

- Objectif principal: identification de paramètres  $p$  associés à des modèles de comportement (linéaires ou non).
- Le problème direct est soluble si  $p$  est connu;
- Dans le cas contraire, l'identification de  $p$  nécessite une information (d'origine expérimentale) supplémentaire: données **surabondantes** par rapport aux C.L. du problème direct



A. Constantinescu, N. Tardieu (2001)

# Identification par mesures de champs cinématiques



## Main characteristics of the procedure

- measurement performed with digital image correlation
- updating strain components
- identification of the parameters of an elasto-plastic law

## Reference

- S. Cooreman, D. Lecompte, H. Sol, J. Vantomme, and D. Debruyne, *Identification of Mechanical Material Behavior Through Inverse Modeling and DIC*, **Experimental Mechanics**, 2007

## Mesures de champs cinématiques: motivations

- Attractivité croissante des mesures sans contact:
  - développement récent de caméras CCD à faible coût
  - progrès accomplis en matière de moyens de traitement d'images
- Données disponibles en grandes quantités
- Caractérisation de la réponse mécanique de matériaux ou structures à l'aide de telles mesures: domaine actuellement très actif (en particulier en France!)

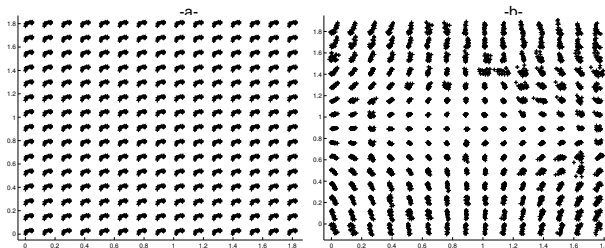
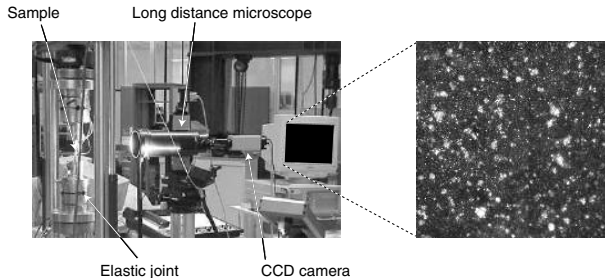
## Mesures de champs cinématiques: motivations

- Attractivité croissante des mesures sans contact:
  - développement récent de caméras CCD à faible coût
  - progrès accomplis en matière de moyens de traitement d'images
- Données disponibles en grandes quantités
- Caractérisation de la réponse mécanique de matériaux ou structures à l'aide de telles mesures: domaine actuellement très actif (en particulier en France!)
- Idée générale: procéder à des mesures de complexité croissante pour extraire une plus grande quantité d'information fiable à partir d'un petit nombre de tests; typiquement
  - mesures de champs de déplacement
  - mesures de champs de déformation
- But: identifier d'autres (champs de) paramètres (souvent comportement matériau)

## Mesures de champs cinématiques: motivations

- Attractivité croissante des mesures sans contact:
  - développement récent de caméras CCD à faible coût
  - progrès accomplis en matière de moyens de traitement d'images
- Données disponibles en grandes quantités
- Caractérisation de la réponse mécanique de matériaux ou structures à l'aide de telles mesures: domaine actuellement très actif (en particulier en France!)
- Idée générale: procéder à des mesures de complexité croissante pour extraire une plus grande quantité d'information fiable à partir d'un petit nombre de tests; typiquement
  - mesures de champs de déplacement
  - mesures de champs de déformation
- But: identifier d'autres (champs de) paramètres (souvent comportement matériau)
- Nécessité de méthodes numériques d'identification adaptées.
- Souvent, mesures de champs cinématiques mais conditions aux limites incomplètes (chargement connu seulement par des résultantes)

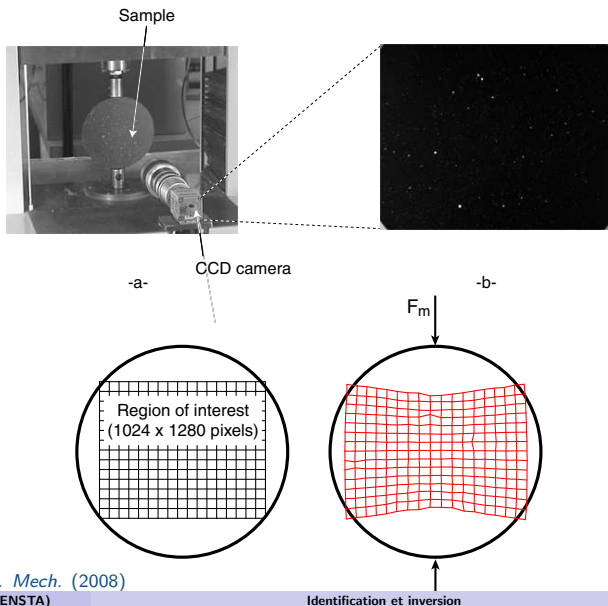
# Essai en traction simple sur alliage d'aluminium



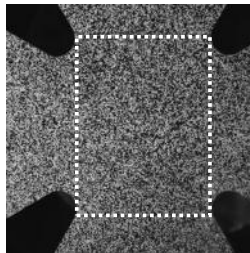
S. Avril *et al*, *Exp. Mech.* (2008)



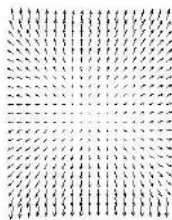
## Essai brésilien



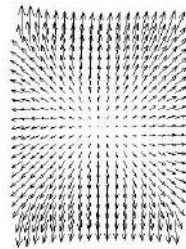
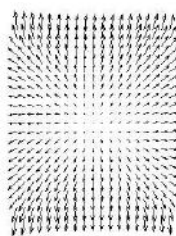
# Essai biaxial sur un composite



-a-



-b-



-b-

-c-

S. Avril *et al*, *Exp. Mech.* (2008)

## Identification de paramètres de comportement (linéaire)

### Cas de l'élasticité linéaire HPP:

Equations d'équilibre

$$\begin{cases} \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{0} & \text{dans } \Omega, \\ \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = \bar{\mathbf{T}} & \text{sur } S_f, \end{cases}$$

Equations de compatibilité cinématique

$$\begin{cases} \boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}[\mathbf{u}] = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{u} + \nabla^t \mathbf{u}) & \text{dans } \Omega, \\ \mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}} & \text{sur } S_u, \end{cases}$$

Relation de comportement

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathcal{A}(\boldsymbol{\rho}) : \boldsymbol{\varepsilon} \quad \text{dans } \Omega$$

# Identification de paramètres de comportement (linéaire)

## Cas de l'élasticité linéaire HPP:

Equations d'équilibre

$$\begin{cases} \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{0} & \text{dans } \Omega, \\ \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = \bar{\mathbf{T}} & \text{sur } S_f, \end{cases}$$

Equations de compatibilité cinématique

$$\begin{cases} \boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}[\mathbf{u}] = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{u} + \nabla^t \mathbf{u}) & \text{dans } \Omega, \\ \mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}} & \text{sur } S_u, \end{cases}$$

Relation de comportement  $\boldsymbol{\sigma} = \mathcal{A}(\boldsymbol{\rho}) : \boldsymbol{\varepsilon}$  dans  $\Omega$

- Exemples de paramétrages:

$$\boldsymbol{\rho} = \{E, \nu\} \quad (\text{isotrope})$$

$$\boldsymbol{\rho} = \{C_{11}, C_{12}, C_{13}, C_{22}, C_{23}, C_{33}, C_{44}, C_{55}, C_{66}\} \quad (\text{orthotrope})$$

$$\boldsymbol{\rho} = \{\rho_1, \dots, \rho_n\} \text{ t.q. } \mathcal{A}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n \rho_i \mathcal{A}_i(\mathbf{x}) \quad (\text{hétérogène})$$

# Identification de paramètres de comportement (linéaire)

## Cas de l'élasticité linéaire HPP:

Equations d'équilibre

$$\begin{cases} \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{0} & \text{dans } \Omega, \\ \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = \bar{\mathbf{T}} & \text{sur } S_f, \end{cases}$$

Equations de compatibilité cinématique

$$\begin{cases} \boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}[\mathbf{u}] = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{u} + \nabla^t \mathbf{u}) & \text{dans } \Omega, \\ \mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}} & \text{sur } S_u, \end{cases}$$

Relation de comportement  $\boldsymbol{\sigma} = \mathcal{A}(\boldsymbol{\rho}) : \boldsymbol{\varepsilon}$  dans  $\Omega$

- Exemples de paramétrages:

$$\boldsymbol{\rho} = \{E, \nu\} \quad (\text{isotrope})$$

$$\boldsymbol{\rho} = \{C_{11}, C_{12}, C_{13}, C_{22}, C_{23}, C_{33}, C_{44}, C_{55}, C_{66}\} \quad (\text{orthotrope})$$

$$\boldsymbol{\rho} = \{\rho_1, \dots, \rho_n\} \text{ t.q. } \mathcal{A}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n \rho_i \mathcal{A}_i(\mathbf{x}) \quad (\text{hétérogène})$$

- Applications:

- Comportement anisotrope équivalent (macro) de matériaux composites
- Modules hétérogènes (élastographie...)

## Identification de paramètres de comportement (linéaire)

- Relation de comportement:  $\boldsymbol{\sigma} = \mathcal{A}(\boldsymbol{p}) : \boldsymbol{\varepsilon}$ ;
- Formulation faible:

$$\int_{\Omega} \boldsymbol{\varepsilon}[\tilde{\boldsymbol{u}}] : \mathcal{A}(\boldsymbol{p}) : \boldsymbol{\varepsilon}[\boldsymbol{u}] dV - \int_{S_f} \tilde{\boldsymbol{u}} \cdot \boldsymbol{T} dS = 0 \quad \text{pour tous } \tilde{\boldsymbol{u}} \text{ C.A. à } \mathbf{0}.$$

La matrice de rigidité dépend de  $\boldsymbol{p}$  (évident mais essentiel).

## Identification de paramètres de comportement (linéaire)

- Relation de comportement:  $\boldsymbol{\sigma} = \mathcal{A}(\boldsymbol{p}) : \boldsymbol{\varepsilon}$ ;
- Formulation faible:

$$\int_{\Omega} \boldsymbol{\varepsilon}[\tilde{\boldsymbol{u}}] : \mathcal{A}(\boldsymbol{p}) : \boldsymbol{\varepsilon}[\boldsymbol{u}] dV - \int_{S_f} \tilde{\boldsymbol{u}} \cdot \boldsymbol{T} dS = 0 \quad \text{pour tous } \tilde{\boldsymbol{u}} \text{ C.A. à } \mathbf{0}.$$

La matrice de rigidité dépend de  $\boldsymbol{p}$  (évident mais essentiel).

- Problème direct discrétisé (méthode de Galerkin, fonctions d'interpolation éléments finis):

$$\mathbf{K}(\boldsymbol{p}) \boldsymbol{U} = \boldsymbol{F} \implies \boldsymbol{U} = \boldsymbol{U}_p$$

## Identification de paramètres de comportement (linéaire)

$$K(\boldsymbol{p})\boldsymbol{U} = \boldsymbol{F} \implies \boldsymbol{U} = \boldsymbol{U}_p$$

- Simulation des données expérimentales:  $\boldsymbol{d}(\boldsymbol{p}) = \boldsymbol{\Pi}\boldsymbol{U}_p$  ( $\boldsymbol{\Pi}$ : projection donnant la partie mesurée de la solution directe)



## Identification de paramètres de comportement (linéaire)

$$K(\mathbf{p})\mathbf{U} = \mathbf{F} \implies \mathbf{U} = \mathbf{U}_p$$

- Simulation des données expérimentales:  $\mathbf{d}(\mathbf{p}) = \Pi \mathbf{U}_p$  ( $\Pi$ : projection donnant la partie mesurée de la solution directe)
- Identification par les déplacements mesurés: **minimisation** d'une fonction-coût

$$\mathcal{J}(\mathbf{p}) = J(\mathbf{U}_p)$$

Exemple: ajustement de la réponse simulée  $\mathbf{U}_p$  aux mesures  $\mathbf{d}^{\text{obs}}$  au sens des moindres carrés:

$$J(\mathbf{V}) = \frac{1}{2} \|\Pi \mathbf{V} - \mathbf{d}^{\text{obs}}\|^2$$

Le résidu  $\Pi \mathbf{U}_p - \mathbf{d}^{\text{obs}}$  est *non-linéaire* en  $\mathbf{p}$ .

## Identification de paramètres de comportement (linéaire)

$$K(\boldsymbol{p})\boldsymbol{U} = \boldsymbol{F} \implies \boldsymbol{U} = \boldsymbol{U}_p$$

- Simulation des données expérimentales:  $\boldsymbol{d}(\boldsymbol{p}) = \Pi \boldsymbol{U}_p$  ( $\Pi$ : projection donnant la partie mesurée de la solution directe)
- Identification par les déplacements mesurés: **minimisation** d'une fonction-coût

$$\mathcal{J}(\boldsymbol{p}) = J(\boldsymbol{U}_p)$$

Exemple: ajustement de la réponse simulée  $\boldsymbol{U}_p$  aux mesures  $\boldsymbol{d}^{\text{obs}}$  au sens des moindres carrés:

$$J(\boldsymbol{V}) = \frac{1}{2} \|\Pi \boldsymbol{V} - \boldsymbol{d}^{\text{obs}}\|^2$$

Le résidu  $\Pi \boldsymbol{U}_p - \boldsymbol{d}^{\text{obs}}$  est *non-linéaire* en  $\boldsymbol{p}$ .

- Identification par les efforts (cas de mesures de champs  $\boldsymbol{U} = \boldsymbol{d}^{\text{obs}}$  complètes):

$$\mathcal{J}(\boldsymbol{p}) = \frac{1}{2} \|K(\boldsymbol{p})\boldsymbol{d}^{\text{obs}} - \boldsymbol{F}\|^2$$

Le résidu  $K(\boldsymbol{p})\boldsymbol{d}^{\text{obs}} - \boldsymbol{F}$  est *linéaire* en  $\boldsymbol{p}$  si  $\mathcal{A}(\boldsymbol{p})$  l'est.

## Identification de paramètres de comportement (non-linéaire)

Comportements complexes (élastoplastiques, endommageants,...) dépendant de l'histoire de chargement.

**Exemple de paramétrage:**

$$\mathbf{p} = \{E, \nu, \sigma_0, h\} \quad (\text{élastoplasticité } J_2)$$

## Identification de paramètres de comportement (non-linéaire)

Comportements complexes (élastoplastiques, endommageants,...) dépendant de l'histoire de chargement.

**Exemple de paramétrage:**

$$\boldsymbol{p} = \{E, \nu, \sigma_0, h\} \quad (\text{élastoplasticité } J_2)$$

**formulation faible incrémentale continue** d'inconnue  $\boldsymbol{u}_\ell$  basée sur l'intégration discrète du comportement (type retour radial):

$$\int_{\Omega} \boldsymbol{\varepsilon}[\tilde{\boldsymbol{u}}] : \boldsymbol{\sigma}[\boldsymbol{u}_\ell; \boldsymbol{u}_{\ell-1}, \mathcal{S}_{\ell-1}, \boldsymbol{p}] dV - \int_{S_f} \tilde{\boldsymbol{u}} \cdot \boldsymbol{T}_\ell dS = 0 \quad \text{pour tous } \tilde{\boldsymbol{u}} \text{ C.A. à } \mathbf{0}.$$

- $\boldsymbol{u}_\ell = \boldsymbol{u}(\cdot, t_\ell)$ : déplacement à  $t = t_\ell$ , inconnue principale
- $\mathcal{S}_\ell$ : autres champs (déformations, contraintes, variables internes) à  $t = t_\ell$
- $\boldsymbol{T}_\ell$ : chargement appliqué à  $t = t_\ell$
- $\boldsymbol{\sigma}[\boldsymbol{u}_\ell; \boldsymbol{u}_{\ell-1}, \mathcal{S}_{\ell-1}; \boldsymbol{p}]$ : contrainte à  $t = t_\ell$  prédite par loi de comportement

## Identification de paramètres de comportement (non-linéaire)

Comportements complexes (élastoplastiques, endommageants,...) dépendant de l'histoire de chargement.

**Exemple de paramétrage:**

$$\boldsymbol{p} = \{E, \nu, \sigma_0, h\} \quad (\text{élastoplasticité } J_2)$$

**formulation faible incrémentale continue** d'inconnue  $\boldsymbol{u}_\ell$  basée sur l'intégration discrète du comportement (type retour radial):

$$\int_{\Omega} \boldsymbol{\varepsilon}[\tilde{\boldsymbol{u}}] : \boldsymbol{\sigma}[\boldsymbol{u}_\ell; \boldsymbol{u}_{\ell-1}, \mathcal{S}_{\ell-1}, \boldsymbol{p}] dV - \int_{S_f} \tilde{\boldsymbol{u}} \cdot \boldsymbol{T}_\ell dS = 0 \quad \text{pour tous } \tilde{\boldsymbol{u}} \text{ C.A. à } \mathbf{0}.$$

- $\boldsymbol{u}_\ell = \boldsymbol{u}(\cdot, t_\ell)$ : déplacement à  $t = t_\ell$ , inconnue principale
- $\mathcal{S}_\ell$ : autres champs (déformations, contraintes, variables internes) à  $t = t_\ell$
- $\boldsymbol{T}_\ell$ : chargement appliqué à  $t = t_\ell$
- $\boldsymbol{\sigma}[\boldsymbol{u}_\ell; \boldsymbol{u}_{\ell-1}, \mathcal{S}_{\ell-1}; \boldsymbol{p}]$ : contrainte à  $t = t_\ell$  prédite par loi de comportement

**Formulation faible incrémentale discrétisée** d'inconnue  $\boldsymbol{U}_\ell$ :

$$\boldsymbol{R}_\ell(\boldsymbol{U}_\ell; \boldsymbol{U}_{\ell-1}, \mathcal{S}_{\ell-1}, \boldsymbol{p}) = \mathbf{0}$$

# Identification de paramètres de comportement (non-linéaire)

## Données:

- Mesures à divers stades de l'histoire de sollicitation imposée:  $\mathbf{d}_\ell^{\text{obs}}$  ( $0 \leq n \leq N$ )
- Simulation des données expérimentales:  $\mathbf{d}_\ell(\mathbf{p}) = \Pi \mathbf{U}_\ell$  ( $\Pi$ : projection donnant la partie mesurée de la solution directe)

# Identification de paramètres de comportement (non-linéaire)

## Données:

- Mesures à divers stades de l'histoire de sollicitation imposée:  $\mathbf{d}_\ell^{\text{obs}}$  ( $0 \leq n \leq N$ )
- Simulation des données expérimentales:  $\mathbf{d}_\ell(\mathbf{p}) = \Pi \mathbf{U}_\ell$  ( $\Pi$ : projection donnant la partie mesurée de la solution directe)

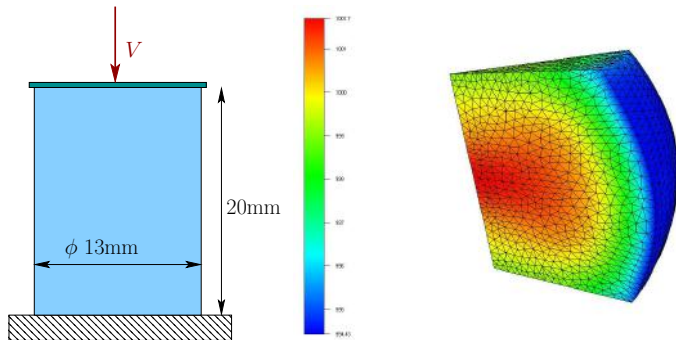
## Minimisation d'une fonction-coût de la forme

$$\mathcal{J}(\mathbf{p}) = \sum_{\ell=1}^N J(\mathbf{U}_\ell(\mathbf{p}))$$

Par exemple (moindres carrés):

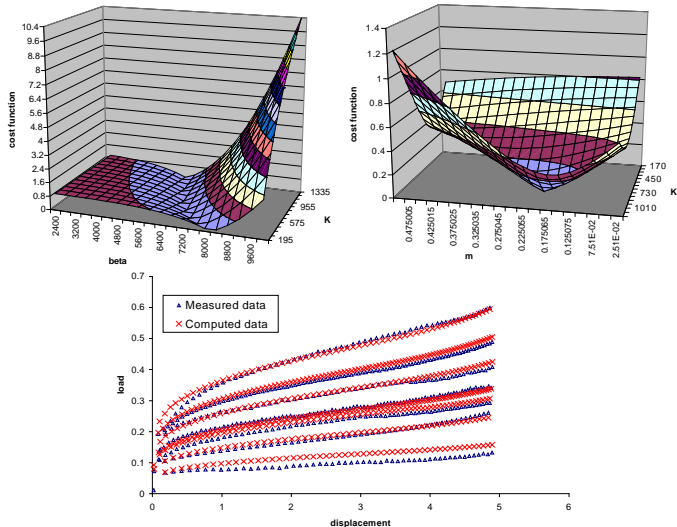
$$J(\mathbf{V}) = \frac{1}{2} \|\Pi \mathbf{V} - \mathbf{d}_\ell^{\text{obs}}\|^2$$

# Exemple: identification d'un comportement de type Norton-Hoff





# Exemple: identification d'un comportement de type Norton-Hoff



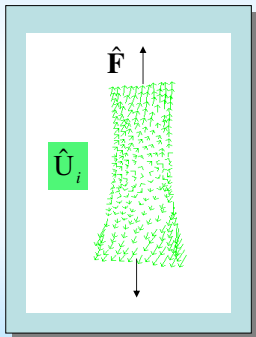
Forestier R., Chastel Y., Massoni E., *4th ICIPE Conf.* (2002)



## Exemples

## Identification de lois de comportement : striction du PET<sup>4</sup>

### Elastoplasticité en grandes déformations



- **Elasticité** :  $E, \nu$

- **Critère d'écoulement plastique** :

$$f = f(\underline{\underline{\sigma}}, R) = (\sqrt{J_2(\underline{\underline{\sigma}})} - R)(p)$$

- **Loi d'écoulement plastique** :

$$R = R_0 + Q_1(1 - \exp(-b_1 p)) + Q_2(1 - \exp(-b_2 p))$$

$$\theta(t) = [E, \nu, R_0, Q_1, b_1, Q_2, b_2, m_1, \beta_1, m_2, \beta_2]$$

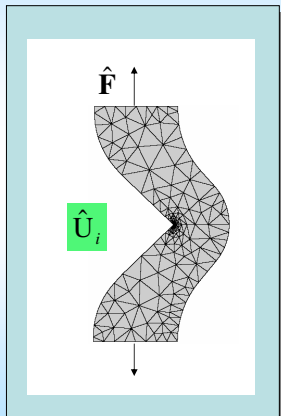
- **Formulation** :

$$\begin{cases} \theta = \arg \min(\|\mathbf{F}_{\text{int}}(\mathbf{U}) - \mathbf{F}_{\text{ext}}\|) \\ \mathbf{U} = \hat{\mathbf{U}} \text{ imposés sur } \partial\Omega_t \\ \mathbf{F}_{\text{ext}} = \hat{\mathbf{F}} \text{ connue sur } \partial\Omega_t \end{cases}$$

Extrait de "Identification par recalage de modèles éléments finis" (E. Pagnacco, A.-S. Caro-Bretelle), Ecole thématique CNRS "Identification à partir de mesures de champs" (2009)

## Exemples

# Identification de lois de comportement : striction d'un<sup>44</sup> silicone ; **Hyperviscoélasticité endommageable**



- **Hyperélasticité (Mooney Rivlin) :**  $c_{10}, c_{01}, c_{11}$
- **Endommagement (Miehe) :**  $d = d_{\text{inf}} \left( 1 - \exp\left(-\frac{\alpha}{\eta}\right) \right)$

$$\theta(t) = [c_{10}, c_{01}, c_{11}, d_{\text{inf}}, \alpha, \eta]$$

- **Formulation :**

$$\begin{cases} \theta = \arg \min (\| \mathbf{F}_{\text{int}}(\mathbf{U}) - \mathbf{F}_{\text{ext}} \|) \\ \mathbf{U} = \hat{\mathbf{U}} \text{ imposés sur } \partial\Omega_t \\ \mathbf{F}_{\text{ext}} = \hat{\mathbf{F}} \text{ connu sur } \partial\Omega_t \end{cases}$$

- **Hypothèse de comportement macrohomogène :**

$C_{10}$	$C_{01}$	$C_{11}$
0.93	1.79	1.78

Extrait de "Identification par recalage de modèles éléments finis" (E. Pagnacco, A.-S. Caro-Bretelle), Ecole thématique CNRS "Identification à partir de mesures de champs" (2009)

# Plan

## 3. Identification de paramètres

## 4. Méthodes d'identification basées sur des champs virtuels

Méthode des champs virtuels (MCV)

Méthode de l'écart à l'équilibre

## 5. Fonctionnelles d'erreur en relation de comportement (ERC)

Concept d'ERC, lien avec les principes variationnels

ERC et identification en élasticité linéaire: statique

ERC et identification en élasticité linéaire: dynamique

### 3. Identification de paramètres

### 4. Méthodes d'identification basées sur des champs virtuels

Méthode des champs virtuels (MCV)

Méthode de l'écart à l'équilibre

### 5. Fonctionnelles d'erreur en relation de comportement (ERC)

Concept d'ERC, lien avec les principes variationnels

ERC et identification en élasticité linéaire: statique

ERC et identification en élasticité linéaire: dynamique

### 3. Identification de paramètres

## 4. Méthodes d'identification basées sur des champs virtuels

Méthode des champs virtuels (MCV)

Méthode de l'écart à l'équilibre

## 5. Fonctionnelles d'erreur en relation de comportement (ERC)

## Principe de la méthode des champs virtuels (MCV)

- Approche applicable aux cas où le champ de déformation est expérimentalement connu dans  $\Omega$ :

$$\epsilon = \hat{\epsilon} \quad \text{in } \Omega$$



## Principe de la méthode des champs virtuels (MCV)

- Approche applicable aux cas où le champ de déformation est expérimentalement connu dans  $\Omega$ :

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \hat{\boldsymbol{\varepsilon}} \quad \text{in } \Omega$$

- Repose sur l'exploitation du PTV:

$$-\int_V \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\varepsilon}^* \, dV + \int_{S_f} \boldsymbol{T} \cdot \boldsymbol{u}^* \, dS = \int_V \rho \ddot{\boldsymbol{u}} \cdot \boldsymbol{u}^* \, dV$$

→  $\boldsymbol{u}^*$ : champ de déplacement virtuel arbitraire (mais C.A.);

→  $\boldsymbol{\varepsilon}^* = \boldsymbol{\varepsilon}[\boldsymbol{u}^*]$ : champ de déformation virtuelle associé.

avec des champs virtuels particuliers connus (1 équation obtenue pour chaque choix de champ virtuel)

## Principe de la méthode des champs virtuels (MCV)

- Approche applicable aux cas où le champ de déformation est expérimentalement connu dans  $\Omega$ :

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \hat{\boldsymbol{\varepsilon}} \quad \text{in } \Omega$$

- Repose sur l'exploitation du PTV:

$$-\int_V \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\varepsilon}^* \, dV + \int_{S_f} \boldsymbol{T} \cdot \boldsymbol{u}^* \, dS = \int_V \rho \ddot{\boldsymbol{u}} \cdot \boldsymbol{u}^* \, dV$$

→  $\boldsymbol{u}^*$ : champ de déplacement virtuel arbitraire (mais C.A.);

→  $\boldsymbol{\varepsilon}^* = \boldsymbol{\varepsilon}[\boldsymbol{u}^*]$ : champ de déformation virtuelle associé.

avec des champs virtuels particuliers **connus** (1 équation obtenue pour chaque choix de champ virtuel)

- Conditions permettant l'exploitation du PTV:
  - Specimen permettant de déduire champ  $\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{x})$  **3D** à partir de  $\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}$  mesuré **en surface**: déformations ou contraintes planes, plaques en flexion...
  - Modèle de comportement et paramétrisation choisis *a priori* (par ex.  $\mathcal{C}(\boldsymbol{p})$ );
  - le plus souvent: conditions quasi-statiques.

## Principe de la méthode des champs virtuels (MCV)

- Méthodes de construction de champs virtuels:
  - Expressions analytiques (polynômes, fcts trigonométriques), domaines de forme simple pour imposer liaisons cinématiques.
  - Champs virtuels "spéciaux", construits de façon à découpler les inconnues  $\theta_k$ ; méthodes de construction permettant de réduire la sensibilité au bruit
  - Champs virtuels par sous-domaines (approche inspirée de l'interpolation EF)
  - Parfois nécessaire de construire c.v. ne faisant travailler que la résultante sur  $\partial\Omega$ .

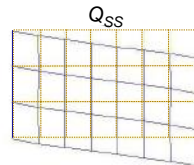
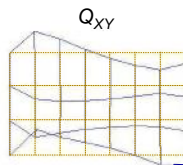
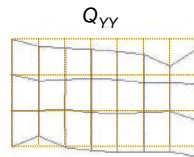
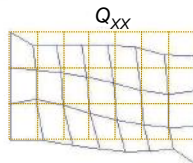
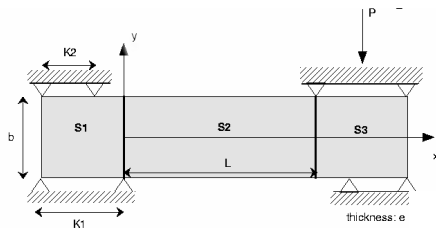
## Principe de la méthode des champs virtuels (MCV)

- Méthodes de construction de champs virtuels:
  - Expressions analytiques (polynômes, fcts trigonométriques), domaines de forme simple pour imposer liaisons cinématiques.
  - Champs virtuels "spéciaux", construits de façon à découpler les inconnues  $\theta_k$ ; méthodes de construction permettant de réduire la sensibilité au bruit
  - Champs virtuels par sous-domaines (approche inspirée de l'interpolation EF)
  - Parfois nécessaire de construire c.v. ne faisant travailler que la résultante sur  $\partial\Omega$ .
- Applications réalisées: identification de paramètres de comportement
  - Elasticité anisotrope (conditions planes ou flexion); viscoélasticité; plasticité...
- Principaux acteurs: S. Avril, M. Grédiac, F. Pierron, E. Toussaint...

## Principe de la méthode des champs virtuels (MCV)

- Méthodes de construction de champs virtuels:
  - Expressions analytiques (polynômes, fcts trigonométriques), domaines de forme simple pour imposer liaisons cinématiques.
  - Champs virtuels "spéciaux", construits de façon à découpler les inconnues  $\theta_k$ ; méthodes de construction permettant de réduire la sensibilité au bruit
  - Champs virtuels par sous-domaines (approche inspirée de l'interpolation EF)
  - Parfois nécessaire de construire c.v. ne faisant travailler que la résultante sur  $\partial\Omega$ .
- Applications réalisées: identification de paramètres de comportement
  - Elasticité anisotrope (conditions planes ou flexion); viscoélasticité; plasticité...
- Principaux acteurs: S. Avril, M. Grédiac, F. Pierron, E. Toussaint...
- Voir présentation détaillée dans Ecoles thématiques CNRS "Identification à partir de mesures de champs", 2009, 2011, 2013 (<http://www.ifma.fr/lami/gdr2519/>)

## Exemple



Grédiac, M., Avril, S., Toussaint, E., Ecole thématique CNRS "Identification à partir de mesures de champs", 2009

### 3. Identification de paramètres

## 4. Méthodes d'identification basées sur des champs virtuels

Méthode des champs virtuels (MCV)

Méthode de l'écart à l'équilibre

## 5. Fonctionnelles d'erreur en relation de comportement (ERC)

## Une variante: la méthode de l'écart à l'équilibre

- Approche développée pour l'identification de champs d'endommagement  $\theta(\mathbf{x})$  (ici scalaire et isotrope), puis de lois d'endommagement:

$$\lambda(\mathbf{x}) = \lambda_0[1 - \theta(\mathbf{x})] , \quad \mu(\mathbf{x}) = \mu_0[1 - \theta(\mathbf{x})]$$

→ Une mesure purement cinématique n'est pas affectée par  $\theta = \text{constante}$ .

- Hypothèse: champ de **déplacement** mesuré sur grille (2D);
- Création d'un maillage EF tel que les points de mesure soient des nœuds.



## Une variante: la méthode de l'écart à l'équilibre

- Approche développée pour l'identification de champs d'endommagement  $\theta(\mathbf{x})$  (ici scalaire et isotrope), puis de lois d'endommagement:

$$\lambda(\mathbf{x}) = \lambda_0[1 - \theta(\mathbf{x})] , \quad \mu(\mathbf{x}) = \mu_0[1 - \theta(\mathbf{x})]$$

→ Une mesure purement cinématique n'est pas affectée par  $\theta = \text{constante}$ .

- Hypothèse: champ de **déplacement** mesuré sur grille (2D);
- Création d'un maillage EF tel que les points de mesure soient des nœuds.

Principaux acteurs: F. Hild, S. Roux (LMT, ENS Cachan)

## Méthode de l'écart à l'équilibre: principe

### Principe de la méthode (forme discrétisée)

- Consiste essentiellement en une MCV dans laquelle les champs virtuels sont des fonctions d'interpolation MEF (équations d'équilibre au sens MEF).

## Méthode de l'écart à l'équilibre: principe

### Principe de la méthode (forme discrétisée)

- Consiste essentiellement en une MCV dans laquelle les champs virtuels sont des **fonctions d'interpolation MEF** (équations d'équilibre au sens MEF).
- Hypothèse:  $\theta(\mathbf{x})$  constant par élément.
- Energie de déformation de l'élément générique  $e$

$$E_{me}(\theta) = \frac{1 - \theta_e}{2} \{\mathbf{u}_e\}^t [\mathbf{K}_{me}] \{\mathbf{u}_e\}$$

## Méthode de l'écart à l'équilibre: principe

### Principe de la méthode (forme discrétisée)

- Consiste essentiellement en une MCV dans laquelle les champs virtuels sont des **fonctions d'interpolation MEF** (équations d'équilibre au sens MEF).
- Hypothèse:  $\theta(\mathbf{x})$  constant par élément.
- Energie de déformation de l'élément générique  $e$

$$E_{me}(\theta) = \frac{1 - \theta_e}{2} \{\mathbf{u}_e\}^t [\mathbf{K}_{me}] \{\mathbf{u}_e\}$$

- Choix d'éléments Q8, **points de mesure aux nœuds milieux**: l'équation (FEM) d'équilibre du nœud partagé est:

$$(1 - \theta_1)[\mathbf{k}_{m1}]\{\mathbf{u}_1\} - (1 - \theta_2)[\mathbf{k}_{m2}]\{\mathbf{u}_2\} = \mathbf{0}$$

## Méthode de l'écart à l'équilibre: principe

### Principe de la méthode (forme discrétisée)

- Consiste essentiellement en une MCV dans laquelle les champs virtuels sont des **fonctions d'interpolation MEF** (équations d'équilibre au sens MEF).
- Hypothèse:  $\theta(\mathbf{x})$  constant par élément.
- Energie de déformation de l'élément générique  $e$

$$E_{me}(\theta) = \frac{1 - \theta_e}{2} \{\mathbf{u}_e\}^t [\mathbf{K}_{me}] \{\mathbf{u}_e\}$$

- Choix d'éléments Q8, **points de mesure aux nœuds milieu**: l'équation (FEM) d'équilibre du nœud partagé est:

$$(1 - \theta_1)[\mathbf{k}_{m1}]\{\mathbf{u}_1\} - (1 - \theta_2)[\mathbf{k}_{m2}]\{\mathbf{u}_2\} = \mathbf{0}$$

- L'ensemble de toutes ces relations conduit à un **système linéaire surdéterminé**, donnant donc lieu à des forces résiduelles

$$\mathbf{F}_r(\theta_1, \theta_2) = (1 - \theta_1)[\mathbf{k}_{m1}]\{\mathbf{u}_1\} - (1 - \theta_2)[\mathbf{k}_{m2}]\{\mathbf{u}_2\}$$

## Méthode de l'écart à l'équilibre: mise en œuvre

### Formulation pratique de la méthode

- Mise des équations sous forme logarithmique (satisfaction automatique de  $\theta < 1$ ):

$$(1 - \theta_1)[\mathbf{k}_{m1}]\{\mathbf{u}_1\} - (1 - \theta_2)[\mathbf{k}_{m2}]\{\mathbf{u}_2\} = \mathbf{0} \implies \ln(1 - \theta_1) - \ln(1 - \theta_2) = \mathbf{q}_{k,12}$$

## Méthode de l'écart à l'équilibre: mise en œuvre

### Formulation pratique de la méthode

- Mise des équations sous forme logarithmique (satisfaction automatique de  $\theta < 1$ ):

$$(1 - \theta_1)[\mathbf{k}_{m1}]\{\mathbf{u}_1\} - (1 - \theta_2)[\mathbf{k}_{m2}]\{\mathbf{u}_2\} = \mathbf{0} \implies \ln(1 - \theta_1) - \ln(1 - \theta_2) = q_{k,12}$$

- Redondance (équations  $\approx 4$  inconnues), donc mise sous forme moindres carrés:

$$J(\{\mathbf{p}\}) = ([\mathbf{M}]\{\mathbf{p}\} - \{\mathbf{q}\})^t [\mathbf{W}] ([\mathbf{M}]\{\mathbf{p}\} - \{\mathbf{q}\})$$

$$\text{avec } \{\mathbf{p}\}^t = \{\ln(1 - \theta_1) \ln(1 - \theta_2) \dots \ln(1 - \theta_N)\}$$

- Equations normales singulières (noyau = endommagement constant).

## Méthode de l'écart à l'équilibre: mise en œuvre

### Formulation pratique de la méthode

- Mise des équations sous forme logarithmique (satisfaction automatique de  $\theta < 1$ ):

$$(1 - \theta_1)[k_{m1}]\{u_1\} - (1 - \theta_2)[k_{m2}]\{u_2\} = \mathbf{0} \implies \ln(1 - \theta_1) - \ln(1 - \theta_2) = q_{k,12}$$

- Redondance (equations  $\approx 4$  inconnues), donc mise sous forme moindres carrés:

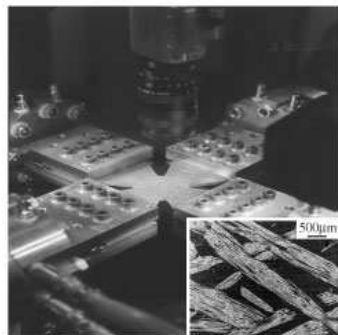
$$J(\{p\}) = ([M]\{p\} - \{q\})^t [W]([M]\{p\} - \{q\})$$

$$\text{avec } \{p\}^t = \{\ln(1 - \theta_1) \ln(1 - \theta_2) \dots \ln(1 - \theta_N)\}$$

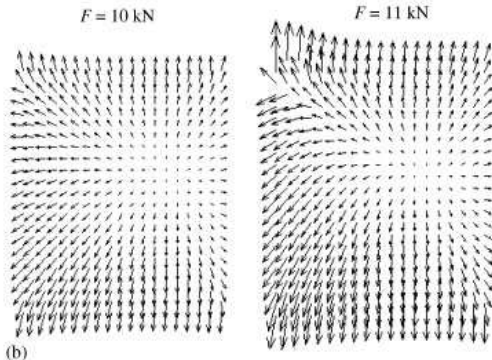
- Equations normales singulières (noyau = endommagement constant).



## Exemple



(a)



(b)

Figure 7. (a) Sample in the testing machine ASTRÉE and microstructure of the studied composite; and (b) Displacement fields measured by digital image correlation for two load levels (failure load: 11.1 kN).

## Exemple

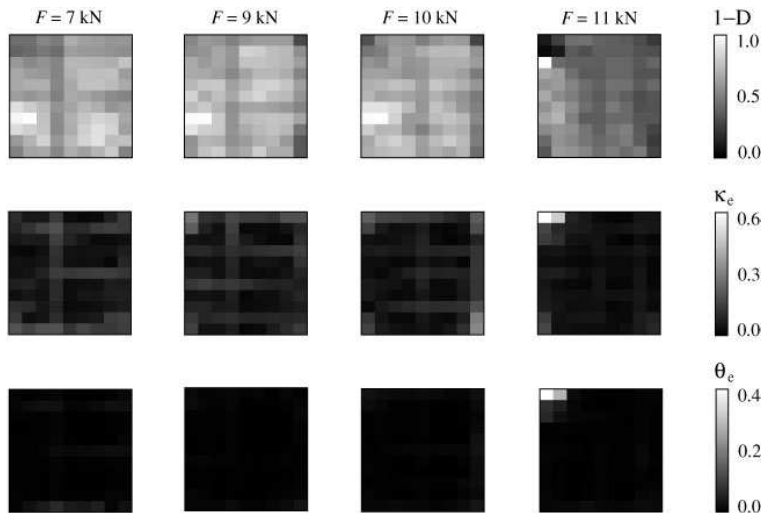


Figure 8. Computed damage fields  $(1 - D)$  for 4 load levels and corresponding error fields  $\kappa_e$  and  $\theta_e$ .

Claire, D., Hild, F., Roux, S., *Int. J. Num. Meth. Engng.*, 2004

### 3. Identification de paramètres

### 4. Méthodes d'identification basées sur des champs virtuels

Méthode des champs virtuels (MCV)

Méthode de l'écart à l'équilibre

### 5. Fonctionnelles d'erreur en relation de comportement (ERC)

Concept d'ERC, lien avec les principes variationnels

ERC et identification en élasticité linéaire: statique

ERC et identification en élasticité linéaire: dynamique

### 3. Identification de paramètres

### 4. Méthodes d'identification basées sur des champs virtuels

## 5. Fonctionnelles d'erreur en relation de comportement (ERC)

Concept d'ERC, lien avec les principes variationnels

ERC et identification en élasticité linéaire: statique

ERC et identification en élasticité linéaire: dynamique

## Concept d'erreur en relation de comportement

- Forme la plus simple (élasticité linéaire HPP):

$$E(\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{v}, \mathcal{A}) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\boldsymbol{\tau} - \mathcal{A} : \boldsymbol{\varepsilon}[\boldsymbol{v}]) : \mathcal{A}^{-1} : (\boldsymbol{\tau} - \mathcal{A} : \boldsymbol{\varepsilon}[\boldsymbol{v}]) \, dV$$
$$\mathcal{E}(\mathcal{A}) = \min_{\boldsymbol{\tau} \in \text{SA}, \boldsymbol{v} \in \text{CA}} E(\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{v}, \mathcal{A})$$

Mesure **énergétique** d'écart entre les espaces de champs cinématiquement et statiquement admissibles (CA et SA) pour une structure et un matériau donné.

## Concept d'erreur en relation de comportement

- Forme la plus simple (élasticité linéaire HPP):

$$E(\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{v}, \mathcal{A}) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\boldsymbol{\tau} - \mathcal{A} : \boldsymbol{\varepsilon}[\boldsymbol{v}]) : \mathcal{A}^{-1} : (\boldsymbol{\tau} - \mathcal{A} : \boldsymbol{\varepsilon}[\boldsymbol{v}]) \, dV$$

$$\mathcal{E}(\mathcal{A}) = \min_{\boldsymbol{\tau} \in \text{SA}, \boldsymbol{v} \in \text{CA}} E(\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{v}, \mathcal{A})$$

Mesure **énergétique** d'écart entre les espaces de champs cinématiquement et statiquement admissibles (CA et SA) pour une structure et un matériau donné.

- Introduction dans [Ladevèze 1975]; initialement introduite pour l'estimation d'erreur en MEF;
- Apparaît ensuite comme un outil puissant en identification;
- Lien avec fonctionnelles de Kohn-Vogelius en imagerie de conductivité électrique [circa 1980]

# Erreur en relation de comportement

Trois grands groupes d'équations: **compatibilité**, **équilibre**, **comportement**.

## Erreur en relation de comportement

Trois grands groupes d'équations: **compatibilité**, **équilibre**, **comportement**.

- **Erreur en relation de comportement** entre déplacement  $\mathbf{v}$  et contrainte  $\boldsymbol{\tau}$ :

$$E(\mathbf{v}, \boldsymbol{\tau}, \mathcal{A}) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\boldsymbol{\tau} - \mathcal{A}:\boldsymbol{\varepsilon}[\mathbf{v}]) : \mathcal{A}^{-1} : (\boldsymbol{\tau} - \mathcal{A}:\boldsymbol{\varepsilon}[\mathbf{v}]) dV$$

avec les propriétés

$$E(\mathbf{v}, \boldsymbol{\tau}, \mathcal{A}) \geq 0 \quad \forall (\mathbf{v}, \boldsymbol{\tau})$$

$$E(\mathbf{v}, \boldsymbol{\tau}, \mathcal{A}) = 0 \quad \iff \quad \boldsymbol{\tau} - \mathcal{A}:\boldsymbol{\varepsilon}[\mathbf{v}] = 0 \text{ dans } \Omega$$



## Erreur en relation de comportement

Trois grands groupes d'équations: **compatibilité**, **équilibre**, **comportement**.

- **Erreur en relation de comportement** entre déplacement  $\mathbf{v}$  et contrainte  $\boldsymbol{\tau}$ :

$$E(\mathbf{v}, \boldsymbol{\tau}, \mathcal{A}) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\boldsymbol{\tau} - \mathcal{A}:\boldsymbol{\varepsilon}[\mathbf{v}]) : \mathcal{A}^{-1} : (\boldsymbol{\tau} - \mathcal{A}:\boldsymbol{\varepsilon}[\mathbf{v}]) \, dV$$

avec les propriétés

$$E(\mathbf{v}, \boldsymbol{\tau}, \mathcal{A}) \geq 0 \quad \forall (\mathbf{v}, \boldsymbol{\tau})$$

$$E(\mathbf{v}, \boldsymbol{\tau}, \mathcal{A}) = 0 \quad \iff \quad \boldsymbol{\tau} - \mathcal{A}:\boldsymbol{\varepsilon}[\mathbf{v}] = 0 \text{ dans } \Omega$$

- **Reformulation de l'équilibre en élasticité:**

$$\text{trouver } (\mathbf{u}, \boldsymbol{\sigma}) \in \mathcal{C}(\bar{\mathbf{u}}) \times \mathcal{S}(\bar{\mathbf{t}}, \mathbf{f}) \quad \text{tels que} \quad E(\mathbf{u}, \boldsymbol{\sigma}, \mathcal{A}) = 0$$

## Erreur en relation de comportement

Trois grands groupes d'équations: **compatibilité**, **équilibre**, **comportement**.

- **Erreur en relation de comportement** entre déplacement  $\mathbf{v}$  et contrainte  $\boldsymbol{\tau}$ :

$$E(\mathbf{v}, \boldsymbol{\tau}, \mathcal{A}) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\boldsymbol{\tau} - \mathcal{A}:\boldsymbol{\varepsilon}[\mathbf{v}]) : \mathcal{A}^{-1} : (\boldsymbol{\tau} - \mathcal{A}:\boldsymbol{\varepsilon}[\mathbf{v}]) \, dV$$

avec les propriétés

$$E(\mathbf{v}, \boldsymbol{\tau}, \mathcal{A}) \geq 0 \quad \forall (\mathbf{v}, \boldsymbol{\tau})$$

$$E(\mathbf{v}, \boldsymbol{\tau}, \mathcal{A}) = 0 \iff \boldsymbol{\tau} - \mathcal{A}:\boldsymbol{\varepsilon}[\mathbf{v}] = 0 \text{ dans } \Omega$$

- **Reformulation de l'équilibre en élasticité:**

$$\text{trouver } (\mathbf{u}, \boldsymbol{\sigma}) \in \mathcal{C}(\bar{\mathbf{u}}) \times \mathcal{S}(\bar{\boldsymbol{\tau}}, \mathbf{f}) \text{ tels que } E(\mathbf{u}, \boldsymbol{\sigma}, \mathcal{A}) = 0$$

qui conduit au problème de **minimisation**

$$(\mathbf{u}, \boldsymbol{\sigma}) = \arg \min_{(\mathbf{v}, \boldsymbol{\tau}) \in \mathcal{C}(\bar{\mathbf{u}}) \times \mathcal{S}(\bar{\boldsymbol{\tau}}, \mathbf{f})} E(\mathbf{v}, \boldsymbol{\tau}, \mathcal{A})$$

$(\mathbf{u}, \boldsymbol{\sigma})$  solution d'un problème d'équilibre élastique bien posé  $\Leftrightarrow E(\mathbf{u}, \boldsymbol{\sigma}, \mathcal{A}) = 0$

## Energies potentielle et complémentaire

- **Forme développée de l'erreur en relation de comportement:**

$$\begin{aligned} E(\mathbf{v}, \boldsymbol{\tau}, \mathcal{A}) &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\boldsymbol{\tau} - \mathcal{A}:\boldsymbol{\varepsilon}[\mathbf{v}]) : \mathcal{A}^{-1} : (\boldsymbol{\tau} - \mathcal{A}:\boldsymbol{\varepsilon}[\mathbf{v}]) \, dV \quad (\text{définition}) \\ &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} \boldsymbol{\varepsilon}[\mathbf{v}] : \mathcal{A} : \boldsymbol{\varepsilon}[\mathbf{v}] \, dV + \frac{1}{2} \int_{\Omega} \boldsymbol{\tau} : \mathcal{A}^{-1} : \boldsymbol{\tau} \, dV - \int_{\Omega} (\boldsymbol{\tau} : \boldsymbol{\varepsilon}[\mathbf{v}]) \, dV \end{aligned}$$

## Energies potentielle et complémentaire

- **Forme développée de l'erreur en relation de comportement:**

$$E(\mathbf{v}, \boldsymbol{\tau}, \mathcal{A}) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \boldsymbol{\varepsilon}[\mathbf{v}] : \mathcal{A} : \boldsymbol{\varepsilon}[\mathbf{v}] \, dV + \frac{1}{2} \int_{\Omega} \boldsymbol{\tau} : \mathcal{A}^{-1} : \boldsymbol{\tau} \, dV - \int_{\Omega} (\boldsymbol{\tau} : \boldsymbol{\varepsilon}[\mathbf{v}]) \, dV$$

- **PPV avec champ virtuel  $\mathbf{v}$  (caractère SA de  $\boldsymbol{\tau}$ ):**

$$\int_{\Omega} \boldsymbol{\tau} : \boldsymbol{\varepsilon}[\mathbf{v}] \, dV = \int_{\Omega} \rho \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} \, dV + \int_{S_u} [\boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{n}] \cdot \bar{\mathbf{u}} \, dS_x + \int_{S_T} \bar{\mathbf{t}} \cdot \mathbf{v} \, dS$$

## Energies potentielle et complémentaire

- **Forme développée de l'erreur en relation de comportement (ERC):**

$$E(\mathbf{v}, \boldsymbol{\tau}, \mathcal{A}) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \boldsymbol{\varepsilon}[\mathbf{v}] : \mathcal{A} : \boldsymbol{\varepsilon}[\mathbf{v}] dV + \frac{1}{2} \int_{\Omega} \boldsymbol{\tau} : \mathcal{A}^{-1} : \boldsymbol{\tau} dV - \int_{\Omega} (\boldsymbol{\tau} : \boldsymbol{\varepsilon}[\mathbf{v}]) dV$$

- **PPV avec champ virtuel  $\mathbf{v}$  (caractère SA de  $\boldsymbol{\tau}$ ):**

$$\int_{\Omega} \boldsymbol{\tau} : \boldsymbol{\varepsilon}[\mathbf{v}] dV = \int_{\Omega} \rho \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} dV + \int_{S_u} [\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{n}] \cdot \bar{\mathbf{u}} dS_x + \int_{S_T} \bar{\mathbf{t}} \cdot \mathbf{v} dS$$

Résultat: ERC = Energie potentielle + Energie complémentaire

$$E(\mathbf{v}, \boldsymbol{\tau}, \mathcal{A}) = \mathcal{P}(\mathbf{v}, \mathcal{A}) + \mathcal{P}^*(\boldsymbol{\tau}, \mathcal{A})$$

$$\mathcal{P}(\mathbf{v}) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \boldsymbol{\varepsilon}[\mathbf{v}] : \mathcal{A} : \boldsymbol{\varepsilon}[\mathbf{v}] dV - \int_{\Omega} \rho \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} dV - \int_{S_T} \bar{\mathbf{t}} \cdot \mathbf{v} dS$$

$$\mathcal{P}^*(\boldsymbol{\tau}) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \boldsymbol{\tau} : \mathcal{A}^{-1} : \boldsymbol{\tau} dV - \int_{S_u} [\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{n}] \cdot \bar{\mathbf{u}} dS_x$$

- **Energie potentielle:**

$$\mathcal{P}(\mathbf{v}, \mathcal{A}) = \mathcal{W}(\mathbf{v}, \mathcal{A}) - \mathcal{F}(\mathbf{v})$$

$$\mathcal{W}(\mathbf{v}, \mathcal{A}) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \boldsymbol{\varepsilon}[\mathbf{v}] : \mathcal{A} : \boldsymbol{\varepsilon}[\mathbf{v}] \, dV$$

$$\mathcal{F}(\mathbf{v}) = \int_{\Omega} \rho \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} \, dV + \int_{S_T} \bar{\mathbf{t}} \cdot \mathbf{v} \, dS$$

- **Energie potentielle:**

$$\mathcal{P}(\mathbf{v}, \mathcal{A}) = \mathcal{W}(\mathbf{v}, \mathcal{A}) - \mathcal{F}(\mathbf{v})$$

$$\mathcal{W}(\mathbf{v}, \mathcal{A}) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \boldsymbol{\varepsilon}[\mathbf{v}] : \mathcal{A} : \boldsymbol{\varepsilon}[\mathbf{v}] \, dV$$

$$\mathcal{F}(\mathbf{v}) = \int_{\Omega} \rho \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} \, dV + \int_{S_T} \bar{\mathbf{t}} \cdot \mathbf{v} \, dS$$

- **Energie complémentaire:**

$$\mathcal{P}^*(\boldsymbol{\tau}, \mathcal{A}) = \mathcal{W}^*(\boldsymbol{\tau}, \mathcal{A}) - \mathcal{F}^*(\boldsymbol{\tau})$$

$$\mathcal{W}^*(\boldsymbol{\tau}, \mathcal{A}) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \boldsymbol{\tau} : \mathcal{A}^{-1} : \boldsymbol{\tau} \, dV$$

$$\mathcal{F}^*(\boldsymbol{\tau}) = \int_{S_u} [\boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\eta}] \cdot \bar{\mathbf{u}} \, dS_x$$

- **Energie potentielle:**

$$\mathcal{P}(\mathbf{v}, \mathcal{A}) = \mathcal{W}(\mathbf{v}, \mathcal{A}) - \mathcal{F}(\mathbf{v})$$

$$\mathcal{W}(\mathbf{v}, \mathcal{A}) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \boldsymbol{\varepsilon}[\mathbf{v}] : \mathcal{A} : \boldsymbol{\varepsilon}[\mathbf{v}] \, dV$$

$$\mathcal{F}(\mathbf{v}) = \int_{\Omega} \rho \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} \, dV + \int_{S_T} \bar{\mathbf{t}} \cdot \mathbf{v} \, dS$$

- **Energie complémentaire:**

$$\mathcal{P}^*(\boldsymbol{\tau}, \mathcal{A}) = \mathcal{W}^*(\boldsymbol{\tau}, \mathcal{A}) - \mathcal{F}^*(\boldsymbol{\tau})$$

$$\mathcal{W}^*(\boldsymbol{\tau}, \mathcal{A}) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \boldsymbol{\tau} : \mathcal{A}^{-1} : \boldsymbol{\tau} \, dV$$

$$\mathcal{F}^*(\boldsymbol{\tau}) = \int_{S_u} [\boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\eta}] \cdot \bar{\mathbf{u}} \, dS_x$$

**Commentaire.** La notion d'erreur en relation de comportement se généralise à des classes de comportement non linéaire, telles que

- comportement élastique non linéaire;
- comportement élastoplastique standard généralisé.



## Formulations variationnelles, estimation d'erreur

La minimisation couplée de l'erreur en relation de comportement

$$(\mathbf{u}, \boldsymbol{\sigma}) = \arg \min_{(\mathbf{v}, \boldsymbol{\tau}) \in \mathcal{C}(\bar{\mathbf{u}}) \times \mathcal{S}(\bar{\boldsymbol{\tau}}, f)} E(\mathbf{v}, \boldsymbol{\tau}, \mathcal{A})$$

est ainsi transformée en deux minimisations découplées:

$$\mathbf{u} = \arg \min_{\mathbf{v} \in \mathcal{C}(\bar{\mathbf{u}})} \mathcal{P}(\mathbf{v}, \mathcal{A})$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \arg \min_{\boldsymbol{\tau} \in \mathcal{S}(\bar{\boldsymbol{\tau}}, f)} \mathcal{P}^*(\boldsymbol{\tau}, \mathcal{A})$$

## Formulations variationnelles, estimation d'erreur

La minimisation couplée de l'erreur en relation de comportement

$$(\mathbf{u}, \boldsymbol{\sigma}) = \arg \min_{(\mathbf{v}, \boldsymbol{\tau}) \in \mathcal{C}(\bar{\mathbf{u}}) \times \mathcal{S}(\bar{\mathbf{f}}, \mathbf{f})} E(\mathbf{v}, \boldsymbol{\tau}, \mathcal{A})$$

est ainsi transformée en deux minimisations découplées:

$$\mathbf{u} = \arg \min_{\mathbf{v} \in \mathcal{C}(\bar{\mathbf{u}})} \mathcal{P}(\mathbf{v}, \mathcal{A})$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \arg \min_{\boldsymbol{\tau} \in \mathcal{S}(\bar{\mathbf{f}}, \mathbf{f})} \mathcal{P}^*(\boldsymbol{\tau}, \mathcal{A})$$

(i) Si  $\mathcal{A}$  est correct, i.e.  $E(\mathbf{u}, \boldsymbol{\sigma}, \mathcal{A}) = \mathcal{E}(\mathcal{A}) = 0$ , il suffit d'accomplir l'une **ou** l'autre de ces minimisations

- Par exemple,  $\mathbf{u} = \arg \min_{\mathbf{v} \in \mathcal{C}(\bar{\mathbf{u}})} \mathcal{P}(\mathbf{v}, \mathcal{A})$  suivi de  $\boldsymbol{\sigma} = \mathcal{A}:\boldsymbol{\varepsilon}[\mathbf{u}]$

(ii)  $\mathcal{E}_h(\mathbf{u}_h, \boldsymbol{\sigma}_h, \mathcal{A}) = E_h(\mathcal{A}) \geq 0$  permet de définir un indicateur d'erreur *additif par rapport aux éléments*

(iii) Si  $\mathcal{A}$  n'est **pas** correct,  $E(\mathbf{u}, \boldsymbol{\sigma}, \mathcal{A}) = \mathcal{E}(\mathcal{A}) > 0$  mesure l'erreur de modélisation liée à la méconnaissance du comportement

### 3. Identification de paramètres

### 4. Méthodes d'identification basées sur des champs virtuels

### 5. Fonctionnelles d'erreur en relation de comportement (ERC)

Concept d'ERC, lien avec les principes variationnels

ERC et identification en élasticité linéaire: statique

ERC et identification en élasticité linéaire: dynamique

## Problème direct (cadre élastique linéaire HPP)

- Equations d'équilibre

$$\begin{cases} \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{0} & \text{dans } \Omega, \\ \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = \bar{\mathbf{t}} & \text{sur } S_f, \end{cases}$$

Equations de compatibilité cinématique

$$\begin{cases} \boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}[\mathbf{u}] = (\nabla \mathbf{u} + \nabla^T \mathbf{u})/2 & \text{dans } \Omega, \\ \mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}} & \text{sur } S_u, \end{cases}$$

Relation de comportement (exemple de paramétrage:  $\boldsymbol{p} = \{E, \nu\}$ )

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathcal{A}(\boldsymbol{p}) : \boldsymbol{\varepsilon} \quad \text{dans } \Omega$$

## Problème direct (cadre élastique linéaire HPP)

- Equations d'équilibre

$$\begin{cases} \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{0} & \text{dans } \Omega, \\ \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = \bar{\mathbf{t}} & \text{sur } S_f, \end{cases}$$

Equations de compatibilité cinématique

$$\begin{cases} \boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}[\mathbf{u}] = (\nabla \mathbf{u} + \nabla^T \mathbf{u})/2 & \text{dans } \Omega, \\ \mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}} & \text{sur } S_u, \end{cases}$$

Relation de comportement (exemple de paramétrage:  $\boldsymbol{p} = \{E, \nu\}$ )

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathcal{A}(\boldsymbol{p}) : \boldsymbol{\varepsilon} \quad \text{dans } \Omega$$

- Formulation variationnelle:

$$\mathbf{u} = \arg \min_{\mathbf{v} \in \mathcal{C}} \mathcal{W}(\mathbf{v}, \mathcal{A}(\boldsymbol{p})) - \mathcal{F}(\mathbf{v})$$

$$\text{soit} \quad \int_{\Omega} \boldsymbol{\varepsilon}[\tilde{\mathbf{u}}] : \mathcal{A}(\boldsymbol{p}) : \boldsymbol{\varepsilon}[\mathbf{u}] dV - \int_{S_f} \tilde{\mathbf{u}} \cdot \bar{\mathbf{t}} dS = 0 \quad \forall \tilde{\mathbf{u}} \in \mathcal{C}(\mathbf{0})$$

Discrétisation (Galerkin, fonctions d'interpolation éléments finis):

$$\mathbf{K}(\boldsymbol{p}) \mathbf{U} = \mathbf{F}$$

## Problème d'identification

- Le problème direct est soluble si  $\mathbf{p}$  est connu;
- Dans le cas contraire, l'identification de  $\mathbf{p}$  nécessite une information (d'origine expérimentale) supplémentaire: données **surabondantes** par rapport aux C.L. du problème direct;
- Ces données peuvent notamment consister en des **mesures de champs cinématiques**.
- Deux situations principalement rencontrées:
  - (i) Mesures  $\bar{\mathbf{u}}$  du champ  $\mathbf{u}$   
Données aux limites bien posées **complètes**  $\bar{\mathbf{u}}, \bar{\mathbf{t}}$ .
  - (ii) Mesures  $\bar{\mathbf{u}}$  du champ  $\mathbf{u}$   
Données cinématiques complètes  $\bar{\mathbf{u}}$  et donnée statique **incomplète** (résultantes)

## Erreur en relation de comportement (problème bien posé)

$$E(\mathbf{v}, \boldsymbol{\tau}, \mathcal{A}) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\boldsymbol{\tau} - \mathcal{A}:\boldsymbol{\varepsilon}[\mathbf{v}]) : \mathcal{A}^{-1} : (\boldsymbol{\tau} - \mathcal{A}:\boldsymbol{\varepsilon}[\mathbf{v}]) \, dV$$

- Pour un problème aux limites bien posé:

$$\begin{aligned} \mathcal{C} &= \{ \mathbf{v} \mid v_i \in H^1(\Omega), \mathbf{v} = \bar{\mathbf{u}} \text{ sur } S_u \} \\ \mathcal{S} &= \{ \boldsymbol{\tau} \in H(\text{div}), \text{div} \boldsymbol{\tau} = \mathbf{0} \text{ dans } \Omega, \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{n} = \bar{\mathbf{t}} \text{ sur } S_f \} \end{aligned}$$

avec  $H(\text{div}) = \{ \boldsymbol{\tau} \mid \tau_{ij} = \tau_{ji}, \tau_{ij} \in L^2(\Omega), \tau_{ij,j} \in L^2(\Omega) \}$ .

## Erreur en relation de comportement (problème bien posé)

$$E(\mathbf{v}, \boldsymbol{\tau}, \mathcal{A}) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\boldsymbol{\tau} - \mathcal{A}:\boldsymbol{\varepsilon}[\mathbf{v}]) : \mathcal{A}^{-1} : (\boldsymbol{\tau} - \mathcal{A}:\boldsymbol{\varepsilon}[\mathbf{v}]) \, dV$$

- Pour un problème aux limites bien posé:

$$\begin{aligned} \mathcal{C} &= \{ \mathbf{v} \mid v_i \in H^1(\Omega), \mathbf{v} = \bar{\mathbf{u}} \text{ sur } S_u \} \\ \mathcal{S} &= \{ \boldsymbol{\tau} \in H(\text{div}), \text{div} \boldsymbol{\tau} = \mathbf{0} \text{ dans } \Omega, \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{n} = \bar{\mathbf{t}} \text{ sur } S_f \} \end{aligned}$$

avec  $H(\text{div}) = \{ \boldsymbol{\tau} \mid \tau_{ij} = \tau_{ji}, \tau_{ij} \in L^2(\Omega), \tau_{ij,j} \in L^2(\Omega) \}$ .

La solution  $(\mathbf{u}, \boldsymbol{\sigma})$  est caractérisée par

$$(\mathbf{u}, \boldsymbol{\sigma}) = \arg \min_{(\mathbf{v}, \boldsymbol{\tau}) \in \mathcal{C} \times \mathcal{S}} E(\mathbf{v}, \boldsymbol{\tau}, \mathcal{A}) \quad \text{et} \quad E(\mathbf{u}, \boldsymbol{\sigma}, \mathcal{A}) = 0$$



## Erreur en relation de comportement (problème mal posé)

$$E(\mathbf{v}, \boldsymbol{\tau}, \mathcal{A}) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\boldsymbol{\tau} - \mathcal{A}:\boldsymbol{\varepsilon}[\mathbf{v}]) : \mathcal{A}^{-1} : (\boldsymbol{\tau} - \mathcal{A}:\boldsymbol{\varepsilon}[\mathbf{v}]) \, dV$$

Pour un problème aux limites **mal posé**:

$$\begin{aligned} \mathcal{C} &= \{ \mathbf{v} \mid v_i \in H^1(\Omega), \mathbf{v} \text{ vérifie toutes données cinématiques} \} \\ \mathcal{S} &= \{ \boldsymbol{\tau} \in H(\text{div}), \text{div} \boldsymbol{\tau} = \mathbf{0} \text{ dans } \Omega, \boldsymbol{\tau} \text{ vérifie toutes données statiques} \} \end{aligned}$$

## Erreur en relation de comportement (problème mal posé)

$$E(\mathbf{v}, \boldsymbol{\tau}, \mathcal{A}) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\boldsymbol{\tau} - \mathcal{A}:\boldsymbol{\varepsilon}[\mathbf{v}]) : \mathcal{A}^{-1} : (\boldsymbol{\tau} - \mathcal{A}:\boldsymbol{\varepsilon}[\mathbf{v}]) \, dV$$

Pour un problème aux limites **mal posé**:

$$\begin{aligned} \mathcal{C} &= \{ \mathbf{v} \mid v_i \in H^1(\Omega), \mathbf{v} \text{ vérifie toutes données cinématiques} \} \\ \mathcal{S} &= \{ \boldsymbol{\tau} \in H(\text{div}), \text{div} \boldsymbol{\tau} = \mathbf{0} \text{ dans } \Omega, \boldsymbol{\tau} \text{ vérifie toutes données statiques} \} \end{aligned}$$

Comportement  $\mathcal{A}$  identifié par minimisation de l'ERC:

$$\mathcal{A} = \arg \min_{\mathcal{B}} \mathcal{E}(\mathcal{B}) \quad \text{avec} \quad \mathcal{E}(\mathcal{B}) = \min_{(\mathbf{v}, \boldsymbol{\tau}) \in \mathcal{C} \times \mathcal{S}} E(\mathbf{v}, \boldsymbol{\tau}, \mathcal{B})$$

## Erreur en relation de comportement (problème mal posé)

$$E(\mathbf{v}, \boldsymbol{\tau}, \mathcal{A}) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\boldsymbol{\tau} - \mathcal{A}:\boldsymbol{\varepsilon}[\mathbf{v}]) : \mathcal{A}^{-1} : (\boldsymbol{\tau} - \mathcal{A}:\boldsymbol{\varepsilon}[\mathbf{v}]) \, dV$$

Pour un problème aux limites **mal posé**:

$$\begin{aligned} \mathcal{C} &= \{ \mathbf{v} \mid v_i \in H^1(\Omega), \mathbf{v} \text{ vérifie toutes données cinématiques} \} \\ \mathcal{S} &= \{ \boldsymbol{\tau} \in H(\text{div}), \text{div} \boldsymbol{\tau} = \mathbf{0} \text{ dans } \Omega, \boldsymbol{\tau} \text{ vérifie toutes données statiques} \} \end{aligned}$$

Comportement  $\mathcal{A}$  identifié par minimisation de l'ERC:

$$\mathcal{A} = \arg \min_{\mathcal{B}} \mathcal{E}(\mathcal{B}) \quad \text{avec} \quad \mathcal{E}(\mathcal{B}) = \min_{(\mathbf{v}, \boldsymbol{\tau}) \in \mathcal{C} \times \mathcal{S}} E(\mathbf{v}, \boldsymbol{\tau}, \mathcal{B})$$

- MERC en principe applicable à tout problème d'identification avec données surabondantes disponibles;
- Mesures de champ utiles (mais non indispensables);
- Suggère une méthode de directions alternées:  
minimisations partielles (i) par rapport à  $(\mathbf{v}, \boldsymbol{\tau})$  puis (ii) par rapport à  $\mathcal{B}$ .

## ERC et ERC modifiée

Plusieurs approches possibles pour la minimisation partielle selon  $\mathbf{v}$ ,  $\boldsymbol{\tau}$ :

- Imposition exacte des données (cinématiques et/ou statiques):
  - Imposition implicite via interpolation adaptée (ex. prescrire valeurs nodales expérimentalement connues du déplacement)  
Si mesure de champ,  $\mathbf{u}$  parfois considéré comme entièrement connu.
  - Imposition explicite via contraintes égalité et multiplicateurs

## ERC et ERC modifiée

Plusieurs approches possibles pour la minimisation partielle selon  $\mathbf{v}, \boldsymbol{\tau}$ :

- Imposition exacte des données (cinématiques et/ou statiques):
  - Imposition implicite via interpolation adaptée (ex. prescrire valeurs nodales expérimentalement connues du déplacement)  
Si mesure de champ,  $\mathbf{u}$  parfois considéré comme entièrement connu.
  - Imposition explicite via contraintes égalité et multiplicateurs
- ERC modifiée: imposition des données par pénalisation

$$J(\mathcal{A}) = \min_{\mathbf{v}, \boldsymbol{\tau}} \left\{ E(\mathbf{v}, \boldsymbol{\tau}, \mathcal{A}) + \frac{\beta}{2} \int_D a(\mathbf{v} - \bar{\mathbf{u}}, \mathbf{v} - \bar{\mathbf{u}}) dV \right\}$$

sous la contrainte  $\int_{\Omega} \boldsymbol{\tau} : \boldsymbol{\varepsilon}[\mathbf{w}] dV - L(\mathbf{w}) = 0 \quad (\forall \mathbf{w} \in \mathcal{V})$

Approche plus flexible par rapport à la prise en compte de bruit (lissage implicite), réglage possible avec le paramètre  $\beta$ .

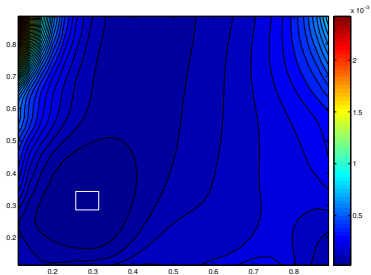
## ERC et ERC modifiée

Plusieurs approches possibles pour représenter des contraintes **SA**, dont

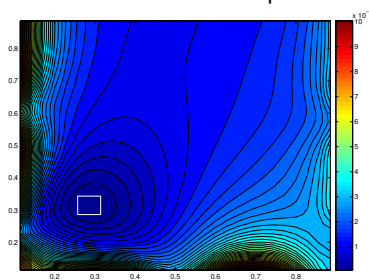
- Fonctions de contrainte (Airy) en 2D
- Elements duaux (Beckers et coll...), autres constructions de champs statiquement admissibles (Florentin et coll...)
- Représentation via un déplacement ( $\boldsymbol{\tau} = \mathcal{A}:\boldsymbol{\varepsilon}[\boldsymbol{w}]$ ) ou introduction d'un déplacement adjoint  $\boldsymbol{w}$  via les équations de stationnarité de  $E(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{\tau}, \mathcal{A})$ .

Convexité locale fonctionnelles  $L^2$  et ERC (identification inclusion)

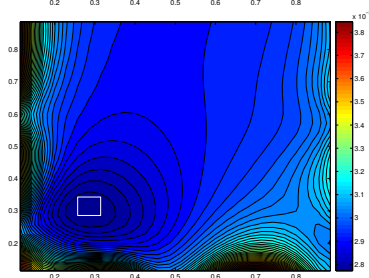
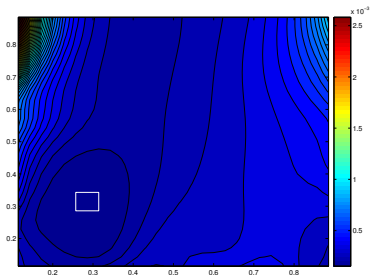
moindres carrés



erreur en relation de comportement



Sans bruit



Avec bruit

## Exemple numérique (dynamique linéaire 1D)

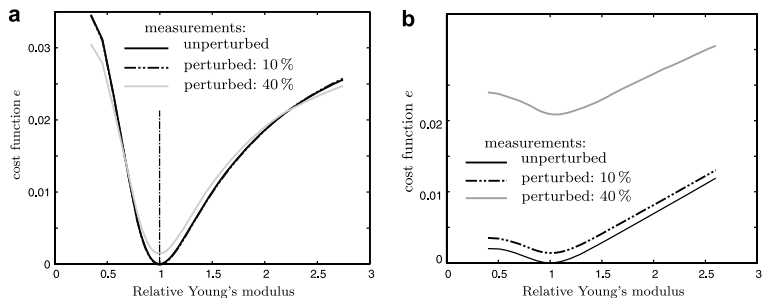


Fig. 17. Cost function – perturbation: uniform white noise sample. (a) Constitutive relation error term. (b) Distance to the displacements.



## Interprétation de l'ERC comme pénalisation

Retour sur identification formulée par minimisation:

$$\boxed{\boldsymbol{p} = \arg \min J(\boldsymbol{u}(\boldsymbol{q}))} \quad \text{avec} \quad \boldsymbol{u}(\boldsymbol{q}) = \arg \min \mathcal{P}(\boldsymbol{v}, \mathcal{A}(\boldsymbol{q}))$$

Problème direct imposé par pénalisation:

## Interprétation de l'ERC comme pénalisation

Retour sur identification formulée par minimisation:

$$\boxed{\mathbf{p} = \arg \min J(\mathbf{u}(\mathbf{q}))} \quad \text{avec} \quad \mathbf{u}(\mathbf{q}) = \arg \min \mathcal{P}(\mathbf{v}, \mathcal{A}(\mathbf{q}))$$

Problème direct imposé par pénalisation:

- **1<sup>e</sup> possibilité:** pénalisation par l'énergie potentielle

$$\mathbf{p} = \lim_{\eta \rightarrow 0} \arg \min_{\mathbf{v} \in \mathcal{C}, \mathbf{q}} \left( J(\mathbf{v}) + \frac{1}{\eta} \mathcal{P}(\mathbf{v}, \mathcal{A}(\mathbf{q})) \right)$$

Inconvénient: valeur optimale de  $\mathcal{P}(\mathbf{v}, \mathcal{A}(\mathbf{p}))$  **non connue a priori** (dépend du problème traité)

## Interprétation de l'ERC comme pénalisation

- 2<sup>e</sup> possibilité: pénalisation par énergies potentielle et complémentaire

$$\mathbf{p} = \lim_{\eta \rightarrow 0} \arg \min_{\mathbf{v} \in \mathcal{C}, \boldsymbol{\tau} \in \mathcal{S}, q} \left( J(\mathbf{v}) + \frac{1}{\eta} [\mathcal{P}(\mathbf{v}, \mathcal{A}(q)) + \mathcal{P}^*(\boldsymbol{\tau}, \mathcal{A}(q))] \right)$$

Rappel:

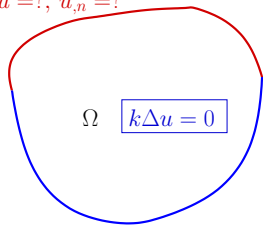
$$\mathcal{P}(\mathbf{v}, \mathcal{A}(\mathbf{p})) + \mathcal{P}^*(\boldsymbol{\tau}, \mathcal{A}(\mathbf{p})) = E(\mathbf{v}, \boldsymbol{\tau}, \mathcal{A}(\mathbf{p})) \geq 0$$

$$\min_{\mathbf{v} \in \mathcal{C}, \boldsymbol{\tau} \in \mathcal{S}, q} E(\mathbf{v}, \boldsymbol{\tau}, \mathcal{A}(q)) = 0$$

- Valeur de la pénalisation optimale **connue a priori** (zéro)
- Interprétation de l'“ERC modifiée” comme fonctionnelle pénalisée.

# ERC appliquée à des problèmes aux limites mal posés

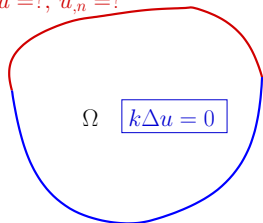
$$u = ?, u_n = ?$$



$$u = \bar{u}, u_n = \bar{q}$$

## ERC appliquée à des problèmes aux limites mal posés

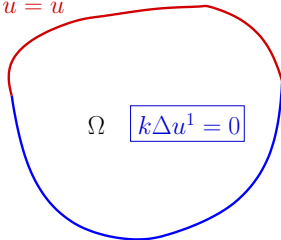
$$u = ?, u_n = ?$$



$$u = \bar{u}, u_n = \bar{q}$$

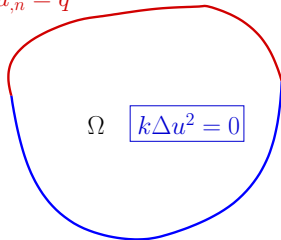
$$E(\hat{u}, \hat{q}) = \int_{\Omega} \nabla(u^1 - u^2) \cdot k \nabla(u^1 - u^2) dV$$

$$u = \hat{u}$$



$$u_n = \bar{q}$$

$$u_n = \hat{q}$$



$$u = \bar{u}$$

## Fonctionnelle de type ERC en imagerie d'impédance électrique

- Equations ( $v$ : potentiel,  $\mathbf{e}$ : champ électrique,  $\mathbf{q}$ : courant):

$$\operatorname{div} \mathbf{q}(\mathbf{x}) = 0, \quad \mathbf{q}(\mathbf{x}) = a(\mathbf{x})\mathbf{e}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{e}(\mathbf{x}) = -\nabla v(\mathbf{x})$$

- Fonctionnelle de type ERC pour  $N$  expériences avec mesures  $\bar{v}$  de  $v$  et  $\bar{q}$  de  $\mathbf{q} \cdot \mathbf{n}$  sur  $\partial\Omega$ :

$$E(a, v_1, \dots, v_N, \mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_N) = \sum_{i=1}^N \int_{\Omega} \|a^{1/2} \nabla v + a^{-1/2} \mathbf{q}\|^2 dV$$

Note:

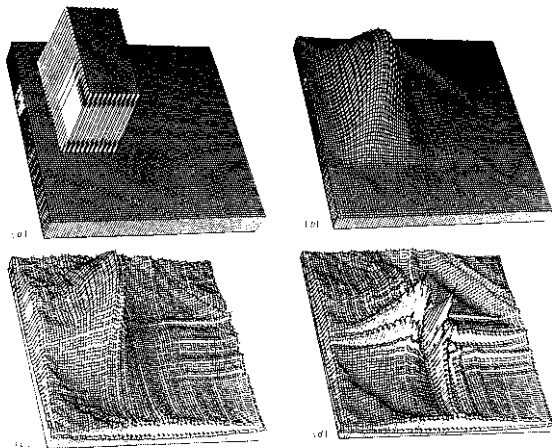
$$\|a^{1/2} \nabla v + a^{-1/2} \mathbf{q}\|^2 = \frac{1}{a} \|\mathbf{q} + a \nabla v\|^2 - 2\mathbf{q} \cdot \nabla v$$

$$\int_{\Omega} \mathbf{q} \cdot \nabla v dV = \int_{\partial\Omega} \bar{q} \bar{v} dS$$

Kohn R. V., Vogelius M., *Comm. Pure Appl. Math.* **40**:745–777 (1987)

Kohn R. V., McKenney A., *Inverse Problems* **6**:389–414 (1990)

# Fonctionnelle de type ERC en imagerie d'impédance électrique



(a) conductivité à identifier; (b) reconstruction sans bruit, (c) reconstruction 3% bruit (11 itérations), (d) reconstruction 3% bruit (50 itérations).

Kohn, R.V., McKenney, *Inverse Problems* 6:389–414 (1990).

### 3. Identification de paramètres

### 4. Méthodes d'identification basées sur des champs virtuels

### 5. Fonctionnelles d'erreur en relation de comportement (ERC)

Concept d'ERC, lien avec les principes variationnels

ERC et identification en élasticité linéaire: statique

ERC et identification en élasticité linéaire: dynamique



## ERC en vibrations libres de structures

Critère d'ERC modifiée:

$$J(\mathcal{A}, \rho) = \min_{\mathbf{v}, \boldsymbol{\tau}} \sum_{\hat{\omega} \text{ mesuré}} F_{\hat{\omega}}(\mathbf{v}, \boldsymbol{\tau}, \mathcal{A})$$

$$\text{avec } F_{\hat{\omega}}(\mathbf{v}, \boldsymbol{\tau}, \mathcal{A}) := E_{\hat{\omega}}(\mathbf{v}, \boldsymbol{\tau}, \mathcal{A}) + \frac{\beta}{2} \int_D a(\mathbf{v} - \bar{\mathbf{u}}_{\hat{\omega}}, \mathbf{v} - \bar{\mathbf{u}}_{\hat{\omega}}) dV$$

$$E_{\hat{\omega}}(\mathbf{v}, \boldsymbol{\tau}, \mathcal{A}) := \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\boldsymbol{\tau} - \mathcal{A}:\boldsymbol{\varepsilon}[\mathbf{v}]) : \mathcal{A}^{-1} : (\boldsymbol{\tau} - \mathcal{A}:\boldsymbol{\varepsilon}[\mathbf{v}]) dV$$

et sous la contrainte

$$D(\mathbf{v}, \boldsymbol{\tau}, \mathbf{w}) := \int_{\Omega} (\boldsymbol{\tau}:\boldsymbol{\varepsilon}[\mathbf{w}] - \rho\hat{\omega}^2 \mathbf{u} \cdot \mathbf{w}) dV = 0 \quad (\forall \mathbf{w} \in \mathcal{V})$$

Minimisation partielle: résoudre les équations de stationnarité

$$\partial_{\mathbf{v}} \mathcal{L} = 0, \quad \partial_{\mathbf{w}} \mathcal{L} = 0, \quad \partial_{\boldsymbol{\tau}} \mathcal{L} = 0$$

du lagrangien (avec champ de multiplicateur  $\mathbf{w}$ )

$$\mathcal{L}(\mathbf{v}, \mathbf{w}, \boldsymbol{\tau}, \mathcal{A}) := F_{\hat{\omega}}(\mathbf{v}, \boldsymbol{\tau}, \mathcal{A}) + D(\mathbf{v}, \boldsymbol{\tau}, \mathbf{w})$$

## ERC en vibrations libres de structures

- Solution  $(\mathbf{u}, \boldsymbol{\sigma})$  de la minimisation partielle en  $\mathbf{v}, \boldsymbol{\tau}$  (où  $\mathbf{w}$  est un champ adjoint associé à la contrainte d'équilibre dynamique):

$$0 = \int_{\Omega} \boldsymbol{\varepsilon}[\mathbf{w}] : \mathcal{A} : \boldsymbol{\varepsilon}[\tilde{\mathbf{u}}] dV - \int_{\Omega} \rho \hat{\omega}^2 \mathbf{w} \tilde{\mathbf{u}} dV + \beta \int_D a(\mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}}, \tilde{\mathbf{u}}) dV \quad (\forall \tilde{\mathbf{u}} \in \mathcal{V})$$

$$0 = \int_{\Omega} \left[ \boldsymbol{\varepsilon}[\mathbf{u} - \mathbf{w}] : \mathcal{A} : \boldsymbol{\varepsilon}[\tilde{\mathbf{w}}] - \rho \hat{\omega}^2 \mathbf{u} \cdot \tilde{\mathbf{w}} \right] dV \quad (\forall \tilde{\mathbf{w}} \in \mathcal{V})$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathcal{A} \boldsymbol{\varepsilon}[\mathbf{u} - \mathbf{w}]$$

## ERC en vibrations libres de structures

- Solution  $(\mathbf{u}, \boldsymbol{\sigma})$  de la minimisation partielle en  $\mathbf{v}, \boldsymbol{\tau}$  (où  $\mathbf{w}$  est un champ adjoint associé à la contrainte d'équilibre dynamique):

$$0 = \int_{\Omega} \boldsymbol{\varepsilon}[\mathbf{w}] : \mathcal{A} : \boldsymbol{\varepsilon}[\tilde{\mathbf{u}}] dV - \int_{\Omega} \rho \hat{\omega}^2 \mathbf{w} \tilde{\mathbf{u}} dV + \beta \int_D a(\mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}}, \tilde{\mathbf{u}}) dV \quad (\forall \tilde{\mathbf{u}} \in \mathcal{V})$$

$$0 = \int_{\Omega} \left[ \boldsymbol{\varepsilon}[\mathbf{u} - \mathbf{w}] : \mathcal{A} : \boldsymbol{\varepsilon}[\tilde{\mathbf{w}}] - \rho \hat{\omega}^2 \mathbf{u} \cdot \tilde{\mathbf{w}} \right] dV \quad (\forall \tilde{\mathbf{w}} \in \mathcal{V})$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathcal{A} \boldsymbol{\varepsilon}[\mathbf{u} - \mathbf{w}]$$

- Valeur de l'ERC à l'optimum partiel:

$$E_{\omega}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\sigma}, \mathcal{A}) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \boldsymbol{\varepsilon}[\mathbf{w}] : \mathcal{A} : \boldsymbol{\varepsilon}[\mathbf{w}] dV$$

## ERC en vibrations libres de structures

- Solution  $(\mathbf{u}, \boldsymbol{\sigma})$  de la minimisation partielle en  $\mathbf{v}, \boldsymbol{\tau}$  (où  $\mathbf{w}$  est un champ adjoint associé à la contrainte d'équilibre dynamique):

$$0 = \int_{\Omega} \boldsymbol{\varepsilon}[\mathbf{w}] : \mathcal{A} : \boldsymbol{\varepsilon}[\tilde{\mathbf{u}}] dV - \int_{\Omega} \rho \hat{\omega}^2 \mathbf{w} \tilde{\mathbf{u}} dV + \beta \int_D a(\mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}}, \tilde{\mathbf{u}}) dV \quad (\forall \tilde{\mathbf{u}} \in \mathcal{V})$$

$$0 = \int_{\Omega} \left[ \boldsymbol{\varepsilon}[\mathbf{u} - \mathbf{w}] : \mathcal{A} : \boldsymbol{\varepsilon}[\tilde{\mathbf{w}}] - \rho \hat{\omega}^2 \mathbf{u} \cdot \tilde{\mathbf{w}} \right] dV \quad (\forall \tilde{\mathbf{w}} \in \mathcal{V})$$

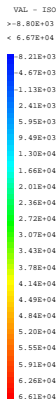
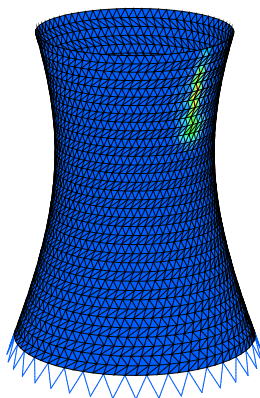
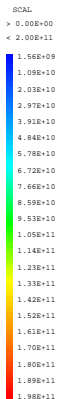
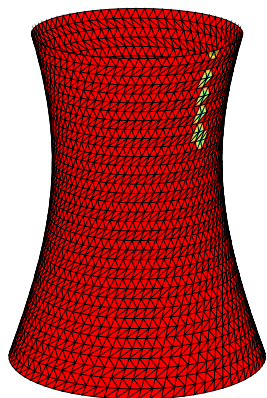
$$\boldsymbol{\sigma} = \mathcal{A} \boldsymbol{\varepsilon}[\mathbf{u} - \mathbf{w}]$$

- Valeur de l'ERC à l'optimum partiel:

$$E_{\hat{\omega}}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\sigma}, \mathcal{A}) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \boldsymbol{\varepsilon}[\mathbf{w}] : \mathcal{A} : \boldsymbol{\varepsilon}[\mathbf{w}] dV$$

Expérimentations numériques: tendance de la densité  $\boldsymbol{\varepsilon}[\mathbf{w}] \mathcal{A} \boldsymbol{\varepsilon}[\mathbf{w}]$  à prendre leurs valeurs maximales dans les “zones mal modélisées” (permet d'estimer le support géométrique pour des corrections  $\Delta \mathcal{A}$  de faible étendue).

# Exemple numérique (localisation par carte d'ERC, vibrations)

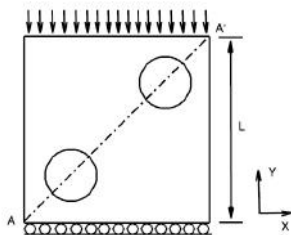


Défaut simulé

Carte d'ERC

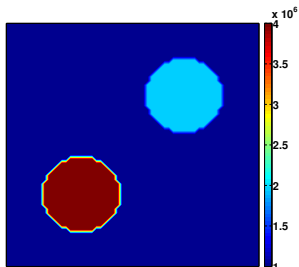
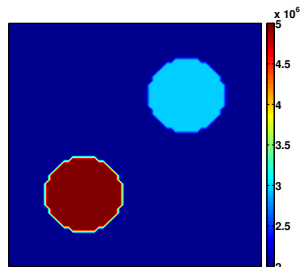
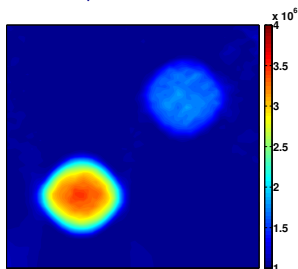
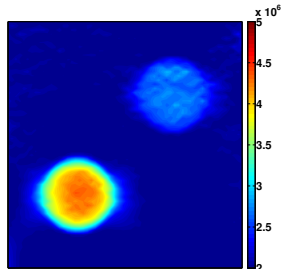
Carte d'ERC calculée à partir d'1 mode propre entièrement connu.

## Exemple numérique 2D (reconstruction de champs de modules)

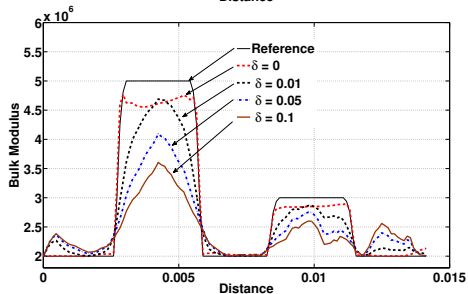
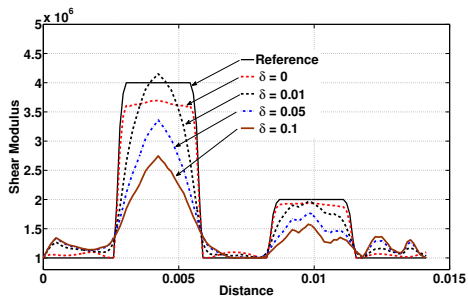


	Background	Inclusion 1	Inclusion 2
$\mu$ (Pa)	$1 \times 10^6$	$2 \times 10^6$	$4 \times 10^6$
$\kappa$ (Pa)	$2 \times 10^6$	$3 \times 10^6$	$5 \times 10^6$

## Exemple numérique 2D (reconstruction de champs de modules)

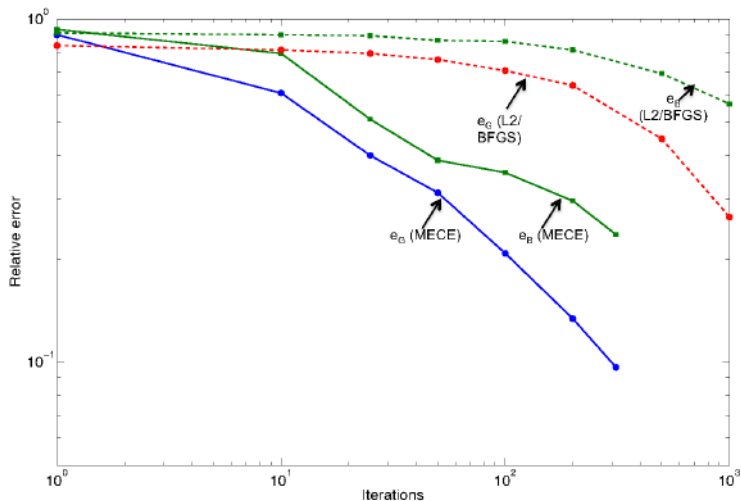
 $\mu$  exact $\kappa$  exact $\mu$  reconstruit $\kappa$  reconstruit

## Exemple numérique 2D (reconstruction de champs de modules)

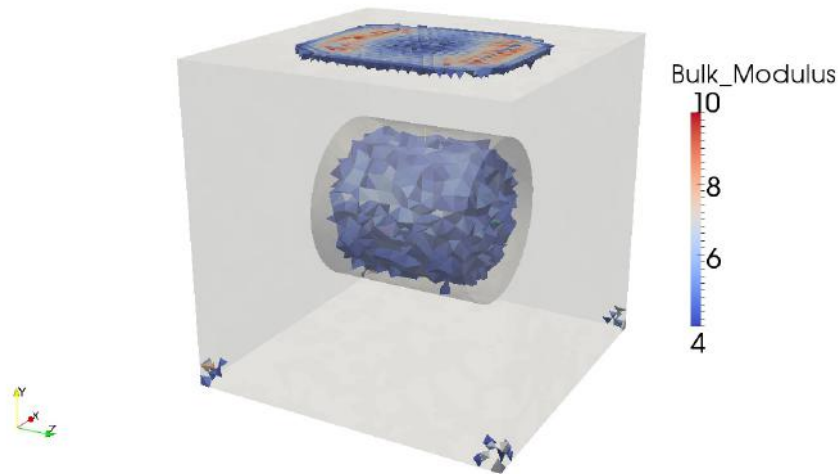




## Exemple numérique 2D (reconstruction de champs de modules)

Comparaison entre MERC et  $L^2$ /BFGS

## Exemple numérique 3D (reconstruction de champs de modules)



B. Banerjee, T. Walsh, W. Aquino, MB, *Comp. Meth. Appl. Mech. Engng.* **253**:60-72, (2013)

# Plan général

**Partie 1:** Généralités

**Partie 2:** Identification en mécanique des solides

**Partie 3:** Outils: algèbre linéaire, moindres carrés, optimisation

**Partie 4:** Problèmes mal posés et leur régularisation

**Partie 5:** Approches bayésiennes

### 6. Résolution des problèmes linéaires en dimension finie

Systèmes linéaires et moindres carrés linéaires: analyse

Moindres carrés linéaires: méthodes de résolution

Cas des équations linéaires en dimension infinie

### 7. Aperçu de quelques méthodes de minimisation

Rappels sur la dérivation en dimension finie

Généralités sur l'optimisation

Fonction-coût différentiable, sans contraintes

Fonction-coût différentiable, avec contraintes

Fonctions-coût non différentiables

Méthodes stochastiques, algorithmes génétiques

### 8. Méthodes d'évaluation du gradient

Dérivation numérique

Dérivation analytique directe

Méthode de l'état adjoint 1: cas linéaire discrétisé

Méthode de l'état adjoint 2: cas linéaire continu

Méthode de l'état adjoint 3: cas incrémental discrétisé

## 6. Résolution des problèmes linéaires en dimension finie

Systèmes linéaires et moindres carrés linéaires: analyse

Moindres carrés linéaires: méthodes de résolution

Cas des équations linéaires en dimension infinie

## 7. Aperçu de quelques méthodes de minimisation

Rappels sur la dérivation en dimension finie

Généralités sur l'optimisation

Fonction-coût différentiable, sans contraintes

Fonction-coût différentiable, avec contraintes

Fonctions-coût non différentiables

Méthodes stochastiques, algorithmes génétiques

## 8. Méthodes d'évaluation du gradient

Dérivation numérique

Dérivation analytique directe

Méthode de l'état adjoint 1: cas linéaire discrétisé

Méthode de l'état adjoint 2: cas linéaire continu

Méthode de l'état adjoint 3: cas incrémental discrétisé

## 6. Résolution des problèmes linéaires en dimension finie

Systèmes linéaires et moindres carrés linéaires: analyse

Moindres carrés linéaires: méthodes de résolution

Cas des équations linéaires en dimension infinie

## 7. Aperçu de quelques méthodes de minimisation

## 8. Méthodes d'évaluation du gradient

## Systèmes d'équations linéaires

- (i) Utilisation pratique fréquente. Exemples:
  - Identification de comportement élastique linéaire par les efforts
  - Déconvolution
  - Plus généralement, discrétisation de toute équation d'observation linéaire
- (ii) Bonne introduction à des situations plus complexes

## Systèmes d'équations linéaires

- (i) Utilisation pratique fréquente. Exemples:
- Identification de comportement élastique linéaire par les efforts
  - Déconvolution
  - Plus généralement, discrétisation de toute équation d'observation linéaire
- (ii) Bonne introduction à des situations plus complexes

Espaces de dimension finie

- $\mathcal{P} = \mathbb{C}^n$  (paramètres), de dimension  $n$  (produit scalaire  $(\cdot, \cdot)_{\mathcal{P}}$ );
- $\mathcal{D} = \mathbb{C}^m$  (données), de dimension  $m$  (produit scalaire  $(\cdot, \cdot)_{\mathcal{D}}$ ).



## Systèmes d'équations linéaires

- (i) Utilisation pratique fréquente. Exemples:
- Identification de comportement élastique linéaire par les efforts
  - Déconvolution
  - Plus généralement, discrétisation de toute équation d'observation linéaire
- (ii) Bonne introduction à des situations plus complexes

Espaces de dimension finie

- $\mathcal{P} = \mathbb{C}^n$  (paramètres), de dimension  $n$  (produit scalaire  $(\cdot, \cdot)_{\mathcal{P}}$ );
- $\mathcal{D} = \mathbb{C}^m$  (données), de dimension  $m$  (produit scalaire  $(\cdot, \cdot)_{\mathcal{D}}$ ).

**Problème inverse:**

Trouver  $\mathbf{p} \in \mathcal{P}$  tel que  $\mathbf{G}\mathbf{p} = \mathbf{d}$  ( $\mathbf{d} \in \mathcal{D}$  donné)

$\mathbf{G} \in \mathbb{C}^{m,n}$ : matrice  $m \times n$  à coefficients complexes  $[g_{ij}]$

$\mathbf{G}^* \in \mathbb{C}^{n,m}$ : matrice  $n \times m$  à coefficients complexes  $[\bar{g}_{ji}]$

Analyse du problème inverse par décomposition de  $\mathbf{G}$  en valeurs singulières et vecteurs propres généralisés.

## Décomposition en valeurs singulières de $G$

Analyse du problème inverse: décomposer  $G$  en valeurs singulières et vecteurs propres généralisés.

- $G^*G$ : matrice hermitienne  $n \times n$
- $GG^*$ : matrice hermitienne  $m \times m$

Toutes deux sont de rang  $r \leq \min(m, n)$

## Décomposition en valeurs singulières de $G$

Analyse du problème inverse: décomposer  $G$  en valeurs singulières et vecteurs propres généralisés.

- $G^*G$ : matrice hermitienne  $n \times n$
- $GG^*$ : matrice hermitienne  $m \times m$

Toutes deux sont de rang  $r \leq \min(m, n)$

Il existe:

(a)  $\lambda_1, \dots, \lambda_r$  réels non nuls,  $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_r > 0$ ,

(b)  $V = (v_1, \dots, v_n) \in \mathcal{P}^n$  orthogonale ( $V^*V = VV^* = I_n$ ),

(c)  $U = (u_1, \dots, u_m) \in \mathcal{D}^m$  orthogonale ( $U^*U = UU^* = I_m$ ),

vérifiant:

$$Gv_i = \lambda_i u_i$$

$$G^*u_i = \lambda_i v_i$$

$$G^*Gv_i = \lambda_i^2 v_i$$

$$GG^*u_i = \lambda_i^2 u_i$$

avec  $\lambda_i = 0$  ( $i > r$ )

## Décomposition en valeurs singulières de $G$

Conséquence:

Décomposition en valeurs singulières de  $G \in \mathbb{C}^{m,n}$ :

$$G = U\Lambda V^* \quad \text{avec } \Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \dots & 0 & 0 \\ & \ddots & & \vdots \\ 0 & \dots & \lambda_r & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

et  $U^*U = UU^* = I_m$ ,  $V^*V = VV^* = I_n$ ,  
 $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ : valeurs singulières de  $G$  (avec  $r \leq \min(m, n)$ )

## Décomposition en valeurs singulières de $G$

Conséquence:

Décomposition en valeurs singulières de  $G \in \mathbb{C}^{m,n}$ :

$$G = U\Lambda V^* \quad \text{avec } \Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \dots & 0 & 0 \\ & \ddots & & \vdots \\ 0 & \dots & \lambda_r & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

et  $U^*U = UU^* = I_m$ ,  $V^*V = VV^* = I_n$ ,  
 $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ : valeurs singulières de  $G$  (avec  $r \leq \min(m, n)$ )

Matlab:  $[U, S, V] = \text{svd}(G)$  (*singular value decomposition*)

## Analyse du problème inverse discret

On utilise la décomposition de  $G$ :

$$Gp = d \iff U\Lambda V^*p = d \iff \Lambda V^*p = U^*d$$

soit

$$\Lambda x = y \quad \text{en posant } x = V^*p, y = U^*d$$

## Analyse du problème inverse discret

On utilise la décomposition de  $\mathbf{G}$ :

$$\mathbf{G}\mathbf{p} = \mathbf{d} \iff \mathbf{U}\mathbf{\Lambda}\mathbf{V}^*\mathbf{p} = \mathbf{d} \iff \mathbf{\Lambda}\mathbf{V}^*\mathbf{p} = \mathbf{U}^*\mathbf{d}$$

soit

$$\mathbf{\Lambda}\mathbf{x} = \mathbf{y} \quad \text{en posant } \mathbf{x} = \mathbf{V}^*\mathbf{p}, \mathbf{y} = \mathbf{U}^*\mathbf{d}$$

Principales caractéristiques de  $\mathbf{G}$ :

- Noyau:  $\text{Ker}(\mathbf{G}) = \text{Vect}_{\mathcal{P}}(\mathbf{v}_{r+1}, \dots, \mathbf{v}_n)$ .
- Image:  $\text{Im}(\mathbf{G}) = \text{Vect}_{\mathcal{D}}(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_r)$ .

## Analyse du problème inverse discret

On utilise la décomposition de  $\mathbf{G}$ :

$$\mathbf{G}\mathbf{p} = \mathbf{d} \iff \mathbf{U}\mathbf{\Lambda}\mathbf{V}^*\mathbf{p} = \mathbf{d} \iff \mathbf{\Lambda}\mathbf{V}^*\mathbf{p} = \mathbf{U}^*\mathbf{d}$$

soit

$$\mathbf{\Lambda}\mathbf{x} = \mathbf{y} \quad \text{en posant } \mathbf{x} = \mathbf{V}^*\mathbf{p}, \mathbf{y} = \mathbf{U}^*\mathbf{d}$$

Principales caractéristiques de  $\mathbf{G}$ :

- Noyau:  $\text{Ker}(\mathbf{G}) = \text{Vect}_{\mathcal{P}}(\mathbf{v}_{r+1}, \dots, \mathbf{v}_n)$ .
- Image:  $\text{Im}(\mathbf{G}) = \text{Vect}_{\mathcal{D}}(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_r)$ .

(i) Condition nécessaire d'existence d'une solution  $\mathbf{p}$ :

$$\mathbf{d} \in \text{Im}(\mathbf{G}), \quad \text{soit } (\mathbf{d}, \mathbf{u}_i)_{\mathcal{D}} = y_i = 0 \quad \forall i > r$$

(ii) Unicité de la solution  $\mathbf{p}$ :

$$\text{Ker}(\mathbf{G}) = \{\mathbf{0}_{\mathcal{P}}\}, \quad \text{soit } r = n$$

Possible seulement pour  $m \geq n$  !



## Quasi-solutions

En l'absence de solution exacte, recherche des solutions au sens des moindres carrés, dites *quasi-solutions*:

$$\min_{\mathbf{p} \in \mathcal{P}} \|\mathbf{G}\mathbf{p} - \mathbf{d}\|_{\mathcal{D}}^2$$

données par:

$$\mathbf{p} = \sum_{i=1}^r \frac{(\mathbf{d}, \mathbf{u}_i)_{\mathcal{D}}}{\lambda_i} \mathbf{v}_i + \sum_{i=r+1}^n \alpha_i \mathbf{v}_i \quad (\alpha_i \text{ arbitraires})$$

## Quasi-solutions

En l'absence de solution exacte, recherche des solutions au sens des moindres carrés, dites *quasi-solutions*:

$$\min_{\mathbf{p} \in \mathcal{P}} \|\mathbf{G}\mathbf{p} - \mathbf{d}\|_{\mathcal{D}}^2$$

données par:

$$\mathbf{p} = \sum_{i=1}^r \frac{(\mathbf{d}, \mathbf{u}_i)_{\mathcal{D}}}{\lambda_i} \mathbf{v}_i + \sum_{i=r+1}^n \alpha_i \mathbf{v}_i \quad (\alpha_i \text{ arbitraires})$$

- Infinité de quasi-solutions si  $r < n$ .

## Quasi-solutions

En l'absence de solution exacte, recherche des solutions au sens des moindres carrés, dites *quasi-solutions*:

$$\min_{\mathbf{p} \in \mathcal{P}} \|\mathbf{G}\mathbf{p} - \mathbf{d}\|_{\mathcal{D}}^2$$

données par:

$$\mathbf{p} = \sum_{i=1}^r \frac{(\mathbf{d}, \mathbf{u}_i)_{\mathcal{D}}}{\lambda_i} \mathbf{v}_i + \sum_{i=r+1}^n \alpha_i \mathbf{v}_i \quad (\alpha_i \text{ arbitraires})$$

- Infinité de quasi-solutions si  $r < n$ .
- Critères de sélection. Exemple: proximité à une certaine "référence"  $\mathbf{p}_0 \in \mathcal{P}$

$$\min_{(\alpha_{r+1}, \dots, \alpha_n)} \sum_{i=1}^r \left| \frac{y_i}{\lambda_i} - (\mathbf{p}_0, \mathbf{v}_i)_{\mathcal{P}} \right|^2 + \sum_{i=r+1}^n |\alpha_i - (\mathbf{p}_0, \mathbf{v}_i)_{\mathcal{P}}|^2 \implies \alpha_i = (\mathbf{p}_0, \mathbf{v}_i)_{\mathcal{P}}$$

( $\mathbf{p}$  est le projeté orthogonal de  $\mathbf{p}_0$  sur le sous-espace des quasi-solutions).

## Quasi-solutions

En l'absence de solution exacte, recherche des solutions au sens des moindres carrés, dites *quasi-solutions*:

$$\min_{\mathbf{p} \in \mathcal{P}} \|\mathbf{G}\mathbf{p} - \mathbf{d}\|_{\mathcal{D}}^2$$

données par:

$$\mathbf{p} = \sum_{i=1}^r \frac{(\mathbf{d}, \mathbf{u}_i)_{\mathcal{D}}}{\lambda_i} \mathbf{v}_i + \sum_{i=r+1}^n \alpha_i \mathbf{v}_i \quad (\alpha_i \text{ arbitraires})$$

- Infinité de quasi-solutions si  $r < n$ .
- Critères de sélection. Exemple: proximité à une certaine "référence"  $\mathbf{p}_0 \in \mathcal{P}$

$$\min_{(\alpha_{r+1}, \dots, \alpha_n)} \sum_{i=1}^r \left| \frac{y_i}{\lambda_i} - (\mathbf{p}_0, \mathbf{v}_i)_{\mathcal{P}} \right|^2 + \sum_{i=r+1}^n |\alpha_i - (\mathbf{p}_0, \mathbf{v}_i)_{\mathcal{P}}|^2 \implies \alpha_i = (\mathbf{p}_0, \mathbf{v}_i)_{\mathcal{P}}$$

( $\mathbf{p}$  est le projeté orthogonal de  $\mathbf{p}_0$  sur le sous-espace des quasi-solutions).

- La quasi-solution  $\mathbf{p}_{\#}$  de norme minimale (correspondant donc à  $\mathbf{p}_0 = \mathbf{0}$ ) est

$$\mathbf{p}_{\#} := \sum_{i=1}^r \frac{y_i}{\lambda_i} \mathbf{v}_i$$

## Notion d'inverse généralisé

Définition: une matrice  $\mathbf{G}^\dagger$  rectangulaire  $n \times m$  est un inverse généralisé de  $\mathbf{G}$  si

$$\forall \mathbf{d} \in \text{Im}(\mathbf{G}) \quad \mathbf{G}(\mathbf{G}^\dagger \mathbf{d}) = \mathbf{d}$$

Si  $r < n$ : une infinité d'inverses généralisés.

Si  $r = n$ :  $\mathbf{G}^\dagger = \mathbf{G}^{-1}$ .

Si  $\mathbf{d} \notin \text{Im}(\mathbf{G})$ ,  $\mathbf{G}^\dagger \mathbf{d}$  est une quasi-solution.

## Notion d'inverse généralisé

Définition: une matrice  $\mathbf{G}^\dagger$  rectangulaire  $n \times m$  est un inverse généralisé de  $\mathbf{G}$  si

$$\forall \mathbf{d} \in \text{Im}(\mathbf{G}) \quad \mathbf{G}(\mathbf{G}^\dagger \mathbf{d}) = \mathbf{d}$$

Si  $r < n$ : une infinité d'inverses généralisés.

Si  $r = n$ :  $\mathbf{G}^\dagger = \mathbf{G}^{-1}$ .

Si  $\mathbf{d} \notin \text{Im}(\mathbf{G})$ ,  $\mathbf{G}^\dagger \mathbf{d}$  est une quasi-solution.

- Chaque choix possible de  $(\alpha_{r+1}, \dots, \alpha_n)$  dans

$$\mathbf{p} = \sum_{i=1}^r \frac{y_i}{\lambda_i} \mathbf{v}_i + \sum_{i=r+1}^n \alpha_i \mathbf{v}_i$$

définit un inverse généralisé

## Notion d'inverse généralisé

Définition: une matrice  $\mathbf{G}^\dagger$  rectangulaire  $n \times m$  est un inverse généralisé de  $\mathbf{G}$  si

$$\forall \mathbf{d} \in \text{Im}(\mathbf{G}) \quad \mathbf{G}(\mathbf{G}^\dagger \mathbf{d}) = \mathbf{d}$$

Si  $r < n$ : une infinité d'inverses généralisés.

Si  $r = n$ :  $\mathbf{G}^\dagger = \mathbf{G}^{-1}$ .

Si  $\mathbf{d} \notin \text{Im}(\mathbf{G})$ ,  $\mathbf{G}^\dagger \mathbf{d}$  est une quasi-solution.

- Chaque choix possible de  $(\alpha_{r+1}, \dots, \alpha_n)$  dans

$$\mathbf{p} = \sum_{i=1}^r \frac{y_i}{\lambda_i} \mathbf{v}_i + \sum_{i=r+1}^n \alpha_i \mathbf{v}_i$$

définit un inverse généralisé

- Le choix  $\alpha_{r+1} = \dots = \alpha_n = 0$  (quasi-solution de norme minimale) définit l'*inverse généralisé de Moore-Penrose*

$$\mathbf{G}^+ = \mathbf{V}_r \mathbf{\Lambda}_r^{-1} \mathbf{U}_r^* \quad \text{vérifiant} \quad \begin{cases} \mathbf{G} \mathbf{G}^+ \mathbf{G} = \mathbf{G}, & \mathbf{G} \mathbf{G}^+ = (\mathbf{G} \mathbf{G}^+)^* \\ \mathbf{G}^+ \mathbf{G} \mathbf{G}^+ = \mathbf{G}^+, & \mathbf{G}^+ \mathbf{G} = (\mathbf{G}^+ \mathbf{G})^* \end{cases}$$

## Notion d'inverse généralisé

Définition: une matrice  $\mathbf{G}^\dagger$  rectangulaire  $n \times m$  est un inverse généralisé de  $\mathbf{G}$  si

$$\forall \mathbf{d} \in \text{Im}(\mathbf{G}) \quad \mathbf{G}(\mathbf{G}^\dagger \mathbf{d}) = \mathbf{d}$$

Si  $r < n$ : une infinité d'inverses généralisés.

Si  $r = n$ :  $\mathbf{G}^\dagger = \mathbf{G}^{-1}$ .

Si  $\mathbf{d} \notin \text{Im}(\mathbf{G})$ ,  $\mathbf{G}^\dagger \mathbf{d}$  est une quasi-solution.

- Chaque choix possible de  $(\alpha_{r+1}, \dots, \alpha_n)$  dans

$$\mathbf{p} = \sum_{i=1}^r \frac{y_i}{\lambda_i} \mathbf{v}_i + \sum_{i=r+1}^n \alpha_i \mathbf{v}_i$$

définit un inverse généralisé

- Le choix  $\alpha_{r+1} = \dots = \alpha_n = 0$  (quasi-solution de norme minimale) définit l'*inverse généralisé de Moore-Penrose*

$$\mathbf{G}^+ = \mathbf{V}_r \mathbf{\Lambda}_r^{-1} \mathbf{U}_r^* \quad \text{vérifiant} \quad \begin{cases} \mathbf{G} \mathbf{G}^+ \mathbf{G} = \mathbf{G}, & \mathbf{G} \mathbf{G}^+ = (\mathbf{G} \mathbf{G}^+)^* \\ \mathbf{G}^+ \mathbf{G} \mathbf{G}^+ = \mathbf{G}^+, & \mathbf{G}^+ \mathbf{G} = (\mathbf{G}^+ \mathbf{G})^* \end{cases}$$

- Matlab:  $\mathbf{X} = \text{pinv}(\mathbf{G})$



## Difficultés rencontrées jusqu'ici:

- Absence de solution ( $m > n$  et  $\mathbf{d} \notin \text{Im}(\mathbf{G})$ ).
- Infinité de (quasi)-solutions (si  $n > r$ ).

Choix d'un inverse généralisé: "régularisation" du problème inverse, reposant sur un *critère de sélection*.

## Conditionnement et régularisation

Données  $d$  exactes: pas réaliste

⇒ étudier l'influence de perturbations.

## Conditionnement et régularisation

Données  $\mathbf{d}$  exactes: pas réaliste

⇒ étudier l'influence de perturbations.

Hyp.: cas  $n = r$  (le plus favorable):

$$\mathbf{p} = \sum_{i=1}^n \frac{y_i}{\lambda_i} \mathbf{v}_i$$

Second membre perturbé:

$$\mathbf{d} + \delta \mathbf{d} \quad \|\delta \mathbf{d}\|_{\mathcal{D}} \leq \varepsilon$$

Alors 
$$\|\delta \mathbf{y}\|_{\mathcal{D}} = \|\mathbf{U}^* \delta \mathbf{d}\|_{\mathcal{D}} \leq \varepsilon$$

## Conditionnement et régularisation

Données  $\mathbf{d}$  exactes: pas réaliste  
 $\Rightarrow$  étudier l'influence de perturbations.

Hyp.: cas  $n = r$  (le plus favorable):

$$\mathbf{p} = \sum_{i=1}^n \frac{y_i}{\lambda_i} \mathbf{v}_i$$

Second membre perturbé:

$$\mathbf{d} + \delta \mathbf{d} \quad \|\delta \mathbf{d}\|_{\mathcal{D}} \leq \varepsilon$$

Alors  $\|\delta \mathbf{y}\|_{\mathcal{D}} = \|\mathbf{U}^* \delta \mathbf{d}\|_{\mathcal{D}} \leq \varepsilon$

Dans le cas particulier où

$$\delta \mathbf{y} = \mathbf{U}^* \delta \mathbf{d} = \varepsilon \mathbf{u}_k \quad k \text{ fixé } \in [1, n]$$

la variation  $\delta \mathbf{x}$  de la solution  $\mathbf{x}$  est:

$$\delta \mathbf{x} = \frac{\varepsilon}{\lambda_k} \mathbf{v}_k$$

soit une variation relative:

$$\frac{\|\delta \mathbf{x}\|_{\mathcal{P}}}{\|\delta \mathbf{y}\|_{\mathcal{D}}} = \frac{1}{\lambda_k}$$

## Conditionnement et régularisation

Données  $\mathbf{d}$  exactes: pas réaliste  
 $\Rightarrow$  étudier l'influence de perturbations.

Hyp.: cas  $n = r$  (le plus favorable):

$$\mathbf{p} = \sum_{i=1}^n \frac{y_i}{\lambda_i} \mathbf{v}_i$$

Second membre perturbé:

$$\mathbf{d} + \delta \mathbf{d} \quad \|\delta \mathbf{d}\|_{\mathcal{D}} \leq \varepsilon$$

Alors  $\|\delta \mathbf{y}\|_{\mathcal{D}} = \|\mathbf{U}^* \delta \mathbf{d}\|_{\mathcal{D}} \leq \varepsilon$

Dans le cas particulier où

$$\delta \mathbf{y} = \mathbf{U}^* \delta \mathbf{d} = \varepsilon \mathbf{u}_k \quad k \text{ fixé } \in [1, n]$$

la variation  $\delta \mathbf{x}$  de la solution  $\mathbf{x}$  est:

$$\delta \mathbf{x} = \frac{\varepsilon}{\lambda_k} \mathbf{v}_k$$

soit une variation relative:

$$\frac{\|\delta \mathbf{x}\|_{\mathcal{P}}}{\|\delta \mathbf{y}\|_{\mathcal{D}}} = \frac{1}{\lambda_k}$$

Nombre de conditionnement:

$$\text{cond}(\mathbf{G}) = \frac{\lambda_1}{\lambda_r}$$

et, plus généralement:

$$\text{cond}(\mathbf{G}) = \|\mathbf{G}\| \|\mathbf{G}^\dagger\|$$

Les problèmes inverses conduisent souvent, par discrétisation de problèmes linéaires mal posés, à des modèles discrets  $\mathbf{G}$  mal conditionnés ( $\text{cond}(\mathbf{G}) \gg 1$ ).

## Conditionnement et régularisation

Exemple (l'inverse est exact):

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 10 & 7 & 8 & 7 \\ 7 & 5 & 6 & 5 \\ 8 & 6 & 10 & 9 \\ 7 & 5 & 9 & 10 \end{bmatrix} \implies \mathbf{G}^{-1} = \begin{bmatrix} 25 & 41 & 10 & -6 \\ -41 & 68 & -17 & 10 \\ 10 & -17 & 5 & -3 \\ -6 & 10 & -3 & 2 \end{bmatrix}$$

## Conditionnement et régularisation

Exemple (l'inverse est exact):

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 10 & 7 & 8 & 7 \\ 7 & 5 & 6 & 5 \\ 8 & 6 & 10 & 9 \\ 7 & 5 & 9 & 10 \end{bmatrix} \implies \mathbf{G}^{-1} = \begin{bmatrix} 25 & 41 & 10 & -6 \\ -41 & 68 & -17 & 10 \\ 10 & -17 & 5 & -3 \\ -6 & 10 & -3 & 2 \end{bmatrix}$$

Effet de perturbations de  $\mathbf{G}$  ou  $\mathbf{d}$  sur la solution  $\mathbf{p}$  de  $\mathbf{G}\mathbf{p} = \mathbf{d}$ :

$$\mathbf{d} = [32 \ 23 \ 33 \ 31]^T \implies \mathbf{p} = [1 \ 1 \ 1 \ 1]^T$$

$$\delta \mathbf{d} = [0.1 \ -0.1 \ 0.1 \ -0.1]^T \implies \mathbf{p} = [9.2 \ -12.6 \ 4.5 \ -1.1]^T$$

$$\delta \mathbf{G}_{23} = 0.1 \implies \mathbf{p} \approx [-4.86 \ -10.7 \ -1.43 \ -2.43]^T$$

## Conditionnement et régularisation

Exemple (l'inverse est exact):

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 10 & 7 & 8 & 7 \\ 7 & 5 & 6 & 5 \\ 8 & 6 & 10 & 9 \\ 7 & 5 & 9 & 10 \end{bmatrix} \implies \mathbf{G}^{-1} = \begin{bmatrix} 25 & 41 & 10 & -6 \\ -41 & 68 & -17 & 10 \\ 10 & -17 & 5 & -3 \\ -6 & 10 & -3 & 2 \end{bmatrix}$$

Effet de perturbations de  $\mathbf{G}$  ou  $\mathbf{d}$  sur la solution  $\mathbf{p}$  de  $\mathbf{G}\mathbf{p} = \mathbf{d}$ :

$$\mathbf{d} = [32 \ 23 \ 33 \ 31]^T \implies \mathbf{p} = [1 \ 1 \ 1 \ 1]^T$$

$$\delta\mathbf{d} = [0.1 \ -0.1 \ 0.1 \ -0.1]^T \implies \mathbf{p} = [9.2 \ -12.6 \ 4.5 \ -1.1]^T$$

$$\delta\mathbf{G}_{23} = 0.1 \implies \mathbf{p} \approx [-4.86 \ -10.7 \ -1.43 \ -2.43]^T$$

Valeurs singulières et conditionnement de  $\mathbf{G}$ :

$$\mathbf{\Lambda} \approx \text{Diag}[30.29 \ 3.858 \ 0.8431 \ 0.01015],$$

$$\text{cond}(\mathbf{G}) \approx 2.98 \cdot 10^3$$

Conditionnement très élevé pour une matrice  $4 \times 4$ !



## Conditionnement et régularisation

Effet de perturbations de  $\mathbf{d}$  sur la solution complète (cas  $n = r$ ):

$$\delta \mathbf{p} = \sum_{i=1}^r \frac{\delta y_i}{\lambda_i} \mathbf{v}_i = \sum_{i=1}^r \frac{\delta y_i}{y_i} \frac{y_i}{\lambda_i} \mathbf{v}_i$$

**Test de Picard discret:** Inversion linéaire numériquement bien posée si  $y_i = (\mathbf{d}, \mathbf{u}_i)_{\mathcal{D}}$  décroît avec  $\lambda_i$ .

## Conditionnement et régularisation

Effet de perturbations de  $\mathbf{d}$  sur la solution complète (cas  $n = r$ ):

$$\delta \mathbf{p} = \sum_{i=1}^r \frac{\delta y_i}{\lambda_i} \mathbf{v}_i = \sum_{i=1}^r \frac{\delta y_i}{y_i} \frac{y_i}{\lambda_i} \mathbf{v}_i$$

**Test de Picard discret:** Inversion linéaire numériquement bien posée si  $y_i = (\mathbf{d}, \mathbf{u}_i)_{\mathcal{D}}$  décroît avec  $\lambda_i$ .

Il faut (en général) "régulariser" l'inversion:

- (i) Redéfinir la notion de solution par incorporation d'information *a priori*,
- (ii) Améliorer le conditionnement de la méthode d'inversion.

## Exemple: reconstruction de conditions aux limites inaccessibles

Equation de la chaleur

$$\Delta\theta \equiv \frac{\partial^2\theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial\theta}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial\theta}{\partial\varphi} = 0$$

## Exemple: reconstruction de conditions aux limites inaccessibles

Equation de la chaleur

$$\Delta\theta \equiv \frac{\partial^2\theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial\theta}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial\theta}{\partial\varphi} = 0$$

Solution générale (cf section 2)

$$\theta(r, \varphi) = a_0 + b_0 \operatorname{Log} r + \sum_{n \geq 1} \left\{ (a_n r^n + a_{-n} r^{-n}) \cos n\varphi + (b_n r^n + b_{-n} r^{-n}) \sin n\varphi \right\}$$

## Exemple: reconstruction de conditions aux limites inaccessibles

Equation de la chaleur

$$\Delta\theta \equiv \frac{\partial^2\theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial\theta}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2\theta}{\partial\varphi^2} = 0$$

Solution générale (cf section 2)

$$\theta(r, \varphi) = a_0 + b_0 \operatorname{Log} r + \sum_{n \geq 1} \left\{ (a_n r^n + a_{-n} r^{-n}) \cos n\varphi + (b_n r^n + b_{-n} r^{-n}) \sin n\varphi \right\}$$

Données sur la frontière externe  $S_e$ :

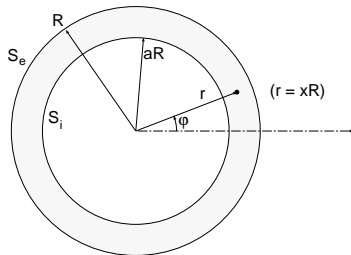
$$\theta(R, \varphi) = f(\varphi) = \alpha_0 + \sum_{n \geq 1} \alpha_n \cos n\varphi + \beta_n \sin n\varphi$$

$$\theta_{,n}(R, \varphi) = g(\varphi) = \gamma_0 + \sum_{n \geq 1} \gamma_n \cos n\varphi + \delta_n \sin n\varphi$$

Température et flux à la profondeur  $r = xR$ :

$$\theta(xR, \varphi) = A_0 + \sum_{n \geq 1} A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi$$

$$\theta_{,n}(xR, \varphi) = C_0 + \sum_{n \geq 1} C_n \cos n\varphi + D_n \sin n\varphi$$



## Exemple: reconstruction de conditions aux limites inaccessibles

Relation entre inconnues  $A_n, B_n, C_n, D_n$  et données  $\alpha_n, \beta_n, \gamma_n, \delta_n$  (après élimination de  $a_n, a_{-n}, b_n, b_{-n}$ ):

$$\mathbb{G}_n \begin{Bmatrix} nA_n \\ xRC_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 2n\alpha_n \\ 2R\gamma_n \end{Bmatrix}, \quad \mathbb{G}_n \begin{Bmatrix} nB_n \\ xRD_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 2n\beta_n \\ 2R\delta_n \end{Bmatrix}$$

avec

$$\mathbb{G}_n = \begin{bmatrix} (x^n + x^{-n}) & (x^n - x^{-n}) \\ (x^n - x^{-n}) & (x^n + x^{-n}) \end{bmatrix} \quad (x = r/R \leq 1)$$

## Exemple: reconstruction de conditions aux limites inaccessibles

Relation entre inconnues  $A_n, B_n, C_n, D_n$  et données  $\alpha_n, \beta_n, \gamma_n, \delta_n$  (après élimination de  $a_n, a_{-n}, b_n, b_{-n}$ ):

$$\mathbb{G}_n \begin{Bmatrix} nA_n \\ xRC_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 2n\alpha_n \\ 2R\gamma_n \end{Bmatrix}, \quad \mathbb{G}_n \begin{Bmatrix} nB_n \\ xRD_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 2n\beta_n \\ 2R\delta_n \end{Bmatrix}$$

avec

$$\mathbb{G}_n = \begin{bmatrix} (x^n + x^{-n}) & (x^n - x^{-n}) \\ (x^n - x^{-n}) & (x^n + x^{-n}) \end{bmatrix} \quad (x = r/R \leq 1)$$

Valeurs singulières (en fait, valeurs propres) de  $\mathbb{G}_n$ :

$$\lambda_{n,1} = 2x^{-2n}, \quad \lambda_{n,2} = 2x^{2n}$$

## Quasi-solution tronquée

$$\mathbf{p}^k = \sum_{i=1}^k \frac{y_i}{\lambda_i} \mathbf{v}_i + \sum_{i=r+1}^n \alpha_i \mathbf{v}_i$$

- $k < r$  choisi de sorte que  $\lambda_1/\lambda_k$  soit acceptable;
- On *ignore* la projection de  $\mathbf{d}$  sur  $\mathbf{u}_{k+1}, \dots, \mathbf{u}_n$ .



## Régularisation par optimisation

On minimise une fonction-coût  $S_\beta$  de la forme:

$$S_\beta(\mathbf{p}) = \|\mathbf{G}\mathbf{p} - \mathbf{d}\|_{\mathcal{D}}^2 + \beta\|\mathbf{p} - \mathbf{p}_0\|_{\mathcal{P}}^2$$

- $\Omega(\mathbf{p}) := \|\mathbf{p} - \mathbf{p}_0\|_{\mathcal{P}}^2$ : écart à une référence choisie *a priori* sur des critères physiques (par exemple sur des critères généraux ou qualitatifs, ou bien par analyse dimensionnelle). On souhaite donc (implicitement) que la solution  $\mathbf{p}$  soit aussi proche que possible de cette référence.
- $\beta$ : "paramètre de compromis":
  - $\beta = 0$ : PI résolu au sens des moindres carrés
  - $\beta = \infty$  donne  $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0$

## Régularisation par optimisation

On minimise une fonction-coût  $S_\beta$  de la forme:

$$S_\beta(\mathbf{p}) = \|\mathbf{G}\mathbf{p} - \mathbf{d}\|_{\mathcal{D}}^2 + \beta \|\mathbf{p} - \mathbf{p}_0\|_{\mathcal{P}}^2$$

- $\Omega(\mathbf{p}) := \|\mathbf{p} - \mathbf{p}_0\|_{\mathcal{P}}^2$ : écart à une référence choisie *a priori* sur des critères physiques (par exemple sur des critères généraux ou qualitatifs, ou bien par analyse dimensionnelle). On souhaite donc (implicitement) que la solution  $\mathbf{p}$  soit aussi proche que possible de cette référence.
- $\beta$ : "paramètre de compromis":
  - $\beta = 0$ : PI résolu au sens des moindres carrés
  - $\beta = \infty$  donne  $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0$

Expression de  $S_\beta$  après SVD de  $\mathbf{G}$  (avec  $\mathbf{x} = \mathbf{V}^* \mathbf{p}$  et  $\mathbf{y} = \mathbf{U}^* \mathbf{d}$ ):

$$S_\beta(\mathbf{x}) = \left[ \sum_{i=1}^r |\lambda_i x_i - y_i|^2 + \sum_{i=r+1}^m |y_i|^2 \right] + \beta \sum_{i=1}^n |x_i - x_i^0|^2$$

## Régularisation par optimisation: principales propriétés

1. Il existe  $\mathbf{p} = \mathbf{p}^\beta$  unique minimisant  $S_\beta(\mathbf{p})$ ; il est donné par:

$$\mathbf{p}^\beta = [\mathbf{G}^* \mathbf{G} + \beta \mathbf{I}]^{-1} [\mathbf{G}^* \mathbf{d} + \beta \mathbf{p}_0] \quad \text{i.e.} \quad \begin{cases} x_i^\beta = \frac{\lambda_i y_i + \beta x_i^0}{\lambda_i^2 + \beta} & (i \leq r) \\ x_i^\beta = x_i^0 & (i > r) \end{cases}$$

La matrice  $\mathbf{G}^* \mathbf{G} + \beta \mathbf{I}$  est définie positive, donc en particulier inversible.

## Régularisation par optimisation: principales propriétés

1. Il existe  $\mathbf{p} = \mathbf{p}^\beta$  unique minimisant  $S_\beta(\mathbf{p})$ ; il est donné par:

$$\mathbf{p}^\beta = [\mathbf{G}^* \mathbf{G} + \beta \mathbf{I}]^{-1} [\mathbf{G}^* \mathbf{d} + \beta \mathbf{p}_0] \quad \text{i.e.} \quad \begin{cases} x_i^\beta = \frac{\lambda_i y_i + \beta x_i^0}{\lambda_i^2 + \beta} & (i \leq r) \\ x_i^\beta = x_i^0 & (i > r) \end{cases}$$

La matrice  $\mathbf{G}^* \mathbf{G} + \beta \mathbf{I}$  est définie positive, donc en particulier inversible.

2.  $\mathbf{p}^\beta$  tend vers la quasi-solution la plus proche de  $\mathbf{p}_0$  quand  $\beta \rightarrow 0$ .

## Régularisation par optimisation: principales propriétés

1. Il existe  $\mathbf{p} = \mathbf{p}^\beta$  unique minimisant  $S_\beta(\mathbf{p})$ ; il est donné par:

$$\mathbf{p}^\beta = [\mathbf{G}^* \mathbf{G} + \beta \mathbf{I}]^{-1} [\mathbf{G}^* \mathbf{d} + \beta \mathbf{p}_0] \quad \text{i.e.} \quad \begin{cases} x_i^\beta = \frac{\lambda_i y_i + \beta x_i^0}{\lambda_i^2 + \beta} & (i \leq r) \\ x_i^\beta = x_i^0 & (i > r) \end{cases}$$

La matrice  $\mathbf{G}^* \mathbf{G} + \beta \mathbf{I}$  est définie positive, donc en particulier inversible.

2.  $\mathbf{p}^\beta$  tend vers la quasi-solution la plus proche de  $\mathbf{p}_0$  quand  $\beta \rightarrow 0$ .

3. Le module de continuité  $L(\beta)$  (conditionnement effectif de la régularisation par optimisation) est fonction décroissante de  $\beta$ :

$$L(\beta) := \sup_{\delta \mathbf{d} \neq 0} \frac{\|\delta \mathbf{p}^\beta\|_{\mathcal{P}}}{\|\delta \mathbf{d}\|_{\mathcal{D}}} = \max_{j \leq r} \frac{\lambda_j}{\lambda_j^2 + \beta}$$

on trouve:

$$\begin{aligned} L(\beta) &= \lambda_r / (\lambda_r^2 + \beta) & \text{si} & & \beta \leq \lambda_r \lambda_{r-1} \\ L(\beta) &= \lambda_i / (\lambda_i^2 + \beta) & \text{si} & & \lambda_{i+1} \lambda_i \leq \beta \leq \lambda_i \lambda_{i-1} \quad (2 \leq i \leq r-1) \\ L(\beta) &= \lambda_1 / (\lambda_1^2 + \beta) & \text{si} & & \lambda_2 \lambda_1 \leq \beta \end{aligned}$$

## Régularisation par optimisation: principales propriétés

1. Il existe  $\mathbf{p} = \mathbf{p}^\beta$  unique minimisant  $S_\beta(\mathbf{p})$ ; il est donné par:

$$\mathbf{p}^\beta = [\mathbf{G}^* \mathbf{G} + \beta \mathbf{I}]^{-1} [\mathbf{G}^* \mathbf{d} + \beta \mathbf{p}_0] \quad \text{i.e.} \quad \begin{cases} x_i^\beta = \frac{\lambda_i y_i + \beta x_i^0}{\lambda_i^2 + \beta} & (i \leq r) \\ x_i^\beta = x_i^0 & (i > r) \end{cases}$$

La matrice  $\mathbf{G}^* \mathbf{G} + \beta \mathbf{I}$  est définie positive, donc en particulier inversible.

2.  $\mathbf{p}^\beta$  tend vers la quasi-solution la plus proche de  $\mathbf{p}_0$  quand  $\beta \rightarrow 0$ .

3. Le module de continuité  $L(\beta)$  (conditionnement effectif de la régularisation par optimisation) est fonction décroissante de  $\beta$ :

$$L(\beta) := \sup_{\delta \mathbf{d} \neq 0} \frac{\|\delta \mathbf{p}^\beta\|_{\mathcal{P}}}{\|\delta \mathbf{d}\|_{\mathcal{D}}} = \max_{j \leq r} \frac{\lambda_j}{\lambda_j^2 + \beta}$$

on trouve:

$$\begin{aligned} L(\beta) &= \lambda_r / (\lambda_r^2 + \beta) & \text{si} & & \beta \leq \lambda_r \lambda_{r-1} \\ L(\beta) &= \lambda_i / (\lambda_i^2 + \beta) & \text{si} & & \lambda_{i+1} \lambda_i \leq \beta \leq \lambda_i \lambda_{i-1} \quad (2 \leq i \leq r-1) \\ L(\beta) &= \lambda_1 / (\lambda_1^2 + \beta) & \text{si} & & \lambda_2 \lambda_1 \leq \beta \end{aligned}$$

Régularisation (choix de  $\beta$ ): compromis entre 2 (précision) et 3 (conditionnement)

## Régularisation par optimisation

- Décomposition du résidu  $S_\beta(\mathbf{p}^\beta)$  à l'optimum:

$$S_\beta(\mathbf{p}^\beta) = D(\beta) + \beta\Omega(\beta) \quad D(\beta) := \|\mathbf{G}\mathbf{p}^\beta - \mathbf{d}\|_{\mathcal{D}}^2, \quad \Omega(\beta) := \|\mathbf{p}^\beta - \mathbf{p}_0\|_{\mathcal{P}}^2$$

$D(\beta)$ : résidu d'observation,  $\Omega(\beta)$ : écart à la référence *a priori*.

## Régularisation par optimisation

- Décomposition du résidu  $S_\beta(\mathbf{p}^\beta)$  à l'optimum:

$$S_\beta(\mathbf{p}^\beta) = D(\beta) + \beta\Omega(\beta) \quad D(\beta) := \|\mathbf{G}\mathbf{p}^\beta - \mathbf{d}\|_{\mathcal{D}}^2, \quad \Omega(\beta) := \|\mathbf{p}^\beta - \mathbf{p}_0\|_{\mathcal{P}}^2$$

$D(\beta)$ : résidu d'observation,  $\Omega(\beta)$ : écart à la référence *a priori*.

- Evaluation des résidus (formulation par SVD de  $\mathbf{G}$ ):

$$D(\beta) = \sum_{i=1}^r \frac{\beta^2(\lambda_i x_i^0 - y_i)^2}{(\lambda_i^2 + \beta)^2} + \sum_{i=r+1}^m y_i^2$$

$$\Omega(\beta) = \sum_{i=1}^r \frac{\lambda_i^2(\lambda_i x_i^0 - y_i)^2}{(\lambda_i^2 + \beta)^2}$$



## Régularisation par optimisation

- Décomposition du résidu  $S_\beta(\mathbf{p}^\beta)$  à l'optimum:

$$S_\beta(\mathbf{p}^\beta) = D(\beta) + \beta\Omega(\beta) \quad D(\beta) := \|\mathbf{G}\mathbf{p}^\beta - \mathbf{d}\|_{\mathcal{D}}^2, \quad \Omega(\beta) := \|\mathbf{p}^\beta - \mathbf{p}_0\|_{\mathcal{P}}^2$$

$D(\beta)$ : résidu d'observation,  $\Omega(\beta)$ : écart à la référence *a priori*.

- Evaluation des résidus (formulation par SVD de  $\mathbf{G}$ ):

$$D(\beta) = \sum_{i=1}^r \frac{\beta^2(\lambda_i x_i^0 - y_i)^2}{(\lambda_i^2 + \beta)^2} + \sum_{i=r+1}^m y_i^2$$

$$\Omega(\beta) = \sum_{i=1}^r \frac{\lambda_i^2(\lambda_i x_i^0 - y_i)^2}{(\lambda_i^2 + \beta)^2}$$

- Le résidu d'observation est fonction **croissante** de  $\beta$ :

$$D'(\beta) = 2\beta \sum_{i=1}^r \frac{\lambda_i^2(\lambda_i x_i^0 - y_i)^2}{(\lambda_i^2 + \beta)^3} > 0$$

- L'écart à la référence *a priori* est fonction **décroissante** de  $\beta$ :

$$\Omega'(\beta) = -2 \sum_{i=1}^r \frac{\lambda_i^2(\lambda_i x_i^0 - y_i)^2}{(\lambda_i^2 + \beta)^3} < 0$$

## Régularisation par optimisation: courbe en L

On définit la **courbe en L** (associée à la fonction-coût  $S_\beta$ ) comme l'ensemble des points  $(D(\beta), \Omega(\beta))$  dans un plan  $(D, \Omega)$  (courbe paramétrée par  $\beta$  pour  $\beta \geq 0$ ).

## Régularisation par optimisation: courbe en L

On définit la **courbe en L** (associée à la fonction-coût  $S_\beta$ ) comme l'ensemble des points  $(D(\beta), \Omega(\beta))$  dans un plan  $(D, \Omega)$  (courbe paramétrée par  $\beta$  pour  $\beta \geq 0$ ).

- La courbe en L est **monotone** ( $\Omega$  est fonction décroissante de  $D$ )

*Preuve: conséquence immédiate de  $D' > 0$  et  $\Omega' < 0$*



## Régularisation par optimisation: courbe en L

On définit la **courbe en L** (associée à la fonction-coût  $S_\beta$ ) comme l'ensemble des points  $(D(\beta), \Omega(\beta))$  dans un plan  $(D, \Omega)$  (courbe paramétrée par  $\beta$  pour  $\beta \geq 0$ ).

- La courbe en L est **monotone** ( $\Omega$  est fonction décroissante de  $D$ )

*Preuve: conséquence immédiate de  $D' > 0$  et  $\Omega' < 0$*  □

- La courbe en L est **convexe**

*Preuve: la convexité équivaut ici au signe positif de la courbure  $\kappa(\beta)$ , avec  $\kappa(\beta) := (D'\Omega'' - D''\Omega') / (D'^2 + \Omega'^2)^{3/2}$ , et donc à vérifier  $D'\Omega'' - D''\Omega' \geq 0$ .*

*Remarquant qu'ici  $D'(\beta) = -\beta\Omega'(\beta)$ , on déduit  $D'\Omega'' - D''\Omega' = \Omega'^2 > 0$ .* □

## Régularisation par optimisation: courbe en L

On définit la **courbe en L** (associée à la fonction-coût  $S_\beta$ ) comme l'ensemble des points  $(D(\beta), \Omega(\beta))$  dans un plan  $(D, \Omega)$  (courbe paramétrée par  $\beta$  pour  $\beta \geq 0$ ).

- La courbe en L est **monotone** ( $\Omega$  est fonction décroissante de  $D$ )

*Preuve: conséquence immédiate de  $D' > 0$  et  $\Omega' < 0$*  □

- La courbe en L est **convexe**

*Preuve: la convexité équivaut ici au signe positif de la courbure  $\kappa(\beta)$ , avec  $\kappa(\beta) := (D'\Omega'' - D''\Omega') / (D'^2 + \Omega'^2)^{3/2}$ , et donc à vérifier  $D'\Omega'' - D''\Omega' \geq 0$ .*

*Remarquant qu'ici  $D'(\beta) = -\beta\Omega'(\beta)$ , on déduit  $D'\Omega'' - D''\Omega' = \Omega'^2 > 0$ .* □

- Points extrêmes  $A := (D(0), \Omega(0))$  et  $B := (D(\infty), \Omega(\infty))$  de la courbe en L ( $p_\sharp$ : quasi-solution de norme minimale):

$$\begin{aligned} D(0) &= \|\mathbf{G}p_\sharp - \mathbf{d}\|_{\mathcal{D}}^2, & \Omega(0) &= \|p_\sharp - p_0\|_{\mathcal{D}}^2 \\ D(\infty) &= \|\mathbf{G}p_0 - \mathbf{d}\|_{\mathcal{D}}^2 > D(0) & \Omega(\infty) &= 0 \end{aligned}$$

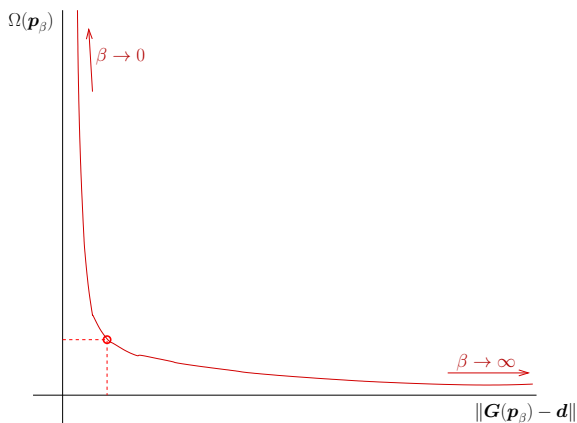
De plus (puisque  $D'(\beta) = -\beta\Omega'(\beta)$ ), les pentes en  $A$  et  $B$  de la courbe en L sont

$$\left. \frac{d\Omega}{dD} \right|_{\beta=0} = -\infty, \quad \left. \frac{d\Omega}{dD} \right|_{\beta=\infty} = 0^-$$

## Régularisation par optimisation: courbe en L

Critères permettant de définir une valeur optimale de  $\beta$  (meilleur compromis):

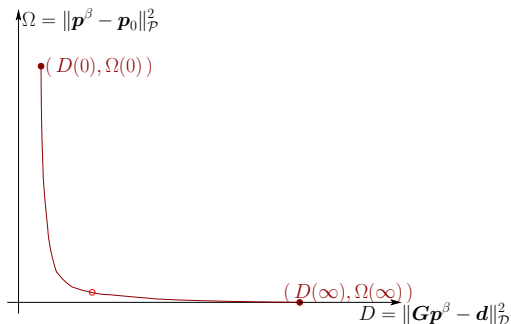
- Point de la courbe en L le plus proche de  $(D, \Omega) = (0, 0)$ , i.e. projeté orthogonal de  $(0, 0)$  sur la courbe en L (convexité)
- Point de la courbe en L de courbure maximale
- ( ... )



## Régularisation par optimisation: interprétation

Interprétation: minimisation de  $\|\mathbf{p} - \mathbf{p}_0\|_{\mathcal{P}}^2$

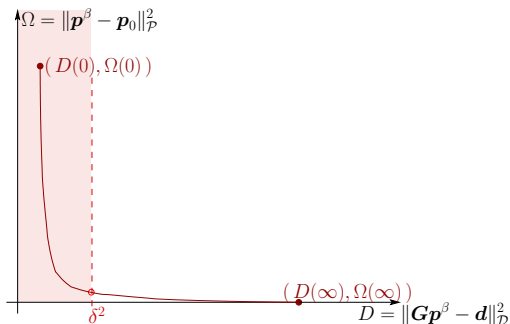
sous la contrainte ("tolérance")  $\|\mathbf{G}\mathbf{p} - \mathbf{d}\|_{\mathcal{D}}^2 \leq \delta^2$



## Régularisation par optimisation: interprétation

Interprétation: minimisation de  $\|\mathbf{p} - \mathbf{p}_0\|_{\mathcal{P}}^2$

sous la contrainte ("tolérance")  $\|\mathbf{G}\mathbf{p} - \mathbf{d}\|_{\mathcal{D}}^2 \leq \delta^2$

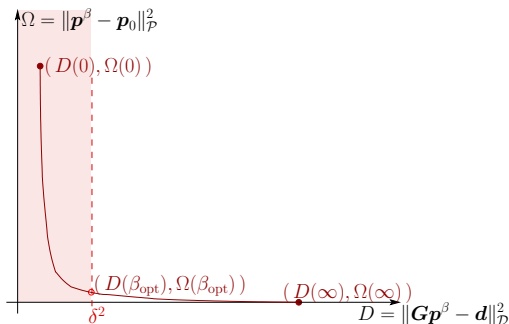




## Régularisation par optimisation: interprétation

Interprétation: minimisation de  $\|\mathbf{p} - \mathbf{p}_0\|_{\mathcal{P}}^2$

sous la contrainte ("tolérance")  $\|\mathbf{G}\mathbf{p} - \mathbf{d}\|_{\mathcal{D}}^2 \leq \delta^2$



Valeur optimale  $\beta_{\text{opt}}$  de  $\beta$  fixée par

$$\|\mathbf{G}\mathbf{p}^\beta - \mathbf{d}\|_{\mathcal{D}}^2 = \delta^2$$

Cette méthode permet de définir une valeur de  $\beta$  au moyen de l'information a priori  $\delta$ .

## 6. Résolution des problèmes linéaires en dimension finie

Systèmes linéaires et moindres carrés linéaires: analyse

Moindres carrés linéaires: méthodes de résolution

Cas des équations linéaires en dimension infinie

## 7. Aperçu de quelques méthodes de minimisation

## 8. Méthodes d'évaluation du gradient

## Moindres carrés linéaires: méthodes de résolution

Problème générique:

$$\min_{p \in \mathcal{P}} \| \mathbf{A}p - \mathbf{b} \|^2$$

(a) Equations normales:

$$\| \mathbf{A}p - \mathbf{b} \|^2 = 2p^* (\mathbf{A}^* \mathbf{A}) p - 2b^* \mathbf{A}p + b^* b \implies (\mathbf{A}^* \mathbf{A})p = \mathbf{A}^* b$$

Inconvénient: dégradation du conditionnement par  $\text{Cond}(\mathbf{A}^* \mathbf{A}) = \text{Cond}(\mathbf{A})^2$

## Moindres carrés linéaires: méthodes de résolution

Problème générique:

$$\min_{p \in \mathcal{P}} \| \mathbf{A}p - \mathbf{b} \|^2$$

(a) Equations normales:

$$\| \mathbf{A}p - \mathbf{b} \|^2 = 2p^* (\mathbf{A}^* \mathbf{A})p - 2\mathbf{b}^* \mathbf{A}p + \mathbf{b}^* \mathbf{b} \implies (\mathbf{A}^* \mathbf{A})p = \mathbf{A}^* \mathbf{b}$$

Inconvénient: dégradation du conditionnement par  $\text{Cond}(\mathbf{A}^* \mathbf{A}) = \text{Cond}(\mathbf{A})^2$

(b) Factorisation QR de la matrice  $\mathbf{A}$  (Matlab:  $[\mathbf{Q}, \mathbf{R}] = \text{qr}(\mathbf{A})$ );

$$\mathbf{A} = \mathbf{Q}\mathbf{R} \quad \text{avec} \quad \mathbf{Q} \in \mathbb{C}^{m,m}, \quad \mathbf{Q}^* \mathbf{Q} = \mathbf{I}_m,$$

$$\mathbf{R} \in \mathbb{C}^{m,n} = \begin{bmatrix} \mathbf{T} & \mathbf{X} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad \begin{array}{l} (\mathbf{T} \in \mathbb{C}^{r,r} \text{ triangulaire sup.}) \\ (\mathbf{X} \in \mathbb{C}^{n-r,r}) \end{array}$$

Alors:

$$\| \mathbf{A}p - \mathbf{b} \|^2 = \| \mathbf{Q}(\mathbf{R}p - \mathbf{Q}^* \mathbf{b}) \|^2 = \| \mathbf{R}p - (\mathbf{Q}^* \mathbf{b})_r \|^2 \implies \mathbf{R}p = (\mathbf{Q}^* \mathbf{b})_r$$

Conditionnement initial préservé:  $\mathbf{Q}$  orthogonale  $\implies \text{Cond}(\mathbf{R}) = \text{Cond}(\mathbf{A})$

## Cas du problème régularisé

La fonction-coût régularisée  $S_\beta(\mathbf{p})$  peut être ramenée au format générique:

$$S_\beta(\mathbf{p}) = \|\mathbf{A}\mathbf{p} - \mathbf{b}\|^2, \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{G} \\ \sqrt{\beta}\mathbf{I} \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{m+n,n}, \quad \mathbf{b} = \begin{Bmatrix} \mathbf{d} \\ \sqrt{\beta}\mathbf{p}_0 \end{Bmatrix} \in \mathbb{C}^{m+n}$$

$\implies$  Minimisation de  $S_\beta(\mathbf{p})$  par factorisation QR de  $\mathbf{A}$ .

## 6. Résolution des problèmes linéaires en dimension finie

Systèmes linéaires et moindres carrés linéaires: analyse

Moindres carrés linéaires: méthodes de résolution

Cas des équations linéaires en dimension infinie

## 7. Aperçu de quelques méthodes de minimisation

## 8. Méthodes d'évaluation du gradient

## La dimension infinie

Cas des opérateurs de carré intégrable:

$$G : L^2(\Omega_1) \rightarrow L^2(\Omega_2)$$

$$d(y) = [Gp](y) := \int_{\Omega_1} k(y, x)p(x) dx$$

$$(k \in L^2(\Omega_1 \times \Omega_2))$$

## La dimension infinie

Cas des opérateurs de carré intégrable:

$$G : L^2(\Omega_1) \rightarrow L^2(\Omega_2)$$

$$d(y) = [Gp](y) := \int_{\Omega_1} k(y, x)p(x) dx$$

$$(k \in L^2(\Omega_1 \times \Omega_2))$$

$G^*G$  et  $GG^*$  sont alors autoadjoints et compacts. Il existe

- (i) Une suite de valeurs singulières complexes  $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$
- (ii) Deux suites orthonormées  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  d'éléments de  $\mathcal{P}$  et  $\mathcal{D}$  resp.

t.q.:  $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = 0$

$$Gv_i = \lambda_i u_i$$

$$G^* u_i = \lambda_i v_i$$

$$G^* G v_i = \lambda_i^2 v_i$$

$$G G^* u_i = \lambda_i^2 u_i$$



## La dimension infinie

Cas des opérateurs de carré intégrable:

$$G : L^2(\Omega_1) \rightarrow L^2(\Omega_2)$$

$$d(y) = [Gp](y) := \int_{\Omega_1} k(y, x)p(x) dx$$

$$(k \in L^2(\Omega_1 \times \Omega_2))$$

$G^*G$  et  $GG^*$  sont alors autoadjoints et compacts. Il existe

- (i) Une suite de valeurs singulières complexes  $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$
- (ii) Deux suites orthonormées  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  d'éléments de  $\mathcal{P}$  et  $\mathcal{D}$  resp.

t.q.:  $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = 0$

$$Gv_i = \lambda_i u_i$$

$$G^* u_i = \lambda_i v_i$$

$$G^* G v_i = \lambda_i^2 v_i$$

$$G G^* u_i = \lambda_i^2 u_i$$

Conditions nécessaires et suffisantes d'existence d'une solution (Picard):

$$d \in \overline{\text{Im}(G)} = (\text{Ker}(G^*))^\perp$$

$$\sum_{n \geq 0} \frac{1}{\lambda_n^2} (d, u_n)_{\mathcal{D}}^2 < \infty$$

Une solution est alors:

$$p = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{\lambda_n} (d, u_n)_{\mathcal{D}} v_n$$

- Le "conditionnement"  $\lambda_1/\lambda_\infty$  est infini.
- $G$  discrétisé a donc un nombre de conditionnement grand:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_1/\lambda_n = +\infty$$

## Exemple (1D): équation de la chaleur rétrograde

$$\begin{aligned}\kappa \partial_{xx} u - \partial_t u &= 0 & (0 \leq t \leq T, 0 \leq x \leq \ell) & \quad \kappa := k/(\rho c) \\ u(0, t) = u(\ell, t) &= 0 & (0 \leq t \leq T) \\ u(x, 0) &= u_0(x) & (0 \leq x \leq \ell)\end{aligned}$$

## Exemple (1D): équation de la chaleur rétrograde

$$\begin{aligned} \kappa \partial_{xx} u - \partial_t u &= 0 & (0 \leq t \leq T, 0 \leq x \leq \ell) & \quad \kappa := k/(\rho c) \\ u(0, t) = u(\ell, t) &= 0 & (0 \leq t \leq T) \\ u(x, 0) &= u_0(x) & (0 \leq x \leq \ell) \end{aligned}$$

Donnée initiale:

$$u_0(x) = \sum_{n \geq 0} a_n \sin \frac{n\pi x}{\ell}, \quad a_n = \frac{2}{\ell} \int_0^\ell u_0(x) \sin \frac{n\pi x}{\ell} dx$$

Température finale:

$$u(x, T) = \sum_{n \geq 0} b_n \sin \frac{n\pi x}{\ell}, \quad b_n = a_n \underbrace{e^{-(n\pi)^2 \kappa T / \ell^2}}_{\lambda_n}$$

## Exemple (1D): équation de la chaleur rétrograde

$$\begin{aligned} \kappa \partial_{xx} u - \partial_t u &= 0 & (0 \leq t \leq T, 0 \leq x \leq \ell) & \quad \kappa := k/(\rho c) \\ u(0, t) = u(\ell, t) &= 0 & (0 \leq t \leq T) \\ u(x, 0) &= u_0(x) & (0 \leq x \leq \ell) \end{aligned}$$

Donnée initiale: 
$$u_0(x) = \sum_{n \geq 0} a_n \sin \frac{n\pi x}{\ell}, \quad a_n = \frac{2}{\ell} \int_0^\ell u_0(x) \sin \frac{n\pi x}{\ell} dx$$

Température finale: 
$$u(x, T) = \sum_{n \geq 0} b_n \sin \frac{n\pi x}{\ell}, \quad b_n = a_n \underbrace{e^{-(n\pi)^2 \kappa T / \ell^2}}_{\lambda_n}$$

- Reconstruction de  $u_0$  connaissant  $u(x, T)$  (inversion explicite):

$$u_0(x) = \sum_{n \geq 0} \lambda_n^{-1} b_n \sin \frac{n\pi x}{\ell} \quad \lambda_n^{-1} = O(e^{Cn^2})!$$

## Exemple (1D): équation de la chaleur rétrograde

$$\begin{aligned} \kappa \partial_{xx} u - \partial_t u &= 0 & (0 \leq t \leq T, 0 \leq x \leq \ell) & \quad \kappa := k/(\rho c) \\ u(0, t) = u(\ell, t) &= 0 & (0 \leq t \leq T) \\ u(x, 0) &= u_0(x) & (0 \leq x \leq \ell) \end{aligned}$$

Donnée initiale: 
$$u_0(x) = \sum_{n \geq 0} a_n \sin \frac{n\pi x}{\ell}, \quad a_n = \frac{2}{\ell} \int_0^\ell u_0(x) \sin \frac{n\pi x}{\ell} dx$$

Température finale: 
$$u(x, T) = \sum_{n \geq 0} b_n \sin \frac{n\pi x}{\ell}, \quad b_n = a_n \underbrace{e^{-(n\pi)^2 \kappa T / \ell^2}}_{\lambda_n}$$

- Reconstruction de  $u_0$  connaissant  $u(x, T)$  (inversion explicite):

$$u_0(x) = \sum_{n \geq 0} \lambda_n^{-1} b_n \sin \frac{n\pi x}{\ell} \quad \lambda_n^{-1} = O(e^{Cn^2})!$$

- Equation intégrale:  $u(\cdot, T) = \mathcal{K}u_0$ , soit

$$u(x, T) = \int_0^\ell K(x, y) u_0(y) dy, \quad K(x, y) := \sum_{n=0} \lambda_n \sin \frac{n\pi x}{\ell} \sin \frac{n\pi y}{\ell}$$

Système singulier de  $\mathcal{K}$ :  $(u_n, v_n, \lambda_n)$  avec  $u_n(x) = v_n(x) = \sin \frac{n\pi x}{\ell}$

## 6. Résolution des problèmes linéaires en dimension finie

Systèmes linéaires et moindres carrés linéaires: analyse

Moindres carrés linéaires: méthodes de résolution

Cas des équations linéaires en dimension infinie

## 7. Aperçu de quelques méthodes de minimisation

Rappels sur la dérivation en dimension finie

Généralités sur l'optimisation

Fonction-coût différentiable, sans contraintes

Fonction-coût différentiable, avec contraintes

Fonctions-coût non différentiables

Méthodes stochastiques, algorithmes génétiques

## 8. Méthodes d'évaluation du gradient

Dérivation numérique

Dérivation analytique directe

Méthode de l'état adjoint 1: cas linéaire discrétisé

Méthode de l'état adjoint 2: cas linéaire continu

Méthode de l'état adjoint 3: cas incrémental discrétisé

## 6. Résolution des problèmes linéaires en dimension finie

## 7. Aperçu de quelques méthodes de minimisation

Rappels sur la dérivation en dimension finie

Généralités sur l'optimisation

Fonction-coût différentiable, sans contraintes

Fonction-coût différentiable, avec contraintes

Fonctions-coût non différentiables

Méthodes stochastiques, algorithmes génétiques

## 8. Méthodes d'évaluation du gradient

## Rappels sur la dérivation en dimension finie

On considère des fonctions  $\mathcal{J} : \mathbf{p} \in \mathcal{P} \subset \mathbb{R}^n \mapsto \mathcal{J}(\mathbf{p}) \in \mathbb{R}$  (“fonctions-coût”).

### Definition (dérivée directionnelle)

La dérivée de la fonction  $\mathcal{J} : \mathcal{P} \rightarrow \mathbb{R}$  en  $\mathbf{p}$  et dans la direction  $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^n$ , notée  $\mathcal{J}'(\mathbf{p}; \mathbf{q})$ , est définie, si la limite existe, par

$$\mathcal{J}'(\mathbf{p}; \mathbf{q}) := \lim_{h \rightarrow 0} D_h \mathcal{J}(\mathbf{p}; \mathbf{q}), \quad D_h \mathcal{J}(\mathbf{p}; \mathbf{q}) := \frac{1}{h} [\mathcal{J}(\mathbf{p} + h\mathbf{q}) - \mathcal{J}(\mathbf{p})]$$



## Rappels sur la dérivation en dimension finie

On considère des fonctions  $\mathcal{J} : \mathcal{P} \subset \mathbb{R}^n \mapsto \mathcal{J}(\mathbf{p}) \in \mathbb{R}$  (“fonctions-coût”).

### Definition (dérivée directionnelle)

La dérivée de la fonction  $\mathcal{J} : \mathcal{P} \rightarrow \mathbb{R}$  en  $\mathbf{p}$  et dans la direction  $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^n$ , notée  $\mathcal{J}'(\mathbf{p}; \mathbf{q})$ , est définie, si la limite existe, par

$$\mathcal{J}'(\mathbf{p}; \mathbf{q}) := \lim_{h \rightarrow 0} D_h \mathcal{J}(\mathbf{p}; \mathbf{q}), \quad D_h \mathcal{J}(\mathbf{p}; \mathbf{q}) := \frac{1}{h} [\mathcal{J}(\mathbf{p} + h\mathbf{q}) - \mathcal{J}(\mathbf{p})]$$

De plus:

- Si  $\mathbf{q}$  est unitaire ( $\|\mathbf{q}\| = 1$ ),  $\mathcal{J}'(\mathbf{p}; \mathbf{q})$  est appelé *dérivée directionnelle* de  $\mathcal{J}$  en  $\mathbf{p}$  dans la direction  $\mathbf{q}$ .
- La dérivée partielle  $\partial \mathcal{J} / \partial p_k$  de  $\mathcal{J}$  est alors par définition égale à la dérivée directionnelle  $\mathcal{J}'(\mathbf{p}; \mathbf{e}_k)$ .
- La fonction  $\mathcal{J}$  est dite *dérivable au sens de Gâteaux* en  $\mathbf{p}$  si  $\mathcal{J}'(\mathbf{p}; \mathbf{q})$  (i) existe pour tout  $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^n$  et (ii) dépend linéairement de  $\mathbf{q}$ .

## Rappels sur la dérivation en dimension finie

### Definition (dérivabilité)

La fonction  $\mathcal{J}$  est dérivable en  $\mathbf{p}$  s'il existe une forme linéaire  $\mathcal{J}'(\mathbf{p}) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\mathbf{q} \mapsto \mathcal{J}'(\mathbf{p})\mathbf{q}$  (appelée dérivée, différentielle ou application linéaire tangente) telle que

$$\mathcal{J}(\mathbf{p} + \mathbf{q}) = \mathcal{J}(\mathbf{p}) + \mathcal{J}'(\mathbf{p})\mathbf{q} + o(\|\mathbf{q}\|)$$

## Rappels sur la dérivation en dimension finie

### Definition (dérivabilité)

La fonction  $\mathcal{J}$  est dérivable en  $\mathbf{p}$  s'il existe une forme linéaire  $\mathcal{J}'(\mathbf{p}) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\mathbf{q} \mapsto \mathcal{J}'(\mathbf{p})\mathbf{q}$  (appelée dérivée, différentielle ou application linéaire tangente) telle que

$$\mathcal{J}(\mathbf{p} + \mathbf{q}) = \mathcal{J}(\mathbf{p}) + \mathcal{J}'(\mathbf{p})\mathbf{q} + o(\|\mathbf{q}\|)$$

### Definition (gradient)

L'action de la dérivée  $\mathcal{J}'(\mathbf{p})$  est représentable comme produit scalaire par un "vecteur ligne" de  $\mathbb{R}^{1,n}$ , appelé gradient de  $\mathcal{J}$  en  $\mathbf{p}$  et souvent noté  $\nabla \mathcal{J}(\mathbf{p})$ . En notation matricielle, on a

$$\nabla \mathcal{J}(\mathbf{p}) = \sum_{k=1}^n \frac{\partial \mathcal{J}}{\partial p_k}(\mathbf{p}) \mathbf{e}_k^T = \sum_{k=1}^n \mathcal{J}'(\mathbf{p}; \mathbf{e}_k) \mathbf{e}_k^T,$$

et donc

$$\mathcal{J}'(\mathbf{p}; \mathbf{q}) = \nabla \mathcal{J}(\mathbf{p})\mathbf{q}, \quad \mathcal{J}(\mathbf{p} + \mathbf{q}) = \mathcal{J}(\mathbf{p}) + \nabla \mathcal{J}(\mathbf{p})\mathbf{q} + o(\|\mathbf{q}\|).$$

Ces définitions s'étendent à une fonction  $\mathbf{J} : \mathcal{P} \rightarrow \mathbb{R}^m$  à valeurs vectorielles.

## Rappels sur la dérivation en dimension finie

### Definition (dérivée seconde, hessien)

- Une fonction  $\mathcal{J} : \mathcal{P} \rightarrow \mathbb{R}$  est deux fois différentiable en  $\mathbf{p}$  si sa dérivée  $\mathcal{J}'$  est définie dans un voisinage de  $\mathbf{p}$  et différentiable en  $\mathbf{p}$ . Cela signifie qu'il existe une forme bilinéaire  $\mathcal{J}''(\mathbf{p}) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$  telle que

$$\mathcal{J}(\mathbf{p} + \mathbf{q}) = \mathcal{J}(\mathbf{p}) + \mathcal{J}'(\mathbf{p})\mathbf{q} + \frac{1}{2}\mathcal{J}''(\mathbf{p})(\mathbf{q}, \mathbf{q}) + o(\|\mathbf{q}\|^2)$$

## Rappels sur la dérivation en dimension finie

### Definition (dérivée seconde, hessien)

- Une fonction  $\mathcal{J} : \mathcal{P} \rightarrow \mathbb{R}$  est deux fois différentiable en  $\mathbf{p}$  si sa dérivée  $\mathcal{J}'$  est définie dans un voisinage de  $\mathbf{p}$  et différentiable en  $\mathbf{p}$ . Cela signifie qu'il existe une forme bilinéaire  $\mathcal{J}''(\mathbf{p}) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$  telle que

$$\mathcal{J}(\mathbf{p} + \mathbf{q}) = \mathcal{J}(\mathbf{p}) + \mathcal{J}'(\mathbf{p})\mathbf{q} + \frac{1}{2}\mathcal{J}''(\mathbf{p})(\mathbf{q}, \mathbf{q}) + o(\|\mathbf{q}\|^2)$$

- La forme bilinéaire  $\mathbf{q} \mapsto \mathcal{J}''(\mathbf{p})(\mathbf{q}, \mathbf{q})$  est représentable par une matrice hessienne  $\nabla^2 \mathcal{J}(\mathbf{p}) \in \mathbb{R}^{n,n}$ , telle que

$$\mathcal{J}''(\mathbf{p})(\mathbf{q}, \mathbf{q}) = \mathbf{q}^T [\nabla^2 \mathcal{J}(\mathbf{p})] \mathbf{q}$$

## Rappels sur la dérivation en dimension finie

### Definition (dérivée seconde, hessien)

- Une fonction  $\mathcal{J} : \mathcal{P} \rightarrow \mathbb{R}$  est deux fois différentiable en  $\mathbf{p}$  si sa dérivée  $\mathcal{J}'$  est définie dans un voisinage de  $\mathbf{p}$  et différentiable en  $\mathbf{p}$ . Cela signifie qu'il existe une forme bilinéaire  $\mathcal{J}''(\mathbf{p}) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$  telle que

$$\mathcal{J}(\mathbf{p} + \mathbf{q}) = \mathcal{J}(\mathbf{p}) + \mathcal{J}'(\mathbf{p})\mathbf{q} + \frac{1}{2}\mathcal{J}''(\mathbf{p})(\mathbf{q}, \mathbf{q}) + o(\|\mathbf{q}\|^2)$$

- La forme bilinéaire  $\mathbf{q} \mapsto \mathcal{J}''(\mathbf{p})(\mathbf{q}, \mathbf{q})$  est représentable par une matrice hessienne  $\nabla^2 \mathcal{J}(\mathbf{p}) \in \mathbb{R}^{n,n}$ , telle que

$$\mathcal{J}''(\mathbf{p})(\mathbf{q}, \mathbf{q}) = \mathbf{q}^T [\nabla^2 \mathcal{J}(\mathbf{p})] \mathbf{q}$$

La dérivée partielle seconde  $\partial^2 \mathcal{J} / \partial p_k \partial p_\ell$  de  $\mathcal{J}$  est donnée par  $\mathcal{J}''(\mathbf{p})(\mathbf{e}_k, \mathbf{e}_\ell)$ .

- Dans un système de coordonnées cartésiennes orthonormées, la matrice hessienne est donnée par

$$\nabla^2 \mathcal{J}(\mathbf{p}) = \sum_{1 \leq k, \ell \leq n} \frac{\partial^2 \mathcal{J}}{\partial p_k \partial p_\ell}(\mathbf{p}) \mathbf{e}_k \mathbf{e}_\ell^T = \sum_{1 \leq k, \ell \leq n} \mathcal{J}''(\mathbf{p})(\mathbf{e}_k, \mathbf{e}_\ell) \mathbf{e}_k \mathbf{e}_\ell^T.$$

## 6. Résolution des problèmes linéaires en dimension finie

## 7. Aperçu de quelques méthodes de minimisation

Rappels sur la dérivation en dimension finie

**Généralités sur l'optimisation**

Fonction-coût différentiable, sans contraintes

Fonction-coût différentiable, avec contraintes

Fonctions-coût non différentiables

Méthodes stochastiques, algorithmes génétiques

## 8. Méthodes d'évaluation du gradient

# Généralités sur l'optimisation

## Definition (minimum local ou global)

- (a) On dit que  $\mathbf{p}^* \in \mathcal{P}$  est minimum local de  $\mathcal{J}$  s'il existe un voisinage  $V \subset \mathcal{P}$  de  $\mathbf{p}^*$  tel que

$$\forall \mathbf{p} \in V, \mathcal{J}(\mathbf{p}^*) \leq \mathcal{J}(\mathbf{p}) \quad (1)$$

Un tel minimum local est dit strict si l'inégalité est stricte.

- (b)  $\mathbf{p}^* \in \mathcal{P}$  est minimum global (ou, simplement, minimum) de  $\mathcal{J}$  sur  $\mathcal{P}$  si l'inégalité est vérifiée pour  $V = \mathcal{P}$ .



# Généralités sur l'optimisation

## Definition (minimum local ou global)

- (a) On dit que  $\mathbf{p}^* \in \mathcal{P}$  est minimum local de  $\mathcal{J}$  s'il existe un voisinage  $V \subset \mathcal{P}$  de  $\mathbf{p}^*$  tel que

$$\forall \mathbf{p} \in V, \mathcal{J}(\mathbf{p}^*) \leq \mathcal{J}(\mathbf{p}) \quad (1)$$

Un tel minimum local est dit strict si l'inégalité est stricte.

- (b)  $\mathbf{p}^* \in \mathcal{P}$  est minimum global (ou, simplement, minimum) de  $\mathcal{J}$  sur  $\mathcal{P}$  si l'inégalité est vérifiée pour  $V = \mathcal{P}$ .

## Theorème

On suppose  $\mathcal{J}$  continue et  $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^n$  fermé. De plus, soit (i)  $\mathcal{P}$  est borné, soit (ii)  $\mathcal{P}$  est non borné et  $\mathcal{J}$  est coercive, c'est-à-dire vérifie  $\lim_{\|\mathbf{p}\| \rightarrow \infty} \mathcal{J}(\mathbf{p}) = +\infty$ . Alors  $\mathcal{J}$  possède un minimum sur  $\mathcal{P}$ .

## Généralités sur l'optimisation

### Definition (ensemble et fonction convexes)

(a) L'ensemble  $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^n$  est dit convexe si, quels que soient  $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2$  dans  $\mathcal{P}$ , le segment  $[\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2] := \{t\mathbf{p}_1 + (1-t)\mathbf{p}_2, 0 \leq t \leq 1\}$  est inclus dans  $\mathcal{P}$ .

(b) La fonction  $\mathcal{J}$  est dite convexe si

$$\forall (\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2) \in \mathcal{P} \times \mathcal{P}, \forall t \in [0, 1], \quad \mathcal{J}(t\mathbf{p}_1 + (1-t)\mathbf{p}_2) \leq t\mathcal{J}(\mathbf{p}_1) + (1-t)\mathcal{J}(\mathbf{p}_2).$$

(c) Si de plus  $\mathbf{p}_1 \neq \mathbf{p}_2$  et l'inégalité ci-dessus est stricte pour tout  $t \in ]0, 1[$ ,  $\mathcal{J}$  est dite strictement convexe.

(d) Si  $\mathcal{P}$  est convexe et  $\mathcal{J}$  différentiable sur  $\mathcal{P}$ , alors  $\mathcal{J}$  est convexe si et seulement si

$$\forall (\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2) \in \mathcal{P} \times \mathcal{P}, \quad \mathcal{J}'(\mathbf{p}_1)[\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1] \leq \mathcal{J}(\mathbf{p}_2) - \mathcal{J}(\mathbf{p}_1)$$

## Généralités sur l'optimisation

L'importance de la notion de convexité en optimisation tient notamment à l'existence de résultats généraux bien plus forts que le théorème précédent:

### Theorème

Supposons  $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^n$  et  $\mathcal{J} : \mathcal{P} \rightarrow \mathbb{R}$  convexes. Alors:

- (i) *Tout minimum local de  $\mathcal{J}$  sur  $\mathcal{P}$  est un minimum global;*
- (ii) *Si  $\mathcal{J}$  est strictement convexe, elle admet au plus un minimum global.*

## 6. Résolution des problèmes linéaires en dimension finie

## 7. Aperçu de quelques méthodes de minimisation

Rappels sur la dérivation en dimension finie

Généralités sur l'optimisation

**Fonction-coût différentiable, sans contraintes**

Fonction-coût différentiable, avec contraintes

Fonctions-coût non différentiables

Méthodes stochastiques, algorithmes génétiques

## 8. Méthodes d'évaluation du gradient

## Fonction-coût différentiable, sans contraintes

- Cas de figure fréquent: distances mesure-calcul en norme quadratique avec terme régularisant différentiable:

$$\mathcal{J}(\mathbf{p}) = \frac{1}{2} \{ \mathbf{d}^{\text{obs}} - \mathbf{d}(\mathbf{p}) \}^T [\mathbf{W}^{-1}] \{ \mathbf{d}^{\text{obs}} - \mathbf{d}(\mathbf{p}) \} + \Omega(\mathbf{p})$$

englobe

- les fonctions-coût pour l'inversion régularisée (section 10).
- l'inversion "gaussienne" non-linéaire (section 13).
- l'erreur en relation de comportement (section 5).

## Fonction-coût différentiable, sans contraintes

- Cas de figure fréquent: distances mesure-calcul en norme quadratique avec terme régularisant différentiable:

$$\mathcal{J}(\mathbf{p}) = \frac{1}{2} \{ \mathbf{d}^{\text{obs}} - \mathbf{d}(\mathbf{p}) \}^T [\mathbf{W}^{-1}] \{ \mathbf{d}^{\text{obs}} - \mathbf{d}(\mathbf{p}) \} + \Omega(\mathbf{p})$$

englobe

- les fonctions-coût pour l'inversion régularisée (section 10).
  - l'inversion "gaussienne" non-linéaire (section 13).
  - l'erreur en relation de comportement (section 5).
- Dépendance **implicite** de  $\mathcal{J}$  en  $\mathbf{p}$  à travers la solution d'un problème direct:

$$\mathcal{J}(\mathbf{p}) = J(\mathbf{p}, \mathbf{d}(\mathbf{p})) \quad \text{avec} \quad \mathbf{d}(\mathbf{p}) \leftarrow \mathcal{G}(\mathbf{p}, \mathbf{d}) = 0$$

## Conditions d'optimalité, structure des algorithmes

### Theorème (conditions d'optimalité)

Supposons  $J$  deux fois différentiable sur  $\mathcal{P}$ . Les conditions nécessaires pour que  $\mathbf{p}^*$  soit minimum local de  $\mathcal{J}$  sont:

$$\mathcal{J}'(\mathbf{p}^*) = \mathbf{0} \quad (\text{condition d'optimalité du premier ordre})$$

$$\forall \mathbf{q} \in \mathbb{R}^n, \mathcal{J}''(\mathbf{p}^*)(\mathbf{q}, \mathbf{q}) \geq 0 \quad (\text{condition d'optimalité du second ordre})$$

## Conditions d'optimalité, structure des algorithmes

### Theorème (conditions d'optimalité)

Supposons  $J$  deux fois différentiable sur  $\mathcal{P}$ . Les conditions nécessaires pour que  $\mathbf{p}^*$  soit minimum local de  $\mathcal{J}$  sont:

$$\mathcal{J}'(\mathbf{p}^*) = \mathbf{0} \quad (\text{condition d'optimalité du premier ordre})$$

$$\forall \mathbf{q} \in \mathbb{R}^n, \mathcal{J}''(\mathbf{p}^*)(\mathbf{q}, \mathbf{q}) \geq 0 \quad (\text{condition d'optimalité du second ordre})$$

- Structure des méthodes classiques de minimisation avec gradient:
  - Suite de directions de descente  $\mathbf{s}_k$  construite à partir de  $\mathcal{J}'(\mathbf{p}_k)$ ,
  - Minimisation unidimensionnelle et actualisation pour chaque direction de descente:

$$t_k := \arg \min_{t \geq 0} \mathcal{J}(\mathbf{p}_k + \mathbf{s}_k t), \quad \mathbf{p}_{k+1} = \mathbf{p}_k + \mathbf{s}_k t_k$$

- Ces méthodes diffèrent principalement selon le procédé de choix de  $\mathbf{s}_k$

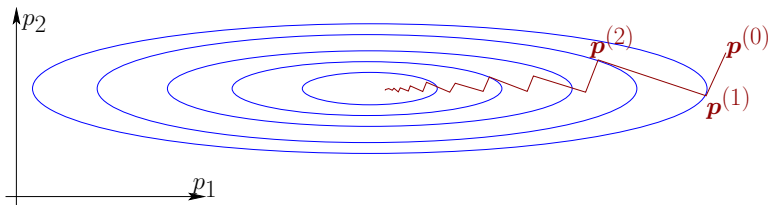


## Méthode de plus grande pente (steepest descent)

- Consiste à poser  $\mathbf{s}_k = -\mathcal{J}'(\mathbf{p}_k)$  à chaque itération (plus grande pente au point de départ  $\mathbf{p}_k$  de l'itération).

## Méthode de plus grande pente (steepest descent)

- Consiste à poser  $\mathbf{s}_k = -\mathcal{J}'(\mathbf{p}_k)$  à **chaque itération** (plus grande pente au point de départ  $\mathbf{p}_k$  de l'itération).
- La méthode de plus grande pente n'est généralement pas utilisée (convergence trop lente)



## Gradient conjugué

Cas de fonctions-coût quadratiques:  $\mathcal{J}(\mathbf{p}) = \frac{1}{2}\mathbf{p}^T \mathbf{A}\mathbf{p} + \mathbf{a}^T \mathbf{p} + b$  (hessien  $\mathbf{A}$  défini positif)

## Gradient conjugué

Cas de fonctions-coût quadratiques:  $\mathcal{J}(\mathbf{p}) = \frac{1}{2}\mathbf{p}^T \mathbf{A}\mathbf{p} + \mathbf{a}^T \mathbf{p} + b$  (hessien  $\mathbf{A}$  défini positif)

**Algorithme:**

$$\mathbf{s}_0 = -\mathbf{g}_0$$

$$\mathbf{s}_k \mathbf{A} \mathbf{s}_\ell = 0 \quad (1 \leq \ell \leq k-1)$$

$$\implies \mathbf{s}_k = -\mathbf{g}_k + \sum_{\ell=0}^{k-1} \beta_\ell \mathbf{s}_\ell$$

$$\beta_\ell = 0 \quad (\ell < k-1)$$

$$\beta_{k-1} = \frac{\mathbf{g}_k^T \mathbf{g}_k}{\mathbf{g}_{k-1}^T \mathbf{g}_{k-1}}$$

(avec  $\mathbf{g}_k = \mathcal{J}'(\mathbf{p}_k) = \mathbf{A}\mathbf{p}_k + \mathbf{a}$ : gradient)

## Gradient conjugué

Cas de fonctions-coût quadratiques:  $\mathcal{J}(\mathbf{p}) = \frac{1}{2}\mathbf{p}^T \mathbf{A} \mathbf{p} + \mathbf{a}^T \mathbf{p} + b$  (hessien  $\mathbf{A}$  défini positif)

**Algorithme:**

$$\mathbf{s}_0 = -\mathbf{g}_0$$

$$\mathbf{s}_k \mathbf{A} \mathbf{s}_\ell = 0 \quad (1 \leq \ell \leq k-1)$$

$$\implies \mathbf{s}_k = -\mathbf{g}_k + \sum_{\ell=0}^{k-1} \beta_\ell \mathbf{s}_\ell$$

$$\beta_\ell = 0 \quad (\ell < k-1)$$

$$\beta_{k-1} = \frac{\mathbf{g}_k^T \mathbf{g}_k}{\mathbf{g}_{k-1}^T \mathbf{g}_{k-1}}$$

(avec  $\mathbf{g}_k = \mathcal{J}'(\mathbf{p}_k) = \mathbf{A} \mathbf{p}_k + \mathbf{a}$ : gradient)

### Théorème

Si  $\mathcal{J}$  quadratique, convergence en  $k \leq n$  itérations, et

$$\mathbf{s}^{(i)T} \mathbf{A} \mathbf{s}^{(j)} = 0 \quad (j > i)$$

$$\mathbf{g}^{(i)T} \mathbf{g}^{(j)} = 0 \quad (j > i)$$

$$\mathbf{s}^{(i)T} \mathbf{g}^{(i)} = -\mathbf{g}^{(i)T} \mathbf{g}^{(i)}$$

Le line search est exact:

$$t_k = \arg \min_{t \geq 0} \mathcal{J}(\mathbf{p}_k + \mathbf{s}_k t) = -\frac{\mathbf{s}_k^T \mathbf{g}_k}{\mathbf{s}_k^T \mathbf{A} \mathbf{s}_k}$$

## Gradient conjugué

Cas de fonctions-coût quadratiques:  $\mathcal{J}(\mathbf{p}) = \frac{1}{2}\mathbf{p}^T \mathbf{A} \mathbf{p} + \mathbf{a}^T \mathbf{p} + b$  (hessien  $\mathbf{A}$  défini positif)

**Algorithme:**

$$\mathbf{s}_0 = -\mathbf{g}_0$$

$$\mathbf{s}_k \mathbf{A} \mathbf{s}_\ell = 0 \quad (1 \leq \ell \leq k-1)$$

$$\implies \mathbf{s}_k = -\mathbf{g}_k + \sum_{\ell=0}^{k-1} \beta_\ell \mathbf{s}_\ell$$

$$\beta_\ell = 0 \quad (\ell < k-1)$$

$$\beta_{k-1} = \frac{\mathbf{g}_k^T \mathbf{g}_k}{\mathbf{g}_{k-1}^T \mathbf{g}_{k-1}}$$

(avec  $\mathbf{g}_k = \mathcal{J}'(\mathbf{p}_k) = \mathbf{A} \mathbf{p}_k + \mathbf{a}$ : gradient)

### Theorème

Si  $\mathcal{J}$  quadratique, convergence en  $k \leq n$  itérations, et

$$\mathbf{s}^{(i)T} \mathbf{A} \mathbf{s}^{(j)} = 0 \quad (j > i)$$

$$\mathbf{g}^{(i)T} \mathbf{g}^{(j)} = 0 \quad (j > i)$$

$$\mathbf{s}^{(i)T} \mathbf{g}^{(i)} = -\mathbf{g}^{(i)T} \mathbf{g}^{(i)}$$

Le line search est exact:

$$t_k = \arg \min_{t \geq 0} \mathcal{J}(\mathbf{p}_k + \mathbf{s}_k t) = -\frac{\mathbf{s}_k^T \mathbf{g}_k}{\mathbf{s}_k^T \mathbf{A} \mathbf{s}_k}$$

Cette méthode d'actualisation de  $\mathbf{s}_k$  (et donc l'algorithme) reste applicable à toute  $\mathcal{J}(\mathbf{p})$  non quadratique, différentiable

## Méthodes de type Newton

- Principe: déterminer  $p^*$  par résolution de

$$\mathcal{J}'(p) = 0$$

## Méthodes de type Newton

- Principe: déterminer  $\mathbf{p}^*$  par résolution de

$$\mathcal{J}'(\mathbf{p}) = \mathbf{0}$$

- Méthode de Newton-Raphson pour  $\mathbf{F}(\mathbf{p}) = \mathbf{0}$ : suite de résolutions de systèmes linéaires  $\mathbf{F}'(\mathbf{p})\Delta\mathbf{p} + \mathbf{F}(\mathbf{p}) = \mathbf{0}$  obtenus par développements de Taylor au premier ordre
- Pour un problème d'optimisation, cela donne

$$\mathcal{J}''(\mathbf{p}_k)[\mathbf{p}_{k+1} - \mathbf{p}_k] = -\mathcal{J}'(\mathbf{p}_k)$$



## Méthodes de type Newton

- Principe: déterminer  $\mathbf{p}^*$  par résolution de

$$\mathcal{J}'(\mathbf{p}) = \mathbf{0}$$

- Méthode de Newton-Raphson pour  $\mathbf{F}(\mathbf{p}) = \mathbf{0}$ : suite de résolutions de systèmes linéaires  $\mathbf{F}'(\mathbf{p})\Delta\mathbf{p} + \mathbf{F}(\mathbf{p}) = \mathbf{0}$  obtenus par développements de Taylor au premier ordre
- Pour un problème d'optimisation, cela donne

$$\mathcal{J}''(\mathbf{p}_k)[\mathbf{p}_{k+1} - \mathbf{p}_k] = -\mathcal{J}'(\mathbf{p}_k)$$

- Demande a priori le calcul du hessien  $\mathcal{J}''(\mathbf{p}_k)$ , délicat et/ou coûteux.
- En pratique, algorithmes reposant sur ce principe mais ne nécessitant que le calcul de  $\mathcal{J}'(\mathbf{p}_k)$ .

## Quasi-Newton

Principe: méthode de Newton pour  $\mathcal{J}'(\mathbf{p}) = \mathbf{0}$   
utilisant une approximation du Hessien (inverse)

$\mathbf{H} = [\mathcal{J}'' ]^{-1}$  par la *formule BFGS*:

$$\mathbf{H}_{k+1} = \mathbf{H}_k + \frac{1}{\delta_k^\top \gamma_k} \left[ \left( 1 + \frac{\gamma_k^\top \mathbf{H}_k \gamma_k}{\delta_k^\top \gamma_k} \right) \delta_k \delta_k^\top - \delta_k \gamma_k^\top \mathbf{H}_k - \mathbf{H}_k \gamma_k \delta_k^\top \right]$$

avec  $\delta_k := \mathbf{p}_{k+1} - \mathbf{p}_k$ ,  $\gamma_k := \mathbf{g}_{k+1} - \mathbf{g}_k$ .

## Quasi-Newton

Principe: méthode de Newton pour  $\mathcal{J}'(\mathbf{p}) = \mathbf{0}$   
utilisant une approximation du Hessien (inverse)

$\mathbf{H} = [\mathcal{J}'' ]^{-1}$  par la *formule BFGS*:

$$\mathbf{H}_{k+1} = \mathbf{H}_k + \frac{1}{\delta_k^T \gamma_k} \left[ \left( 1 + \frac{\gamma_k^T \mathbf{H}_k \gamma_k}{\delta_k^T \gamma_k} \right) \delta_k \delta_k^T - \delta_k \gamma_k^T \mathbf{H}_k - \mathbf{H}_k \gamma_k \delta_k^T \right]$$

avec  $\delta_k := \mathbf{p}_{k+1} - \mathbf{p}_k$ ,  $\gamma_k := \mathbf{g}_{k+1} - \mathbf{g}_k$ .

### Theorème

Si  $\mathcal{J}$  quadratique, convergence en  $k \leq n$   
itérations, et

$$\mathbf{H}_k = \mathbf{A}^{-1} \quad (\text{si } k = n)$$

$$\mathbf{s}_i^T \mathbf{A} \mathbf{s}_j = 0 \quad (j > i)$$

$$\mathbf{H}_i \gamma_i = \delta_i$$

## Quasi-Newton

Principe: méthode de Newton pour  $\mathcal{J}'(\mathbf{p}) = \mathbf{0}$  utilisant une approximation du Hessien (inverse)  $\mathbf{H} = [\mathcal{J}'' ]^{-1}$  par la *formule BFGS*:

$$\mathbf{H}_{k+1} = \mathbf{H}_k + \frac{1}{\delta_k^T \gamma_k} \left[ \left( 1 + \frac{\gamma_k^T \mathbf{H}_k \gamma_k}{\delta_k^T \gamma_k} \right) \delta_k \delta_k^T - \delta_k \gamma_k^T \mathbf{H}_k - \mathbf{H}_k \gamma_k \delta_k^T \right]$$

avec  $\delta_k := \mathbf{p}_{k+1} - \mathbf{p}_k$ ,  $\gamma_k := \mathbf{g}_{k+1} - \mathbf{g}_k$ .

### Theorème

Si  $\mathcal{J}$  quadratique, convergence en  $k \leq n$  itérations, et

$$\mathbf{H}_k = \mathbf{A}^{-1} \quad (\text{si } k = n)$$

$$\mathbf{s}_i^T \mathbf{A} \mathbf{s}_j = 0 \quad (j > i)$$

$$\mathbf{H}_i \gamma_i = \delta_i$$

### Algorithme:

$$\mathbf{H}_0, \mathbf{p}_0, \mathbf{g}_0 = \mathcal{J}'(\mathbf{p}_0)$$

(initialisation)

$$\mathbf{s}_k = -\mathbf{H}_k \mathbf{g}_k$$

$$\mathbf{p}_{k+1} = \mathbf{p}_k + t_k \mathbf{s}_k$$

(line search)

Convergence ?

$$\mathbf{g}_{k+1} = \mathcal{J}'(\mathbf{p}_{k+1})$$

$$\delta_k = t_k \mathbf{s}_k$$

$$\gamma_k = \mathbf{g}_{k+1} - \mathbf{g}_k$$

$$\mathbf{H}_{k+1} = \dots \text{ (BFGS)}$$

Résistance à *line-search* imparfait.

## Moindres carrés non-linéaires

**Gauss-Newton**: pour les fonctionnelles de moindres carrés:

$$\mathcal{J}(\mathbf{p}) = \frac{1}{2} \sum_{m=1}^p r_m^2(\mathbf{p}) = \frac{1}{2} \mathbf{r}^\top(\mathbf{p}) \mathbf{r}(\mathbf{p})$$

Principe: méthode de Newton pour  $\mathcal{J}'(\mathbf{p}) = \mathbf{0}$  utilisant une approximation (raisonnable au voisinage de l'optimum  $\mathbf{p}^*$ ) du Hessien  $\mathcal{J}''(\mathbf{p})$  par

$$\begin{aligned} \mathcal{J}''(\mathbf{p}) &= (\mathbf{r}')^\top \mathbf{r}' + \mathbf{r}^\top \mathbf{r}'' \\ &\approx (\mathbf{r}')^\top \mathbf{r}' =: \mathbf{G}^{GN} \end{aligned}$$

Direction de descente  $\mathbf{s}_k^{GN}$  obtenue en résolvant

$$\mathbf{G}^{GN} \mathbf{s}_k^{GN} + (\mathbf{r}')^\top \mathbf{r} = \mathbf{0}$$

## Moindres carrés non-linéaires

**Gauss-Newton:** pour les fonctionnelles de moindres carrés:

$$\mathcal{J}(\mathbf{p}) = \frac{1}{2} \sum_{m=1}^p r_m^2(\mathbf{p}) = \frac{1}{2} \mathbf{r}^T(\mathbf{p}) \mathbf{r}(\mathbf{p})$$

Principe: méthode de Newton pour  $\mathcal{J}'(\mathbf{p}) = \mathbf{0}$  utilisant une approximation (raisonnable au voisinage de l'optimum  $\mathbf{p}^*$ ) du Hessien  $\mathcal{J}''(\mathbf{p})$  par

$$\begin{aligned} \mathcal{J}''(\mathbf{p}) &= (\mathbf{r}')^T \mathbf{r}' + \mathbf{r}^T \mathbf{r}'' \\ &\approx (\mathbf{r}')^T \mathbf{r}' =: \mathbf{G}^{GN} \end{aligned}$$

Direction de descente  $\mathbf{s}_k^{GN}$  obtenue en résolvant

$$\mathbf{G}^{GN} \mathbf{s}_k^{GN} + (\mathbf{r}')^T \mathbf{r} = \mathbf{0}$$

**Marquardt-Levenberg:** modification de Gauss-Newton telle que  $\mathbf{s}_k^{ML}$  est obtenue en résolvant

$$[\mathbf{G}^{GN} + \lambda_k \mathbf{I}] \mathbf{s}_k^{ML} + (\mathbf{r}')^T \mathbf{r} = \mathbf{0}$$

- Le paramètre  $\lambda_k$  sert à lutter contre le mauvais conditionnement éventuel de  $\mathbf{G}^{GN}$ ;
- Il évolue au fil de l'algorithme.

## Moindres carrés non-linéaires

**Gauss-Newton:** pour les fonctionnelles de moindres carrés:

$$\mathcal{J}(\mathbf{p}) = \frac{1}{2} \sum_{m=1}^p r_m^2(\mathbf{p}) = \frac{1}{2} \mathbf{r}^T(\mathbf{p}) \mathbf{r}(\mathbf{p})$$

Principe: méthode de Newton pour  $\mathcal{J}'(\mathbf{p}) = \mathbf{0}$  utilisant une approximation (raisonnable au voisinage de l'optimum  $\mathbf{p}^*$ ) du Hessien  $\mathcal{J}''(\mathbf{p})$  par

$$\begin{aligned} \mathcal{J}''(\mathbf{p}) &= (\mathbf{r}')^T \mathbf{r}' + \mathbf{r}^T \mathbf{r}'' \\ &\approx (\mathbf{r}')^T \mathbf{r}' =: \mathbf{G}^{GN} \end{aligned}$$

Direction de descente  $\mathbf{s}_k^{GN}$  obtenue en résolvant

$$\mathbf{G}^{GN} \mathbf{s}_k^{GN} + (\mathbf{r}')^T \mathbf{r} = \mathbf{0}$$

**Marquardt-Levenberg:** modification de Gauss-Newton telle que  $\mathbf{s}_k^{ML}$  est obtenue en résolvant

$$[\mathbf{G}^{GN} + \lambda_k \mathbf{I}] \mathbf{s}_k^{ML} + (\mathbf{r}')^T \mathbf{r} = \mathbf{0}$$

- Le paramètre  $\lambda_k$  sert à lutter contre le mauvais conditionnement éventuel de  $\mathbf{G}^{GN}$ ;
- Il évolue au fil de l'algorithme.

Les deux méthodes utilisent la structure particulière (moindres carrés non linéaires) de  $\mathcal{J}$  (approximation du Hessien sans calcul de dérivées secondes)

## 6. Résolution des problèmes linéaires en dimension finie

## 7. Aperçu de quelques méthodes de minimisation

Rappels sur la dérivation en dimension finie

Généralités sur l'optimisation

Fonction-coût différentiable, sans contraintes

**Fonction-coût différentiable, avec contraintes**

Fonctions-coût non différentiables

Méthodes stochastiques, algorithmes génétiques

## 8. Méthodes d'évaluation du gradient



# Minimisation sous contraintes inégalité

Forme générique:

$$\min_{c_i(\boldsymbol{p}) \leq 0} \mathcal{J}(\boldsymbol{p})$$

## Minimisation sous contraintes inégalité

Forme générique:

$$\min_{c_i(\mathbf{p}) \leq 0} \mathcal{J}(\mathbf{p})$$

On définit le **lagrangien**

$$\mathcal{L}(\mathbf{p}, \lambda) := \mathcal{J}(\mathbf{p}) - \sum_{i=1}^I \lambda_i c_i(\mathbf{p})$$

## Minimisation sous contraintes inégalité

Forme générique:

$$\min_{c_i(\mathbf{p}) \leq 0} \mathcal{J}(\mathbf{p})$$

On définit le **lagrangien**

$$\mathcal{L}(\mathbf{p}, \lambda) := \mathcal{J}(\mathbf{p}) - \sum_{i=1}^I \lambda_i c_i(\mathbf{p})$$

### Conditions nécessaires d'optimalité de Karush-Kuhn-Tucker (KKT)

$\mathbf{p}^*$  définit un minimum local sous contraintes pour  $\mathcal{J}$  si:

- (i)  $\mathcal{J}'(\mathbf{p}^*) - \sum_{i=1}^I \lambda_i c'_i(\mathbf{p}^*) = \mathbf{0}$  (stationnarité)
- (ii)  $c_i(\mathbf{p}^*) \leq 0$  ( $1 \leq i \leq I$ ) (admissibilité)
- (iii)  $\lambda_i^* \leq 0$  ( $1 \leq i \leq I$ )
- (iv)  $\lambda_i^* c_i(\mathbf{p}^*) = 0$  ( $1 \leq i \leq I$ ) (complémentarité)

Les conditions KKT sont aussi **suffisantes** si les fonctions  $\mathcal{J}$  et  $c_i$  sont **convexes**.

## Minimisation sous contraintes inégalité

- Si  $c_i(\mathbf{p}^*) < 0$ : contrainte **inactive**, et  $\lambda_i^* = 0$ ;

## Minimisation sous contraintes inégalité

- Si  $c_i(\mathbf{p}^*) < 0$ : contrainte **inactive**, et  $\lambda_i^* = 0$ ;
- Si toutes les contraintes sont inactives:  $\lambda^* = \mathbf{0}$  et KKT se réduit à  
$$\mathcal{J}'(\mathbf{p}^*) = \mathbf{0} \quad (\text{correspond au cas sans contraintes})$$

## Minimisation sous contraintes inégalité

- Si  $c_i(\mathbf{p}^*) < 0$ : contrainte **inactive**, et  $\lambda_i^* = 0$ ;
- Si toutes les contraintes sont inactives:  $\lambda^* = \mathbf{0}$  et KKT se réduit à
 
$$\mathcal{J}'(\mathbf{p}^*) = \mathbf{0} \quad (\text{correspond au cas sans contraintes})$$

- **Contraintes égalité**: correspondent à deux contraintes inégalité

$$c_i(\mathbf{p}^*) \leq 0 \quad (\lambda_i) \quad \text{et} \quad -c_i(\mathbf{p}^*) \leq 0 \quad (\bar{\lambda}_i)$$

Multiplicateur  $\mu_i = \lambda_i - \bar{\lambda}_i$ , **pas de condition de signe sur  $\mu_i$**

## Minimisation sous contraintes inégalité

- Si  $c_i(\mathbf{p}^*) < 0$ : contrainte **inactive**, et  $\lambda_i^* = 0$ ;
- Si toutes les contraintes sont inactives:  $\lambda^* = \mathbf{0}$  et KKT se réduit à
 
$$\mathcal{J}'(\mathbf{p}^*) = \mathbf{0} \quad (\text{correspond au cas sans contraintes})$$

- **Contraintes égalité**: correspondent à deux contraintes inégalité

$$c_i(\mathbf{p}^*) \leq 0 \quad (\lambda_i) \quad \text{et} \quad -c_i(\mathbf{p}^*) \leq 0 \quad (\bar{\lambda}_i)$$

Multiplicateur  $\mu_i = \lambda_i - \bar{\lambda}_i$ , **pas de condition de signe sur  $\mu_i$**

- Conditions KKT s'il n'y a que des contraintes égalité:

$$(i) \quad \mathcal{J}'(\mathbf{p}^*) - \sum_{i=1}^l \mu_i c_i'(\mathbf{p}^*) = \mathbf{0} \quad (\text{stationnarité})$$

$$(ii) \quad c_i(\mathbf{p}^*) = 0 \quad (1 \leq i \leq l) \quad (\text{admissibilité})$$

soit  $n+l$  équations pour les  $n+l$  inconnues  $p_1, \dots, p_n, \lambda_1, \dots, \lambda_l$

## 6. Résolution des problèmes linéaires en dimension finie

## 7. Aperçu de quelques méthodes de minimisation

Rappels sur la dérivation en dimension finie

Généralités sur l'optimisation

Fonction-coût différentiable, sans contraintes

Fonction-coût différentiable, avec contraintes

**Fonctions-coût non différentiables**

Méthodes stochastiques, algorithmes génétiques

## 8. Méthodes d'évaluation du gradient



## Fonctions-coût non différentiables

- Choix de distances:

$$\text{(norme } L^1) \quad D(d^{\text{obs}}, d(\mathbf{p})) = \sum_{j=1}^m \left| d_j^{\text{obs}} - d_j(\mathbf{p}) \right|$$

$$\text{(norme } L^\infty) \quad D(d^{\text{obs}}, d(\mathbf{p})) = \max_{1 \leq j \leq m} \left| d_j^{\text{obs}} - d_j(\mathbf{p}) \right|$$

## Fonctions-coût non différentiables

- Choix de distances:

$$\text{(norme } L^1) \quad D(d^{\text{obs}}, d(\mathbf{p})) = \sum_{j=1}^m \left| d_j^{\text{obs}} - d_j(\mathbf{p}) \right|$$

$$\text{(norme } L^\infty) \quad D(d^{\text{obs}}, d(\mathbf{p})) = \max_{1 \leq j \leq m} \left| d_j^{\text{obs}} - d_j(\mathbf{p}) \right|$$

- Inversion probabiliste: densités de probabilité uniformes  
→ minimisation d'une norme  $L^\infty$  (section 13).

## Exemple: méthode “du simplexe” (Nelder-Mead 1965)

**Principe** (itération générique pour  $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n$ ): on dispose de  $n+1$  points  $\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_{n+1}$ , formant les sommets d'un **simplexe** (ex. triangle si  $n=2$ ) et tels que

$$\mathcal{J}_1 = \mathcal{J}(\mathbf{p}_1) \leq \dots \leq \mathcal{J}_{n+1} = \mathcal{J}(\mathbf{p}_{n+1})$$

On cherche à remplacer  $\mathbf{p}_{n+1}$  par un nouveau point qui soit meilleur. On pose

$$\bar{\mathbf{p}} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbf{p}_i, \quad \bar{\mathbf{p}}(t) = \bar{\mathbf{p}} + t(\mathbf{p}_{n+1} - \bar{\mathbf{p}}), \quad \mathcal{J}_t = \mathcal{J}(\bar{\mathbf{p}}(t))$$

NB: ne pas confondre avec l'algorithme du simplexe en programmation linéaire

## Exemple: méthode “du simplexe” (Nelder-Mead 1965)

**Principe** (itération générique pour  $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n$ ): on dispose de  $n+1$  points  $\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_{n+1}$ , formant les sommets d'un **simplexe** (ex. triangle si  $n=2$ ) et tels que

$$\mathcal{J}_1 = \mathcal{J}(\mathbf{p}_1) \leq \dots \leq \mathcal{J}_{n+1} = \mathcal{J}(\mathbf{p}_{n+1})$$

On cherche à remplacer  $\mathbf{p}_{n+1}$  par un nouveau point qui soit meilleur. On pose

$$\bar{\mathbf{p}} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbf{p}_i, \quad \bar{\mathbf{p}}(t) = \bar{\mathbf{p}} + t(\mathbf{p}_{n+1} - \bar{\mathbf{p}}), \quad \mathcal{J}_t = \mathcal{J}(\bar{\mathbf{p}}(t))$$

Calculer  $\bar{\mathbf{p}}(-1)$  et  $\mathcal{J}_{-1}$ .

si  $\mathcal{J}_1 \leq \mathcal{J}_{-1} < \mathcal{J}_n$ , faire  $\mathbf{p}_{n+1} := \bar{\mathbf{p}}(-1)$

si  $\mathcal{J}_{-1} < \mathcal{J}_1$ , calculer  $\bar{\mathbf{p}}(-2)$  et  $\mathcal{J}_{-2}$ , faire  $\mathbf{p}_{n+1} := \text{best}(\bar{\mathbf{p}}(-1), \bar{\mathbf{p}}(-2))$

sinon:

si  $\mathcal{J}_{-1} < \mathcal{J}_{n+1}$ : calculer  $\bar{\mathbf{p}}(-1/2)$  et  $\mathcal{J}_{-1/2}$

si  $\mathcal{J}_{-1/2} \leq \mathcal{J}_{-1}$ , faire  $\mathbf{p}_{n+1} := \bar{\mathbf{p}}(-1/2)$

si  $\mathcal{J}_{n+1} < \mathcal{J}_{-1}$ : calculer  $\bar{\mathbf{p}}(1/2)$  et  $\mathcal{J}_{1/2}$

si  $\mathcal{J}_{1/2} < \mathcal{J}_{n+1}$ , faire  $\mathbf{p}_{n+1} := \bar{\mathbf{p}}(1/2)$

sinon:

faire  $\mathbf{p}_i := (\mathbf{p}_i + \mathbf{p}_1)/2$  ( $i=2, 3, \dots, n+1$ ) (contraction vers  $\mathbf{p}_1$ )

NB: ne pas confondre avec l'algorithme du simplexe en programmation linéaire

## 6. Résolution des problèmes linéaires en dimension finie

## 7. Aperçu de quelques méthodes de minimisation

Rappels sur la dérivation en dimension finie

Généralités sur l'optimisation

Fonction-coût différentiable, sans contraintes

Fonction-coût différentiable, avec contraintes

Fonctions-coût non différentiables

Méthodes stochastiques, algorithmes génétiques

## 8. Méthodes d'évaluation du gradient

## Algorithmes génétiques: principe

Algorithmes de minimisation classiques

“aveugles”:

- résultat unique: minimum global ou local
- éventuellement, informations locales complémentaires (hessien, covariance)

Possibilité alternative: les méthodes d'*optimisation stochastique*.

Problème générique:

$$\min \mathcal{J}(\mathbf{p}) \quad \mathbf{p} \in \mathcal{P} \subset \mathbb{R}^n$$

## Algorithmes génétiques: principe

Algorithmes de minimisation classiques  
“aveugles”:

- résultat unique: minimum global ou local
- éventuellement, informations locales complémentaires (hessien, covariance)

Possibilité alternative: les méthodes d'*optimisation stochastique*.

Problème générique:

$$\min \mathcal{J}(\mathbf{p}) \quad \mathbf{p} \in \mathcal{P} \subset \mathbb{R}^n$$

Principe:

- (i) Tirage aléatoire d'une *population* initiale

$$\mathbf{P}^0 = (\mathbf{p}_1^0, \dots, \mathbf{p}_N^0) \in E^N.$$

- (ii) Calcul des *performances*

$$F_1 = \mathcal{J}(\mathbf{p}_1^0), \dots, F_N = \mathcal{J}(\mathbf{p}_N^0)$$

- (iii) Repérage et reproduction des individus *performants*.

- (iv) Une nouvelle population  $\mathcal{P}^1$  créée par altération de  $\mathcal{P}^0$  par *mutations*:

$$\mathbf{p}_i^0 \longrightarrow \mathbf{p}_i^1$$

ou *croisements*:

$$(\mathbf{p}_i^0, \mathbf{p}_j^0) \longrightarrow (\mathbf{p}_i^1, \mathbf{p}_j^1)$$

comportant toujours une part d'aléa.

- (v) Retour à l'étape 2, ... jusqu'à convergence.

## Algorithmes génétiques: principe

### Points saillants:

- Evaluations de fonction-objectif (pas de gradient).
- Temps de calcul très élevés,
- Résultats multiples:  $\mathcal{J}(\mathbf{p}_i^{conv}) \leq \mathcal{J}_{seuil}$ .
- Adaptés à des situations du type optimisation combinatoire.



## Algorithmes génétiques: principe

### Points saillants:

- Evaluations de fonction-objectif (pas de gradient).
- Temps de calcul très élevés,
- Résultats multiples:  $\mathcal{J}(\mathbf{p}_i^{conv}) \leq \mathcal{J}_{seuil}$ .
- Adaptés à des situations du type optimisation combinatoire.

**Intérêt:** application aux problèmes échappant aux méthodes classiques.

Possibilité de méthodes mixtes:

- Démarrage de l'optimisation par algorithme génétique.
- Individus les plus performants  
→ conditions initiales (multiples) pour une minimisation classique.

## Algorithmes génétiques: exemple

- Problème: identifier la répartition spatiale de deux matériaux connus, i.e. identifier  $D \subset \Omega$ :

$$\mathcal{C}(x) = \mathcal{C}_1 \chi_D(x) + \mathcal{C}_2 [1 - \chi_D(x)]$$

Représentation de  $D$  par cellules de Voronoï



## Algorithmes génétiques: exemple

- Problème: identifier la répartition spatiale de deux matériaux connus, i.e. identifier  $D \subset \Omega$ :

$$\mathbf{C}(x) = \mathbf{C}_1 \chi_D(x) + \mathbf{C}_2 [1 - \chi_D(x)]$$

Représentation de  $D$  par cellules de Voronoï



- Fonction-coût (cumulative sur  $NF = 37$  cas de charge différents):

$$\mathcal{J}(D) = J(\mathbf{u}_D), \quad J(\mathbf{v}) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{NF} \int_{\partial\Omega} \|\mathbf{v} - \mathbf{u}_i^{\text{obs}}\|^2 dS$$

- $24 \times 24$  éléments finis Q4; taille de population  $N = 100, \leq 300$  générations.

## Algorithmes génétiques: exemple

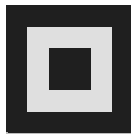
Cas-tests:



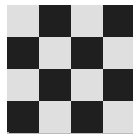
(Corner)



(Square)



(Double square)



(Checker)

# Algorithmes génétiques: exemple

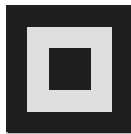
Cas-tests:



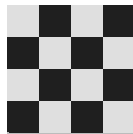
(Corner)



(Square)

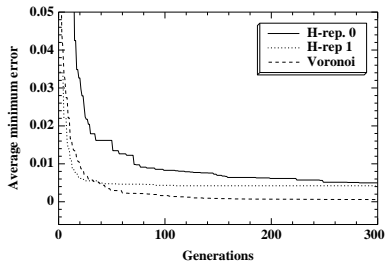
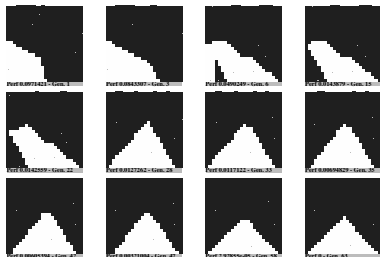


(Double square)



(Checker)

Exemple de résultat (*corner*)



Schoenauer M., Jouve F., Kallel M., *Evolutionary Computation in Engineering* (1997)

## Algorithmes génétiques: exemple

Cas-tests:



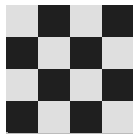
(Corner)



(Square)

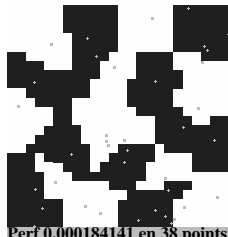
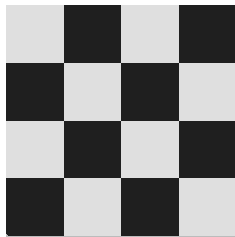


(Double square)

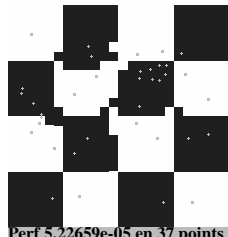


(Checker)

Exemple de résultat (*checker*)



Perf 0.000184141 en 38 points



Perf 5.22659e-05 en 37 points

## 6. Résolution des problèmes linéaires en dimension finie

Systèmes linéaires et moindres carrés linéaires: analyse

Moindres carrés linéaires: méthodes de résolution

Cas des équations linéaires en dimension infinie

## 7. Aperçu de quelques méthodes de minimisation

Rappels sur la dérivation en dimension finie

Généralités sur l'optimisation

Fonction-coût différentiable, sans contraintes

Fonction-coût différentiable, avec contraintes

Fonctions-coût non différentiables

Méthodes stochastiques, algorithmes génétiques

## 8. Méthodes d'évaluation du gradient

Dérivation numérique

Dérivation analytique directe

Méthode de l'état adjoint 1: cas linéaire discrétisé

Méthode de l'état adjoint 2: cas linéaire continu

Méthode de l'état adjoint 3: cas incrémental discrétisé

6. Résolution des problèmes linéaires en dimension finie

7. Aperçu de quelques méthodes de minimisation

## 8. Méthodes d'évaluation du gradient

Dérivation numérique

Dérivation analytique directe

Méthode de l'état adjoint 1: cas linéaire discrétisé

Méthode de l'état adjoint 2: cas linéaire continu

Méthode de l'état adjoint 3: cas incrémental discrétisé



## Dérivation numérique (différences finies)

Problème direct discrétisé modèle:

$$K(\boldsymbol{p})\boldsymbol{U}_p = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{p})$$

- Dérivée approchée par quotient différentiel ( $\Delta\boldsymbol{p}$  fini):

$$\mathcal{J}'(\boldsymbol{p})\Delta\boldsymbol{p} \approx \mathcal{J}(\boldsymbol{p} + \Delta\boldsymbol{p}) - \mathcal{J}(\boldsymbol{p})$$

Si  $\boldsymbol{p} \in \mathbb{R}^n$ , l'évaluation de  $\mathcal{J}'$  demande  $1 + n$  calculs directs:

→  $\Delta\boldsymbol{p} = \mathbf{0}$  (évaluation de  $\mathcal{J}(\boldsymbol{p})$ )

→  $\Delta\boldsymbol{p} = (\Delta p_1, 0, \dots, 0), \dots, (0, \dots, 0, \Delta p_n)$  (évaluation de  $\mathcal{J}'(\boldsymbol{p})$ )

## Dérivation numérique (différences finies)

Problème direct discrétisé modèle:

$$K(\mathbf{p})\mathbf{U}_p = \mathbf{F}(\mathbf{p})$$

- Dérivée approchée par quotient différentiel ( $\Delta\mathbf{p}$  fini):

$$\mathcal{J}'(\mathbf{p})\Delta\mathbf{p} \approx \mathcal{J}(\mathbf{p} + \Delta\mathbf{p}) - \mathcal{J}(\mathbf{p})$$

Si  $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n$ , l'évaluation de  $\mathcal{J}'$  demande  $1 + n$  calculs directs:

→  $\Delta\mathbf{p} = \mathbf{0}$  (évaluation de  $\mathcal{J}(\mathbf{p})$ )

→  $\Delta\mathbf{p} = (\Delta p_1, 0, \dots, 0), \dots, (0, \dots, 0, \Delta p_n)$  (évaluation de  $\mathcal{J}'(\mathbf{p})$ )

- De même, dérivation numérique de la solution du problème direct (par ex. pour Gauss-Newton ou Levenberg-Marquardt):

$$\mathbf{U}'_p \cdot \Delta\mathbf{p} \approx \mathbf{U}_{p+\Delta p} - \mathbf{U}_p$$

## Dérivation numérique (différences finies)

Problème direct discrétisé modèle:

$$K(\boldsymbol{p})\boldsymbol{U}_p = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{p})$$

- Dérivée approchée par quotient différentiel ( $\Delta\boldsymbol{p}$  fini):

$$\mathcal{J}'(\boldsymbol{p})\Delta\boldsymbol{p} \approx \mathcal{J}(\boldsymbol{p} + \Delta\boldsymbol{p}) - \mathcal{J}(\boldsymbol{p})$$

Si  $\boldsymbol{p} \in \mathbb{R}^n$ , l'évaluation de  $\mathcal{J}'$  demande  $1 + n$  calculs directs:

→  $\Delta\boldsymbol{p} = \mathbf{0}$  (évaluation de  $\mathcal{J}(\boldsymbol{p})$ )

→  $\Delta\boldsymbol{p} = (\Delta p_1, 0, \dots, 0), \dots, (0, \dots, 0, \Delta p_n)$  (évaluation de  $\mathcal{J}'(\boldsymbol{p})$ )

- De même, dérivation numérique de la solution du problème direct (par ex. pour Gauss-Newton ou Levenberg-Marquardt):

$$\boldsymbol{U}'_p \cdot \Delta\boldsymbol{p} \approx \boldsymbol{U}_{p+\Delta p} - \boldsymbol{U}_p$$

- Avantages et inconvénients
  - Avantages: mise en œuvre simple, caractère non intrusif
  - Inconvénients: cout de calcul, sensibilité à  $\|\Delta\boldsymbol{p}\|$  si  $\mathcal{J}$  bruitée.

6. Résolution des problèmes linéaires en dimension finie

7. Aperçu de quelques méthodes de minimisation

## 8. Méthodes d'évaluation du gradient

Dérivation numérique

Dérivation analytique directe

Méthode de l'état adjoint 1: cas linéaire discrétisé

Méthode de l'état adjoint 2: cas linéaire continu

Méthode de l'état adjoint 3: cas incrémental discrétisé

## Dérivation analytique directe (problème direct linéaire)

Rappel:  $\mathcal{J}(\boldsymbol{p})$  dépend de  $\boldsymbol{p}$  à travers la solution  $\boldsymbol{U}_p$  du problème direct:

$$\mathcal{J}(\boldsymbol{p}) = J(\boldsymbol{U}_p, \boldsymbol{p})$$

Problème direct linéaire:

$$\boldsymbol{K}(\boldsymbol{p})\boldsymbol{U}_p = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{p})$$

Dérivée de  $\mathcal{J}$  formulée par dérivation composée:

$$\mathcal{J}'(\boldsymbol{p}) = J'_1(\boldsymbol{U}_p, \boldsymbol{p})\boldsymbol{U}'_p + J'_2(\boldsymbol{U}_p, \boldsymbol{p})$$

Nécessite évaluation des dérivées  $\boldsymbol{U}'_p$  par dérivation du problème direct:

$$\boldsymbol{K}\boldsymbol{U}'_p = -\boldsymbol{K}'(\boldsymbol{p})\boldsymbol{U}_p + \boldsymbol{F}'(\boldsymbol{p})$$

## Dérivation analytique directe (problème direct linéaire)

Rappel:  $\mathcal{J}(\boldsymbol{p})$  dépend de  $\boldsymbol{p}$  à travers la solution  $\boldsymbol{U}_p$  du problème direct:

$$\mathcal{J}(\boldsymbol{p}) = J(\boldsymbol{U}_p, \boldsymbol{p})$$

Problème direct linéaire:

$$\boldsymbol{K}(\boldsymbol{p})\boldsymbol{U}_p = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{p})$$

Dérivée de  $\mathcal{J}$  formulée par dérivation composée:

$$\mathcal{J}'(\boldsymbol{p}) = J'_1(\boldsymbol{U}_p, \boldsymbol{p})\boldsymbol{U}'_p + J'_2(\boldsymbol{U}_p, \boldsymbol{p})$$

Nécessite évaluation des dérivées  $\boldsymbol{U}'_p$  par dérivation du problème direct:

$$\boldsymbol{K}\boldsymbol{U}'_p = -\boldsymbol{K}'(\boldsymbol{p})\boldsymbol{U}_p + \boldsymbol{F}'(\boldsymbol{p})$$

- Demande  $1 + n$  calculs directs *sur le même système*: une seule factorisation de  $\boldsymbol{K}(\boldsymbol{p})$ .
- Supplément de calcul modeste
- Repose sur une dérivation analytique préalable
- Cette approche permet le calcul de matrices jacobiennes  $\boldsymbol{U}'_p$  requises par les méthodes de Gauss-Newton ou Marquardt-Levenberg (cf *infra*).

## 6. Résolution des problèmes linéaires en dimension finie

## 7. Aperçu de quelques méthodes de minimisation

## 8. Méthodes d'évaluation du gradient

Dérivation numérique

Dérivation analytique directe

Méthode de l'état adjoint 1: cas linéaire discrétisé

Méthode de l'état adjoint 2: cas linéaire continu

Méthode de l'état adjoint 3: cas incrémental discrétisé

## Méthode de l'état adjoint (i): formulation basée sur la réciprocité

Evaluation de  $\mathcal{J}'$  par dérivation directe: demande  $1 + n$  calculs directs

$$\mathcal{J}' = J'_1(\mathbf{U}_p, \boldsymbol{\rho})\mathbf{U}'_p + J'_2(\mathbf{U}_p, \boldsymbol{\rho})$$

Idée: remplacer le calcul des  $n$  solutions dérivées  $\partial\mathbf{U}_p/\partial p_i$  par le calcul d'un état adjoint  $\tilde{\mathbf{U}}_p$  unique tq.

$$\mathbf{K}^T \tilde{\mathbf{U}}_p + [J'_1(\mathbf{U}_p, \boldsymbol{\rho})]^T = \mathbf{0}$$



## Méthode de l'état adjoint (i): formulation basée sur la réciprocité

Evaluation de  $\mathcal{J}'$  par dérivation directe: demande  $1 + n$  calculs directs

$$\mathcal{J}' = J'_1(\mathbf{U}_p, \mathbf{p})\mathbf{U}'_p + J'_2(\mathbf{U}_p, \mathbf{p})$$

Idée: remplacer le calcul des  $n$  solutions dérivées  $\partial\mathbf{U}_p/\partial p_i$  par le calcul d'un état adjoint  $\tilde{\mathbf{U}}_p$  unique tq.

$$\mathbf{K}^\top \tilde{\mathbf{U}}_p + [J'_1(\mathbf{U}_p, \mathbf{p})]^\top = \mathbf{0}$$

Exploitation de la réciprocité entre problèmes dérivé et adjoint:

$$\begin{cases} (\mathbf{K}\mathbf{U}'_p + \mathbf{K}'(\mathbf{p})\mathbf{U}_p - \mathbf{F}'(\mathbf{p})) = \mathbf{0} \\ (\mathbf{K}^\top \tilde{\mathbf{U}}_p + [J'_1(\mathbf{U}, \mathbf{p})]) = \mathbf{0} \end{cases}$$

## Méthode de l'état adjoint (i): formulation basée sur la réciprocité

Evaluation de  $\mathcal{J}'$  par dérivation directe: demande  $1 + n$  calculs directs

$$\mathcal{J}' = J'_1(\mathbf{U}_p, \mathbf{p})\mathbf{U}'_p + J'_2(\mathbf{U}_p, \mathbf{p})$$

Idée: remplacer le calcul des  $n$  solutions dérivées  $\partial\mathbf{U}_p/\partial p_i$  par le calcul d'un état adjoint  $\tilde{\mathbf{U}}_p$  unique tq.

$$\mathbf{K}^T \tilde{\mathbf{U}}_p + [J'_1(\mathbf{U}_p, \mathbf{p})]^T = \mathbf{0}$$

Exploitation de la réciprocité entre problèmes dérivé et adjoint:

$$\begin{cases} \tilde{\mathbf{U}}_p^T (\mathbf{K}\mathbf{U}'_p + \mathbf{K}'(\mathbf{p})\mathbf{U}_p - \mathbf{F}'(\mathbf{p})) = \mathbf{0} \\ (\mathbf{U}'_p)^T (\mathbf{K}^T \tilde{\mathbf{U}}_p + [J'_1(\mathbf{U}, \mathbf{p})]) = \mathbf{0} \end{cases}$$

## Méthode de l'état adjoint (i): formulation basée sur la réciprocité

Evaluation de  $\mathcal{J}'$  par dérivation directe: demande  $1 + n$  calculs directs

$$\mathcal{J}' = J'_1(\mathbf{U}_p, \boldsymbol{\rho})\mathbf{U}'_p + J'_2(\mathbf{U}_p, \boldsymbol{\rho})$$

Idée: remplacer le calcul des  $n$  solutions dérivées  $\partial\mathbf{U}_p/\partial p_i$  par le calcul d'un état adjoint  $\tilde{\mathbf{U}}_p$  unique tq.

$$\mathbf{K}^T \tilde{\mathbf{U}}_p + [J'_1(\mathbf{U}_p, \boldsymbol{\rho})]^T = \mathbf{0}$$

Exploitation de la réciprocité entre problèmes dérivé et adjoint:

$$\begin{cases} \tilde{\mathbf{U}}_p^T (\mathbf{K}\mathbf{U}'_p + \mathbf{K}'(\boldsymbol{\rho})\mathbf{U}_p - \mathbf{F}'(\boldsymbol{\rho})) = \mathbf{0} \\ (\mathbf{U}'_p)^T (\mathbf{K}^T \tilde{\mathbf{U}}_p + [J'_1(\mathbf{U}_p, \boldsymbol{\rho})]) = \mathbf{0} \end{cases} \implies \tilde{\mathbf{U}}_p^T [\mathbf{K}'(\boldsymbol{\rho})\mathbf{U}_p - \mathbf{F}'(\boldsymbol{\rho})] = J'_1(\mathbf{U}_p, \boldsymbol{\rho})\mathbf{U}'_p$$

## Méthode de l'état adjoint (i): formulation basée sur la réciprocité

Evaluation de  $\mathcal{J}'$  par dérivation directe: demande  $1 + n$  calculs directs

$$\mathcal{J}' = J'_1(\mathbf{U}_p, \mathbf{p})\mathbf{U}'_p + J'_2(\mathbf{U}_p, \mathbf{p})$$

Idee: remplacer le calcul des  $n$  solutions dérivées  $\partial\mathbf{U}_p/\partial p_i$  par le calcul d'un état adjoint  $\tilde{\mathbf{U}}_p$  unique tq.

$$\mathbf{K}^T \tilde{\mathbf{U}}_p + [J'_1(\mathbf{U}_p, \mathbf{p})]^T = \mathbf{0}$$

Exploitation de la réciprocité entre problèmes dérivé et adjoint:

$$\begin{cases} \tilde{\mathbf{U}}_p^T (\mathbf{K}\mathbf{U}'_p + \mathbf{K}'(\mathbf{p})\mathbf{U}_p - \mathbf{F}'(\mathbf{p})) = \mathbf{0} \\ (\mathbf{U}'_p)^T (\mathbf{K}^T \tilde{\mathbf{U}}_p + [J'_1(\mathbf{U}_p, \mathbf{p})]) = \mathbf{0} \end{cases} \implies \tilde{\mathbf{U}}_p^T [\mathbf{K}'(\mathbf{p})\mathbf{U}_p - \mathbf{F}'(\mathbf{p})] = J'_1(\mathbf{U}_p, \mathbf{p})\mathbf{U}'_p$$

Dérivée de  $\mathcal{J}$ :

$$\mathcal{J}'(\mathbf{p}) = \tilde{\mathbf{U}}_p^T [\mathbf{K}'(\mathbf{p})\mathbf{U}_p - \mathbf{F}'(\mathbf{p})] + J'_2(\mathbf{U}_p, \mathbf{p})$$

## Méthode de l'état adjoint (i): formulation basée sur la réciprocité

$$\mathcal{J}'(\boldsymbol{\rho}) = \tilde{\mathbf{U}}_p^T [\mathbf{K}'(\boldsymbol{\rho}) \mathbf{U}_p - \mathbf{F}'(\boldsymbol{\rho})] + \mathcal{J}'_2(\mathbf{U}_p, \boldsymbol{\rho})$$

Remarques:

- L'état adjoint  $\tilde{\mathbf{U}}_p$  ne dépend que de l'état courant  $\mathbf{U}_p$ .
- quel que soit le nombre  $n$  de paramètres inconnus:  
Eq. directe  $\implies \mathcal{J}$ , Eq. adjointe  $\implies \mathcal{J}'$
- Eq. adjointe: matrice transposée  $\mathbf{K}^T \implies$  Factorisation de  $\mathbf{K}$  réutilisable.

## Méthode de l'état adjoint (ii): formulation basée sur un lagrangien

Point de vue de la minimisation sous contraintes:

$$\mathcal{L}(\mathbf{p}, \mathbf{U}, \tilde{\mathbf{U}}) = J(\mathbf{U}, \mathbf{p}) + \tilde{\mathbf{U}}^T (\mathbf{K}(\mathbf{p})\mathbf{U} - \mathbf{F}(\mathbf{p}))$$

## Méthode de l'état adjoint (ii): formulation basée sur un lagrangien

Point de vue de la minimisation sous contraintes:

$$\mathcal{L}(\mathbf{p}, \mathbf{U}, \tilde{\mathbf{U}}) = J(\mathbf{U}, \mathbf{p}) + \tilde{\mathbf{U}}^T (\mathbf{K}(\mathbf{p})\mathbf{U} - \mathbf{F}(\mathbf{p}))$$

Différentielle totale du lagrangien  $\mathcal{L}$ :

$$\delta\mathcal{L}(\mathbf{p}, \mathbf{U}, \tilde{\mathbf{U}}) = \mathcal{L}'_1(\mathbf{p}, \mathbf{U}, \tilde{\mathbf{U}})\delta\mathbf{p} + \mathcal{L}'_2(\mathbf{p}, \mathbf{U}, \tilde{\mathbf{U}})\delta\mathbf{U} + \mathcal{L}'_3(\mathbf{p}, \mathbf{U}, \tilde{\mathbf{U}})\delta\tilde{\mathbf{U}}$$

$$\mathcal{L}'_1(\mathbf{p}, \mathbf{U}, \tilde{\mathbf{U}}) = \tilde{\mathbf{U}}^T (\mathbf{K}'(\mathbf{p})\mathbf{U} - \mathbf{F}'(\mathbf{p})) + J'_2(\mathbf{U}, \mathbf{p})$$

$$\mathcal{L}'_2(\mathbf{p}, \mathbf{U}, \tilde{\mathbf{U}}) = J'_1(\mathbf{U}, \mathbf{p}) + \tilde{\mathbf{U}}^T \mathbf{K}$$

$$\mathcal{L}'_3(\mathbf{p}, \mathbf{U}, \tilde{\mathbf{U}}) = (\mathbf{K}(\mathbf{p})\mathbf{U} - \mathbf{F}(\mathbf{p}))^T$$

## Méthode de l'état adjoint (ii): formulation basée sur un lagrangien

Point de vue de la minimisation sous contraintes:

$$\mathcal{L}(\mathbf{p}, \mathbf{U}, \tilde{\mathbf{U}}) = J(\mathbf{U}, \mathbf{p}) + \tilde{\mathbf{U}}^T (\mathbf{K}(\mathbf{p})\mathbf{U} - \mathbf{F}(\mathbf{p}))$$

Différentielle totale du lagrangien  $\mathcal{L}$ :

$$\delta\mathcal{L}(\mathbf{p}, \mathbf{U}, \tilde{\mathbf{U}}) = \mathcal{L}'_1(\mathbf{p}, \mathbf{U}, \tilde{\mathbf{U}})\delta\mathbf{p} + \mathcal{L}'_2(\mathbf{p}, \mathbf{U}, \tilde{\mathbf{U}})\delta\mathbf{U} + \mathcal{L}'_3(\mathbf{p}, \mathbf{U}, \tilde{\mathbf{U}})\delta\tilde{\mathbf{U}}$$

$$\mathcal{L}'_1(\mathbf{p}, \mathbf{U}, \tilde{\mathbf{U}}) = \tilde{\mathbf{U}}^T (\mathbf{K}'(\mathbf{p})\mathbf{U} - \mathbf{F}'(\mathbf{p})) + J'_2(\mathbf{U}, \mathbf{p})$$

$$\mathcal{L}'_2(\mathbf{p}, \mathbf{U}, \tilde{\mathbf{U}}) = J'_1(\mathbf{U}, \mathbf{p}) + \tilde{\mathbf{U}}^T \mathbf{K}$$

$$\mathcal{L}'_3(\mathbf{p}, \mathbf{U}, \tilde{\mathbf{U}}) = (\mathbf{K}(\mathbf{p})\mathbf{U} - \mathbf{F}(\mathbf{p}))^T$$

Choix du multiplicateur  $\tilde{\mathbf{U}}$ :  $\delta\mathbf{p} = \underline{0} \implies \delta\mathcal{L}(\mathbf{p}, \mathbf{U}) = 0$ , soit

$$\mathcal{L}'_2(\mathbf{p}, \mathbf{U}, \tilde{\mathbf{U}}) = 0 \implies J'_1(\mathbf{U}, \mathbf{p}) + \tilde{\mathbf{U}}^T \mathbf{K} = 0 \quad \text{problème adjoint}$$

$$\mathcal{L}'_3(\mathbf{p}, \mathbf{U}, \tilde{\mathbf{U}}) = 0 \implies \mathbf{K}(\mathbf{p})\mathbf{U} - \mathbf{F}(\mathbf{p}) = 0 \quad \text{problème direct}$$

Dérivée de  $\mathcal{J}$  (où  $\mathbf{U} = \mathbf{U}_p$  et  $\tilde{\mathbf{U}} = \tilde{\mathbf{U}}_p$  solutions des équations directe et adjointe):

$$J'(\mathbf{p})\delta\mathbf{p} = \delta\mathcal{L}(\mathbf{p}, \mathbf{U}_p, \tilde{\mathbf{U}}_p) \implies J'(\mathbf{p}) = \tilde{\mathbf{U}}_p^T [\mathbf{K}'(\mathbf{p})\mathbf{U}_p - \mathbf{F}'(\mathbf{p})] + J'_2(\mathbf{U}_p, \mathbf{p})$$



## 6. Résolution des problèmes linéaires en dimension finie

## 7. Aperçu de quelques méthodes de minimisation

## 8. Méthodes d'évaluation du gradient

Dérivation numérique

Dérivation analytique directe

Méthode de l'état adjoint 1: cas linéaire discrétisé

**Méthode de l'état adjoint 2: cas linéaire continu**

Méthode de l'état adjoint 3: cas incrémental discrétisé

## Méthode de l'état adjoint en dimension infinie

### Exemple: problème inverse en élasticité linéaire statique

Structure  $\Omega$ : matériau élastique linéaire, tenseur d'élasticité de référence (ex. matériau sain)  $\mathcal{C}_0$ , **champ** de tenseur d'élasticité réel (ex. dû à endommagement)  $\mathcal{C}(\mathbf{x})$  inconnu.

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) = \mathcal{C}(\mathbf{x}) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x})$$

Problème: reconstruire  $\mathcal{C}(\mathbf{x})$  inconnu à partir de données aux limites surabondantes

$$\left\{ \begin{array}{l} \operatorname{div}(\mathcal{C} : \nabla \mathbf{u}) = 0 \text{ dans } \Omega \\ \mathcal{T}^n[\mathbf{u}] \equiv \mathcal{C}_0 : \boldsymbol{\varepsilon}[\mathbf{u}] \cdot \mathbf{n} = \boldsymbol{\varphi} \text{ sur } \partial\Omega \\ \mathbf{u} = \boldsymbol{\xi} \text{ sur } \partial\Omega \end{array} \right. \quad (\text{problème direct, solution } \mathbf{u}_{\mathcal{C}})$$

## Méthode de l'état adjoint en dimension infinie

### Exemple: problème inverse en élasticité linéaire statique

Structure  $\Omega$ : matériau élastique linéaire, tenseur d'élasticité de référence (ex. matériau sain)  $\mathbf{C}_0$ , **champ** de tenseur d'élasticité réel (ex. dû à endommagement)  $\mathbf{C}(\mathbf{x})$  inconnu.

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) = \mathbf{C}(\mathbf{x}) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x})$$

Problème: reconstruire  $\mathbf{C}(\mathbf{x})$  inconnu à partir de données aux limites surabondantes

$$\left\{ \begin{array}{l} \operatorname{div}(\mathbf{C} : \nabla \mathbf{u}) = 0 \text{ dans } \Omega \\ \mathbf{T}^n[\mathbf{u}] \equiv \mathbf{C}_0 : \boldsymbol{\varepsilon}[\mathbf{u}] \cdot \mathbf{n} = \boldsymbol{\varphi} \text{ sur } \partial\Omega \\ \mathbf{u} = \boldsymbol{\xi} \text{ sur } \partial\Omega \end{array} \right. \quad (\text{problème direct, solution } \mathbf{u}_C)$$

Minimisation d'une fonction-coût

$$\mathcal{J}(\mathbf{C}) = J(\mathbf{u}_C, \mathbf{C}), \quad J(\mathbf{v}, \mathbf{C}) = \int_{\Omega} j_{\Omega}(\mathbf{v}, \mathbf{C}) \, dV + \int_{\partial\Omega} j_{\partial\Omega}(\mathbf{v}, \mathbf{C}) \, dS$$

par exemple (moindres carrés régularisés):

$$J(\mathbf{v}, \mathbf{C}) = \frac{1}{2} \int_{\partial\Omega} |\boldsymbol{\xi} - \mathbf{v}|^2 \, dS + \frac{\alpha}{2} \int_{\Omega} |\mathbf{C} - \mathbf{C}_0|^2 \, dV$$

## Méthode de l'état adjoint en dimension infinie

- Lagrangien (incorporation sous forme faible du pb. direct élastique):

$$\mathcal{L}(\mathbf{u}, \mathbf{w}; \mathbf{C}) = \mathcal{J}(\mathbf{u}, \mathbf{C}) + \int_{\Omega} \nabla \mathbf{u} : \mathbf{C} : \nabla \mathbf{w} \, dV - \int_{\partial\Omega} \varphi \cdot \mathbf{w} \, dS$$

## Méthode de l'état adjoint en dimension infinie

- Lagrangien (incorporation sous forme faible du pb. direct élastique):

$$\mathcal{L}(\mathbf{u}, \mathbf{w}; \mathbf{C}) = \mathcal{J}(\mathbf{u}, \mathbf{C}) + \int_{\Omega} \nabla \mathbf{u} : \mathbf{C} : \nabla \mathbf{w} \, dV - \int_{\partial\Omega} \varphi \cdot \mathbf{w} \, dS$$

- Première variation:

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{L} = & \int_{\Omega} \frac{\partial j_{\Omega}}{\partial \mathbf{u}} \cdot \delta \mathbf{u} \, dV + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial j_{\partial\Omega}}{\partial \mathbf{u}} \cdot \delta \mathbf{u} \, dS + \int_{\Omega} \nabla \delta \mathbf{u} : \mathbf{C} : \nabla \mathbf{w} \, dV \\ & + \int_{\Omega} \frac{\partial j_{\Omega}}{\partial \mathbf{C}} : \delta \mathbf{C} \, dV + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial j_{\partial\Omega}}{\partial \mathbf{C}} : \delta \mathbf{C} \, dS + \int_{\Omega} \nabla \mathbf{u} : \delta \mathbf{C} : \nabla \mathbf{w} \, dV \end{aligned}$$

## Méthode de l'état adjoint en dimension infinie

- Lagrangien (incorporation sous forme faible du pb. direct élastique):

$$\mathcal{L}(\mathbf{u}, \mathbf{w}; \mathbf{C}) = \mathcal{J}(\mathbf{u}, \mathbf{C}) + \int_{\Omega} \nabla \mathbf{u} : \mathbf{C} : \nabla \mathbf{w} \, dV - \int_{\partial\Omega} \varphi \cdot \mathbf{w} \, dS$$

- Première variation:

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{L} = & \int_{\Omega} \frac{\partial j_{\Omega}}{\partial \mathbf{u}} \cdot \delta \mathbf{u} \, dV + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial j_{\partial\Omega}}{\partial \mathbf{u}} \cdot \delta \mathbf{u} \, dS + \int_{\Omega} \nabla \delta \mathbf{u} : \mathbf{C} : \nabla \mathbf{w} \, dV \\ & + \int_{\Omega} \frac{\partial j_{\Omega}}{\partial \mathbf{C}} : \delta \mathbf{C} \, dV + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial j_{\partial\Omega}}{\partial \mathbf{C}} : \delta \mathbf{C} \, dS + \int_{\Omega} \nabla \mathbf{u} : \delta \mathbf{C} : \nabla \mathbf{w} \, dV \end{aligned}$$

- Etat adjoint fixé par la condition

$$\delta \mathbf{C} = \mathbf{0} \implies \delta \mathcal{L} = 0$$

soit

$$(\forall \delta \mathbf{u} \in \mathcal{V}) \quad \int_{\Omega} \frac{\partial j_{\Omega}}{\partial \mathbf{u}} \cdot \delta \mathbf{u} \, dV + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial j_{\partial\Omega}}{\partial \mathbf{u}} \cdot \delta \mathbf{u} \, dS + \int_{\Omega} \nabla \delta \mathbf{u} : \mathbf{C} : \nabla \mathbf{w} \, dV = 0$$

## Méthode de l'état adjoint en dimension infinie

Problème adjoint = problème d'équilibre élastique avec chargement adjoint

$$\begin{aligned} \operatorname{div}[\mathbf{C} : \nabla \mathbf{w}] &= \frac{\partial j_{\Omega}}{\partial \mathbf{u}}(\mathbf{u}, \mathbf{c}) \quad (\text{dans } \Omega) \\ [\mathbf{C} : \nabla \mathbf{w}] \cdot \mathbf{n} &= -\frac{\partial j_{\partial \Omega}}{\partial \mathbf{u}}(\mathbf{u}, \mathbf{c}) \quad (\text{sur } \partial \Omega) \end{aligned}$$

## Méthode de l'état adjoint en dimension infinie

Problème adjoint = problème d'équilibre élastique avec chargement adjoint

$$\begin{aligned} \operatorname{div}[\mathbf{C} : \nabla \mathbf{w}] &= \frac{\partial j_{\Omega}}{\partial \mathbf{u}}(\mathbf{u}, \mathbf{C}) && (\text{dans } \Omega) \\ [\mathbf{C} : \nabla \mathbf{w}] \cdot \mathbf{n} &= -\frac{\partial j_{\partial\Omega}}{\partial \mathbf{u}}(\mathbf{u}, \mathbf{C}) && (\text{sur } \partial\Omega) \end{aligned}$$

Variation totale de  $\mathcal{J}$  et application linéaire tangente:

$$\delta \mathcal{J} = \delta \mathcal{L}(\mathbf{u}_C, \mathbf{w}_C; \mathbf{C}) = \langle \mathcal{J}', \delta \mathbf{C} \rangle$$

avec

$$\langle \mathcal{J}', \mathcal{D} \rangle = \int_{\Omega} \frac{\partial j_{\Omega}}{\partial \mathbf{C}} : \mathcal{D} \, dV + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial j_{\partial\Omega}}{\partial \mathbf{C}} : \mathcal{D} \, dS + \int_{\Omega} \nabla \mathbf{u} : \mathcal{D} : \nabla \mathbf{w} \, dV$$



## Méthode de l'état adjoint en dimension infinie

Problème adjoint = problème d'équilibre élastique avec chargement adjoint

$$\begin{aligned} \operatorname{div}[\mathbf{C} : \nabla \mathbf{w}] &= \frac{\partial j_{\Omega}}{\partial \mathbf{u}}(\mathbf{u}, \mathbf{C}) && (\text{dans } \Omega) \\ [\mathbf{C} : \nabla \mathbf{w}] \cdot \mathbf{n} &= -\frac{\partial j_{\partial\Omega}}{\partial \mathbf{u}}(\mathbf{u}, \mathbf{C}) && (\text{sur } \partial\Omega) \end{aligned}$$

Variation totale de  $\mathcal{J}$  et application linéaire tangente:

$$\delta \mathcal{J} = \delta \mathcal{L}(\mathbf{u}_C, \mathbf{w}_C; \mathbf{C}) = \langle \mathcal{J}', \delta \mathbf{C} \rangle$$

avec

$$\langle \mathcal{J}', \mathcal{D} \rangle = \int_{\Omega} \frac{\partial j_{\Omega}}{\partial \mathbf{C}} : \mathcal{D} \, dV + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial j_{\partial\Omega}}{\partial \mathbf{C}} : \mathcal{D} \, dS + \int_{\Omega} \nabla \mathbf{u} : \mathcal{D} : \nabla \mathbf{w} \, dV$$

Donne explicitement la dérivée directionnelle de  $\mathcal{J}$  dans toute perturbation  $\delta \mathbf{C} = \varepsilon \mathcal{D}$  de  $\mathcal{C}$ .

- $\mathbf{u}$  et  $\mathbf{w}$  solutions de problèmes d'élasticité classiques,
- Problème adjoint = même structure avec chargement différent,
- $(\mathbf{u}, \mathbf{w})$  ne dépendent pas de  $\delta \mathbf{C}$ .

## Méthode de l'état adjoint en dimension infinie

Cas particulier de l'écart en moindres carrés sur  $\mathbf{u}$  : on a

$$J(\mathbf{u}, \mathbf{C}) = \frac{1}{2} \int_{\partial\Omega} |\boldsymbol{\xi} - \mathbf{u}|^2 dS + \frac{1}{2} \alpha \int_{\Omega} |\mathbf{C} - \mathbf{C}_0|^2 dV$$

$$\frac{\partial j_{\Omega}}{\partial \mathbf{u}} = 0 \quad \frac{\partial j_{\Omega}}{\partial \mathbf{u}} = (\mathbf{u} - \boldsymbol{\xi})$$

et l'état adjoint est solution de:

$$\operatorname{div}[\mathbf{C} : \nabla \mathbf{w}] = \mathbf{0} \quad (\text{dans } \Omega) \quad [\mathbf{C} : \nabla \mathbf{w}] \cdot \mathbf{n} = -(\mathbf{u} - \boldsymbol{\xi}) \quad (\text{sur } \partial\Omega)$$

L'application linéaire tangente (gradient)  $D\mathcal{J}$  de  $\mathcal{J}$  est alors définie par

$$\langle D\mathcal{J}, \mathcal{D} \rangle = \int_{\Omega} \nabla \mathbf{u} : \mathcal{D} : \nabla \mathbf{w} dV + \alpha \int_{\Omega} (\mathbf{C} - \mathbf{C}_0) : \mathcal{D} dV$$

## 6. Résolution des problèmes linéaires en dimension finie

## 7. Aperçu de quelques méthodes de minimisation

## 8. Méthodes d'évaluation du gradient

Dérivation numérique

Dérivation analytique directe

Méthode de l'état adjoint 1: cas linéaire discrétisé

Méthode de l'état adjoint 2: cas linéaire continu

Méthode de l'état adjoint 3: cas incrémental discrétisé

## Etat adjoint

- Problème incrémental en temps discret de la forme

$$R_k(\mathbf{U}_k; \mathbf{U}_{k-1}, \mathbf{p}) = \mathbf{0}, \quad (\mathbf{U}_0 \text{ donné})$$

- Lagrangien:

$$\mathcal{L} := \sum_{k=1}^N \left\{ J(\mathbf{U}_k) + \tilde{\mathbf{U}}_k^T R_k(\mathbf{U}_k; \mathbf{U}_{k-1}, \mathbf{p}) \right\}$$

## Etat adjoint

- Problème incrémental en temps discret de la forme

$$\mathbf{R}_k(\mathbf{U}_k; \mathbf{U}_{k-1}, \mathbf{p}) = \mathbf{0}, \quad (\mathbf{U}_0 \text{ donné})$$

- Lagrangien:

$$\mathcal{L} := \sum_{k=1}^N \left\{ J(\mathbf{U}_k) + \tilde{\mathbf{U}}_k^T \mathbf{R}_k(\mathbf{U}_k; \mathbf{U}_{k-1}, \mathbf{p}) \right\}$$

- Variation de  $\mathcal{L}$  à l'ordre 1:

$$\delta \mathcal{L} = \partial_p \mathcal{L} \cdot \delta \mathbf{p} + \sum_{k=0}^N \partial_{\mathbf{U}_k} \mathcal{L} \cdot \delta \mathbf{U}_k + \sum_{k=1}^N \partial_{\tilde{\mathbf{U}}_k} \mathcal{L} \cdot \delta \tilde{\mathbf{U}}_k$$

où

$$\partial_p \mathcal{L} = \tilde{\mathbf{U}}_k^T \partial_3 \mathbf{R}_k(\mathbf{U}_k; \mathbf{U}_{k-1}, \mathbf{p})$$

$$\partial_{\mathbf{U}_k} \mathcal{L} = \partial_{\mathbf{U}_k} J(\mathbf{U}_k) + \tilde{\mathbf{U}}_k^T \mathbf{K}_k + \tilde{\mathbf{U}}_{k+1}^T \mathbf{K}_{k+1,k}$$

$$\partial_{\tilde{\mathbf{U}}_k} \mathcal{L} = 0 \quad (\text{si } \mathbf{U}_k = 0 \text{ solution du problème incrémental direct})$$

avec les rigidités tangentes

$$\mathbf{K}_k := \partial_1 \mathbf{R}_k(\mathbf{U}_k; \mathbf{U}_{k-1}, \mathbf{p}), \quad \mathbf{K}_{k+1,k} := \partial_2 \mathbf{R}_{k+1}(\mathbf{U}_{k+1}; \mathbf{U}_k, \mathbf{p})$$

## Etat adjoint

Etat adjoint:  $\tilde{\mathbf{U}}_k$  annulant  $\partial_{\mathbf{U}_k} \mathcal{L}$ , c.à.d. solution du problème adjoint rétrograde

$$(k = N) \quad 0 = \partial_{\mathbf{U}_N} \mathcal{L} \implies \mathbf{K}_N \tilde{\mathbf{U}}_N = -\partial_{\mathbf{U}_N} J(\mathbf{U}_N)$$

$$(k < N) \quad 0 = \partial_{\mathbf{U}_k} \mathcal{L} \implies \mathbf{K}_k \tilde{\mathbf{U}}_k = -\partial_{\mathbf{U}_k} J(\mathbf{U}_k) - \tilde{\mathbf{U}}_{k+1}^T \mathbf{K}_{k+1,k}$$

## Etat adjoint

**Etat adjoint:**  $\tilde{\mathbf{U}}_k$  annulant  $\partial_{U_k} \mathcal{L}$ , c.à.d. solution du problème adjoint rétrograde

$$\begin{array}{ll} (k = N) & 0 = \partial_{U_N} \mathcal{L} \implies \mathbf{K}_N \tilde{\mathbf{U}}_N = -\partial_{U_N} J(\mathbf{U}_N) \\ (k < N) & 0 = \partial_{U_k} \mathcal{L} \implies \mathbf{K}_k \tilde{\mathbf{U}}_k = -\partial_{U_k} J(\mathbf{U}_k) - \tilde{\mathbf{U}}_{k+1}^T \mathbf{K}_{k+1,k} \end{array}$$

Principales propriétés du problème adjoint:

- Problème incrémental **linéaire**;
- Exploite les matrices tangentes convergées du problème direct;
- Nécessite stockage préalable des matrices tangentes  $\mathbf{K}_k$ ,  $\mathbf{K}_{k+1,k}$  et de l'histoire de solution directe  $\mathbf{U}_k$ .

## Etat adjoint

- Gradient de la fonction-coût:

$$\mathcal{J}'(\mathbf{p}) = \partial_{\mathbf{p}}\mathcal{L} = \sum_{k=1}^N \tilde{\mathbf{U}}_k^{\top} \partial_{\mathbf{p}} \mathbf{R}_k(\mathbf{U}_k; \mathbf{U}_{k-1}, \mathbf{p})$$

où  $\mathbf{U}_k$  est la solution directe et  $\tilde{\mathbf{U}}_k$  la solution adjointe.



## Etat adjoint

- Gradient de la fonction-coût:

$$\mathcal{J}'(\mathbf{p}) = \partial_{\mathbf{p}}\mathcal{L} = \sum_{k=1}^N \tilde{\mathbf{U}}_k^{\top} \partial_{\mathbf{p}} \mathbf{R}_k(\mathbf{U}_k; \mathbf{U}_{k-1}, \mathbf{p})$$

où  $\mathbf{U}_k$  est la solution directe et  $\tilde{\mathbf{U}}_k$  la solution adjointe.

- Principales caractéristiques de la méthode de l'état adjoint:
  - Exploite un raccourci (calcul de l'état adjoint) permettant d'éviter complètement le calcul de  $\mathbf{U}'_{\mathbf{p}}$ ;
  - Efficacité optimale pour évaluer  $\mathcal{J}'$ ;
  - Non adaptée à l'évaluation de matrices jacobiniennes (pour Gauss-Newton ou Marquardt-Levenberg).

## Dérivation analytique directe (problème direct non-linéaire)

Dérivée de  $\mathcal{J}$  formulée par dérivation composée:

$$\mathcal{J}' = \sum_{k=1}^N J'(\mathbf{U}_k) \mathbf{U}'_k(\mathbf{p})$$

Nécessite évaluation des dérivées  $\mathbf{U}'_k$ :

$$\mathbf{K}_k(\mathbf{p}) \mathbf{U}'_k(\mathbf{p}) = -\mathbf{K}_{k,k-1}(\mathbf{p}) \mathbf{U}'_{k-1}(\mathbf{p}) - \partial_{\mathbf{p}} \mathbf{R}_k \quad (k = 1, 2, \dots, N-1)$$

## Dérivation analytique directe (problème direct non-linéaire)

Dérivée de  $\mathcal{J}$  formulée par dérivation composée:

$$\mathcal{J}' = \sum_{k=1}^N J'(\mathbf{U}_k) \mathbf{U}'_k(\mathbf{p})$$

Nécessite évaluation des dérivées  $\mathbf{U}'_k$ :

$$\mathbf{K}_k(\mathbf{p}) \mathbf{U}'_k(\mathbf{p}) = -\mathbf{K}_{k,k-1}(\mathbf{p}) \mathbf{U}'_{k-1}(\mathbf{p}) - \partial_{\mathbf{p}} \mathbf{R}_k \quad (k = 1, 2, \dots, N-1)$$

- Problème incrémental linéaire, de matrice la rigidité tangente  $\mathbf{K}_k(\mathbf{p})$  convergée issue de Newton-Raphson;
- A chaque pas de temps:
  - calcul de  $\mathbf{U}_k$  (non-linéaire, itératif)
  - calcul de  $\mathbf{U}'_k(\mathbf{p})$  (linéaire)
  - calcul de la contribution de  $\mathbf{U}_k, \mathbf{U}'_k(\mathbf{p})$  à  $\mathcal{J}$  et  $\mathcal{J}'$
- Cette approche permet le calcul de matrices jacobiennes  $\mathbf{U}'_k(\mathbf{p})$  requises par les méthodes de Gauss-Newton ou Marquardt-Levenberg.
- Stockage des histoires (solution directe, matrices tangentes): **non nécessaire**

# Plan général

**Partie 1:** Généralités

**Partie 2:** Identification en mécanique des solides

**Partie 3:** Outils: algèbre linéaire, moindres carrés, optimisation

**Partie 4:** Problèmes mal posés et leur régularisation

**Partie 5:** Approches bayésiennes

### 9. Exemples de problèmes mal posés

### 10. Régularisation

Notion de régularisation

Régularisation optimale

Exemples de problèmes inverses régularisés

### 11. Etude d'un exemple unidimensionnel

Formulation par dérivation numérique des données

Formulation par minimisation d'écart mesure-calcul

### 12. Exemple tridimensionnel (Epanomeritakis et coll., 2008)

## 9. Exemples de problèmes mal posés

### 10. Régularisation

Notion de régularisation

Régularisation optimale

Exemples de problèmes inverses régularisés

### 11. Etude d'un exemple unidimensionnel

Formulation par dérivation numérique des données

Formulation par minimisation d'écart mesure-calcul

### 12. Exemple tridimensionnel (Epanomeritakis et coll., 2008)

## Equation intégrale (“de Fredholm de première espèce”)

- Equations linéaires de la forme

$$\mathcal{K}\phi = f \quad \mathcal{K}\phi(x) := \int_{\Omega} K(x, y)\phi(y) dy \quad (x \in \Omega)$$

avec  $K \in L^2(\Omega \times \Omega)$  (*noyau* de l'opérateur linéaire  $\mathcal{K}$ ),  $f \in L^2(\Omega)$  (donnée) et  $\phi \in L^2(\Omega)$  (inconnue).

## Equation intégrale (“de Fredholm de première espèce”)

- Equations linéaires de la forme

$$\mathcal{K}\phi = f \quad \mathcal{K}\phi(x) := \int_{\Omega} K(x, y)\phi(y) dy \quad (x \in \Omega)$$

avec  $K \in L^2(\Omega \times \Omega)$  (noyau de l'opérateur linéaire  $\mathcal{K}$ ),  $f \in L^2(\Omega)$  (donnée) et  $\phi \in L^2(\Omega)$  (inconnue).

- Rencontrée pour de nombreux P.I.: gravimétrie, déconvolution, P.I. *linéarisés*
- Exemple d'opérateur linéaire  $\mathcal{K}$  *compact*, dont l'inverse n'est pas continu



## Equation intégrale (“de Fredholm de première espèce”)

- Equations linéaires de la forme

$$\mathcal{K}\phi = f \quad \mathcal{K}\phi(x) := \int_{\Omega} K(x, y)\phi(y) dy \quad (x \in \Omega)$$

avec  $K \in L^2(\Omega \times \Omega)$  (noyau de l'opérateur linéaire  $\mathcal{K}$ ),  $f \in L^2(\Omega)$  (donnée) et  $\phi \in L^2(\Omega)$  (inconnue).

- Rencontrée pour de nombreux P.I.: gravimétrie, déconvolution, P.I. *linéarisés*
- Exemple d'opérateur linéaire  $\mathcal{K}$  *compact*, dont l'inverse n'est pas continu
- Existence d'une solution (pour  $K(x, y)$  symétrique):  $\phi$  cherché de la forme

$$\phi(y) = \sum_{k \geq 1} a_k \phi_k(y)$$

où  $\phi_k$  (solutions propres normalisées):  
et  $a_k$  (coefficients de Fourier):

$$\mathcal{K}\phi_k = \lambda_k \phi_k \text{ et } (\phi_k, \phi_\ell)_\Omega = \delta_{k\ell}$$

$$a_k = \lambda_k^{-1} (\phi_k, f)_\Omega$$

## Equation intégrale (“de Fredholm de première espèce”)

- Equations linéaires de la forme

$$\mathcal{K}\phi = f \quad \mathcal{K}\phi(x) := \int_{\Omega} K(x, y)\phi(y) dy \quad (x \in \Omega)$$

avec  $K \in L^2(\Omega \times \Omega)$  (noyau de l'opérateur linéaire  $\mathcal{K}$ ),  $f \in L^2(\Omega)$  (donnée) et  $\phi \in L^2(\Omega)$  (inconnue).

- Rencontrée pour de nombreux P.I.: gravimétrie, déconvolution, P.I. *linéarisés*
- Exemple d'opérateur linéaire  $\mathcal{K}$  *compact*, dont l'inverse n'est pas continu
- Existence d'une solution (pour  $K(x, y)$  symétrique):  $\phi$  cherché de la forme

$$\phi(y) = \sum_{k \geq 1} a_k \phi_k(y)$$

où  $\phi_k$  (solutions propres normalisées):  $\mathcal{K}\phi_k = \lambda_k \phi_k$  et  $(\phi_k, \phi_\ell)_\Omega = \delta_{k\ell}$   
 et  $a_k$  (coefficients de Fourier):  $a_k = \lambda_k^{-1}(\phi_k, f)_\Omega$

- Condition d'existence:

$$\sum_{k \geq 1} a_k^2 < +\infty$$

- Si elle existe, cette solution n'est pas nécessairement unique.
- **Opérateurs compacts:**  $\lambda_k \rightarrow 0$  si  $k \rightarrow +\infty$ .

## Equation intégrale de Fredholm de première espèce: cas 1D

Caractère instable de la solution: cas 1D ( $\Omega = [a, b]$ ),  $\phi$  solution de  $\mathcal{K}\phi = f$ .

- solution perturbée  $\hat{\phi}(y) := \phi(y) + A \sin \omega y$ . Alors:

$$\|\phi - \hat{\phi}\|_{L^2([a,b])}^2 = \int_a^b A^2 \sin^2 \omega y \, dy = \frac{1}{2} A^2 (b - a)$$

## Equation intégrale de Fredholm de première espèce: cas 1D

Caractère instable de la solution: cas 1D ( $\Omega = [a, b]$ ),  $\phi$  solution de  $\mathcal{K}\phi = f$ .

- solution perturbée  $\hat{\phi}(y) := \phi(y) + A \sin \omega y$ . Alors:

$$\|\phi - \hat{\phi}\|_{L^2([a,b])}^2 = \int_a^b A^2 \sin^2 \omega y \, dy = \frac{1}{2} A^2 (b - a)$$

$$\|f - \mathcal{K}\hat{\phi}\|_{L^2([a,b])}^2 = \|\mathcal{K}(\phi - \hat{\phi})\|_{L^2([a,b])}^2 = \int_c^d \left| \int_a^b K(x, y) A \sin \omega y \, dy \right|^2 dx$$

## Equation intégrale de Fredholm de première espèce: cas 1D

Caractère instable de la solution: cas 1D ( $\Omega = [a, b]$ ),  $\phi$  solution de  $\mathcal{K}\phi = f$ .

- solution perturbée  $\hat{\phi}(y) := \phi(y) + A \sin \omega y$ . Alors:

$$\|\phi - \hat{\phi}\|_{L^2([a,b])}^2 = \int_a^b A^2 \sin^2 \omega y \, dy = \frac{1}{2} A^2 (b - a)$$

$$\|f - \mathcal{K}\hat{\phi}\|_{L^2([a,b])}^2 = \|\mathcal{K}(\phi - \hat{\phi})\|_{L^2([a,b])}^2 = \int_c^d \left| \int_a^b K(x, y) A \sin \omega y \, dy \right|^2 dx$$

- Théorème de Riemann-Lebesgue:

$$(\forall x) \quad \lim_{\omega \rightarrow \infty} \left| \int_a^b K(x, y) A \sin \omega y \, dy \right| = 0$$

## Equation intégrale de Fredholm de première espèce: cas 1D

Caractère instable de la solution: cas 1D ( $\Omega = [a, b]$ ),  $\phi$  solution de  $\mathcal{K}\phi = f$ .

- solution perturbée  $\hat{\phi}(y) := \phi(y) + A \sin \omega y$ . Alors:

$$\|\phi - \hat{\phi}\|_{L^2([a,b])}^2 = \int_a^b A^2 \sin^2 \omega y \, dy = \frac{1}{2} A^2 (b - a)$$

$$\|f - \mathcal{K}\hat{\phi}\|_{L^2([a,b])}^2 = \|\mathcal{K}(\phi - \hat{\phi})\|_{L^2([a,b])}^2 = \int_c^d \left| \int_a^b K(x, y) A \sin \omega y \, dy \right|^2 dx$$

- Théorème de Riemann-Lebesgue:

$$(\forall x) \quad \lim_{\omega \rightarrow \infty} \left| \int_a^b K(x, y) A \sin \omega y \, dy \right| = 0$$

- Conséquence:

$$\|\phi - \hat{\phi}\|_{L^2([a,b])} = O(A), \quad \text{mais} \quad \lim_{\omega \rightarrow \infty} \|f - \mathcal{K}\hat{\phi}\|_{L^2([a,b])} = 0$$

## Equation intégrale de Fredholm de première espèce: cas 1D

Caractère instable de la solution: cas 1D ( $\Omega = [a, b]$ ),  $\phi$  solution de  $\mathcal{K}\phi = f$ .

- solution perturbée  $\hat{\phi}(y) := \phi(y) + A \sin \omega y$ . Alors:

$$\|\phi - \hat{\phi}\|_{L^2([a,b])}^2 = \int_a^b A^2 \sin^2 \omega y \, dy = \frac{1}{2} A^2 (b - a)$$

$$\|f - \mathcal{K}\hat{\phi}\|_{L^2([a,b])}^2 = \|\mathcal{K}(\phi - \hat{\phi})\|_{L^2([a,b])}^2 = \int_c^d \left| \int_a^b K(x, y) A \sin \omega y \, dy \right|^2 dx$$

- Théorème de Riemann-Lebesgue:

$$(\forall x) \quad \lim_{\omega \rightarrow \infty} \left| \int_a^b K(x, y) A \sin \omega y \, dy \right| = 0$$

- Conséquence:

$$\|\phi - \hat{\phi}\|_{L^2([a,b])} = O(A), \quad \text{mais} \quad \lim_{\omega \rightarrow \infty} \|f - \mathcal{K}\hat{\phi}\|_{L^2([a,b])} = 0$$

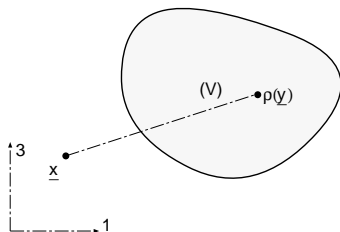
Problème  $\mathcal{K}\phi = f$  mal posé à deux titres:

- Existence et unicité non garantis (dépend de  $K$  et  $f$ )
- Instabilité vis-à-vis de petites perturbations de  $f$ .

## Equation intégrale de Fredholm de première espèce: exemples

## Gravimétrie

$$g_3(\underline{x}) = \mathcal{G} \frac{\partial}{\partial x_3} \int_V \frac{1}{\|\underline{x} - \underline{y}\|} \rho(\underline{y}) dV$$



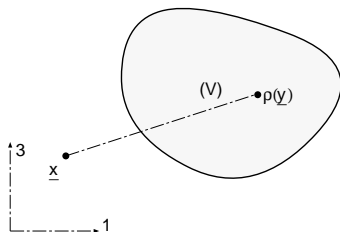


## Equation intégrale de Fredholm de première espèce: exemples

## Gravimétrie

$$g_3(\underline{x}) = \mathcal{G} \frac{\partial}{\partial x_3} \int_V \frac{1}{\|\underline{x} - \underline{y}\|} \rho(\underline{y}) dV$$

## Déconvolution (cf. plus loin)



## Equation intégrale de Fredholm de première espèce: exemples

## Gravimétrie

$$g_3(\underline{x}) = \mathcal{G} \frac{\partial}{\partial x_3} \int_V \frac{1}{\|\underline{x} - \underline{y}\|} \rho(\underline{y}) dV$$

## Déconvolution (cf. plus loin)

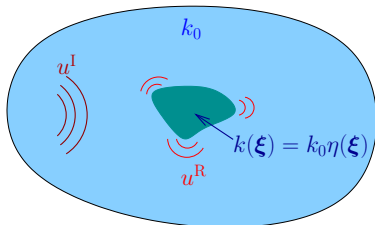
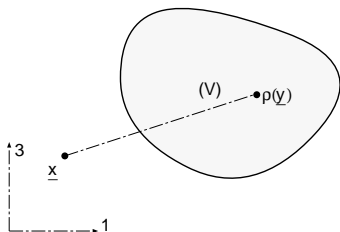
**Diffraction inverse linéarisée.** Acoustique linéaire ( $\Delta u + k^2(\underline{x})u = 0$ ); hypothèse de linéarisation: faible contraste (approximation de Born), i.e.

$$\eta = k^2(\underline{x})/k_0 - 1 \ll 1$$

$$u(\underline{x}) = u^I(\underline{x}) + k_0^2 \int \frac{e^{ik_0\|\underline{\xi}-\underline{x}\|}}{4\pi\|\underline{\xi}-\underline{x}\|} \eta(\underline{\xi})u^I(\underline{\xi}) dV_{\underline{\xi}}$$

→  $u^I$ : champ incident (supposé connu)

→  $u$ : champ total



$$u = u^I + u^R$$

## Dérivation (numérique)

- Rappel: un opérateur linéaire  $\mathcal{K} : E \rightarrow F$  est continu ssi il existe  $C \in \mathbb{R}_+$  t.q.

$$(\forall u \in E) \quad \|\mathcal{K}u\|_F \leq C\|u\|_E$$

## Dérivation (numérique)

- Rappel: un opérateur linéaire  $\mathcal{K} : E \rightarrow F$  est continu ssi il existe  $C \in \mathbb{R}_+$  t.q.

$$(\forall u \in E) \quad \|\mathcal{K}u\|_F \leq C\|u\|_E$$

- L'opérateur de dérivation ( $\mathcal{K} := d/dx$ ) n'est pas continu. Exemple:

$$\hat{f}(x) = f(x) + \varepsilon \sin \omega x \quad \implies \quad \frac{d}{dx} \hat{f}(x) = \frac{d}{dx} f(x) + \varepsilon \omega \cos \omega x$$

ce qui entraîne

$$\|\hat{f} - f\|_{L^2([0,1])}^2 = \frac{1}{2} \varepsilon^2, \quad \left\| \frac{d}{dx} \hat{f} - \frac{d}{dx} f \right\|_{L^2([0,1])}^2 = \frac{1}{2} \varepsilon^2 \omega^2$$

## Dérivation (numérique)

- Rappel: un opérateur linéaire  $\mathcal{K} : E \rightarrow F$  est continu ssi il existe  $C \in \mathbb{R}_+$  t.q.

$$(\forall u \in E) \quad \|\mathcal{K}u\|_F \leq C\|u\|_E$$

- L'opérateur de dérivation ( $\mathcal{K} := d/dx$ ) n'est pas continu. Exemple:

$$\hat{f}(x) = f(x) + \varepsilon \sin \omega x \quad \implies \quad \frac{d}{dx} \hat{f}(x) = \frac{d}{dx} f(x) + \varepsilon \omega \cos \omega x$$

ce qui entraîne

$$\|\hat{f} - f\|_{L^2([0,1])}^2 = \frac{1}{2} \varepsilon^2, \quad \left\| \frac{d}{dx} \hat{f} - \frac{d}{dx} f \right\|_{L^2([0,1])}^2 = \frac{1}{2} \varepsilon^2 \omega^2$$

- Recherche de  $z(x) = f^{(n)}(x)$  (avec  $f(0) = f'(0) = \dots = f^{(n-1)}(0) = 0$ ) se ramène à l'équation intégrale ("de Volterra de première espèce")

$$f(x) = \frac{1}{(n-1)!} \int_0^x (x-t)^{(n-1)} z(t) dt$$

## Dérivation (numérique)

- Rappel: un opérateur linéaire  $\mathcal{K} : E \rightarrow F$  est continu ssi il existe  $C \in \mathbb{R}_+$  t.q.

$$\boxed{(\forall u \in E) \|\mathcal{K}u\|_F \leq C\|u\|_E}$$

- L'opérateur de dérivation ( $\mathcal{K} := d/dx$ ) n'est pas continu. Exemple:

$$\hat{f}(x) = f(x) + \varepsilon \sin \omega x \quad \implies \quad \frac{d}{dx} \hat{f}(x) = \frac{d}{dx} f(x) + \varepsilon \omega \cos \omega x$$

ce qui entraîne

$$\|\hat{f} - f\|_{L^2([0,1])}^2 = \frac{1}{2} \varepsilon^2, \quad \left\| \frac{d}{dx} \hat{f} - \frac{d}{dx} f \right\|_{L^2([0,1])}^2 = \frac{1}{2} \varepsilon^2 \omega^2$$

- Recherche de  $z(x) = f^{(n)}(x)$  (avec  $f(0) = f'(0) = \dots = f^{(n-1)}(0) = 0$ ) se ramène à l'équation intégrale ("de Volterra de première espèce")

$$f(x) = \frac{1}{(n-1)!} \int_0^x (x-t)^{(n-1)} z(t) dt$$

Dérivation = pb. mathématique mal posé (sensibilité de  $df/dx$  aux erreurs sur  $f$ ).

## Dérivation (numérique)

Dérivation numérique d'une fonction bruitée:

$$\hat{f}(x) = f(x) + b(x)$$

$b(x)$  : (bruit)

$$D_h \hat{f}(x) = \frac{1}{2h} [f(x+h) - f(x-h)]$$

(différence finie centrée)

## Dérivation (numérique)

Dérivation numérique d'une fonction bruitée:

$$\hat{f}(x) = f(x) + b(x)$$

$b(x)$  : (bruit)

$$D_h \hat{f}(x) = \frac{1}{2h} [f(x+h) - f(x-h)]$$

(différence finie centrée)

Hypothèse:  $f''$  est Lipschitz (de constante  $L$ ) sur  $[x-h, x+h]$  et  $|b(x)| \leq B(x, h)$  sur  $[x-h, x+h]$ . Alors

$$|D_h \hat{f}(x) - f'(x)| \leq Lh^2 + \frac{1}{h} B(x, h)$$



## Dérivation (numérique)

Dérivation numérique d'une fonction bruitée:

$$\hat{f}(x) = f(x) + b(x)$$

$b(x)$  : (bruit)

$$D_h \hat{f}(x) = \frac{1}{2h} [f(x+h) - f(x-h)]$$

(différence finie centrée)

Hypothèse:  $f''$  est Lipschitz (de constante  $L$ ) sur  $[x-h, x+h]$  et  $|b(x)| \leq B(x, h)$  sur  $[x-h, x+h]$ . Alors

$$|D_h \hat{f}(x) - f'(x)| \leq Lh^2 + \frac{1}{h} B(x, h)$$

En présence de bruit, raffiner (réduire le pas  $h$  d'échantillonnage de  $f$ ) dégrade la précision sur  $f'$

## Déconvolution

Equation intégrale de première espèce de la forme

$$f(t) = \int_0^T k(t - \tau)\phi(\tau) d\tau \quad (\star)$$

## Déconvolution

Equation intégrale de première espèce de la forme

$$f(t) = \int_0^T k(t - \tau)\phi(\tau) d\tau \quad (\star)$$

### Réponse linéaire d'un instrument de mesure:

- $k(z) = \delta(z)$  (instrument parfait)
- $k(z) = A \exp(-z^2/2b)$  (brouillage d'images dû à turbulences atmosphériques)
- ...
- **Déconvolution** (i.e. résolution de  $(\star)$ ) pour restauration d'images brouillées

## Déconvolution

Equation intégrale de première espèce de la forme

$$f(t) = \int_0^T k(t - \tau)\phi(\tau) d\tau \quad (\star)$$

### Réponse linéaire d'un instrument de mesure:

- $k(z) = \delta(z)$  (instrument parfait)
- $k(z) = A \exp(-z^2/2b)$  (brouillage d'images dû à turbulences atmosphériques)
- ...
- **Déconvolution** (i.e. résolution de  $(\star)$ ) pour restauration d'images brouillées

### Réponse linéaire d'un système dynamique:

- $k(\mathbf{x}, t)$ : réponse en  $(\mathbf{x}, t)$  à une excitation ponctuelle impulsionnelle  $\delta(\mathbf{x})\delta(t)$  dans un milieu infini
- Par superposition, pour excitation quelconque  $\phi(\xi, \tau)$ :

$$u(\mathbf{x}, t) = \int_0^T \int_{\mathbb{R}^3} k(\xi - \mathbf{x}, \tau - t)\phi(\xi, \tau) dV_\xi d\tau$$

- **Identification de source** par déconvolution

### Convolution (spatiale ou temporelle): exprime invariance par translation

# Déconvolution

Exemple: calcul de  $K_{I,II}(t)$  par déconvolution d'observables.

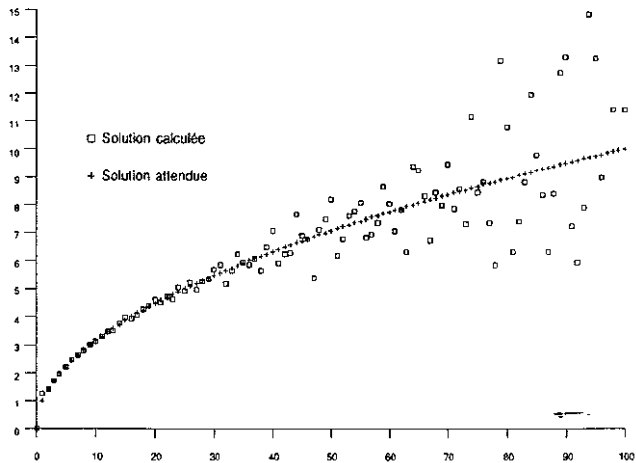
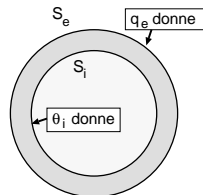


fig 2.4

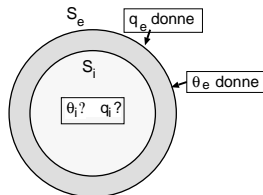
Déconvolution simple de données perturbées

# Problèmes de Cauchy

- Problèmes aux limites incorrectement posés
- Application: reconstruction de grandeurs sur des frontières inaccessibles
- Exemple: température et flux en paroi interne.



Probleme direct



Probleme inverse

## Exemple: problème de Cauchy pour l'équation de Laplace

- Problème aux limites incorrectement posé (CL surabondantes, absence de conditions à l'infini):

$$\Delta\phi \equiv \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \phi = 0 \quad (x \in \mathbb{R}_+, y \in \mathbb{R}), \quad \begin{cases} \phi(0, y) = f(y) & (y \in \mathbb{R}) \\ \frac{\partial \phi}{\partial x}(0, y) = g(y) & (y \in \mathbb{R}) \end{cases}$$

Si  $f(y) = g(y) = 0$ , solution exacte  $\phi(x, y) = 0$ .

## Exemple: problème de Cauchy pour l'équation de Laplace

- Problème aux limites incorrectement posé (CL surabondantes, absence de conditions à l'infini):

$$\Delta\phi \equiv \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \phi = 0 \quad (x \in \mathbb{R}_+, y \in \mathbb{R}), \quad \begin{cases} \phi(0, y) = f(y) & (y \in \mathbb{R}) \\ \frac{\partial \phi}{\partial x}(0, y) = g(y) & (y \in \mathbb{R}) \end{cases}$$

Si  $f(y) = g(y) = 0$ , solution exacte  $\phi(x, y) = 0$ .

- Données perturbées:  $\hat{f}(y) = 0$  et  $\hat{g}(y) = a^{-1} \sin ay$  ( $a \geq 0$  fixé)
- Solution perturbée:

$$\hat{\phi}(x, y) = a^{-2} \sin ay \operatorname{sh} ax$$



## Exemple: problème de Cauchy pour l'équation de Laplace

- Problème aux limites incorrectement posé (CL surabondantes, absence de conditions à l'infini):

$$\Delta\phi \equiv \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \phi = 0 \quad (x \in \mathbb{R}_+, y \in \mathbb{R}), \quad \begin{cases} \phi(0, y) = f(y) & (y \in \mathbb{R}) \\ \frac{\partial \phi}{\partial x}(0, y) = g(y) & (y \in \mathbb{R}) \end{cases}$$

Si  $f(y) = g(y) = 0$ , solution exacte  $\phi(x, y) = 0$ .

- Données perturbées:  $\hat{f}(y) = 0$  et  $\hat{g}(y) = a^{-1} \sin ay$  ( $a \geq 0$  fixé)
- Solution perturbée:

$$\hat{\phi}(x, y) = a^{-2} \sin ay \operatorname{sh} ax$$

On remarque que, pour tout  $x > 0$  fixé:

$$\lim_{a \rightarrow \infty} a^{-2} \operatorname{sh} ax = \infty$$

Comportement instable !

## Problème rétrograde pour l'équation de la chaleur

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho c \frac{\partial u}{\partial t} - \operatorname{div}(k \nabla u) = 0 \\ u(\mathbf{x}, T) = u_T(\mathbf{x}) \quad (\text{cond. finale à } T > 0) \\ \dots \quad (\text{cond. aux limites}) \end{array} \right.$$

Problème: déterminer  $u_0(\mathbf{x}) = u(\mathbf{x}, 0)$ .

Cas 1D (transformée de Fourier  $x \leftrightarrow \omega$ ):

$$u(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{-\omega^2(\rho c)^{-1}k(t-T)} e^{i\omega x} \hat{u}_T(\omega) d\omega$$

- Intégrale généralement *divergente* pour  $t < T$ .
- Si intégrale convergente à  $t < T$  fixé (ex.  $\hat{u}_T(\omega)$  de support borné), croissance  $O(e^{T-t})$

# Problème rétrograde pour l'équation de la chaleur

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho c \frac{\partial u}{\partial t} - \operatorname{div}(k \nabla u) = 0 \\ u(\mathbf{x}, T) = u_T(\mathbf{x}) \quad (\text{cond. finale à } T > 0) \\ \dots \quad (\text{cond. aux limites}) \end{array} \right.$$

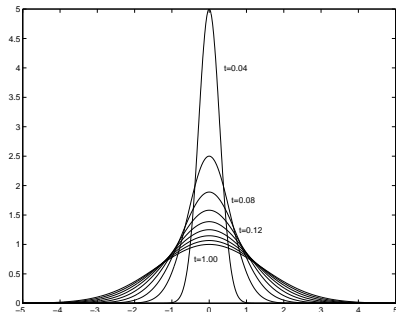
Problème: déterminer  $u_0(\mathbf{x}) = u(\mathbf{x}, 0)$ .

Cas 1D (transformée de Fourier  $x \leftrightarrow \omega$ ):

$$u(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{-\omega^2(\rho c)^{-1}k(t-T)} e^{i\omega x} \hat{u}_T(\omega) d\omega$$

- Intégrale généralement *divergente* pour  $t < T$ .
- Si intégrale convergente à  $t < T$  fixé (ex.  $\hat{u}_T(\omega)$  de support borné), croissance  $O(e^{T-t})$

**Exemple et interprétation:** diffusion d'une singularité initiale.



## Problème rétrograde pour l'équation de la chaleur

$$\begin{aligned}\kappa \partial_{xx} u - \partial_t u &= 0 & (0 \leq t \leq T, 0 \leq x \leq \ell) & \quad \kappa := k/(\rho c) \\ u(0, t) = u(\ell, t) &= 0 & (0 \leq t \leq T) \\ u(x, 0) &= u_0(x) & (0 \leq x \leq \ell)\end{aligned}$$

## Problème rétrograde pour l'équation de la chaleur

$$\begin{aligned}\kappa \partial_{xx} u - \partial_t u &= 0 & (0 \leq t \leq T, 0 \leq x \leq \ell) & \quad \kappa := k/(\rho c) \\ u(0, t) = u(\ell, t) &= 0 & (0 \leq t \leq T) \\ u(x, 0) &= u_0(x) & (0 \leq x \leq \ell)\end{aligned}$$

Donnée initiale: 
$$u_0(x) = \sum_{n \geq 0} a_n \sin \frac{n\pi x}{\ell}, \quad a_n = \frac{2}{\ell} \int_0^\ell u_0(x) \sin \frac{n\pi x}{\ell} dx$$

Température finale: 
$$u(x, T) = \sum_{n \geq 0} b_n \sin \frac{n\pi x}{\ell}, \quad b_n = a_n \underbrace{e^{-(n\pi)^2 \kappa T / \ell^2}}_{\lambda_n}$$

## Problème rétrograde pour l'équation de la chaleur

$$\begin{aligned} \kappa \partial_{xx} u - \partial_t u &= 0 & (0 \leq t \leq T, 0 \leq x \leq \ell) & \quad \kappa := k/(\rho c) \\ u(0, t) = u(\ell, t) &= 0 & (0 \leq t \leq T) \\ u(x, 0) &= u_0(x) & (0 \leq x \leq \ell) \end{aligned}$$

Donnée initiale: 
$$u_0(x) = \sum_{n \geq 0} a_n \sin \frac{n\pi x}{\ell}, \quad a_n = \frac{2}{\ell} \int_0^\ell u_0(x) \sin \frac{n\pi x}{\ell} dx$$

Température finale: 
$$u(x, T) = \sum_{n \geq 0} b_n \sin \frac{n\pi x}{\ell}, \quad b_n = a_n \underbrace{e^{-(n\pi)^2 \kappa T / \ell^2}}_{\lambda_n}$$

- Reconstruction de  $u_0$  connaissant  $u(x, T)$  (inversion explicite):

$$u_0(x) = \sum_{n \geq 0} \lambda_n^{-1} b_n \sin \frac{n\pi x}{\ell} \quad \lambda_n^{-1} = O(e^{Cn^2})!$$

## Problème rétrograde pour l'équation de la chaleur

$$\begin{aligned} \kappa \partial_{xx} u - \partial_t u &= 0 & (0 \leq t \leq T, 0 \leq x \leq \ell) & \quad \kappa := k/(\rho c) \\ u(0, t) = u(\ell, t) &= 0 & (0 \leq t \leq T) \\ u(x, 0) &= u_0(x) & (0 \leq x \leq \ell) \end{aligned}$$

Donnée initiale:  $u_0(x) = \sum_{n \geq 0} a_n \sin \frac{n\pi x}{\ell}, \quad a_n = \frac{2}{\ell} \int_0^\ell u_0(x) \sin \frac{n\pi x}{\ell} dx$

Température finale:  $u(x, T) = \sum_{n \geq 0} b_n \sin \frac{n\pi x}{\ell}, \quad b_n = a_n \underbrace{e^{-(n\pi)^2 \kappa T / \ell^2}}_{\lambda_n}$

- Reconstruction de  $u_0$  connaissant  $u(x, T)$  (inversion explicite):

$$u_0(x) = \sum_{n \geq 0} \lambda_n^{-1} b_n \sin \frac{n\pi x}{\ell} \quad \lambda_n^{-1} = O(e^{Cn^2})!$$

- Equation intégrale:  $u(\cdot, T) = \mathcal{K}u_0$ , soit

$$u(x, T) = \int_0^\ell K(x, y) u_0(y) dy, \quad K(x, y) := \sum_{n \geq 1} \lambda_n \sin \frac{n\pi x}{\ell} \sin \frac{n\pi y}{\ell}$$

## Problème rétrograde pour l'équation de la chaleur

$$\begin{aligned} \kappa \partial_{xx} u - \partial_t u &= 0 & (0 \leq t \leq T, 0 \leq x \leq \ell) & \quad \kappa := k/(\rho c) \\ u(0, t) = u(\ell, t) &= 0 & (0 \leq t \leq T) \\ u(x, 0) &= u_0(x) & (0 \leq x \leq \ell) \end{aligned}$$

Donnée initiale: 
$$u_0(x) = \sum_{n \geq 0} a_n \sin \frac{n\pi x}{\ell}, \quad a_n = \frac{2}{\ell} \int_0^\ell u_0(x) \sin \frac{n\pi x}{\ell} dx$$

Température finale: 
$$u(x, T) = \sum_{n \geq 0} b_n \sin \frac{n\pi x}{\ell}, \quad b_n = a_n \underbrace{e^{-(n\pi)^2 \kappa T / \ell^2}}_{\lambda_n}$$

- Reconstruction de  $u_0$  connaissant  $u(x, T)$  (inversion explicite):

$$u_0(x) = \sum_{n \geq 0} \lambda_n^{-1} b_n \sin \frac{n\pi x}{\ell} \quad \lambda_n^{-1} = O(e^{Cn^2})!$$

- Equation intégrale:  $u(\cdot, T) = \mathcal{K}u_0$ , soit

$$u(x, T) = \int_0^\ell K(x, y) u_0(y) dy, \quad K(x, y) := \sum_{n \geq 1} \lambda_n \sin \frac{n\pi x}{\ell} \sin \frac{n\pi y}{\ell}$$

- Système singulier de  $\mathcal{K}$ :  $(u_n, v_n, \lambda_n)$  avec  $u_n(x) = v_n(x) = \sin \frac{n\pi x}{\ell}$



## Intégration en temps discret: cas direct (bien posé)

- Formulation semi-discrétisée en espace (MEF):

$$C\dot{\theta} + K\theta = 0 \quad (C > 0, K \geq 0)$$

## Intégration en temps discret: cas direct (bien posé)

- Formulation semi-discrétisée en espace (MEF):

$$\mathbf{C}\dot{\boldsymbol{\theta}} + \mathbf{K}\boldsymbol{\theta} = \mathbf{0} \quad (\mathbf{C} > 0, \mathbf{K} \geq 0)$$

Evolution en temps discret (Crank-Nicolson, pas de temps  $h = \Delta t$ ):

$$[2\mathbf{C} + h\mathbf{K}]\boldsymbol{\theta}^{n+1} - [2\mathbf{C} - h\mathbf{K}]\boldsymbol{\theta}^n = \mathbf{0}$$

## Intégration en temps discret: cas direct (bien posé)

- Formulation semi-discrétisée en espace (MEF):

$$\mathbf{C}\dot{\boldsymbol{\theta}} + \mathbf{K}\boldsymbol{\theta} = \mathbf{0} \quad (\mathbf{C} > 0, \mathbf{K} \geq 0)$$

Evolution en temps discret (Crank-Nicolson, pas de temps  $h = \Delta t$ ):

$$[2\mathbf{C} + h\mathbf{K}]\boldsymbol{\theta}^{n+1} - [2\mathbf{C} - h\mathbf{K}]\boldsymbol{\theta}^n = \mathbf{0}$$

- Schéma d'intégration en temps discret **direct**:

$$\boldsymbol{\theta}^{n+1} = [2\mathbf{C} + h\mathbf{K}]^{-1}[2\mathbf{C} - h\mathbf{K}]\boldsymbol{\theta}^n$$

Matrice résolvante:

$$\mathbf{R}^+ = [2\mathbf{C} + h\mathbf{K}]^{-1}[2\mathbf{C} - h\mathbf{K}] = \mathbf{I} - [2\mathbf{C} + h\mathbf{K}]^{-1}(2h\mathbf{K})$$

## Intégration en temps discret: cas direct (bien posé)

- Formulation semi-discrétisée en espace (MEF):

$$C\dot{\theta} + K\theta = 0 \quad (C > 0, K \geq 0)$$

Evolution en temps discret (Crank-Nicolson, pas de temps  $h = \Delta t$ ):

$$[2C + hK]\theta^{n+1} - [2C - hK]\theta^n = 0$$

- Schéma d'intégration en temps discret **direct**:

$$\theta^{n+1} = [2C + hK]^{-1}[2C - hK]\theta^n$$

Matrice résolvante:

$$R^+ = [2C + hK]^{-1}[2C - hK] = I - [2C + hK]^{-1}(2hK)$$

Valeurs propres de  $R^+$  toutes dans  $[-1, 1] \implies$  pas d'amplification d'erreur par le schéma d'intégration en temps (schéma direct **inconditionnellement stable**).

## Intégration en temps discret: cas rétrograde (mal posé)

- Formulation semi-discrétisée en espace (MEF):

$$C\dot{\theta} + K\theta = 0 \quad (C > 0, K \geq 0)$$

## Intégration en temps discret: cas rétrograde (mal posé)

- Formulation semi-discrétisée en espace (MEF):

$$C\dot{\theta} + K\theta = 0 \quad (C > 0, K \geq 0)$$

Evolution en temps discret (Crank-Nicolson):

$$[2C + hK]\theta^{n+1} - [2C - hK]\theta^n = 0$$

## Intégration en temps discret: cas rétrograde (mal posé)

- Formulation semi-discrétisée en espace (MEF):

$$\mathbf{C}\dot{\boldsymbol{\theta}} + \mathbf{K}\boldsymbol{\theta} = \mathbf{0} \quad (\mathbf{C} > 0, \mathbf{K} \geq 0)$$

Evolution en temps discret (Crank-Nicolson):

$$[2\mathbf{C} + h\mathbf{K}]\boldsymbol{\theta}^{n+1} - [2\mathbf{C} - h\mathbf{K}]\boldsymbol{\theta}^n = \mathbf{0}$$

- Schéma d'intégration en temps discret **rétrograde**:

$$\boldsymbol{\theta}^n = [2\mathbf{C} - h\mathbf{K}]^{-1}[2\mathbf{C} + h\mathbf{K}]\boldsymbol{\theta}^{n+1}$$

Matrice résolvante:

$$\mathbf{R}^- = [2\mathbf{C} - h\mathbf{K}]^{-1}[2\mathbf{C} + h\mathbf{K}] = \mathbf{I} + [2\mathbf{C} - h\mathbf{K}]^{-1}(2h\mathbf{K})$$

## Intégration en temps discret: cas rétrograde (mal posé)

- Formulation semi-discrétisée en espace (MEF):

$$C\dot{\theta} + K\theta = 0 \quad (C > 0, K \geq 0)$$

Evolution en temps discret (Crank-Nicolson):

$$[2C + hK]\theta^{n+1} - [2C - hK]\theta^n = 0$$

- Schéma d'intégration en temps discret **rétrograde**:

$$\theta^n = [2C - hK]^{-1}[2C + hK]\theta^{n+1}$$

Matrice résolvante:

$$R^- = [2C - hK]^{-1}[2C + hK] = I + [2C - hK]^{-1}(2hK)$$

Certaines valeurs propres de  $R^-$  hors de  $[-1, 1] \implies$  amplification d'erreur par le schéma d'intégration rétrograde (**inconditionnellement instable!**).



## 9. Exemples de problèmes mal posés

## 10. Régularisation

Notion de régularisation

Régularisation optimale

Exemples de problèmes inverses régularisés

## 11. Etude d'un exemple unidimensionnel

Formulation par dérivation numérique des données

Formulation par minimisation d'écart mesure-calcul

## 12. Exemple tridimensionnel (Epanomeritakis et coll., 2008)

## 9. Exemples de problèmes mal posés

## 10. Régularisation

Notion de régularisation

Régularisation optimale

Exemples de problèmes inverses régularisés

## 11. Etude d'un exemple unidimensionnel

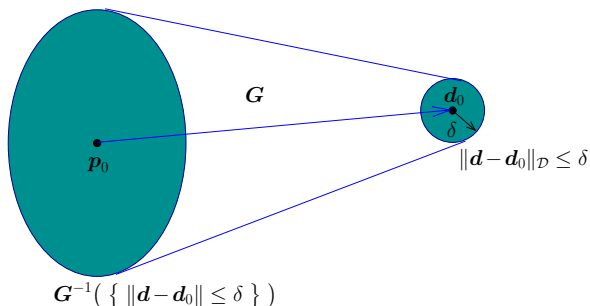
## 12. Exemple tridimensionnel (Epanomeritakis et coll., 2008)

## Régularisation de l'inversion

- Problème inverse: Trouver  $p \in \mathcal{P}$  tel que  $\mathcal{G}(p) = d$  ( $d \in \mathcal{D}$  donné)
- Opérateur  $\mathcal{G}$  décrivant le problème direct: linéaire ou non selon les cas
- Hypothèse: il existe  $p_0, d_0$  tels que  $\mathcal{G}(p_0) = d_0$ , avec  $d_0$  voisin de  $d$

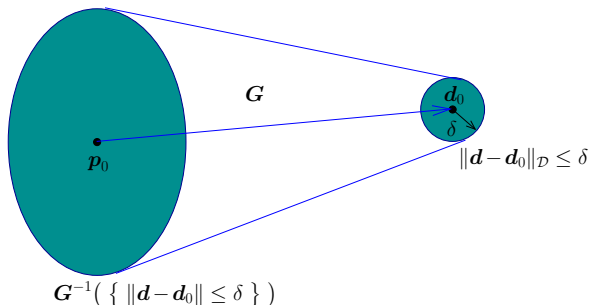
## Régularisation de l'inversion

- Problème inverse: Trouver  $\mathbf{p} \in \mathcal{P}$  tel que  $\mathcal{G}(\mathbf{p}) = \mathbf{d}$  ( $\mathbf{d} \in \mathcal{D}$  donné)
- Opérateur  $\mathcal{G}$  décrivant le problème direct: linéaire ou non selon les cas
- Hypothèse: il existe  $\mathbf{p}_0, \mathbf{d}_0$  tels que  $\mathcal{G}(\mathbf{p}_0) = \mathbf{d}_0$ , avec  $\mathbf{d}_0$  voisin de  $\mathbf{d}$



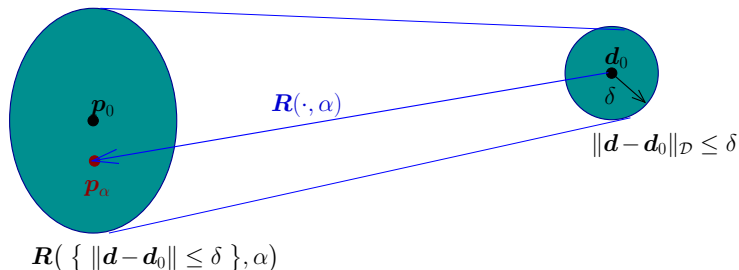
## Régularisation de l'inversion

- Problème inverse: Trouver  $\mathbf{p} \in \mathcal{P}$  tel que  $\mathcal{G}(\mathbf{p}) = \mathbf{d}$  ( $\mathbf{d} \in \mathcal{D}$  donné)
- Opérateur  $\mathcal{G}$  décrivant le problème direct: linéaire ou non selon les cas
- Hypothèse: il existe  $\mathbf{p}_0, \mathbf{d}_0$  tels que  $\mathcal{G}(\mathbf{p}_0) = \mathbf{d}_0$ , avec  $\mathbf{d}_0$  voisin de  $\mathbf{d}$



- Remarque: notation explicite  $\mathbf{p} \mapsto \mathcal{G}(\mathbf{p})$ , pour simplifier (souvent, relation implicite de la forme  $\mathcal{G}(\mathbf{p}, \mathbf{d}) = \mathbf{0}$ ):  
 $\mathbf{p} \mapsto \mathcal{G}(\mathbf{p})$ : simulation des données si le paramètre inconnu prend la valeur  $\mathbf{p}$ .

# Régularisation de l'inversion



Idée générale: remplacer le (pseudo) inverse de  $\mathbf{G}$  par un **opérateur régularisant**

$d \mapsto \mathcal{R}(d, \alpha)$  et poser  $p_\alpha := \mathcal{R}(d, \alpha)$  de sorte que:

- $d \mapsto \mathcal{R}(d, \alpha)$  est continu;
- Il existe un réglage  $\alpha(\delta)$  du **paramètre de régularisation**  $\alpha$  tel que

$$\delta = \|d - d_0\|_{\mathcal{D}} \rightarrow 0 \implies \|p_{\alpha(\delta)} - p_0\|_{\mathcal{P}} \rightarrow 0$$

## Opérateur régularisant: définition, propriétés

### Définition (Tikhonov, Arsenine, 1975).

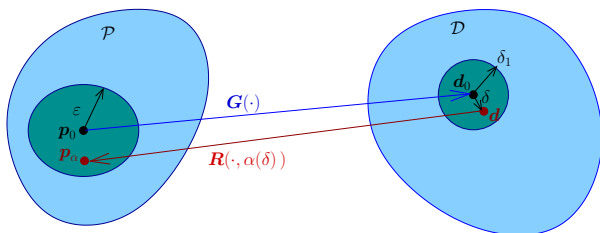
Soit  $(\mathbf{p}_0, \mathbf{d}_0) \in \mathcal{P} \times \mathcal{D}$  tel que  $\mathcal{G}(\mathbf{p}_0) = \mathbf{d}_0$ . Un opérateur  $\mathbf{d} \mapsto \mathcal{R}(\mathbf{d}, \alpha)$ , dépendant du paramètre réel positif  $\alpha$ , est dit *régularisant pour l'équation  $\mathcal{G}(\mathbf{p}) = \mathbf{d}$  au voisinage de  $\mathbf{d} = \mathbf{d}_0$*  si:

- Il existe  $\delta_1 > 0$  tel que  $\mathcal{R}(\mathbf{d}, \alpha)$  soit défini pour tout  $\alpha > 0$  et pour tout  $\mathbf{d} \in \mathcal{D}$  vérifiant:

$$\|\mathbf{d} - \mathbf{d}_0\|_{\mathcal{D}} \leq \delta_1$$

- Il existe une fonction  $\delta \mapsto \alpha(\delta)$  telle que pour tout  $\varepsilon > 0$  assez petit il existe  $\delta = \delta(\varepsilon) \leq \delta_1$  tel que:

$$\forall \mathbf{d} \in \mathcal{D}, \quad \|\mathbf{d} - \mathbf{d}_0\|_{\mathcal{D}} \leq \delta \Rightarrow \|\mathcal{R}(\mathbf{d}, \alpha(\delta)) - \mathbf{p}_0\|_{\mathcal{P}} \leq \varepsilon$$



## Construction d'opérateurs régularisants

- Donnée perturbée:  $\|\mathbf{d} - \mathbf{d}_{\text{exact}}\|_{\mathcal{D}} \leq \delta$
- Solution recherchée dans  $\mathcal{P}_{\delta} \subset \mathcal{P} = \{\mathbf{p} \in \mathcal{P}, \|\mathcal{G}(\mathbf{p}) - \mathbf{d}\|_{\mathcal{D}} \leq \delta\}$
- Problème:  $\delta$  "petit"  $\not\Rightarrow \mathcal{P}_{\delta}$  "petit".



## Construction d'opérateurs régularisants

- Donnée perturbée:  $\|\mathbf{d} - \mathbf{d}_{\text{exact}}\|_{\mathcal{D}} \leq \delta$
- Solution recherchée dans  $\mathcal{P}_\delta \subset \mathcal{P} = \{\mathbf{p} \in \mathcal{P}, \|\mathcal{G}(\mathbf{p}) - \mathbf{d}\|_{\mathcal{D}} \leq \delta\}$
- Problème:  $\delta$  "petit"  $\not\Rightarrow \mathcal{P}_\delta$  "petit".

**Principe de sélection:** choix de  $\mathbf{p}$  tel que

$$\|\mathcal{G}(\mathbf{p}) - \mathbf{d}\|_{\mathcal{D}} \leq \delta \quad \text{et} \quad \min_{\mathbf{p}} \Omega(\mathbf{p})$$

$\Omega(\mathbf{p})$ : *fonctionnelle stabilisatrice*, exprime une *information a priori* complémentaire.

- $\Omega$  définie sur une partie dense  $\mathcal{P}_1$  de  $\mathcal{P}$ .
- $\Omega$  non-négative continue.
- Toute solution du PI appartient à  $\mathcal{P}_1$ .
- Pour tout  $d > 0$ ,  $\{\mathbf{p} \mid \Omega(\mathbf{p}) \leq d\}$  compact.

## Construction d'opérateurs régularisants

- Donnée perturbée:  $\|\mathbf{d} - \mathbf{d}_{\text{exact}}\|_{\mathcal{D}} \leq \delta$
- Solution recherchée dans  $\mathcal{P}_\delta \subset \mathcal{P} = \{\mathbf{p} \in \mathcal{P}, \|\mathcal{G}(\mathbf{p}) - \mathbf{d}\|_{\mathcal{D}} \leq \delta\}$
- Problème:  $\delta$  "petit"  $\not\Rightarrow \mathcal{P}_\delta$  "petit".

**Principe de sélection:** choix de  $\mathbf{p}$  tel que

$$\|\mathcal{G}(\mathbf{p}) - \mathbf{d}\|_{\mathcal{D}} \leq \delta \quad \text{et} \quad \min_{\mathbf{p}} \Omega(\mathbf{p})$$

$\Omega(\mathbf{p})$ : *fonctionnelle stabilisatrice*, exprime une *information a priori* complémentaire.

- $\Omega$  définie sur une partie dense  $\mathcal{P}_1$  de  $\mathcal{P}$ .
- $\Omega$  non-négative continue.
- Toute solution du PI appartient à  $\mathcal{P}_1$ .
- Pour tout  $d > 0$ ,  $\{\mathbf{p} \mid \Omega(\mathbf{p}) \leq d\}$  compact.

Exemples:

$$\Omega(\mathbf{p}) = \|\mathbf{p} - \bar{\mathbf{p}}\|_{\mathcal{P}}^2 \quad \bar{\mathbf{p}} \in \mathcal{P} \text{ fixé; } \mathcal{P}_1 = \mathcal{P} = \mathbb{C}^n \quad \text{dimension finie}$$

$$\Omega(\mathbf{p}) = \int_D |\nabla p|^2(x) \, dV_x \quad \text{fonction } x \in D \mapsto p(x)$$

## Construction d'opérateurs régularisants

Régularisation: minimiser  $\Omega(\mathbf{p})$  sous la contrainte  $\|\mathcal{G}(\mathbf{p}) - \mathbf{d}\|_{\mathcal{D}} \leq \delta$

$\Rightarrow$  lagrangien

$$S_{\alpha}(\mathbf{p}, \mathbf{d}) := \alpha \left[ \frac{1}{\alpha} \|\mathcal{G}(\mathbf{p}) - \mathbf{d}\|_{\mathcal{D}}^2 + \Omega(\mathbf{p}) \right] = \|\mathcal{G}(\mathbf{p}) - \mathbf{d}\|_{\mathcal{D}}^2 + \alpha \Omega(\mathbf{p})$$

$\alpha$  "paramètre de régularisation".

**Théorème** (Tikhonov et Arsénine). Soit  $\mathcal{G}: \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{D}$  un opérateur continu. Quels que soient  $\mathbf{d} \in \mathcal{D}$  et  $\alpha > 0$ , il existe  $\mathbf{p}_{\alpha} \in \mathcal{P}_1$  tel que:

$$\inf_{\mathbf{p} \in \mathcal{P}_1} S_{\alpha}(\mathbf{p}, \mathbf{d}) = S_{\alpha}(\mathbf{p}_{\alpha}, \mathbf{d})$$

En d'autres termes: pour tout  $\alpha$ ,  $S_{\alpha}$  atteint son minimum.

## Construction d'opérateurs régularisants

La minimisation de  $S_\alpha(\mathbf{p}, \mathbf{d})$  définit un opérateur

$$\mathbf{d} \mapsto \mathcal{R}(\mathbf{d}, \alpha) = \arg \min_{\mathbf{p}} S_\alpha(\mathbf{p}, \mathbf{d}) =: \mathbf{p}_\alpha$$

## Construction d'opérateurs régularisants

La minimisation de  $S_\alpha(\mathbf{p}, \mathbf{d})$  définit un opérateur

$$\mathbf{d} \mapsto \mathcal{R}(\mathbf{d}, \alpha) = \arg \min_{\mathbf{p}} S_\alpha(\mathbf{p}, \mathbf{d}) =: \mathbf{p}_\alpha$$

**Théorème** (Tikhonov et Arsénine). Soit  $(\mathbf{p}_0, \mathbf{d}_0) \in \mathcal{P} \times \mathcal{D}$  tel que  $\mathcal{G}(\mathbf{p}_0) = \mathbf{d}_0$ . Soit  $\delta_1 > 0$ . Pour tout  $\varepsilon > 0$  et pour toutes fonctions  $\beta_1(\delta)$  et  $\beta_2(\delta)$  définies sur  $[0, \delta_1]$ , non-négatives, non-décroissantes et continues telles que:

$$\beta_2(0) = 0 \quad \text{et} \quad \forall \delta \in [0, \delta_1] \quad \delta^2 / \beta_1^2(\delta) \leq \beta_2(\delta)$$

il existe  $\delta_0$  tel que pour  $\mathbf{d} \in \mathcal{D}$  et  $\delta \leq \delta_0$  l'inégalité

$$\|\mathbf{d} - \mathbf{d}_0\|_{\mathcal{D}} \leq \delta$$

entraîne l'inégalité:

$$\|\mathcal{R}(\mathbf{d}, \alpha) - \mathbf{p}_0\|_{\mathcal{P}} \leq \varepsilon$$

pour tous les  $\alpha$  vérifiant

$$\delta^2 / \beta_1^2(\delta) \leq \alpha \leq \beta_2(\delta)$$

En d'autres termes: il existe une plage de valeurs de  $\alpha$  pour laquelle  $\mathbf{d} \mapsto \mathcal{R}(\mathbf{d}, \alpha)$  est régularisant.

## Exemple d'opérateur régularisant

Cas des moindres carrés régularisés avec pénalisation par norme minimale:

$$S_\alpha(\mathbf{p}, \mathbf{d}) = \frac{1}{2} \|\mathbf{G}\mathbf{p} - \mathbf{d}\|_{\mathcal{D}}^2 + \frac{\alpha}{2} \|\mathbf{p} - \mathbf{p}_{\text{prior}}\|_{\mathcal{P}}^2$$

## Exemple d'opérateur régularisant

Cas des moindres carrés régularisés avec pénalisation par norme minimale:

$$S_\alpha(\mathbf{p}, \mathbf{d}) = \frac{1}{2} \|\mathbf{G}\mathbf{p} - \mathbf{d}\|_{\mathcal{D}}^2 + \frac{\alpha}{2} \|\mathbf{p} - \mathbf{p}_{\text{prior}}\|_{\mathcal{P}}^2$$

Minimisation de  $S_\alpha(\mathbf{p}, \mathbf{d})$ : on utilise un système singulier  $(\mathbf{u}_n, \mathbf{v}_n, \lambda_n)$  de  $\mathbf{G}$ .

$$\mathbf{p}^\alpha = \sum_{n \geq 0} \left[ \frac{\lambda_n}{\lambda_n^2 + \alpha} (\mathbf{d}, \mathbf{u}_n)_{\mathcal{D}} + \frac{\alpha}{\lambda_n^2 + \alpha} (\mathbf{p}_{\text{prior}}, \mathbf{v}_n)_{\mathcal{P}} \right] \mathbf{v}_n$$

que l'on peut mettre sous la forme

$$\mathbf{p}^\alpha = \mathcal{R}(\mathbf{d}, \alpha)$$

## Exemple d'opérateur régularisant

Cas des moindres carrés régularisés avec pénalisation par norme minimale:

$$S_\alpha(\mathbf{p}, \mathbf{d}) = \frac{1}{2} \|\mathbf{G}\mathbf{p} - \mathbf{d}\|_{\mathcal{D}}^2 + \frac{\alpha}{2} \|\mathbf{p} - \mathbf{p}_{\text{prior}}\|_{\mathcal{P}}^2$$

Minimisation de  $S_\alpha(\mathbf{p}, \mathbf{d})$ : on utilise un système singulier  $(\mathbf{u}_n, \mathbf{v}_n, \lambda_n)$  de  $\mathbf{G}$ .

$$\mathbf{p}^\alpha = \sum_{n \geq 0} \left[ \frac{\lambda_n}{\lambda_n^2 + \alpha} (\mathbf{d}, \mathbf{u}_n)_{\mathcal{D}} + \frac{\alpha}{\lambda_n^2 + \alpha} (\mathbf{p}_{\text{prior}}, \mathbf{v}_n)_{\mathcal{P}} \right] \mathbf{v}_n$$

que l'on peut mettre sous la forme  $\mathbf{p}^\alpha = \mathcal{R}(\mathbf{d}, \alpha)$

- Donnée erronée:  $\mathbf{d} = \mathbf{d}_0 + \mathbf{b}$  ( $\mathbf{b}$ : erreurs, avec  $\delta = \|\mathbf{b}\|$ )
- Séparation de l'erreur de reconstruction:

$$\mathbf{e}_\alpha = \mathbf{p}_\alpha - \mathbf{p}_0 = \mathbf{e}_\alpha^{\text{reg}} + \mathbf{e}_\alpha^{\text{bruit}}, \quad \mathbf{e}_\alpha^{\text{reg}} = \mathcal{R}(\mathbf{d}_0, \alpha) - \mathbf{p}_0, \quad \mathbf{e}_\alpha^{\text{bruit}} = \mathbf{e}_\alpha - \mathbf{e}_\alpha^{\text{reg}}$$



## Exemple d'opérateur régularisant

Cas des moindres carrés régularisés avec pénalisation par norme minimale:

$$S_\alpha(\mathbf{p}, \mathbf{d}) = \frac{1}{2} \|\mathbf{G}\mathbf{p} - \mathbf{d}\|_{\mathcal{D}}^2 + \frac{\alpha}{2} \|\mathbf{p} - \mathbf{p}_{\text{prior}}\|_{\mathcal{P}}^2$$

Minimisation de  $S_\alpha(\mathbf{p}, \mathbf{d})$ : on utilise un système singulier  $(\mathbf{u}_n, \mathbf{v}_n, \lambda_n)$  de  $\mathbf{G}$ .

$$\mathbf{p}^\alpha = \sum_{n \geq 0} \left[ \frac{\lambda_n}{\lambda_n^2 + \alpha} (\mathbf{d}, \mathbf{u}_n)_{\mathcal{D}} + \frac{\alpha}{\lambda_n^2 + \alpha} (\mathbf{p}_{\text{prior}}, \mathbf{v}_n)_{\mathcal{P}} \right] \mathbf{v}_n$$

que l'on peut mettre sous la forme  $\mathbf{p}^\alpha = \mathcal{R}(\mathbf{d}, \alpha)$

- Donnée erronée:  $\mathbf{d} = \mathbf{d}_0 + \mathbf{b}$  ( $\mathbf{b}$ : erreurs, avec  $\delta = \|\mathbf{b}\|$ )
- Séparation de l'erreur de reconstruction:

$$\mathbf{e}_\alpha = \mathbf{p}_\alpha - \mathbf{p}_0 = \mathbf{e}_\alpha^{\text{reg}} + \mathbf{e}_\alpha^{\text{bruit}}, \quad \mathbf{e}_\alpha^{\text{reg}} = \mathcal{R}(\mathbf{d}_0, \alpha) - \mathbf{p}_0, \quad \mathbf{e}_\alpha^{\text{bruit}} = \mathbf{e}_\alpha - \mathbf{e}_\alpha^{\text{reg}}$$

- On trouve:

$$\mathbf{e}_\alpha^{\text{bruit}} = \sum_{n \geq 0} \frac{\lambda_n}{\lambda_n^2 + \alpha} (\mathbf{b}, \mathbf{u}_n)_{\mathcal{D}} \mathbf{v}_n, \quad \mathbf{e}_\alpha^{\text{reg}} = \sum_{n \geq 0} \frac{\alpha}{\lambda_n^2 + \alpha} (\mathbf{p}_0 - \mathbf{p}_{\text{prior}}, \mathbf{v}_n)_{\mathcal{P}} \mathbf{v}_n$$

## Exemple d'opérateur régularisant

$$\mathbf{e}_\alpha^{\text{bruit}} = \sum_{n \geq 0} \frac{\lambda_n}{\lambda_n^2 + \alpha} (\mathbf{b}, \mathbf{u}_n)_{\mathcal{D}} \mathbf{v}_n, \quad \mathbf{e}_\alpha^{\text{reg}} = \sum_{n \geq 0} \frac{\alpha}{\lambda_n^2 + \alpha} (\mathbf{p}_0 - \mathbf{p}_{\text{prior}}, \mathbf{v}_n)_{\mathcal{P}} \mathbf{v}_n$$

En remarquant que  $\forall s > 0, s/(s^2 + \alpha) \leq \alpha^{-1/2}/2$ , on déduit:

$$\|\mathbf{e}_\alpha^{\text{bruit}}\|_{\mathcal{P}} \leq \frac{1}{2} \alpha^{-1/2} \delta, \quad \lim_{\alpha \rightarrow 0} \|\mathbf{e}_\alpha^{\text{reg}}\|_{\mathcal{P}} = 0$$

## Exemple d'opérateur régularisant

$$\mathbf{e}_\alpha^{\text{bruit}} = \sum_{n \geq 0} \frac{\lambda_n}{\lambda_n^2 + \alpha} (\mathbf{b}, \mathbf{u}_n)_{\mathcal{D}} \mathbf{v}_n, \quad \mathbf{e}_\alpha^{\text{reg}} = \sum_{n \geq 0} \frac{\alpha}{\lambda_n^2 + \alpha} (\mathbf{p}_0 - \mathbf{p}_{\text{prior}}, \mathbf{v}_n)_{\mathcal{P}} \mathbf{v}_n$$

En remarquant que  $\forall s > 0, s/(s^2 + \alpha) \leq \alpha^{-1/2}/2$ , on déduit:

$$\|\mathbf{e}_\alpha^{\text{bruit}}\|_{\mathcal{P}} \leq \frac{1}{2} \alpha^{-1/2} \delta, \quad \lim_{\alpha \rightarrow 0} \|\mathbf{e}_\alpha^{\text{reg}}\|_{\mathcal{P}} = 0$$

Par inégalité triangulaire:

$$\|\mathbf{e}_\alpha\| \leq \frac{1}{2} \alpha^{-1/2} \delta + o(1) \quad (\alpha \rightarrow 0)$$

Ajustement de  $\alpha$  à  $\delta$ :

$$\text{si } \alpha = \delta^p \quad (0 < p < 2), \quad \lim_{\delta \rightarrow 0} \|\mathbf{e}_\alpha\| = 0$$

## Exemple d'opérateur régularisant

Méthode de régularisation optimale: nécessite une information (régularité) sur  $\mathbf{p}_0$ .

- Exemple (*condition de source*):

$$\exists \mathbf{z}, \mathbf{p}_0 - \mathbf{p}_{\text{prior}} = \mathbf{G}^* \mathbf{z}, \quad \text{i.e. } (\mathbf{p}_0 - \mathbf{p}_{\text{prior}}, \mathbf{v}_n)_{\mathcal{P}} = \lambda_n(\mathbf{z}, \mathbf{u}_n)_{\mathcal{D}}$$

## Exemple d'opérateur régularisant

Méthode de régularisation optimale: nécessite une information (régularité) sur  $\mathbf{p}_0$ .

- Exemple (*condition de source*):

$$\exists \mathbf{z}, \mathbf{p}_0 - \mathbf{p}_{\text{prior}} = \mathbf{G}^* \mathbf{z}, \quad \text{i.e. } (\mathbf{p}_0 - \mathbf{p}_{\text{prior}}, \mathbf{v}_n)_{\mathcal{P}} = \lambda_n (\mathbf{z}, \mathbf{u}_n)_{\mathcal{D}}$$

- Dans ce cas:

$$\mathbf{e}_{\alpha}^{\text{bruit}} = \sum_{n \geq 0} \frac{\lambda_n}{\lambda_n^2 + \alpha} (\mathbf{b}, \mathbf{u}_n)_{\mathcal{D}} \mathbf{v}_n, \quad \mathbf{e}_{\alpha}^{\text{reg}} = \sum_{n \geq 0} \frac{\alpha \lambda_n}{\lambda_n^2 + \alpha} (\mathbf{z}, \mathbf{u}_n)_{\mathcal{D}} \mathbf{v}_n$$

et on en déduit

$$\|\mathbf{e}_{\alpha}^{\text{bruit}}\|_{\mathcal{P}} \leq \frac{1}{2} \alpha^{-1/2} \delta, \quad \|\mathbf{e}_{\alpha}^{\text{reg}}\|_{\mathcal{P}} \leq \frac{1}{2} \alpha^{1/2} \|\mathbf{z}\|_{\mathcal{D}}$$

## Exemple d'opérateur régularisant

Méthode de régularisation optimale: nécessite une information (régularité) sur  $\mathbf{p}_0$ .

- Exemple (*condition de source*):

$$\exists \mathbf{z}, \mathbf{p}_0 - \mathbf{p}_{\text{prior}} = \mathbf{G}^* \mathbf{z}, \quad \text{i.e. } (\mathbf{p}_0 - \mathbf{p}_{\text{prior}}, \mathbf{v}_n)_{\mathcal{P}} = \lambda_n (\mathbf{z}, \mathbf{u}_n)_{\mathcal{D}}$$

- Dans ce cas:

$$\mathbf{e}_{\alpha}^{\text{bruit}} = \sum_{n \geq 0} \frac{\lambda_n}{\lambda_n^2 + \alpha} (\mathbf{b}, \mathbf{u}_n)_{\mathcal{D}} \mathbf{v}_n, \quad \mathbf{e}_{\alpha}^{\text{reg}} = \sum_{n \geq 0} \frac{\alpha \lambda_n}{\lambda_n^2 + \alpha} (\mathbf{z}, \mathbf{u}_n)_{\mathcal{D}} \mathbf{v}_n$$

et on en déduit

$$\|\mathbf{e}_{\alpha}^{\text{bruit}}\|_{\mathcal{P}} \leq \frac{1}{2} \alpha^{-1/2} \delta, \quad \|\mathbf{e}_{\alpha}^{\text{reg}}\|_{\mathcal{P}} \leq \frac{1}{2} \alpha^{1/2} \|\mathbf{z}\|_{\mathcal{D}}$$

### Régularisation optimale:

$$\|\mathbf{e}_{\alpha}\| \leq \frac{1}{2} (\alpha^{-1/2} \delta + \alpha^{1/2} \|\mathbf{z}\|_{\mathcal{D}})$$

Minimisation de la borne pour  $\alpha = \delta / \|\mathbf{z}\|_{\mathcal{D}}$ , qui donne  $\|\mathbf{e}_{\alpha}\| \leq O(\delta^{1/2})$

## 9. Exemples de problèmes mal posés

## 10. Régularisation

Notion de régularisation

Régularisation optimale

Exemples de problèmes inverses régularisés

## 11. Etude d'un exemple unidimensionnel

## 12. Exemple tridimensionnel (Epanomeritakis et coll., 2008)

# Régularisation optimale

## 1. Problème du choix du paramètre de régularisation $\alpha$ .

- Critères exploitant une information a priori sur la qualité des mesures (*discrepancy principles*)

$$\|\mathcal{G}(\mathbf{p}) - \mathbf{d}\|_{\mathcal{D}} = \delta \quad (\text{Morozov}), \quad \|\mathcal{G}(\mathbf{p}) - \mathbf{d}\|_{\mathcal{D}}^2 = \delta^2/\alpha \quad (\text{Arcangeli})$$

- Critères n'exploitant pas une information a priori sur la qualité des mesures
  - (a) Validation croisée généralisée (*generalized cross validation* GCV)
  - (b) Courbe en L (*L-curve*)



# Régularisation optimale

## 1. Problème du choix du paramètre de régularisation $\alpha$ .

- Critères exploitant une information a priori sur la qualité des mesures (*discrepancy principles*)

$$\|\mathcal{G}(\mathbf{p}) - \mathbf{d}\|_{\mathcal{D}} = \delta \quad (\text{Morozov}), \quad \|\mathcal{G}(\mathbf{p}) - \mathbf{d}\|_{\mathcal{D}}^2 = \delta^2/\alpha \quad (\text{Arcangeli})$$

- Critères n'exploitant pas une information a priori sur la qualité des mesures
  - (a) Validation croisée généralisée (*generalized cross validation* GCV)
  - (b) Courbe en L (*L-curve*)

## 2. Méthodologie:

- (i) Définir une information a priori  $\Omega(\mathbf{p})$
- (ii) Pour  $\alpha > 0$  fixé, chercher  $\mathbf{p}_\alpha$  par minimisation:

$$\mathbf{p}_\alpha = \arg \min_{\mathbf{p}} S_\alpha(\mathbf{p}, \mathbf{d}) \quad \text{avec} \quad S_\alpha(\mathbf{p}, \mathbf{d}) = \|\mathcal{G}(\mathbf{p}) - \mathbf{d}\|_{\mathcal{D}}^2 + \alpha\Omega(\mathbf{p})$$

- (iii) Trouver  $\alpha$  optimal, par exemple en résolvant l'équation

$$\|\mathcal{G}(\mathbf{p}_\alpha) - \mathbf{d}\|_{\mathcal{D}} = \delta$$

**Remarque:** méthode itérative sur  $\alpha$  (parfois, choix *a priori* de  $\alpha$ ).

## Régularisation optimale: principe de la validation croisée

Cas des moindres carrés régularisés avec pénalisation par norme minimale:

$$S_\alpha(\mathbf{p}, \mathbf{d}) = \frac{1}{2} \|\mathbf{G}\mathbf{p} - \mathbf{d}\|_{\mathcal{D}}^2 + \frac{\alpha}{2} \|\mathbf{p}\|^2$$

$$\mathbf{p}_\alpha = \mathbf{R}_\alpha \mathbf{d}, \quad \mathbf{R}_\alpha = (\mathbf{G}^* \mathbf{G} + \alpha \mathbf{I})^{-1} \mathbf{G}^*$$

- Retrait de la mesure  $k$  (ligne  $\mathbf{g}_k^*$ , donnée  $d_k$ )  $\rightarrow$  solution  $\mathbf{p}_\alpha^k$   
(calcul par actualisation de  $\mathbf{p}_\alpha$ , formule de Sherman-Morrison)

## Régularisation optimale: principe de la validation croisée

Cas des moindres carrés régularisés avec pénalisation par norme minimale:

$$S_\alpha(\mathbf{p}, \mathbf{d}) = \frac{1}{2} \|\mathbf{G}\mathbf{p} - \mathbf{d}\|_{\mathcal{D}}^2 + \frac{\alpha}{2} \|\mathbf{p}\|^2$$

$$\mathbf{p}_\alpha = \mathbf{R}_\alpha \mathbf{d}, \quad \mathbf{R}_\alpha = (\mathbf{G}^* \mathbf{G} + \alpha \mathbf{I})^{-1} \mathbf{G}^*$$

- Retrait de la mesure  $k$  (ligne  $\mathbf{g}_k^*$ , donnée  $d_k$ )  $\rightarrow$  solution  $\mathbf{p}_\alpha^k$  (calcul par actualisation de  $\mathbf{p}_\alpha$ , formule de Sherman-Morrison)
- Fonction de validation croisée:

$$\text{GCV}(\alpha) = \sum_{k=1}^m |\mathbf{g}_k^* \mathbf{p}_\alpha^k - d_k|^2$$

## Régularisation optimale: principe de la validation croisée

Cas des moindres carrés régularisés avec pénalisation par norme minimale:

$$S_\alpha(\mathbf{p}, \mathbf{d}) = \frac{1}{2} \|\mathbf{G}\mathbf{p} - \mathbf{d}\|_{\mathcal{D}}^2 + \frac{\alpha}{2} \|\mathbf{p}\|^2$$

$$\mathbf{p}_\alpha = \mathbf{R}_\alpha \mathbf{d}, \quad \mathbf{R}_\alpha = (\mathbf{G}^* \mathbf{G} + \alpha \mathbf{I})^{-1} \mathbf{G}^*$$

- Retrait de la mesure  $k$  (ligne  $\mathbf{g}_k^*$ , donnée  $d_k$ )  $\rightarrow$  solution  $\mathbf{p}_\alpha^k$  (calcul par actualisation de  $\mathbf{p}_\alpha$ , formule de Sherman-Morrison)
- Fonction de validation croisée:

$$\text{GCV}(\alpha) = \sum_{k=1}^m |\mathbf{g}_k^* \mathbf{p}_\alpha^k - d_k|^2$$

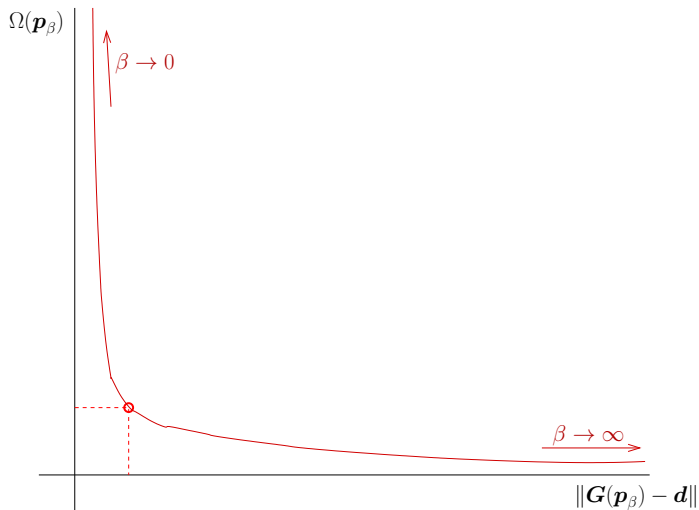
Un calcul algébrique (admis) donne directement  $\text{GCV}(\alpha)$  en fonction de  $\mathbf{p}_\alpha$ :

$$\text{GCV}(\alpha) = \sum_{k=1}^m \frac{|\mathbf{g}_k^* \mathbf{p}_\alpha - d_k|^2}{(1 - \mathbf{g}_k^* \mathbf{R}_\alpha \mathbf{g}_k)^2}$$

- Chercher  $\alpha_{\text{opt}}$  tel que

$$\alpha_{\text{opt}} = \arg \min_{\alpha} \text{GCV}(\alpha)$$

# Régularisation optimale: principe de la "courbe en L"



P.C. Hansen, *Rank-deficient and discrete ill-posed problems*, SIAM, 1998

Regularization tools (Matlab toolbox, <http://www2.imm.dtu.dk/~pcha/Regutools/>)

## 9. Exemples de problèmes mal posés

## 10. Régularisation

Notion de régularisation

Régularisation optimale

Exemples de problèmes inverses régularisés

## 11. Etude d'un exemple unidimensionnel

## 12. Exemple tridimensionnel (Epanomeritakis et coll., 2008)

## Exemple: le problème linéaire discret

Régularisation par optimisation

$$\Omega(\mathbf{p}) = \|\mathbf{p} - \mathbf{p}_0\|_{\mathcal{P}}^2$$

$$S_{\alpha}(\mathbf{p}, \mathbf{d}) = \|\mathbf{G}\mathbf{p} - \mathbf{d}\|_{\mathcal{D}}^2 + \alpha\|\mathbf{p} - \mathbf{p}_0\|_{\mathcal{P}}^2$$

## Exemple: le problème linéaire discret

Régularisation par optimisation

$$\Omega(\mathbf{p}) = \|\mathbf{p} - \mathbf{p}_0\|_{\mathcal{P}}^2$$

$$S_\alpha(\mathbf{p}, \mathbf{d}) = \|\mathbf{G}\mathbf{p} - \mathbf{d}\|_{\mathcal{D}}^2 + \alpha\|\mathbf{p} - \mathbf{p}_0\|_{\mathcal{P}}^2$$

Autres stabilisateurs  $\Omega$  possibles, comme:

$$\Omega(\mathbf{p}) = \|\mathbf{L}\mathbf{p}\|_{\mathcal{P}}^2 \quad \mathbf{L} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & -1 & 1 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

( $\mathbf{L}$ : matrice de dérivation numérique)

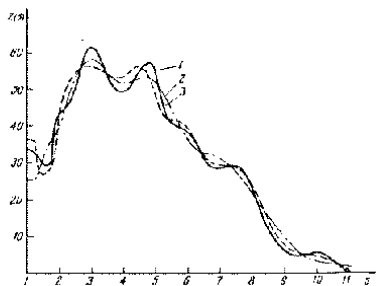
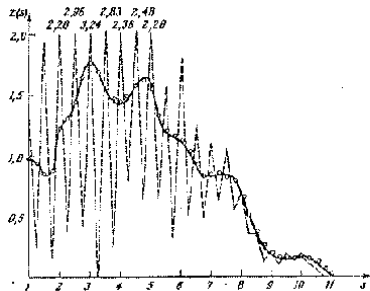


## Exemple: équation intégrale de première espèce

$$u(x) = \int_{\Omega} K(x, y) z(y) dV_y$$

- Perturbation de la donnée  $u \rightarrow$  perturbation  $\delta z$  oscillante.
- Idée: pénaliser les dérivées de  $z$  ("stabilisateur d'ordre  $p$ "):

$$\Omega(z) = \sum_{k=1}^p \int_{\Omega} \|\nabla^{(k)} z\|^2 dV$$



Inversion d'une éq. intégrale avec données bruitées (a) sans régularisation (b) avec régularisation.

## Equation de convolution

$$[K * z](t) \equiv \int_{\mathbb{R}} K(t - \tau)z(\tau)d\tau = u(t)$$

## Equation de convolution

$$[K * z](t) \equiv \int_{\mathbb{R}} K(t - \tau)z(\tau)d\tau = u(t)$$

- Transformation de Fourier:  $\mathcal{F}[K * z](\omega) = \mathcal{F}[K](\omega)\mathcal{F}[z](\omega)$ , donc

$$\mathcal{F}[z](\omega) = \mathcal{F}[u](\omega) / \mathcal{F}[K](\omega)$$

## Equation de convolution

$$[K * z](t) \equiv \int_{\mathbb{R}} K(t - \tau)z(\tau)d\tau = u(t)$$

- Transformation de Fourier:  $\mathcal{F}[K * z](\omega) = \mathcal{F}[K](\omega)\mathcal{F}[z](\omega)$ , donc

$$\mathcal{F}[z](\omega) = \mathcal{F}[u](\omega) / \mathcal{F}[K](\omega)$$

- Donnée perturbée:  $u(t) = u_{\text{exact}}(t) + v(t)$ . Par transformée de Fourier inverse:

$$z(t) = z_{\text{exact}}(t) + \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{-i\omega t} \frac{\mathcal{F}[v](\omega)}{\mathcal{F}[K](\omega)} d\omega$$

## Equation de convolution

$$[K * z](t) \equiv \int_{\mathbb{R}} K(t - \tau)z(\tau)d\tau = u(t)$$

- Transformation de Fourier:  $\mathcal{F}[K * z](\omega) = \mathcal{F}[K](\omega)\mathcal{F}[z](\omega)$ , donc

$$\mathcal{F}[z](\omega) = \mathcal{F}[u](\omega) / \mathcal{F}[K](\omega)$$

- Donnée perturbée:  $u(t) = u_{\text{exact}}(t) + v(t)$ . Par transformée de Fourier inverse:

$$z(t) = z_{\text{exact}}(t) + \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{-i\omega t} \frac{\mathcal{F}[v](\omega)}{\mathcal{F}[K](\omega)} d\omega$$

- Erreur sur  $z(t)$  non contrôlée, dépend de  $\mathcal{F}[v](\omega)$ . Transformée inverse régularisée

$$z(t; f, \alpha) = [R(f, \alpha)u](t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{-i\omega t} \frac{\mathcal{F}[u](\omega)}{\mathcal{F}[K](\omega)} d\omega f(\omega, \alpha) d\omega$$

- Exemples:  $f(\omega, \alpha) = e^{-\alpha^2 \omega^2}$ .  
 $f(\omega, \alpha) = 1$  ( $|\omega| \leq 1/\alpha$ ) et  $f(\omega, \alpha) = 0$  ( $|\omega| > 1/\alpha$ )

## 9. Exemples de problèmes mal posés

## 10. Régularisation

Notion de régularisation

Régularisation optimale

Exemples de problèmes inverses régularisés

## 11. Etude d'un exemple unidimensionnel

Formulation par dérivation numérique des données

Formulation par minimisation d'écart mesure-calcul

## 12. Exemple tridimensionnel (Epanomeritakis et coll., 2008)

## Exemple unidimensionnel

- Définition de l'exemple:

$$\boxed{(k(x)u'(x))' + r(x) = 0 \quad x \in [0, L] \quad \begin{cases} u(0) = 0 \\ k(L)u'(L) = q \end{cases}}$$

- (a) Barre élastique avec  $k(x) = ES(x)$  (effort longitudinal réparti  $r(x)$ , encastrement en  $x = 0$ , compression d'extrémité  $q$  en  $x = L$ );
- (b) Equation de la chaleur stationnaire unidimensionnelle (source thermique répartie  $r(x)$ , isolation thermique en  $x = 0$ , flux thermique  $q$  en  $x = L$ ).

## Exemple unidimensionnel

- Définition de l'exemple:

$$\boxed{(k(x)u'(x))' + r(x) = 0 \quad x \in [0, L] \quad \begin{cases} u(0) = 0 \\ k(L)u'(L) = q \end{cases}}$$

- (a) Barre élastique avec  $k(x) = ES(x)$  (effort longitudinal réparti  $r(x)$ , encastrement en  $x = 0$ , compression d'extrémité  $q$  en  $x = L$ );
  - (b) Equation de la chaleur stationnaire unidimensionnelle (source thermique répartie  $r(x)$ , isolation thermique en  $x = 0$ , flux thermique  $q$  en  $x = L$ ).
- Problème direct** ( $k(x)$ ,  $r(x)$  et  $q$  données)  $\rightarrow$  solution:

$$R(x) = q + \int_x^L r(y) dy \quad u(x) = \int_0^x \frac{R(y)}{k(y)} dy$$



## Exemple unidimensionnel

- Définition de l'exemple:

$$\boxed{(k(x)u'(x))' + r(x) = 0 \quad x \in [0, L] \quad \begin{cases} u(0) = 0 \\ k(L)u'(L) = q \end{cases}}$$

- (a) Barre élastique avec  $k(x) = ES(x)$  (effort longitudinal réparti  $r(x)$ , encastrement en  $x = 0$ , compression d'extrémité  $q$  en  $x = L$ );
  - (b) Equation de la chaleur stationnaire unidimensionnelle (source thermique répartie  $r(x)$ , isolation thermique en  $x = 0$ , flux thermique  $q$  en  $x = L$ ).
- Problème direct** ( $k(x)$ ,  $r(x)$  et  $q$  données)  $\rightarrow$  solution:

$$R(x) = q + \int_x^L r(y) dy \quad u(x) = \int_0^x \frac{R(y)}{k(y)} dy$$

- Problème inverse:** reconstruire  $k(x)$  connaissant  $r$ ,  $q$  et  $u(x)$  sur  $[0, L]$ .  
**Formellement**,  $k(x)$  solution de l'équation intégrale

$$\boxed{u(x) = \int_0^x \frac{R(y)}{k(y)} dy} \quad (\text{linéaire en } 1/k)$$

## Caractère instable du problème inverse continu

- Perturbation de  $k(y)$ :

$$\tilde{k}(y) = k(y) + A \cos \omega y \quad (0 < A < \min_{y \in [0, L]} k(y))$$

- Alors

$$\frac{R(y)}{\tilde{k}(y)} - \frac{R(y)}{k(y)} = -A \frac{R(y)}{k(y)(k(y) + A \cos \omega y)} \cos \omega y$$

- Par le lemme de Riemann-Lebesgue:

$$\lim_{\omega \rightarrow +\infty} \left| \int_0^x \left[ \frac{R(y)}{\tilde{k}(y)} - \frac{R(y)}{k(y)} \right] dy \right| = 0$$

## Caractère instable du problème inverse continu

- Perturbation de  $k(y)$ :

$$\tilde{k}(y) = k(y) + A \cos \omega y \quad (0 < A < \min_{y \in [0, L]} k(y))$$

- Alors

$$\frac{R(y)}{\tilde{k}(y)} - \frac{R(y)}{k(y)} = -A \frac{R(y)}{k(y)(k(y) + A \cos \omega y)} \cos \omega y$$

- Par le lemme de Riemann-Lebesgue:

$$\lim_{\omega \rightarrow +\infty} \left| \int_0^x \left[ \frac{R(y)}{\tilde{k}(y)} - \frac{R(y)}{k(y)} \right] dy \right| = 0$$

En résumé:

$$|\tilde{k} - k| \sim A \quad \text{mais} \quad |\tilde{u} - u| \sim 0$$

Autre point de vue:

$$\frac{du}{dx} = \frac{R(x)}{k(x)}$$

Le PI dépend de la précision sur  $du/dx$ . En pratique, instabilité liée à la dérivation numérique de  $u$

## 9. Exemples de problèmes mal posés

## 10. Régularisation

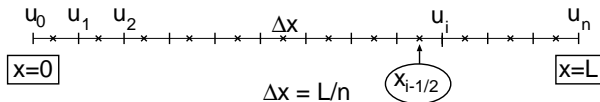
## 11. Etude d'un exemple unidimensionnel

Formulation par dérivation numérique des données

Formulation par minimisation d'écart mesure-calcul

## 12. Exemple tridimensionnel (Epanomeritakis et coll., 2008)

## Problème inverse discrétisé



$$\begin{aligned} \frac{\Delta u_i}{\Delta x} &:= \frac{u_i - u_{i-1}}{\Delta x} \\ &= R(x_{i-1/2}) \frac{1}{k_i} \quad (1 \leq i \leq n) \end{aligned}$$

Système d'équations diagonal en  $1/k_i$ .

- Solution non régularisée

$$k_i = \frac{R(x_{i-1/2})\Delta x}{\Delta u_i}$$

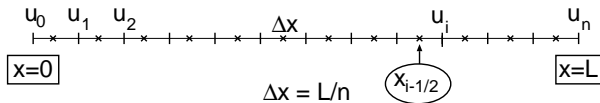
- Effet de données  $u_i$  inexactes ( $\varepsilon_i$ : erreur sur la mesure  $u_i$ ):

$$\tilde{u}_i = u_i + \varepsilon_i$$

Alors

$$\tilde{k}_i = \frac{R(x_{i-1/2})\Delta x}{\Delta \tilde{u}_i}$$

## Problème inverse discrétisé



$$\tilde{k}_i = \frac{R(x_{i-1/2})\Delta x}{\Delta \tilde{u}_i}$$

Ecart relatif:

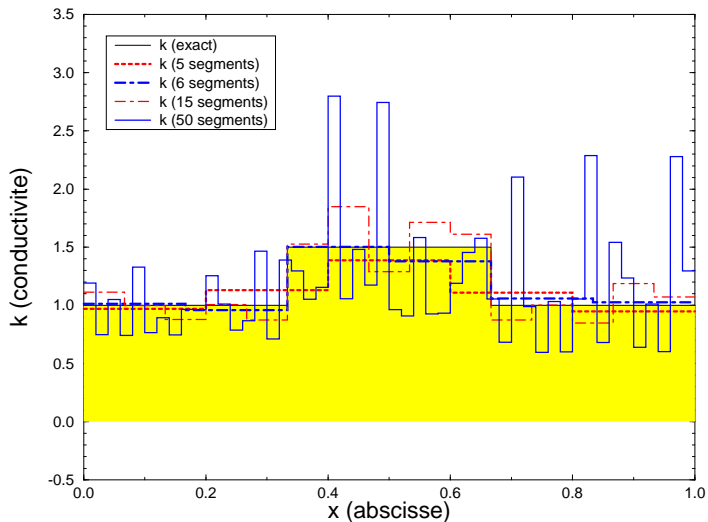
$$\rho_i \equiv \frac{\tilde{k}_i}{k_i} - 1 = \frac{\Delta u_i - \Delta \tilde{u}_i}{\Delta \tilde{u}_i} = -\frac{\Delta \varepsilon_i}{\Delta u_i + \Delta \varepsilon_i}$$

Au premier ordre en  $\Delta x$ :

$$\rho_i \approx \frac{\Delta \varepsilon_i}{\Delta \varepsilon_i + u'(x_{i-1/2})\Delta x}$$

- (a) Discrétisation fixée ( $\Delta x$  invariable):  $\rho_i \rightarrow 0$  si  $|\varepsilon_i| \rightarrow 0$ .
- (b) Erreur  $\varepsilon_i$  fixée sur la mesure  $u_i$ :  $\rho_i \not\rightarrow 0$  quand  $\Delta x \rightarrow 0$ .

# Inversion non régularisée et influence du pas de discrétisation: exemple.



## Régularisation

Proximité des  $k_j$  avec une valeur de référence  $k_0$ :

$$\min_{k_1, \dots, k_n} \sum_{i=1}^n \left( \frac{\Delta \tilde{u}_i}{\Delta x} \tilde{k}_i - R_i \right)^2 + \alpha \sum_{i=1}^n (\tilde{k}_i - k_0)^2$$

Solution régularisée:

$$\tilde{k}_i = \frac{\Delta \tilde{u}_i R_i \Delta x + \alpha \Delta x^2 k_0}{(\Delta \tilde{u}_i)^2 + \alpha \Delta x^2}$$

Erreur relative:

$$\rho_i = \underbrace{\frac{\Delta \tilde{u}_i}{(\Delta \tilde{u}_i)^2 + \alpha \Delta x^2}}_{\text{Erreur due aux données}} \Delta \varepsilon_i + \underbrace{\frac{1}{(\Delta \tilde{u}_i)^2 + \alpha \Delta x^2} \left( \frac{k_0}{k_i} - 1 \right)}_{\text{Erreur de régularisation}} \alpha$$



## Effet de la régularisation d'ordre 0

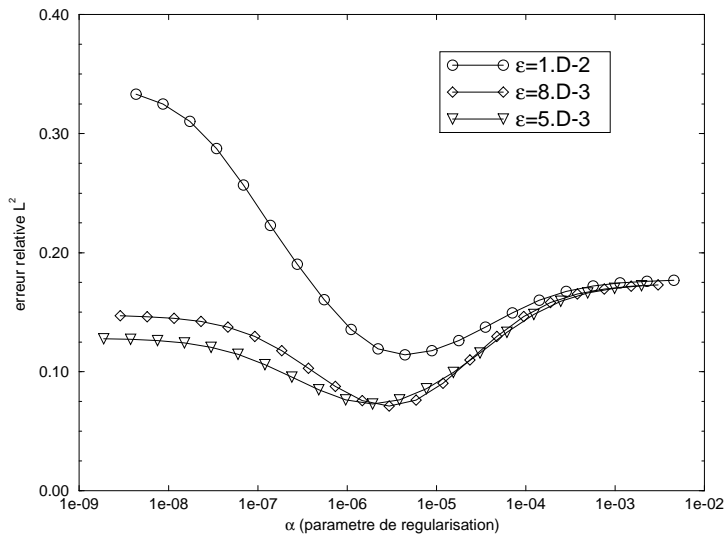
Erreur relative  $L^2$  commise sur  $k$  avec et sans régularisation

	$E(0)$	$E(\alpha_{opt})$	$E(\alpha_{min})$
$\varepsilon = 0.02, \Delta x = L/30$	0.457	0.190	0.172
$\varepsilon = 0.01, \Delta x = L/30$	0.211	0.115	0.108
$\varepsilon = 0.005, \Delta x = L/30$	0.092	0.066	0.065
$\varepsilon = 0.01, \Delta x = L/60$	0.531	0.207	0.178
$\varepsilon = 0.005, \Delta x = L/60$	0.175	0.109	0.108
$\varepsilon = 0.002, \Delta x = L/60$	0.066	0.062	0.060

$$E(\alpha) = \left\{ \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left( \frac{\tilde{k}_i(\alpha)}{k_i} - 1 \right)^2 \right\}^{1/2}$$

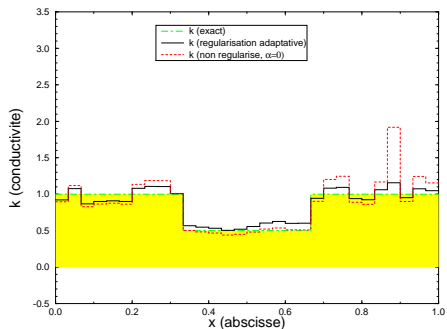
- $\alpha = 0$  (pas de régularisation).
- $\alpha = \alpha_{opt}$ , régularisation optimale par critère de Morozov.
- $\alpha = \alpha_{min}$ , qui minimise  $E(\alpha)$ .

# Effet de la régularisation d'ordre 0

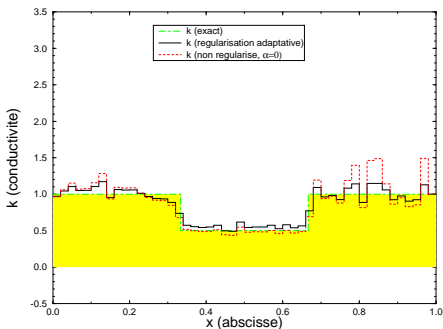


Variation de l'erreur relative  $E(\alpha)$  avec  $\alpha$ .

# Effet de la régularisation d'ordre 0



$\varepsilon = 0.01$



$\varepsilon = 0.005$

## Régularisation d'ordre un

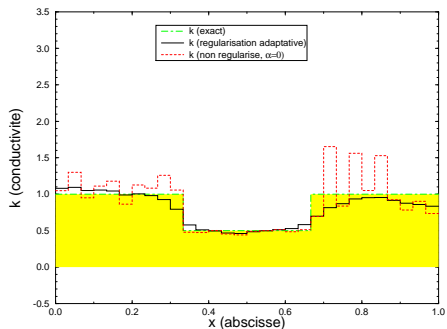
Information *a priori*: caractère peu oscillant de la solution  $k$ , soit

$$\min_{k_1, \dots, k_n} \sum_{i=1}^n \left( \frac{\Delta \tilde{u}_i}{\Delta x} \tilde{k}_i - R_i \right)^2 + \alpha \sum_{i=1}^{n-1} \left( \frac{\tilde{k}_{i+1} - \tilde{k}_i}{\Delta x} \right)^2$$

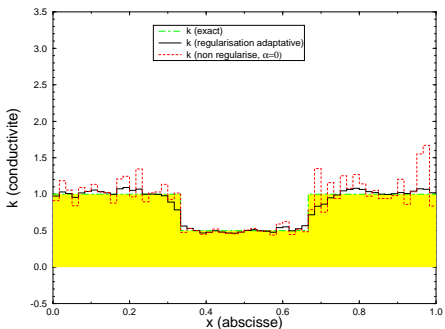
Effet de la régularisation d'ordre 1: erreur relative  $L^2$  commise sur  $k$  avec et sans régularisation.

	$E(0)$	$E(\alpha_{opt})$	$E(\alpha_{min})$
$\varepsilon = 0.02, \Delta x = L/30$	0.397	0.175	0.164
$\varepsilon = 0.01, \Delta x = L/30$	0.228	0.109	0.096
$\varepsilon = 0.005, \Delta x = L/30$	0.0350	0.0316	0.0304
$\varepsilon = 0.01, \Delta x = L/60$	0.392	0.144	0.135
$\varepsilon = 0.005, \Delta x = L/60$	0.174	0.074	0.0735
$\varepsilon = 0.002, \Delta x = L/60$	0.069	0.047	0.0467

# Effet de la régularisation d'ordre 1



$\epsilon = 0.01$



$\epsilon = 0.005$

## 9. Exemples de problèmes mal posés

## 10. Régularisation

## 11. Etude d'un exemple unidimensionnel

Formulation par dérivation numérique des données

Formulation par minimisation d'écart mesure-calcul

## 12. Exemple tridimensionnel (Epanomeritakis et coll., 2008)

## Exemple unidimensionnel: formulation par optimisation

On considère (presque) le même exemple unidimensionnel

$$(k(x)u'(x))' + r(x) = 0 \quad x \in [0, L] \quad \begin{cases} u(x=0) = 0 \\ k(L)u'(L) = q \end{cases}$$

Cumul de 3 expériences (simulées)  $\Rightarrow u_1, u_2, u_3$ :

$$q_1 = 0, r_1(x) = \delta(x - L/3); \quad q_2 = 0, r_2(x) = \delta(x - 2L/3); \quad q_3 = 1, r_3(x) = 0$$

Mesures (simulées)  $u_1^{\text{obs}}, u_2^{\text{obs}}, u_3^{\text{obs}}$ , solutions directes  $u_1^k, u_2^k, u_3^k$  (à  $k$  donné).

## Exemple unidimensionnel: formulation par optimisation

On considère (presque) le même exemple unidimensionnel

$$(k(x)u'(x))' + r(x) = 0 \quad x \in [0, L] \quad \begin{cases} u(x=0) = 0 \\ k(L)u'(L) = q \end{cases}$$

Cumul de 3 expériences (simulées)  $\Rightarrow u_1, u_2, u_3$ :

$$q_1 = 0, r_1(x) = \delta(x - L/3); \quad q_2 = 0, r_2(x) = \delta(x - 2L/3); \quad q_3 = 1, r_3(x) = 0$$

Mesures (simulées)  $u_1^{\text{obs}}, u_2^{\text{obs}}, u_3^{\text{obs}}$ , solutions directes  $u_1^k, u_2^k, u_3^k$  (à  $k$  donné).

- Fonction-coût (avec régularisation d'ordre 1), forme continue:

$$\mathcal{J}_\alpha(k) = J(u_1^k, u_2^k, u_3^k) = \frac{1}{2} \left\{ \sum_{i=1}^3 \int_0^L |u_i^k - u_i^{\text{obs}}|^2 dx \right\} + \frac{\alpha}{2} \int_0^L \left| \frac{dk}{dx} \right|^2 dx$$



## Exemple unidimensionnel: formulation par optimisation

On considère (presque) le même exemple unidimensionnel

$$(k(x)u'(x))' + r(x) = 0 \quad x \in [0, L] \quad \begin{cases} u(x=0) = 0 \\ k(L)u'(L) = q \end{cases}$$

Cumul de 3 expériences (simulées)  $\Rightarrow u_1, u_2, u_3$ :

$$q_1 = 0, r_1(x) = \delta(x - L/3); \quad q_2 = 0, r_2(x) = \delta(x - 2L/3); \quad q_3 = 1, r_3(x) = 0$$

Mesures (simulées)  $u_1^{\text{obs}}, u_2^{\text{obs}}, u_3^{\text{obs}}$ , solutions directes  $u_1^k, u_2^k, u_3^k$  (à  $k$  donné).

- Fonction-coût (avec régularisation d'ordre 1), forme continue:

$$\mathcal{J}_\alpha(k) = J(u_1^k, u_2^k, u_3^k) = \frac{1}{2} \left\{ \sum_{i=1}^3 \int_0^L |u_i^k - u_i^{\text{obs}}|^2 dx \right\} + \frac{\alpha}{2} \int_0^L \left| \frac{dk}{dx} \right|^2 dx$$

- Fonction-coût (avec régularisation d'ordre 1), forme discrète:

$$\mathcal{J}_\alpha(\mathbf{k}) = J(\mathbf{u}_1^k, \mathbf{u}_2^k, \mathbf{u}_3^k) = \frac{1}{2} \left\{ \sum_{i=1}^3 \|\mathbf{u}_i^k - \mathbf{u}_i^{\text{obs}}\|^2 \right\} + \frac{\alpha}{2} \|\mathbf{Lk}\|^2$$

## Exemple unidimensionnel: formulation par optimisation

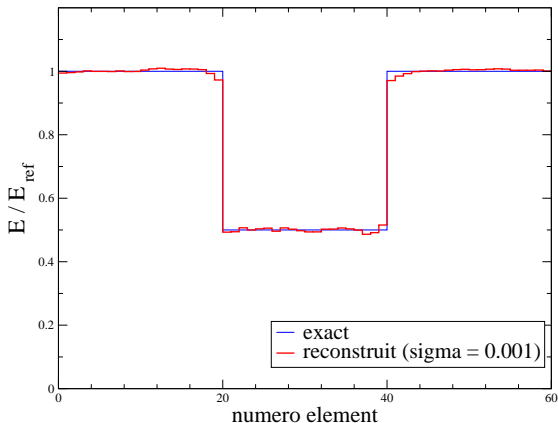
$$\mathcal{J}_\alpha(\mathbf{k}) = J(\mathbf{u}_1^k, \mathbf{u}_2^k, \mathbf{u}_3^k) = \frac{1}{2} \left\{ \sum_{i=1}^3 \|\mathbf{u}_i^k - \mathbf{u}_i^{\text{obs}}\|^2 \right\} + \frac{\alpha}{2} \|\mathbf{L}\mathbf{k}\|^2$$

- Minimisation de  $\mathcal{J}_\alpha(\mathbf{k})$  par quasi-Newton BFGS (section 7);
- Gradient  $\mathcal{J}'_\alpha$  calculé par la méthode de l'état adjoint (section 8):

$$\mathcal{J}'_\alpha(\mathbf{k}) = - \left\{ \sum_{i=1}^3 \mathbf{w}_i^{k\top} \mathbf{K}'(\mathbf{k}) \mathbf{u}_i^k \right\} + \alpha \mathbf{k}^\top \mathbf{L}^\top \mathbf{L}$$

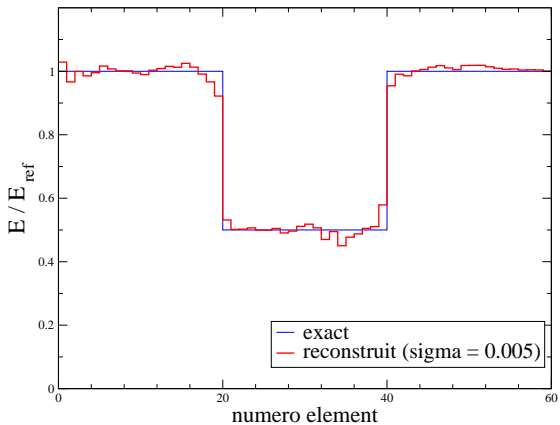
$$\mathbf{K} \mathbf{w}_i^k = \mathbf{u}_i^k - \mathbf{u}_i^{\text{obs}} \quad (\text{état adjoint associé à chaque expérience})$$

# Exemple unidimensionnel, formulation par optimisation: résultats



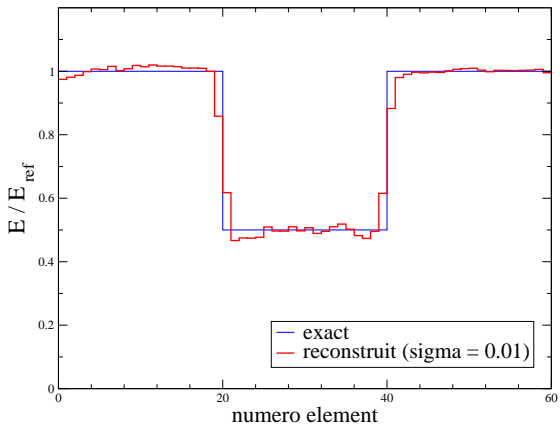
Données bruitées ( $\sigma = 10^{-3}$ ),  $\alpha = \alpha_{opt} \approx 10^{-6}$ ,  $E(\alpha_{opt}) = 8,9 \cdot 10^{-3}$

# Exemple unidimensionnel, formulation par optimisation: résultats



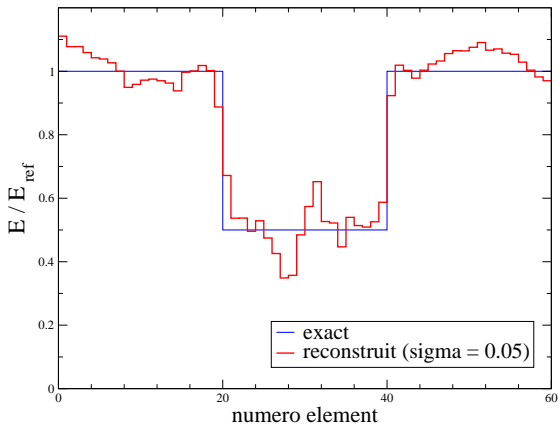
Données bruitées ( $\sigma = 5 \cdot 10^{-3}$ ),  $\alpha = \alpha_{opt} \approx 5 \cdot 10^{-5}$ ,  $E(\alpha_{opt}) = 2,5 \cdot 10^{-2}$

# Exemple unidimensionnel, formulation par optimisation: résultats



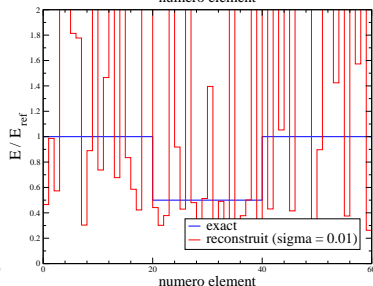
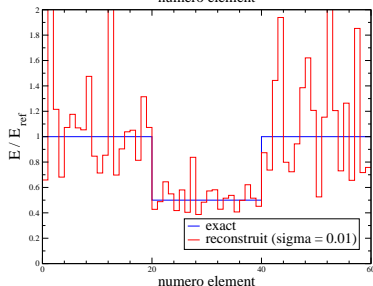
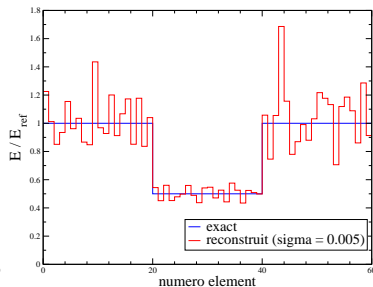
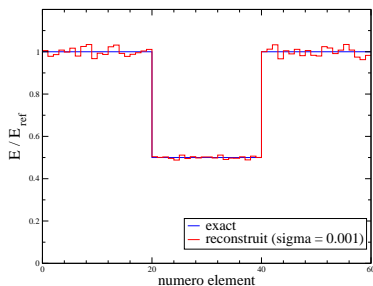
Données bruitées ( $\sigma = 10^{-2}$ ),  $\alpha = \alpha_{opt} \approx 2 \cdot 10^{-4}$ ,  $E(\alpha_{opt}) = 3,9 \cdot 10^{-2}$

# Exemple unidimensionnel, formulation par optimisation: résultats



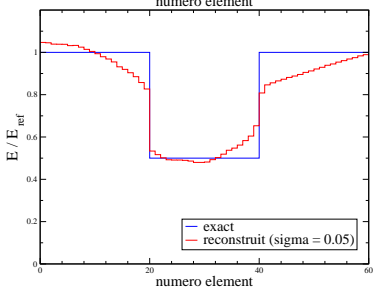
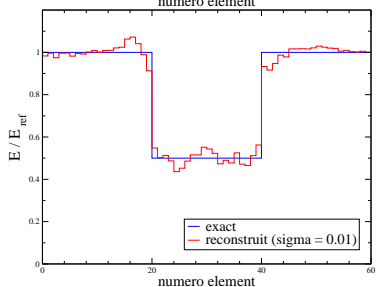
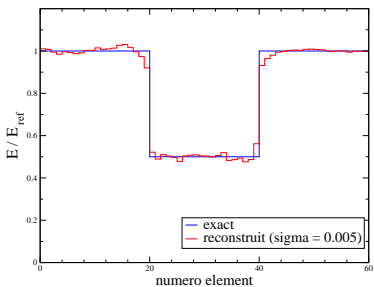
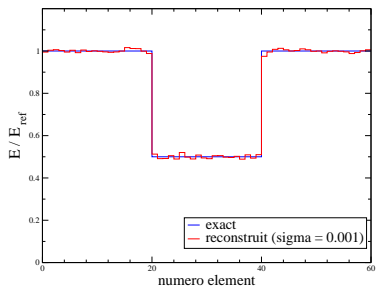
Données bruitées ( $\sigma = 5 \cdot 10^{-2}$ ),  $\alpha = \alpha_{opt} \approx 2 \cdot 10^{-4}$ ,  $E(\alpha_{opt}) = 7,2 \cdot 10^{-2}$

# Exemple unidimensionnel, formulation par optimisation: résultats



Données bruitées ( $\sigma = 10^{-3}$ ,  $5 \cdot 10^{-3}$ ,  $10^{-2}$ ,  $5 \cdot 10^{-2}$ ), sans régularisation ( $\alpha = 0$ )

# Exemple unidimensionnel, formulation par optimisation: résultats



Données bruitées ( $\sigma = 10^{-3}$ ,  $5 \cdot 10^{-3}$ ,  $10^{-2}$ ,  $5 \cdot 10^{-2}$ ), régularisation par variation totale



## 9. Exemples de problèmes mal posés

## 10. Régularisation

Notion de régularisation

Régularisation optimale

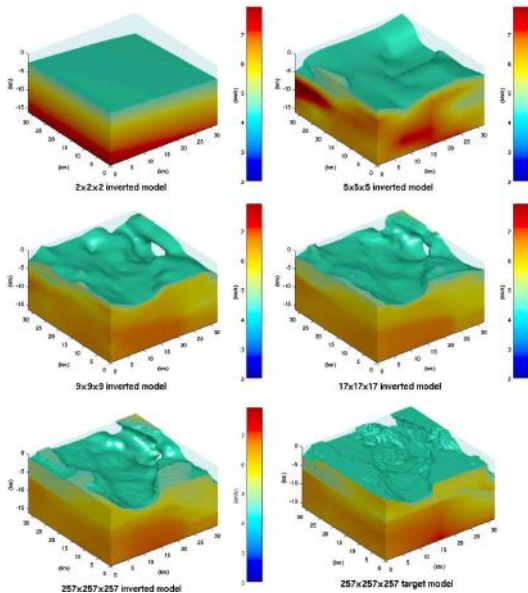
Exemples de problèmes inverses régularisés

## 11. Etude d'un exemple unidimensionnel

Formulation par dérivation numérique des données

Formulation par minimisation d'écart mesure-calcul

## 12. Exemple tridimensionnel (Epanomeritakis et coll., 2008)

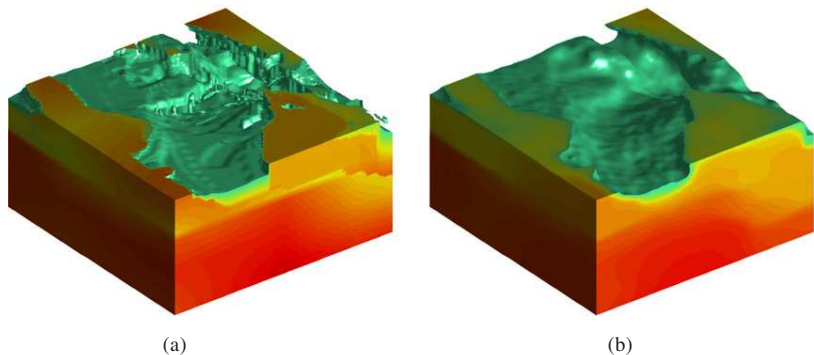


**Figure 1.** Acoustic 3D full waveform inversion. The sequence of inverted velocity models corresponding to successively finer grids; target model shown in lower right image;  $V_p = 4.5 \text{ km s}^{-1}$  isosurfaces depicted.

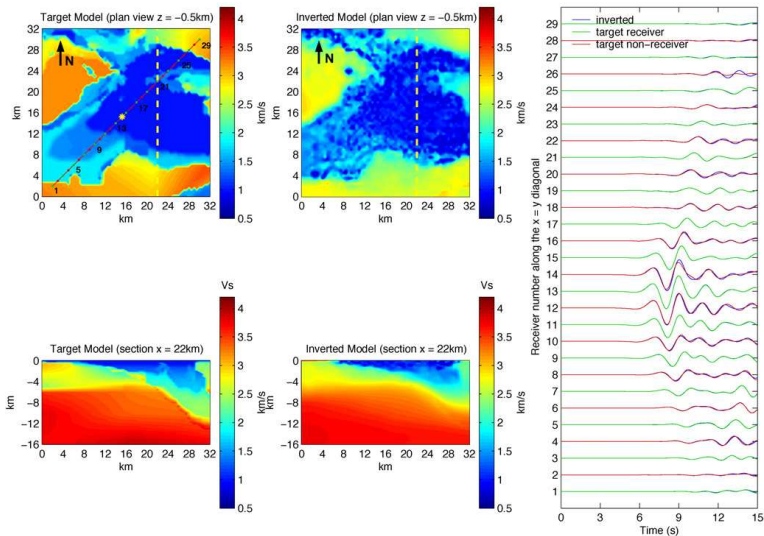
Total-variation regularization functional:

$$\Omega(\mu) = \int_{\Omega} (\eta + \|\nabla\mu\|^2)^{1/2} dV$$

Epanomeritakis, Akcelik, Ghattas, Bielak  
*Inverse Problems*, 2008



**Figure 2.** Acoustic 3D full waveform inversion. The comparison of the  $V_p = 3.8 \text{ km s}^{-1}$  isosurfaces of (a) target model and (b) inverted model, both on  $257 \times 257 \times 257$  grids.



**Figure 3.** Elastic 3D full waveform inversion. The comparison of target and inverted S-wave velocity models (left); the comparison of target and inverted waveforms at receiver and non-receiver locations (right).

## Plan général

**Partie 1:** Généralités

**Partie 2:** Identification en mécanique des solides

**Partie 3:** Outils: algèbre linéaire, moindres carrés, optimisation

**Partie 4:** Problèmes mal posés et leur régularisation

**Partie 5:** Approches bayésiennes

### 13. Approche probabiliste des problèmes inverses

Approche par conjonction d'information (Tarantola)

Lien avec le théorème de Bayes

Modélisation par lois de probabilité gaussiennes

Modélisation par lois de probabilité gaussiennes généralisées

Echantillonnage de la densité a posteriori

Exemple numérique en acoustique

Exemple en dynamique des structures (thèse E. Zhang, UTC, 2010)

### 14. Assimilation de données, filtrage de Kalman

Problématique de l'assimilation de données

Interpolation statistique, estimateur BLUE

Interpolation séquentielle

Filtre de Kalman linéaire

Filtre de Kalman étendu

Formalisme variationnel

Exemple: dynamique d'une barre

Exemple: tempête de 1999

### 13. Approche probabiliste des problèmes inverses

Approche par conjonction d'information (Tarantola)

Lien avec le théorème de Bayes

Modélisation par lois de probabilité gaussiennes

Modélisation par lois de probabilité gaussiennes généralisées

Echantillonnage de la densité a posteriori

Exemple numérique en acoustique

Exemple en dynamique des structures (thèse E. Zhang, UTC, 2010)

### 14. Assimilation de données, filtrage de Kalman

Problématique de l'assimilation de données

Interpolation statistique, estimateur BLUE

Interpolation séquentielle

Filtre de Kalman linéaire

Filtre de Kalman étendu

Formalisme variationnel

Exemple: dynamique d'une barre

Exemple: tempête de 1999

## Motivation et principe

**Principe** L'information possédée sur une variable  $x$  est décrite par la donnée d'une fonction densité de probabilité  $f_X(x)$ . Exemples:

- $x$  prend avec certitude la valeur  $x_0$ :

$$f_X(x) = \delta(x - x_0)$$

- $x$  peut varier, de manière équiprobable, entre  $a$  et  $b$ :

$$f_X(x) = \frac{1}{b-a} \quad (a \leq x \leq b) \quad f_X(x) = 0 \quad \text{sinon}$$

Menke W. – *Geophysical data analysis: discrete inverse theory* Academic Press, 1984

Tarantola A. – *Inverse problem theory*. Elsevier, 1987

Tarantola A. – *Inverse problem theory and methods for model parameter estimation* SIAM, 2005

Kaipio J., Somersalo E., *Statistical and computational inverse problems*, Springer, 2005



## Motivation et principe

**Principe** L'information possédée sur une variable  $x$  est décrite par la donnée d'une fonction densité de probabilité  $f_X(x)$ . Exemples:

- $x$  prend avec certitude la valeur  $x_0$ :

$$f_X(x) = \delta(x - x_0)$$

- $x$  peut varier, de manière équiprobable, entre  $a$  et  $b$ :

$$f_X(x) = \frac{1}{b-a} \quad (a \leq x \leq b) \quad f_X(x) = 0 \quad \text{sinon}$$

- (i) Définition d'informations a priori sur  $\mathbf{d}, \mathbf{p}$ , initialement considérées comme statistiquement indépendantes
- (ii) Prise en compte de la corrélation par le modèle physique  $\mathbf{G}$

Menke W. – *Geophysical data analysis: discrete inverse theory* Academic Press, 1984

Tarantola A. – *Inverse problem theory*. Elsevier, 1987

Tarantola A. – *Inverse problem theory and methods for model parameter estimation* SIAM, 2005

Kaipio J., Somersalo E., *Statistical and computational inverse problems*, Springer, 2005

### 13. Approche probabiliste des problèmes inverses

#### Approche par conjonction d'information (Tarantola)

Lien avec le théorème de Bayes

Modélisation par lois de probabilité gaussiennes

Modélisation par lois de probabilité gaussiennes généralisées

Echantillonnage de la densité a posteriori

Exemple numérique en acoustique

Exemple en dynamique des structures (thèse E. Zhang, UTC, 2010)

### 14. Assimilation de données, filtrage de Kalman

## Méthodologie

**Etape 1:** Définition d'informations *a priori* sur  $\mathbf{d}$ ,  $\mathbf{p}$ , initialement considérées comme indépendantes:

- Loi d'erreur sur les mesures  $\mathbf{d}$ :  $f_{\mathcal{D}}(\mathbf{d})$ .
- Informations *a priori* sur les valeurs de  $\mathbf{p}$ :  $f_{\mathcal{P}}(\mathbf{p})$ 
  - positivité
  - intervalle de variation
  - ...

En général, connaissance *qualitative* de l'inconnue  $\mathbf{p}$ ,

$f_{\mathcal{P}}, f_{\mathcal{D}}$ : état de notre connaissance *a priori* de  $\mathbf{d}$  et  $\mathbf{p}$  (avant prise en compte du modèle physique  $\mathbf{g}$ ).

## Méthodologie

**Etape 1:** Définition d'informations *a priori* sur  $\mathbf{d}$ ,  $\mathbf{p}$ , initialement considérées comme indépendantes:

- Loi d'erreur sur les mesures  $\mathbf{d}$ :  $f_{\mathcal{D}}(\mathbf{d})$ .
- Informations *a priori* sur les valeurs de  $\mathbf{p}$ :  $f_{\mathcal{P}}(\mathbf{p})$ 
  - positivité
  - intervalle de variation
  - ...

En général, connaissance *qualitative* de l'inconnue  $\mathbf{p}$ ,

$f_{\mathcal{P}}, f_{\mathcal{D}}$ : état de notre connaissance *a priori* de  $\mathbf{d}$  et  $\mathbf{p}$  (avant prise en compte du modèle physique  $\mathbf{g}$ ).

**Etape 2:** Modélisation de l'incertitude sur le modèle physique direct  $\mathbf{G}$ :

- Degré supposé d'exactitude de  $\mathbf{G}$ :  $f_{\mathcal{G}}(\mathbf{p}, \mathbf{d})$ .

## Méthodologie

**Etape 3:** Prise en compte de la corrélation par le modèle physique **G**.

Principe (Tarantola): *conjonction* de deux états d'information  $f_1, f_2$ :

$$f_1, f_2 \rightarrow C(f_1, f_2)$$

Repose sur une analogie avec le connecteur "et". Doit vérifier les propriétés:

- Commutativité:  $C(f_1, f_2) = C(f_2, f_1)$ .
- Associativité:  $C(f_1, C(f_2, f_3)) = C(C(f_1, f_2), f_3)$ .
- Invariance par reparamétrisation.
- $C(f_1, \mu) = f_1$  ( $\mu$ : densité "d'information nulle", ou "ignorance totale").
- $[f_1(A) = 0 \text{ ou } f_2(A) = 0] \Rightarrow [C(f_1, f_2)(A) = 0]$

## Méthodologie

**Etape 3:** Prise en compte de la corrélation par le modèle physique **G**.

Principe (Tarantola): *conjonction* de deux états d'information  $f_1, f_2$ :

$$f_1, f_2 \rightarrow C(f_1, f_2)$$

Repose sur une analogie avec le connecteur "et". Doit vérifier les propriétés:

- Commutativité:  $C(f_1, f_2) = C(f_2, f_1)$ .
- Associativité:  $C(f_1, C(f_2, f_3)) = C(C(f_1, f_2), f_3)$ .
- Invariance par reparamétrisation.
- $C(f_1, \mu) = f_1$  ( $\mu$ : densité "d'information nulle", ou "ignorance totale").
- $[f_1(A) = 0 \text{ ou } f_2(A) = 0] \Rightarrow [C(f_1, f_2)(A) = 0]$

Une définition qui convient:

$$C(f_1, f_2) = \frac{f_1 f_2}{\mu}, \quad \text{ou encore} \quad C(f_1, f_2) = A f_1 f_2$$

où  $A = A(f_1, f_2)$  est une constante de normalisation assurant  $\int C(f_1, f_2) = 1$ .

## Solution formelle d'un problème inverse

**Principe:** effectuer la conjonction pour  $f_1$  et  $f_2$  correspondant aux deux sources d'information (a priori, et modèle physique), soit

$$\begin{cases} f_1(\mathbf{p}, \mathbf{d}) = f_{\mathcal{D}}(\mathbf{d})f_{\mathcal{P}}(\mathbf{p}) \\ f_2(\mathbf{p}, \mathbf{d}) = f_G(\mathbf{p}, \mathbf{d}) \end{cases}$$

Cela conduit à définir la densité de probabilité *a posteriori*  $F$  sur  $\mathcal{P} \times \mathcal{D}$ :

$$F(\mathbf{p}, \mathbf{d}) := \frac{f_{\mathcal{D}}(\mathbf{d})f_{\mathcal{P}}(\mathbf{p})f_G(\mathbf{p}, \mathbf{d})}{\mu(\mathbf{p}, \mathbf{d})}$$

## Solution formelle d'un problème inverse

**Principe:** effectuer la conjonction pour  $f_1$  et  $f_2$  correspondant aux deux sources d'information (a priori, et modèle physique), soit

$$\begin{cases} f_1(\mathbf{p}, \mathbf{d}) = f_{\mathcal{D}}(\mathbf{d})f_{\mathcal{P}}(\mathbf{p}) \\ f_2(\mathbf{p}, \mathbf{d}) = f_G(\mathbf{p}, \mathbf{d}) \end{cases}$$

Cela conduit à définir la densité de probabilité *a posteriori*  $F$  sur  $\mathcal{P} \times \mathcal{D}$ :

$$F(\mathbf{p}, \mathbf{d}) := \frac{f_{\mathcal{D}}(\mathbf{d})f_{\mathcal{P}}(\mathbf{p})f_G(\mathbf{p}, \mathbf{d})}{\mu(\mathbf{p}, \mathbf{d})}$$

Exprime toute l'information disponible sur  $\mathbf{p}$  et  $\mathbf{d}$  après prise en compte

- des erreurs de mesure
- des informations a priori
- du modèle physique

Extraction d'information sur  $\mathbf{p}$  par *marginalisation*:

$$F_{\mathcal{P}}(\mathbf{p}) = \int_{\mathcal{D}} F(\mathbf{p}, \mathbf{d}) d\mathbf{d}$$



## Solution formelle d'un problème inverse

### Simplifications et formulation explicite:

- Les espaces  $\mathcal{D}$  et  $\mathcal{P}$  représentent des grandeurs physiquement très différentes:

$$\mu(\mathbf{p}, \mathbf{d}) = \mu_{\mathcal{P}}(\mathbf{p})\mu_{\mathcal{D}}(\mathbf{d})$$

- L'écart au modèle exact suit une loi conditionnelle sur  $\mathbf{d}$  pour tout  $\mathbf{p}$  donné:

$$f_G(\mathbf{p}, \mathbf{d}) = \phi_G(\mathbf{d}|\mathbf{p})\mu_{\mathcal{P}}(\mathbf{p})$$

Information a posteriori sur  $\mathbf{p}$  exprimée avec la *fonction de vraisemblance*  $L$

$$F_{\mathcal{P}}(\mathbf{p}) = f_{\mathcal{P}}(\mathbf{p})L(\mathbf{p}), \quad L(\mathbf{p}) := \int_{\mathcal{D}} \frac{\phi_G(\mathbf{d}|\mathbf{p})f_{\mathcal{D}}(\mathbf{d})}{\mu_{\mathcal{D}}(\mathbf{d})} d\mathbf{d}$$

## Solution formelle d'un problème inverse

### Simplifications et formulation explicite:

- Les espaces  $\mathcal{D}$  et  $\mathcal{P}$  représentent des grandeurs physiquement très différentes:

$$\mu(\mathbf{p}, \mathbf{d}) = \mu_{\mathcal{P}}(\mathbf{p})\mu_{\mathcal{D}}(\mathbf{d})$$

- L'écart au modèle exact suit une loi conditionnelle sur  $\mathbf{d}$  pour tout  $\mathbf{p}$  donné:

$$f_G(\mathbf{p}, \mathbf{d}) = \phi_G(\mathbf{d}|\mathbf{p})\mu_{\mathcal{P}}(\mathbf{p})$$

Information a posteriori sur  $\mathbf{p}$  exprimée avec la *fonction de vraisemblance*  $L$

$$F_{\mathcal{P}}(\mathbf{p}) = f_{\mathcal{P}}(\mathbf{p})L(\mathbf{p}), \quad L(\mathbf{p}) := \int_{\mathcal{D}} \frac{\phi_G(\mathbf{d}|\mathbf{p})f_{\mathcal{D}}(\mathbf{d})}{\mu_{\mathcal{D}}(\mathbf{d})} d\mathbf{d}$$

- Si de plus l'information *a priori* sur les mesures est mise sous la forme

$$f_{\mathcal{D}}(\mathbf{d}) = \phi_{\mathcal{D}}(\mathbf{d}_{\text{obs}}|\mathbf{d})\mu_{\mathcal{D}}(\mathbf{d}),$$

## Solution formelle d'un problème inverse

### Simplifications et formulation explicite:

- Les espaces  $\mathcal{D}$  et  $\mathcal{P}$  représentent des grandeurs physiquement très différentes:

$$\mu(\mathbf{p}, \mathbf{d}) = \mu_{\mathcal{P}}(\mathbf{p})\mu_{\mathcal{D}}(\mathbf{d})$$

- L'écart au modèle exact suit une loi conditionnelle sur  $\mathbf{d}$  pour tout  $\mathbf{p}$  donné:

$$f_G(\mathbf{p}, \mathbf{d}) = \phi_G(\mathbf{d}|\mathbf{p})\mu_{\mathcal{P}}(\mathbf{p})$$

Information a posteriori sur  $\mathbf{p}$  exprimée avec la *fonction de vraisemblance*  $L$

$$F_{\mathcal{P}}(\mathbf{p}) = f_{\mathcal{P}}(\mathbf{p})L(\mathbf{p}), \quad L(\mathbf{p}) := \int_{\mathcal{D}} \frac{\phi_G(\mathbf{d}|\mathbf{p})f_{\mathcal{D}}(\mathbf{d})}{\mu_{\mathcal{D}}(\mathbf{d})} d\mathbf{d}$$

- Si de plus l'information *a priori* sur les mesures est mise sous la forme

$$f_{\mathcal{D}}(\mathbf{d}) = \phi_{\mathcal{D}}(\mathbf{d}_{\text{obs}}|\mathbf{d})\mu_{\mathcal{D}}(\mathbf{d}),$$

alors

$$L(\mathbf{p}) = \int_{\mathcal{D}} \phi_G(\mathbf{d}|\mathbf{p})\phi_{\mathcal{D}}(\mathbf{d}_{\text{obs}}|\mathbf{d})d\mathbf{d}$$

## Solution formelle d'un problème inverse

### Simplifications et formulation explicite:

- Les espaces  $\mathcal{D}$  et  $\mathcal{P}$  représentent des grandeurs physiquement très différentes:

$$\mu(\mathbf{p}, \mathbf{d}) = \mu_{\mathcal{P}}(\mathbf{p})\mu_{\mathcal{D}}(\mathbf{d})$$

- L'écart au modèle exact suit une loi conditionnelle sur  $\mathbf{d}$  pour tout  $\mathbf{p}$  donné:

$$f_G(\mathbf{p}, \mathbf{d}) = \phi_G(\mathbf{d}|\mathbf{p})\mu_{\mathcal{P}}(\mathbf{p})$$

Information a posteriori sur  $\mathbf{p}$  exprimée avec la *fonction de vraisemblance*  $L$

$$F_{\mathcal{P}}(\mathbf{p}) = f_{\mathcal{P}}(\mathbf{p})L(\mathbf{p}), \quad L(\mathbf{p}) := \int_{\mathcal{D}} \frac{\phi_G(\mathbf{d}|\mathbf{p})f_{\mathcal{D}}(\mathbf{d})}{\mu_{\mathcal{D}}(\mathbf{d})} d\mathbf{d}$$

- Si de plus l'information *a priori* sur les mesures est mise sous la forme

$$f_{\mathcal{D}}(\mathbf{d}) = \phi_{\mathcal{D}}(\mathbf{d}_{\text{obs}}|\mathbf{d})\mu_{\mathcal{D}}(\mathbf{d}),$$

alors

$$L(\mathbf{p}) = \int_{\mathcal{D}} \phi_G(\mathbf{d}|\mathbf{p})\phi_{\mathcal{D}}(\mathbf{d}_{\text{obs}}|\mathbf{d})d\mathbf{d}$$

- Si, de plus, le modèle physique est exact:

$$f_G(\mathbf{d}|\mathbf{p}) = \delta(\mathbf{d} - \mathbf{G}(\mathbf{p})) \quad \Longrightarrow \quad L(\mathbf{p}) = \phi_{\mathcal{D}}(\mathbf{d}_{\text{obs}}|\mathbf{G}(\mathbf{p}))$$

$$F_{\mathcal{P}}(\boldsymbol{p}) = f_{\mathcal{P}}(\boldsymbol{p}) \phi_{\mathcal{D}}(\boldsymbol{d}_{\text{obs}} | \boldsymbol{G}(\boldsymbol{p}))$$

### Simplicité apparente, qui cache des difficultés:

- Subjectivité: modélisation du problème et des informations a priori laissée au jugement de l'analyste ("*garbage in, garbage out*").
- Interprétation directe (visuelle...) de  $F_{\mathcal{P}}(\boldsymbol{p})$  difficile si  $\text{Dim}(\mathcal{P}) > 2$  ou  $3$ .

$$F_{\mathcal{P}}(\mathbf{p}) = f_{\mathcal{P}}(\mathbf{p}) \phi_{\mathcal{D}}(\mathbf{d}_{\text{obs}} | \mathbf{G}(\mathbf{p}))$$

### Simplicité apparente, qui cache des difficultés:

- Subjectivité: modélisation du problème et des informations a priori laissée au jugement de l'analyste ("*garbage in, garbage out*").
- Interprétation directe (visuelle...) de  $F_{\mathcal{P}}(\mathbf{p})$  difficile si  $\text{Dim}(\mathcal{P}) > 2$  ou  $3$ .

### Deux approches possibles pour exploiter $F_{\mathcal{P}}(\mathbf{p})$ :

1. Extraire des renseignements significatifs sur  $\mathbf{p}$  à partir de  $F_{\mathcal{P}}$ :
  - valeur moyenne a posteriori de  $\mathbf{p}$ .
  - valeur(s) de  $\mathbf{p}$  de plus forte probabilité a posteriori.
  - estimateur de dispersion a posteriori sur  $\mathbf{p}$  (écart-type, ...).
  - corrélations a posteriori.
  - ...

$$F_{\mathcal{P}}(\mathbf{p}) = f_{\mathcal{P}}(\mathbf{p}) \phi_{\mathcal{D}}(\mathbf{d}_{\text{obs}} | \mathbf{G}(\mathbf{p}))$$

## Simplicité apparente, qui cache des difficultés:

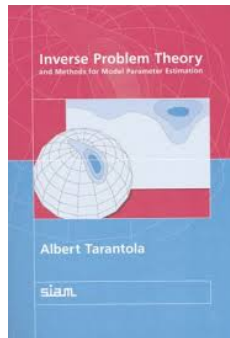
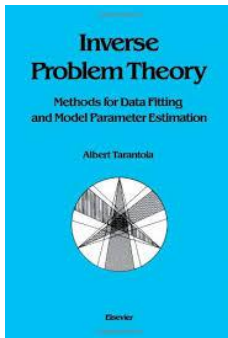
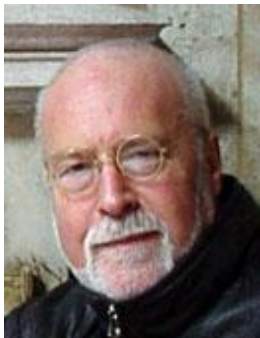
- Subjectivité: modélisation du problème et des informations a priori laissée au jugement de l'analyste ("*garbage in, garbage out*").
- Interprétation directe (visuelle...) de  $F_{\mathcal{P}}(\mathbf{p})$  difficile si  $\text{Dim}(\mathcal{P}) > 2$  ou  $3$ .

## Deux approches possibles pour exploiter $F_{\mathcal{P}}(\mathbf{p})$ :

1. Extraire des renseignements significatifs sur  $\mathbf{p}$  à partir de  $F_{\mathcal{P}}$ :
  - valeur moyenne a posteriori de  $\mathbf{p}$ .
  - valeur(s) de  $\mathbf{p}$  de plus forte probabilité a posteriori.
  - estimateur de dispersion a posteriori sur  $\mathbf{p}$  (écart-type, ...).
  - corrélations a posteriori.
  - ...
2. Echantillonner  $F_{\mathcal{P}}$

On se concentre dans ce cours sur l'approche 1.

# Albert Tarantola (1949-2009), IPG Paris





### 13. Approche probabiliste des problèmes inverses

Approche par conjonction d'information (Tarantola)

Lien avec le théorème de Bayes

Modélisation par lois de probabilité gaussiennes

Modélisation par lois de probabilité gaussiennes généralisées

Echantillonnage de la densité a posteriori

Exemple numérique en acoustique

Exemple en dynamique des structures (thèse E. Zhang, UTC, 2010)

### 14. Assimilation de données, filtrage de Kalman

## Probabilité conditionnelle

Définition d'une probabilité conditionnelle  $P(A|B)$ :

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Variable aléatoire discrète:

$$P(A = a | B = b) = \frac{P(A = a \text{ et } B = b)}{P(B = b)}$$

## Probabilité conditionnelle

Définition d'une probabilité conditionnelle  $P(A|B)$ :

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Variable aléatoire discrète:

$$P(A = a | B = b) = \frac{P(A = a \text{ et } B = b)}{P(B = b)}$$

Variable aléatoire continue:

$$P(Y \in A | X \in B) = \frac{\int_{A \times B} P(a, b) da db}{\int_A P_B(b) db}$$

où  $P(a, b)$  est la densité de probabilité de la loi jointe sur  $(a, b)$  et  $P_B$  est la densité marginale

$$P_B(b) = \int P_{A,B}(a, b) da$$

## Probabilité conditionnelle

Définition d'une probabilité conditionnelle  $P(A|B)$ :

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Variable aléatoire discrète:

$$P(A = a | B = b) = \frac{P(A = a \text{ et } B = b)}{P(B = b)}$$

Variable aléatoire continue:

$$P(Y \in A | X \in B) = \frac{\int_{A \times B} P(a, b) da db}{\int_A P_B(b) db}$$

où  $P(a, b)$  est la densité de probabilité de la loi jointe sur  $(a, b)$  et  $P_B$  est la densité marginale

$$P_B(b) = \int P_{A,B}(a, b) da$$

**Théorème de Bayes:**  $P_{A|B}(a, b)P_B(b) = P_{B|A}(b, a)P_A(a)$

Permet d'évaluer la probabilité d'une cause connaissant la conséquence

## Exemple

Cas de deux évènements complémentaires  $A_1, A_2$ :

$$P(A_1|B) = \frac{P(B|A_1)P(A_1)}{P(B|A_1)P(A_1) + P(B|A_2)P(A_2)}$$

- **Exemple:** Test médical pour déterminer si une personne est atteinte d'une certaine maladie:
  - Réponses positives correctes (personnes malades testées comme malades): 99%
  - Réponses négatives correctes (personnes saines testées comme saines): 99%

La maladie affecte 0,5% de la population.

- Application avec  $A_1$ : je suis malade;  $A_2$ : je ne suis pas malade,  $B$ : le test est positif.

$$P(A_1|B) = \frac{0,99 \times 0,005}{0,99 \times 0,005 + 0,01 \times 0,995} \approx 0,332$$

j'ai une chance sur 3 d'être réellement malade si je suis testé positif

## Application du théorème de Bayes

$$P_{A|B}(a, b)P_B(b) = P_{B|A}(b, a)P_A(a)$$

**Idée:** utiliser Bayes pour inverser la relation entre  $\mathbf{p}$  et  $\mathbf{d}$ :

$$f_{\mathcal{P}|\mathcal{D}}(\mathbf{p}|\mathbf{d}_{\text{obs}})f_{\mathcal{D}}(\mathbf{d}_{\text{obs}}) = f_{\mathcal{D}|\mathcal{P}}(\mathbf{d}_{\text{obs}}|\mathbf{p})f_{\mathcal{P}}(\mathbf{p})$$

$f_{\mathcal{P}}(\mathbf{p})$ : densité de probabilité décrivant l'information a priori sur  $\mathbf{p}$

$f_{\mathcal{D}|\mathcal{P}}(\mathbf{d}|\mathbf{p})$ : densité de probabilité décrivant l'effet du problème direct  
(prise en compte d'incertitudes de modélisation et de mesure)

$f_{\mathcal{P}|\mathcal{D}}(\mathbf{p}|\mathbf{d}_{\text{obs}})f_{\mathcal{D}}(\mathbf{d}_{\text{obs}})$ : densité de probabilité sur  $\mathbf{p}$  conditionné par  $\mathbf{d}$   
(solution du problème inverse)

## Formulations bayésiennes

- Densité de probabilité *a posteriori*:

$$f_{\mathcal{P}|\mathcal{D}}(\mathbf{p}|\mathbf{d}_{\text{obs}}) = \frac{f_{\mathcal{D}|\mathcal{P}}(\mathbf{d}_{\text{obs}}|\mathbf{p})f_{\mathcal{P}}(\mathbf{p})}{\int f_{\mathcal{D}|\mathcal{P}}(\mathbf{d}_{\text{obs}}|\mathbf{p})d\mathbf{p}} = L(\mathbf{p})f_{\mathcal{P}}(\mathbf{p})$$

## Formulations bayésiennes

- Densité de probabilité *a posteriori*:

$$f_{\mathcal{P}|\mathcal{D}}(\mathbf{p}|\mathbf{d}_{\text{obs}}) = \frac{f_{\mathcal{D}|\mathcal{P}}(\mathbf{d}_{\text{obs}}|\mathbf{p})f_{\mathcal{P}}(\mathbf{p})}{\int f_{\mathcal{D}|\mathcal{P}}(\mathbf{d}_{\text{obs}}|\mathbf{p})d\mathbf{p}} = L(\mathbf{p})f_{\mathcal{P}}(\mathbf{p})$$

- Extraction d'informations exploitables (maximum de vraisemblance, moyenne, covariance...) par post-traitement de  $f_{\mathcal{P}|\mathcal{D}}(\mathbf{p}|\mathbf{d}_{\text{obs}})$ , par exemple:

$$\mathbf{p}_{\text{MAP}} = \arg \max_{\mathbf{p}} f_{\mathcal{P}|\mathcal{D}}(\mathbf{p}|\mathbf{d}_{\text{obs}}) \quad \textit{Maximum a posteriori estimate}$$

$$\mathbf{p}_{\text{CM}} = \int \mathbf{p} f_{\mathcal{P}|\mathcal{D}}(\mathbf{p}|\mathbf{d}_{\text{obs}}) d\mathbf{p} \quad \textit{Conditional-mean estimate}$$

$$\mathbf{C} = \int (\mathbf{p} - \mathbf{p}_{\text{CM}})(\mathbf{p} - \mathbf{p}_{\text{CM}})^{\text{T}} f_{\mathcal{P}|\mathcal{D}}(\mathbf{p}|\mathbf{d}_{\text{obs}}) d\mathbf{p}$$



### 13. Approche probabiliste des problèmes inverses

Approche par conjonction d'information (Tarantola)

Lien avec le théorème de Bayes

**Modélisation par lois de probabilité gaussiennes**

Modélisation par lois de probabilité gaussiennes généralisées

Echantillonnage de la densité a posteriori

Exemple numérique en acoustique

Exemple en dynamique des structures (thèse E. Zhang, UTC, 2010)

### 14. Assimilation de données, filtrage de Kalman

## Lois de probabilité gaussiennes

- Rappel: vecteur aléatoire  $\mathbf{y} = [y_j]_{j=1,N}^*$  de loi gaussienne  $\mathcal{N}(\langle \mathbf{y} \rangle, \mathbf{C})$ :

$$f(\mathbf{y}) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^N \det(\mathbf{C})}} \exp\left(-\frac{1}{2}(\mathbf{y} - \langle \mathbf{y} \rangle)^* \mathbf{C}^{-1}(\mathbf{y} - \langle \mathbf{y} \rangle)\right)$$

$\langle \mathbf{y} \rangle$ : valeur moyenne;  $\mathbf{C}$  matrice de covariance (symétrique définie positive)

## Lois de probabilité gaussiennes

- Rappel: vecteur aléatoire  $\mathbf{y} = [y_j]_{j=1,N}^*$  de loi gaussienne  $\mathcal{N}(\langle \mathbf{y} \rangle, \mathbf{C})$ :

$$f(\mathbf{y}) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^N \det(\mathbf{C})}} \exp\left(-\frac{1}{2}(\mathbf{y} - \langle \mathbf{y} \rangle)^* \mathbf{C}^{-1}(\mathbf{y} - \langle \mathbf{y} \rangle)\right)$$

$\langle \mathbf{y} \rangle$ : valeur moyenne;  $\mathbf{C}$  matrice de covariance (symétrique définie positive)

- Informations *a priori* sur les données et le modèle choisies de la forme

$$\begin{aligned} f_{\mathcal{D}}(\mathbf{d}) &= f_{\mathcal{D}}(\mathbf{d} | \mathbf{d}_{\text{obs}}) \mu_{\mathcal{D}}(\mathbf{d}) = \mathcal{N}(\mathbf{d}_{\text{obs}}, \mathbf{C}_d) \\ f_{\mathcal{G}}(\mathbf{d} | \mathbf{p}) &= \mathcal{N}(\mathbf{G}(\mathbf{p}), \mathbf{C}_T) \end{aligned}$$

## Lois de probabilité gaussiennes

- Rappel: vecteur aléatoire  $\mathbf{y} = [y_j]_{j=1,N}^*$  de loi gaussienne  $\mathcal{N}(\langle \mathbf{y} \rangle, \mathbf{C})$ :

$$f(\mathbf{y}) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^N \det(\mathbf{C})}} \exp\left(-\frac{1}{2}(\mathbf{y} - \langle \mathbf{y} \rangle)^* \mathbf{C}^{-1}(\mathbf{y} - \langle \mathbf{y} \rangle)\right)$$

$\langle \mathbf{y} \rangle$ : valeur moyenne;  $\mathbf{C}$  matrice de covariance (symétrique définie positive)

- Informations *a priori* sur les données et le modèle choisies de la forme

$$\begin{aligned} f_{\mathcal{D}}(\mathbf{d}) &= f_{\mathcal{D}}(\mathbf{d}|\mathbf{d}_{\text{obs}})\mu_{\mathcal{D}}(\mathbf{d}) = \mathcal{N}(\mathbf{d}_{\text{obs}}, \mathbf{C}_d) \\ f_{\mathcal{G}}(\mathbf{d}|\mathbf{p}) &= \mathcal{N}(\mathbf{G}(\mathbf{p}), \mathbf{C}_T) \end{aligned}$$

- Densité a posteriori: le calcul donne:

$$F_{\mathcal{P}}(\mathbf{p}) = (\text{cste}) f_{\mathcal{P}}(\mathbf{p}) \times \exp\left(-\frac{1}{2}(\mathbf{G}(\mathbf{p}) - \mathbf{d}_{\text{obs}})^* \mathbf{C}_{\mathcal{D}}^{-1}(\mathbf{G}(\mathbf{p}) - \mathbf{d}_{\text{obs}})\right)$$

$$\text{avec } \mathbf{C}_{\mathcal{D}} = \mathbf{C}_d + \mathbf{C}_T$$

## Lois de probabilité gaussiennes

- Information a priori sur  $\mathbf{p}$ :

$$f_{\mathcal{P}}(\mathbf{p}) = \mathcal{N}(\mathbf{p}_0, \mathbf{C}_{\mathcal{P}})$$

alors:

$$F_{\mathcal{P}}(\mathbf{p}) = \text{cste} \exp\left(-\frac{1}{2}S(\mathbf{p})\right) \quad \text{avec}$$

$$S_{\mathcal{P}}(\mathbf{p}) = (\mathbf{G}(\mathbf{p}) - \mathbf{d}_{\text{obs}})^* \mathbf{C}_{\mathcal{D}}^{-1} (\mathbf{G}(\mathbf{p}) - \mathbf{d}_{\text{obs}}) + (\mathbf{p} - \mathbf{p}_0)^* \mathbf{C}_{\mathcal{P}}^{-1} (\mathbf{p} - \mathbf{p}_0)$$

## Lois de probabilité gaussiennes

- Information a priori sur  $\boldsymbol{p}$ :

$$f_{\mathcal{P}}(\boldsymbol{p}) = \mathcal{N}(\boldsymbol{p}_0, \boldsymbol{C}_{\mathcal{P}})$$

alors:

$$F_{\mathcal{P}}(\boldsymbol{p}) = \text{cste} \exp\left(-\frac{1}{2}S(\boldsymbol{p})\right) \quad \text{avec}$$

$$S_{\mathcal{P}}(\boldsymbol{p}) = (\boldsymbol{G}(\boldsymbol{p}) - \boldsymbol{d}_{\text{obs}})^* \boldsymbol{C}_{\mathcal{D}}^{-1}(\boldsymbol{G}(\boldsymbol{p}) - \boldsymbol{d}_{\text{obs}}) + (\boldsymbol{p} - \boldsymbol{p}_0)^* \boldsymbol{C}_{\mathcal{P}}^{-1}(\boldsymbol{p} - \boldsymbol{p}_0)$$

- Calcul du maximum *a posteriori*:

$$\boldsymbol{p}_{\text{MAP}} = \arg \max_{\boldsymbol{p}} F_{\mathcal{P}}(\boldsymbol{p}) = \arg \min_{\boldsymbol{p}} S(\boldsymbol{p})$$

## Lois de probabilité gaussiennes

- Information a priori sur  $\mathbf{p}$ :

$$f_{\mathcal{P}}(\mathbf{p}) = \mathcal{N}(\mathbf{p}_0, \mathbf{C}_{\mathcal{P}})$$

alors:

$$F_{\mathcal{P}}(\mathbf{p}) = \text{cste} \exp\left(-\frac{1}{2}S(\mathbf{p})\right) \quad \text{avec}$$

$$S_{\mathcal{P}}(\mathbf{p}) = (\mathbf{G}(\mathbf{p}) - \mathbf{d}_{\text{obs}})^* \mathbf{C}_{\mathcal{D}}^{-1} (\mathbf{G}(\mathbf{p}) - \mathbf{d}_{\text{obs}}) + (\mathbf{p} - \mathbf{p}_0)^* \mathbf{C}_{\mathcal{P}}^{-1} (\mathbf{p} - \mathbf{p}_0)$$

- Calcul du maximum *a posteriori*:

$$\mathbf{p}_{\text{MAP}} = \arg \max_{\mathbf{p}} F_{\mathcal{P}}(\mathbf{p}) = \arg \min_{\mathbf{p}} S(\mathbf{p})$$

- Informations a priori *indépendantes* sur  $\mathbf{d}$  et  $\mathbf{p}$ :  $\mathbf{C}_{\mathcal{P}} = \sigma_{\mathcal{P}}^2 \mathbf{I}$ ,  $\mathbf{C}_{\mathcal{D}} = \sigma_{\mathcal{D}}^2 \mathbf{I}$

Formellement identique à la régularisation de Tikhonov avec  $\alpha = (\sigma_{\mathcal{D}}/\sigma_{\mathcal{P}})^2$ .

Approche probabiliste = régularisation + interprétation statistique des données et résultats.

Equivalent du paramètre de régularisation:  $\mathbf{C}_{\mathcal{D}}^{1/2} \mathbf{C}_{\mathcal{P}}^{-1/2}$ , fixé par interprétation stat.

## Lois de probabilité gaussiennes, modèle linéaire

L'opérateur  $\mathbf{G}$  est linéaire:

$$\mathbf{G}(\mathbf{p}) = \mathbf{G}\mathbf{p}$$

alors  $S(\mathbf{p})$  est quadratique et vaut

$$\begin{aligned} S_{\mathcal{P}}(\mathbf{p}) &= (\mathbf{G}\mathbf{p} - \mathbf{d}_{\text{obs}})^* \mathbf{C}_{\mathcal{D}}^{-1} (\mathbf{G}\mathbf{p} - \mathbf{d}_{\text{obs}}) + (\mathbf{p} - \mathbf{p}_0)^* \mathbf{C}_{\mathcal{P}}^{-1} (\mathbf{p} - \mathbf{p}_0) \\ &= \mathbf{p}^* \mathbf{C}^{-1} \mathbf{p} - 2\mathbf{p}^* \mathbf{b} + c \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{avec} \quad \mathbf{C}^{-1} &= \mathbf{G}^* \mathbf{C}_{\mathcal{D}}^{-1} \mathbf{G} + \mathbf{C}_{\mathcal{P}}^{-1} \\ \mathbf{b} &= \mathbf{G}^* \mathbf{C}_{\mathcal{D}}^{-1} \mathbf{d}_{\text{obs}} + \mathbf{C}_{\mathcal{P}}^{-1} \mathbf{p}_0 \\ c &= \mathbf{d}_{\text{obs}}^* \mathbf{C}_{\mathcal{D}}^{-1} \mathbf{d}_{\text{obs}} + \mathbf{p}_0^* \mathbf{C}_{\mathcal{P}}^{-1} \mathbf{p}_0 \end{aligned}$$



## Lois de probabilité gaussiennes, modèle linéaire

L'opérateur  $\mathbf{G}$  est linéaire:

$$\mathbf{G}(\mathbf{p}) = \mathbf{G}\mathbf{p}$$

alors  $S(\mathbf{p})$  est quadratique et vaut

$$\begin{aligned} S_{\mathcal{P}}(\mathbf{p}) &= (\mathbf{G}\mathbf{p} - \mathbf{d}_{\text{obs}})^* \mathbf{C}_{\mathcal{D}}^{-1} (\mathbf{G}\mathbf{p} - \mathbf{d}_{\text{obs}}) + (\mathbf{p} - \mathbf{p}_0)^* \mathbf{C}_{\mathcal{P}}^{-1} (\mathbf{p} - \mathbf{p}_0) \\ &= \mathbf{p}^* \mathbf{C}^{-1} \mathbf{p} - 2\mathbf{p}^* \mathbf{b} + c \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{avec} \quad \mathbf{C}^{-1} &= \mathbf{G}^* \mathbf{C}_{\mathcal{D}}^{-1} \mathbf{G} + \mathbf{C}_{\mathcal{P}}^{-1} \\ \mathbf{b} &= \mathbf{G}^* \mathbf{C}_{\mathcal{D}}^{-1} \mathbf{d}_{\text{obs}} + \mathbf{C}_{\mathcal{P}}^{-1} \mathbf{p}_0 \\ c &= \mathbf{d}_{\text{obs}}^* \mathbf{C}_{\mathcal{D}}^{-1} \mathbf{d}_{\text{obs}} + \mathbf{p}_0^* \mathbf{C}_{\mathcal{P}}^{-1} \mathbf{p}_0 \end{aligned}$$

Recherche du point  $\mathbf{p}$  maximisant  $F_{\mathcal{P}}(\mathbf{p})$ :

$$\langle \mathbf{p} \rangle = \arg \max_{\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n} F_{\mathcal{P}}(\mathbf{p}) = \arg \min_{\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n} S_{\mathcal{P}}(\mathbf{p})$$

On trouve

$$\langle \mathbf{p} \rangle = \mathbf{C}\mathbf{b} = [\mathbf{G}^* \mathbf{C}_{\mathcal{D}}^{-1} \mathbf{G} + \mathbf{C}_{\mathcal{P}}^{-1}]^{-1} (\mathbf{G}^* \mathbf{C}_{\mathcal{D}}^{-1} \mathbf{d}_{\text{obs}} + \mathbf{C}_{\mathcal{P}}^{-1} \mathbf{p}_0)$$

## Lois de probabilité gaussiennes, modèle linéaire

$$\langle \mathbf{p} \rangle = \mathbf{C} \mathbf{b} \implies S_{\mathcal{P}}(\mathbf{p}) = (\mathbf{p} - \langle \mathbf{p} \rangle)^* \mathbf{C}^{-1} (\mathbf{p} - \langle \mathbf{p} \rangle) + \langle \mathbf{p} \rangle^* \mathbf{C}^{-1} \langle \mathbf{p} \rangle + c$$

Par conséquent,  $F_{\mathcal{P}}$  est **gaussienne** de moyenne  $\langle \mathbf{p} \rangle$  et de covariance  $\mathbf{C}$ :

$$F_{\mathcal{P}}(\mathbf{p}) = \mathcal{N}(\langle \mathbf{p} \rangle, \mathbf{C})$$

- $\langle \mathbf{p} \rangle$  maximise  $F_{\mathcal{P}}(\mathbf{p})$  i.e. minimise  $S(\mathbf{p})$ .
- $\mathbf{C}$ : hessien de  $S$  en  $\mathbf{p} = \langle \mathbf{p} \rangle$ .

Inversion gaussienne: seul cas d'inversion probabiliste (ou bayésienne) où les formules d'inversion sont linéaires quand  $\mathbf{G}$  l'est.

## Lois de probabilité gaussiennes, modèle non linéaire

Si l'opérateur  $\mathbf{G}$  n'est pas linéaire,  $F_{\mathcal{P}}(\mathbf{p})$  n'est plus gaussienne.

Recherche du point  $\mathbf{p}$  maximisant  $F_{\mathcal{P}}(\mathbf{p})$ : procédure **itérative** (section 7)

$$\mathbf{p}_{\infty} = \arg \max_{\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n} F_{\mathcal{P}}(\mathbf{p}) = \arg \min_{\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n} S_{\mathcal{P}}(\mathbf{p})$$

## Lois de probabilité gaussiennes, modèle non linéaire

Si l'opérateur  $\mathbf{G}$  n'est pas linéaire,  $F_{\mathcal{P}}(\mathbf{p})$  n'est plus gaussienne.

Recherche du point  $\mathbf{p}$  maximisant  $F_{\mathcal{P}}(\mathbf{p})$ : procédure **itérative** (section 7)

$$\mathbf{p}_{\infty} = \arg \max_{\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n} F_{\mathcal{P}}(\mathbf{p}) = \arg \min_{\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n} S_{\mathcal{P}}(\mathbf{p})$$

Si  $\mathbf{G}(\mathbf{p})$  suffisamment régulier en  $\mathbf{p}_{\infty}$ :

$$S_{\mathcal{P}}(\mathbf{p}) = (\mathbf{p} - \mathbf{p}_{\infty})^* \mathbf{C}_{\infty}^{-1} (\mathbf{p} - \mathbf{p}_{\infty}) + \text{cste}$$

$$\mathbf{C}_{\infty} = [\nabla_{\mathbf{p}} \mathbf{G}]^* (\mathbf{p}_{\infty}) \mathbf{C}_{\mathcal{D}}^{-1} \nabla_{\mathbf{p}} \mathbf{G}(\mathbf{p}_{\infty}) + \mathbf{C}_{\mathcal{P}}^{-1}$$

Interprétation de  $\mathbf{C}_{\infty}$ : matrice de covariante de la *variable aléatoire gaussienne tangente* en  $\mathbf{p}_{\infty}$ .

## Exploitation de la matrice de covariance a posteriori

**Remise en cause a posteriori de l'hypothèse gaussienne:** La valeur de  $S(\langle \mathbf{p} \rangle)$  suit une loi du  $\chi^2$  à  $m = \text{Dim}(\mathcal{D})$  degrés de liberté:

moyenne  $m$ , écart-type  $\sqrt{2m}$

Conséquence:  $S(\langle \mathbf{p} \rangle)$  éloignée de  $[m - \sqrt{2m}, m + \sqrt{2m}]$  demande une remise en cause des hypothèses gaussiennes:

- petit nombre de mesures *aberrantes*.
- hypothèse gaussienne à rejeter.

## Exploitation de la matrice de covariance a posteriori

### Evaluation d'indicateurs associés au résultat de l'inversion:

- Volume (dans  $\mathcal{P} = \mathbb{R}^n$ ) de l'ellipsoïde d'erreur  $\mathbf{S}(\mathbf{p}) = \mathbf{p}^T \mathbf{C}^{-1} \mathbf{p} = 1$ .

$$\boxed{V = A(n)(\det \mathbf{C})^{1/2}} \quad A(n) = \frac{\pi^{n/2}}{n2^{n-1}\Gamma(n/2)} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

(mesure le  $n$ -volume dans  $\mathcal{P}$  pour une déviation d'1 écart-type)

## Exploitation de la matrice de covariance a posteriori

### Evaluation d'indicateurs associés au résultat de l'inversion:

- Volume (dans  $\mathcal{P} = \mathbb{R}^n$ ) de l'ellipsoïde d'erreur  $\mathbf{S}(\mathbf{p}) = \mathbf{p}^T \mathbf{C}^{-1} \mathbf{p} = 1$ .

$$V = A(n)(\det \mathbf{C})^{1/2} \quad A(n) = \frac{\pi^{n/2}}{n 2^{n-1} \Gamma(n/2)} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

(mesure le  $n$ -volume dans  $\mathcal{P}$  pour une déviation d'1 écart-type)

- La racine  $n^{\text{ième}}$  de  $V$  (moyenne géométrique des écarts-types principaux de  $\mathbf{C}$ ) a la dimension d'un écart-type

$$(\det \mathbf{C})^{1/2n} = \left\{ \prod_{i=1}^{i=n} \sigma_i \right\}^{1/n}$$

## Exploitation de la matrice de covariance a posteriori

### Evaluation d'indicateurs associés au résultat de l'inversion:

- Volume (dans  $\mathcal{P} = \mathbb{R}^n$ ) de l'ellipsoïde d'erreur  $\mathbf{S}(\mathbf{p}) = \mathbf{p}^T \mathbf{C}^{-1} \mathbf{p} = 1$ .

$$V = A(n)(\det \mathbf{C})^{1/2} \quad A(n) = \frac{\pi^{n/2}}{n 2^{n-1} \Gamma(n/2)} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

(mesure le  $n$ -volume dans  $\mathcal{P}$  pour une déviation d'1 écart-type)

- La racine  $n^{\text{ième}}$  de  $V$  (moyenne géométrique des écarts-types principaux de  $\mathbf{C}$ ) a la dimension d'un écart-type

$$(\det \mathbf{C})^{1/2n} = \left\{ \prod_{i=1}^{i=n} \sigma_i \right\}^{1/n}$$

- Racine  $n^{\text{ième}}$  de la variation relative du volume de l'ellipsoïde d'erreur:

$$\gamma = \left\{ \frac{(\det \mathbf{C})}{(\det \mathbf{C}_{\mathcal{P}})} \right\}^{1/2n}$$

mesure du gain d'information (d'autant plus grand que  $\gamma$  est petit) entre les états *a priori* et *a posteriori*.



### 13. Approche probabiliste des problèmes inverses

Approche par conjonction d'information (Tarantola)

Lien avec le théorème de Bayes

Modélisation par lois de probabilité gaussiennes

**Modélisation par lois de probabilité gaussiennes généralisées**

Echantillonnage de la densité a posteriori

Exemple numérique en acoustique

Exemple en dynamique des structures (thèse E. Zhang, UTC, 2010)

### 14. Assimilation de données, filtrage de Kalman

## Lois gaussiennes généralisées

Hypothèses:

1. Modèle physique exact.
2. Erreurs sur les mesures  $d_i$  indépendantes.
3. Incertitudes sur les valeurs a priori  $p_j^{prior}$  indépendantes.
4. Densités de probabilité a priori sur  $\mathbf{p}$  et  $\mathbf{d}$  du type "gaussienne généralisée" d'ordre  $q$  ( $1 \leq q < \infty$ ):

$$f_{\mathcal{P}}(\mathbf{p}) = \text{Cste} \prod_{j=1}^N \exp \left( -\frac{1}{q} \frac{|p_j - p_j^{prior}|^q}{(\sigma_j^{\mathcal{P}})^q} \right)$$

$$\frac{f_{\mathcal{D}}(\mathbf{d})}{\mu_{\mathcal{D}}(\mathbf{d})} = \text{Cste} \prod_{j=1}^N \exp \left( -\frac{1}{q} \frac{|g_j(\mathbf{p}) - d_j^{obs}|^q}{(\sigma_j^{\mathcal{D}})^q} \right)$$

## Lois gaussiennes généralisées

Hypothèses:

1. Modèle physique exact.
2. Erreurs sur les mesures  $d_i$  indépendantes.
3. Incertitudes sur les valeurs a priori  $p_j^{prior}$  indépendantes.
4. Densités de probabilité a priori sur  $\mathbf{p}$  et  $\mathbf{d}$  du type "gaussienne généralisée" d'ordre  $q$  ( $1 \leq q < \infty$ ):

$$f_{\mathcal{P}}(\mathbf{p}) = \text{Cste} \prod_{j=1}^N \exp \left( -\frac{1}{q} \frac{|p_j - p_j^{prior}|^q}{(\sigma_j^{\mathcal{P}})^q} \right)$$

$$\frac{f_{\mathcal{D}}(\mathbf{d})}{\mu_{\mathcal{D}}(\mathbf{d})} = \text{Cste} \prod_{j=1}^N \exp \left( -\frac{1}{q} \frac{|g_j(\mathbf{p}) - d_j^{obs}|^q}{(\sigma_j^{\mathcal{D}})^q} \right)$$

Le calcul donne:

$$F_{\mathcal{P}}(\mathbf{p}) = \text{Cste} \exp \left( -\frac{1}{q} \left[ \sum_{j=1}^N \frac{|p_j - p_j^{prior}|^q}{(\sigma_j^{\mathcal{P}})^q} + \sum_{i=1}^{\mathcal{P}} \frac{|g_i(\mathbf{p}) - d_i^{obs}|^q}{(\sigma_i^{\mathcal{D}})^q} \right] \right)$$

## Inversion probabiliste par optimisation: récapitulation

$$F_{\mathcal{P}}(\mathbf{p}) = \text{Cste} \exp \left( -\frac{1}{q} \left[ \sum_{j=1}^N \frac{|p_j - p_j^{\text{prior}}|^q}{(\sigma_j^{\mathcal{P}})^q} + \sum_{i=1}^{\mathcal{P}} \frac{g_i(\mathbf{p}) - d_i^{\text{obs}}|^q}{(\sigma_i^{\mathcal{D}})^q} \right] \right)$$

- $q = 2$ : lois gaussiennes ordinaires.
  - $\mathbf{G}$  linéaire: calcul non-itératif.
  - $\mathbf{G}$  non-linéaire: gradient conjugué, BFGS, Marquardt-Levenberg, ...

## Inversion probabiliste par optimisation: récapitulation

$$F_{\mathcal{P}}(\mathbf{p}) = \text{Cste} \exp \left( -\frac{1}{q} \left[ \sum_{j=1}^N \frac{|p_j - p_j^{\text{prior}}|^q}{(\sigma_j^{\mathcal{P}})^q} + \sum_{i=1}^{\mathcal{P}} \frac{g_i(\mathbf{p}) - d_i^{\text{obs}}|^q}{(\sigma_i^{\mathcal{D}})^q} \right] \right)$$

- $q = 2$ : lois gaussiennes ordinaires.
  - $\mathbf{G}$  linéaire: calcul non-itératif.
  - $\mathbf{G}$  non-linéaire: gradient conjugué, BFGS, Marquardt-Levenberg, ...
- $q = 1$ : moins sensible que  $q = 2$  aux mesures aberrantes, mais  $F_{\mathcal{P}}(\mathbf{p})$  non différentiable. Correspond à des densités de probabilité de type Cauchy.
  - $\mathbf{G}$  linéaire: programmation linéaire (simplexe ...).
  - $\mathbf{G}$  non-linéaire: autre ...

## Inversion probabiliste par optimisation: récapitulation

$$F_{\mathcal{P}}(\mathbf{p}) = \text{Cste} \exp \left( -\frac{1}{q} \left[ \sum_{j=1}^N \frac{|p_j - p_j^{\text{prior}}|^q}{(\sigma_j^{\mathcal{P}})^q} + \sum_{i=1}^{\mathcal{P}} \frac{g_i(\mathbf{p}) - d_i^{\text{obs}}|^q}{(\sigma_i^{\mathcal{D}})^q} \right] \right)$$

- $q = 2$ : lois gaussiennes ordinaires.
  - $\mathbf{G}$  linéaire: calcul non-itératif.
  - $\mathbf{G}$  non-linéaire: gradient conjugué, BFGS, Marquardt-Levenberg, ...
- $q = 1$ : moins sensible que  $q = 2$  aux mesures aberrantes, mais  $F_{\mathcal{P}}(\mathbf{p})$  non différentiable. Correspond à des densités de probabilité de type Cauchy.
  - $\mathbf{G}$  linéaire: programmation linéaire (simplexe ...).
  - $\mathbf{G}$  non-linéaire: autre ...
- $q = \infty$ : correspond aux densités de probabilité uniformes via

$$\lim_{q \rightarrow \infty} \frac{|p_j - p_j^{\text{prior}}|^q}{(\sigma_j^{\mathcal{P}})^q} = \begin{cases} 0 & |p_j - p_j^{\text{prior}}| < \sigma_j^{\mathcal{P}} \\ +\infty & |p_j - p_j^{\text{prior}}| > \sigma_j^{\mathcal{P}} \end{cases}$$

- $\mathbf{G}$  linéaire: programmation linéaire, approche duale (simplexe ...).
- $\mathbf{G}$  non-linéaire: autre ...

### 13. Approche probabiliste des problèmes inverses

Approche par conjonction d'information (Tarantola)

Lien avec le théorème de Bayes

Modélisation par lois de probabilité gaussiennes

Modélisation par lois de probabilité gaussiennes généralisées

**Echantillonnage de la densité a posteriori**

Exemple numérique en acoustique

Exemple en dynamique des structures (thèse E. Zhang, UTC, 2010)

### 14. Assimilation de données, filtrage de Kalman

## Inversion probabiliste par Monte Carlo

- Echantillonnage (marche au hasard,...) de  $f_{\mathcal{P}}(\mathbf{p})$
- Echantillonnage induit (via  $\mathbf{d} = \mathbf{G}(\mathbf{p})$ ) de  $F_{\mathcal{P}}(\mathbf{p})$
- Méthodes stochastiques de maximisation de  $F_{\mathcal{P}}(\mathbf{p})$ :
  - Algorithme EM
  - Recuit simulé



## Inversion probabiliste par Monte Carlo

### Echantillonnage des densités par algorithme de Métropolis(-Hastings)

- Echantillonner une densité de probabilité de la forme

$$h(\mathbf{p}) = C \frac{f(\mathbf{p})g(\mathbf{p})}{\mu(\mathbf{p})} = Cf(\mathbf{p})L(\mathbf{p}) \quad \left( L(\mathbf{p}) := \frac{g(\mathbf{p})}{\mu(\mathbf{p})} \right)$$

au moyen d'une méthode d'échantillonnage de  $f$  générant une suite de transitions  $\mathbf{p}_k \rightarrow \mathbf{p}_{k+1}$ .

## Inversion probabiliste par Monte Carlo

### Echantillonnage des densités par algorithme de Métropolis(-Hastings)

- Echantillonner une densité de probabilité de la forme

$$h(\mathbf{p}) = C \frac{f(\mathbf{p})g(\mathbf{p})}{\mu(\mathbf{p})} = Cf(\mathbf{p})L(\mathbf{p}) \quad \left( L(\mathbf{p}) := \frac{g(\mathbf{p})}{\mu(\mathbf{p})} \right)$$

au moyen d'une méthode d'échantillonnage de  $f$  générant une suite de transitions  $\mathbf{p}_k \rightarrow \mathbf{p}_{k+1}$ .

- Pour une transition  $\mathbf{p}_k \rightarrow \mathbf{p}_{k+1}$ :
  - Si  $L(\mathbf{p}_{k+1}) \geq L(\mathbf{p}_k)$ : transition acceptée
  - Si  $L(\mathbf{p}_{k+1}) < L(\mathbf{p}_k)$ : transition acceptée avec la probabilité

$$P_{k \rightarrow k+1} = L(\mathbf{p}_{k+1})/L(\mathbf{p}_k)$$

(si transition rejetée, on reste en  $\mathbf{p}_k$  et on réessaie une transition)

## Inversion probabiliste par Monte Carlo

### Echantillonnage des densités par algorithme de Métropolis(-Hastings)

- Echantillonner une densité de probabilité de la forme

$$h(\mathbf{p}) = C \frac{f(\mathbf{p})g(\mathbf{p})}{\mu(\mathbf{p})} = Cf(\mathbf{p})L(\mathbf{p}) \quad \left( L(\mathbf{p}) := \frac{g(\mathbf{p})}{\mu(\mathbf{p})} \right)$$

au moyen d'une méthode d'échantillonnage de  $f$  générant une suite de transitions  $\mathbf{p}_k \rightarrow \mathbf{p}_{k+1}$ .

- Pour une transition  $\mathbf{p}_k \rightarrow \mathbf{p}_{k+1}$ :
  - Si  $L(\mathbf{p}_{k+1}) \geq L(\mathbf{p}_k)$ : transition acceptée
  - Si  $L(\mathbf{p}_{k+1}) < L(\mathbf{p}_k)$ : transition acceptée avec la probabilité

$$P_{k \rightarrow k+1} = L(\mathbf{p}_{k+1})/L(\mathbf{p}_k)$$

(si transition rejetée, on reste en  $\mathbf{p}_k$  et on réessaie une transition)

- On commence par échantillonner  $g$  à l'aide d'un échantillonneur de  $\mu$  en posant  $f = \mu$

## Inversion probabiliste par Monte Carlo

### Echantillonnage des densités par algorithme de Métropolis(-Hastings)

- Echantillonner une densité de probabilité de la forme

$$h(\mathbf{p}) = C \frac{f(\mathbf{p})g(\mathbf{p})}{\mu(\mathbf{p})} = Cf(\mathbf{p})L(\mathbf{p}) \quad \left( L(\mathbf{p}) := \frac{g(\mathbf{p})}{\mu(\mathbf{p})} \right)$$

au moyen d'une méthode d'échantillonnage de  $f$  générant une suite de transitions  $\mathbf{p}_k \rightarrow \mathbf{p}_{k+1}$ .

- Pour une transition  $\mathbf{p}_k \rightarrow \mathbf{p}_{k+1}$ :
  - Si  $L(\mathbf{p}_{k+1}) \geq L(\mathbf{p}_k)$ : transition acceptée
  - Si  $L(\mathbf{p}_{k+1}) < L(\mathbf{p}_k)$ : transition acceptée avec la probabilité

$$P_{k \rightarrow k+1} = L(\mathbf{p}_{k+1})/L(\mathbf{p}_k)$$

(si transition rejetée, on reste en  $\mathbf{p}_k$  et on réessaie une transition)

- On commence par échantillonner  $g$  à l'aide d'un échantillonneur de  $\mu$  en posant  $f = \mu$

### Théorème (Mosegaard et Tarantola, 2002)

La marche au hasard générée par la règle ci-dessus échantillonne la densité  $h$

## Inversion probabiliste par Monte Carlo

Echantillonnage de la densité a posteriori  $\boldsymbol{p} \mapsto F_{\mathcal{P}}(\boldsymbol{p})$ :

$$F_{\mathcal{P}}(\boldsymbol{p}) = f_{\mathcal{P}}(\boldsymbol{p}) \phi_{\mathcal{D}}(\boldsymbol{d}_{\text{obs}} | \mathbf{G}(\boldsymbol{p})) \quad (\text{rappel})$$

- Echantillonner la densité *a priori*  $\boldsymbol{p} \mapsto f_{\mathcal{P}}(\boldsymbol{p})$ ;
- Appliquer l'algorithme de Métropolis-Hastings avec la fonction de vraisemblance

$$L(\boldsymbol{p}) = \phi_{\mathcal{D}}(\boldsymbol{d}_{\text{obs}} | \mathbf{G}(\boldsymbol{p}))$$

Critère d'acceptation / rejet:

$$\frac{\phi_{\mathcal{D}}(\boldsymbol{d}_{\text{obs}} | \mathbf{G}(\boldsymbol{p}_{k+1}))}{\phi_{\mathcal{D}}(\boldsymbol{d}_{\text{obs}} | \mathbf{G}(\boldsymbol{p}_k))} \stackrel{?}{\geq} 1$$

Chaque transition (acceptée ou rejetée) demande une résolution de problème direct (évaluation de  $\mathbf{G}(\boldsymbol{p})$  pour  $\boldsymbol{p}$  donné).

### 13. Approche probabiliste des problèmes inverses

Approche par conjonction d'information (Tarantola)

Lien avec le théorème de Bayes

Modélisation par lois de probabilité gaussiennes

Modélisation par lois de probabilité gaussiennes généralisées

Echantillonnage de la densité a posteriori

**Exemple numérique en acoustique**

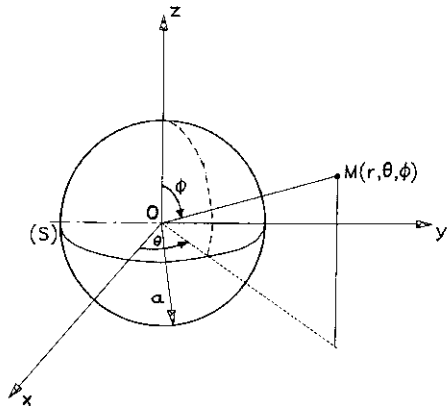
Exemple en dynamique des structures (thèse E. Zhang, UTC, 2010)

### 14. Assimilation de données, filtrage de Kalman

## Exemple numérique en acoustique

Exemple d'inversion gaussienne linéaire en variable complexe:

- Structure vibrant dans un milieu acoustique (air) infini.
- Inconnue: vitesse vibratoire  $U$  d'une structure
- Données: pression  $p(x_i)$  en des capteurs  $x_i$  extérieurs.



## Exemple numérique en acoustique: problème direct

- **Problème direct:** rayonnement acoustique d'une surface vibrant (vitesse normale imposée)

$$\begin{array}{lll}
 (\Delta + k^2)p = 0 & \text{dans } \Omega & (k = \omega/c: \text{ nombre d'onde}) \\
 \nabla p \cdot \mathbf{n} = i\rho\omega U & \text{sur } S = \partial\Omega & (\text{vitesse normale imposée}) \\
 \|\mathbf{x}\|(\nabla p \cdot \mathbf{e}_r - ikp) = o(1) & \|\mathbf{x}\| \rightarrow \infty & (\text{condition de rayonnement})
 \end{array}$$



## Exemple numérique en acoustique: problème direct

- **Problème direct:** rayonnement acoustique d'une surface vibrant (vitesse normale imposée)

$$\begin{array}{lll}
 (\Delta + k^2)p = 0 & \text{dans } \Omega & (k = \omega/c: \text{ nombre d'onde}) \\
 \nabla p \cdot \mathbf{n} = i\rho\omega U & \text{sur } S = \partial\Omega & (\text{vitesse normale imposée}) \\
 \|\mathbf{x}\|(\nabla p \cdot \mathbf{e}_r - ikp) = o(1) & \|\mathbf{x}\| \rightarrow \infty & (\text{condition de rayonnement})
 \end{array}$$

- **Géométrie particulière** (coque sphérique): résolution semi-analytique par séparation de variables.

## Exemple numérique en acoustique: problème direct

- **Problème direct:** rayonnement acoustique d'une surface vibrant (vitesse normale imposée)

$$\begin{array}{lll}
 (\Delta + k^2)p = 0 & \text{dans } \Omega & (k = \omega/c: \text{ nombre d'onde}) \\
 \nabla p \cdot \mathbf{n} = i\rho\omega U & \text{sur } S = \partial\Omega & (\text{vitesse normale imposée}) \\
 \|x\|(\nabla p \cdot \mathbf{e}_r - ikp) = o(1) & \|x\| \rightarrow \infty & (\text{condition de rayonnement})
 \end{array}$$

- **Géométrie particulière** (coque sphérique): résolution semi-analytique par séparation de variables.

- Cas axisymétrique:

$$U(\phi) = \sum_{m \geq 0} U_m P_m(\cos \phi) \quad (0 \leq \phi \leq \pi),$$

$$\begin{aligned}
 p(\mathbf{x}) = p(r, \phi) &= \sum_{m \geq 0} \alpha_m U_m P_m(\cos \phi) h_m^{(1)}(kr) \quad (0 \leq \phi \leq \pi, a \leq r \leq \infty) \\
 \alpha_m &= i\rho c / h_m^{(1)}(ka)
 \end{aligned}$$

où  $h_m^{(1)}(z) = \sqrt{\pi/2z} J_{m+1/2}(z) + iY_{m+1/2}(z)$  (fonctions de Hankel sphériques) et  $P_m$  est le polynôme de Legendre de degré  $m$ .

## Exemple numérique en acoustique: problème direct

- **Géométrie quelconque:** la valeur de  $p(x)$  aux points de mesure est donnée par la *formule de représentation intégrale*

$$p(x) = \int_S \partial_n G(z-x) p|_S(z) dS_z - i\rho\omega \int_S G(z-x) U(z) dS_z \quad (x \notin S) \quad (\text{RI})$$

avec  $G(\mathbf{r}) = e^{ik|\mathbf{r}|}/4\pi|\mathbf{r}|$  et où  $p|_S$  est solution de l'équation intégrale de frontière

$$\frac{1}{2}p|_S(\mathbf{y}) + \int_S \partial_n G(\mathbf{z}-\mathbf{y}) p|_S(\mathbf{z}) dS_z = i\rho\omega \int_S G(\mathbf{z}-\mathbf{y}) U(\mathbf{z}) dS_z \quad (\forall \mathbf{y} \in S) \quad (\text{EI})$$

## Exemple numérique en acoustique: problème direct

- **Géométrie quelconque:** la valeur de  $p(\mathbf{x})$  aux points de mesure est donnée par la *formule de représentation intégrale*

$$p(\mathbf{x}) = \int_S \partial_n G(\mathbf{z} - \mathbf{x}) p|_S(\mathbf{z}) dS_z - i\rho\omega \int_S G(\mathbf{z} - \mathbf{x}) U(\mathbf{z}) dS_z \quad (\mathbf{x} \notin S) \quad (\text{RI})$$

avec  $G(\mathbf{r}) = e^{ik|\mathbf{r}|}/4\pi|\mathbf{r}|$  et où  $p|_S$  est solution de l'équation intégrale de frontière

$$\frac{1}{2}p|_S(\mathbf{y}) + \int_S \partial_n G(\mathbf{z} - \mathbf{y}) p|_S(\mathbf{z}) dS_z = i\rho\omega \int_S G(\mathbf{z} - \mathbf{y}) U(\mathbf{z}) dS_z \quad (\forall \mathbf{y} \in S) \quad (\text{EI})$$

- Résolution numérique de (EI): discrétisation de  $S$  et  $p|_S$  par *éléments finis de frontière*

## Exemple numérique en acoustique: problème direct

- **Géométrie quelconque:** la valeur de  $p(\mathbf{x})$  aux points de mesure est donnée par la *formule de représentation intégrale*

$$p(\mathbf{x}) = \int_S \partial_n G(\mathbf{z} - \mathbf{x}) p|_S(\mathbf{z}) dS_z - i\rho\omega \int_S G(\mathbf{z} - \mathbf{x}) U(\mathbf{z}) dS_z \quad (\mathbf{x} \notin S) \quad (\text{RI})$$

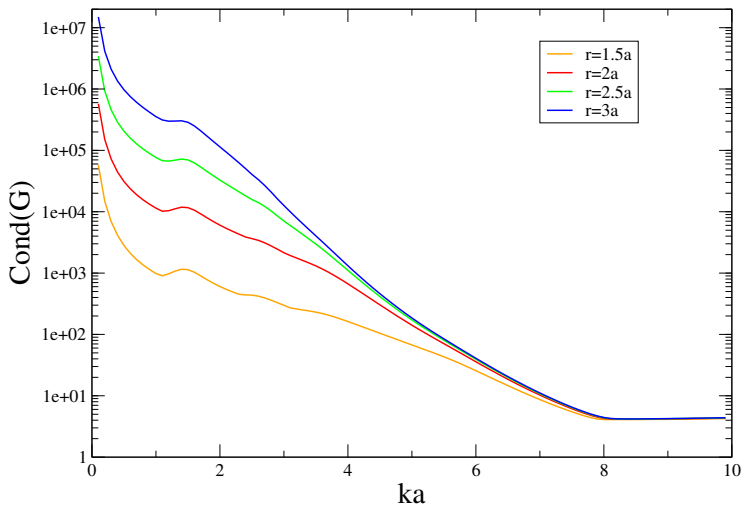
avec  $G(\mathbf{r}) = e^{ik|\mathbf{r}|}/4\pi|\mathbf{r}|$  et où  $p|_S$  est solution de l'équation intégrale de frontière

$$\frac{1}{2}p|_S(\mathbf{y}) + \int_S \partial_n G(\mathbf{z} - \mathbf{y}) p|_S(\mathbf{z}) dS_z = i\rho\omega \int_S G(\mathbf{z} - \mathbf{y}) U(\mathbf{z}) dS_z \quad (\forall \mathbf{y} \in S) \quad (\text{EI})$$

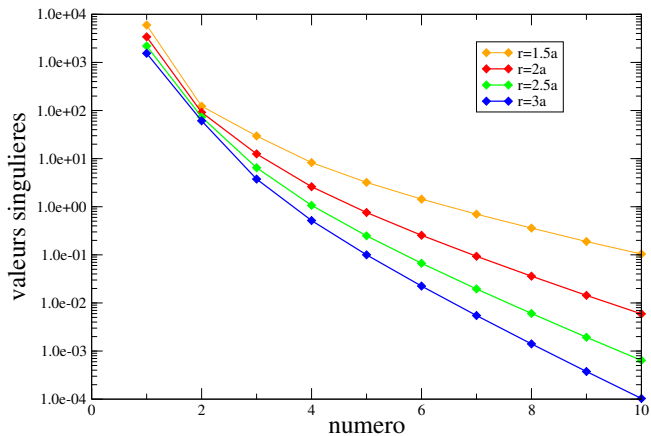
- Résolution numérique de (EI): discrétisation de  $S$  et  $p|_S$  par *éléments finis de frontière*
- Combiner (RI) et (EI) donne une relation de la forme

$$p(\mathbf{x}) = \mathcal{G}[U](\mathbf{x})$$

$\mathcal{G}$ : opérateur linéaire

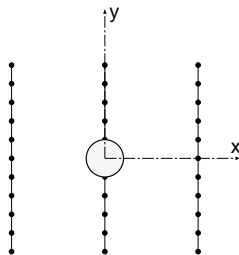
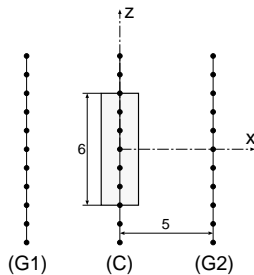
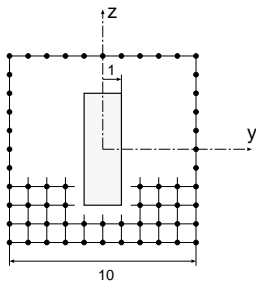


Nombre de conditionnement  $\text{Cond}(\mathbf{G})$ : sphère en vibration axisymétrique, solution exacte, 10 coefficients et 20 capteurs.



Sphère en vibration axisymétrique, solution exacte: distribution des valeurs singulières.

## Configuration de l'exemple numérique





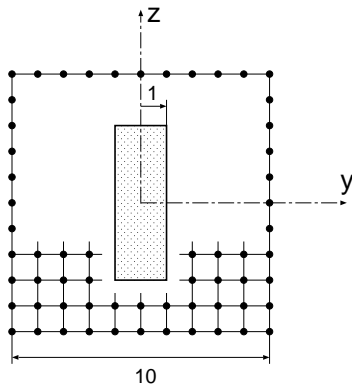
## Configuration de l'exemple numérique

Reconstruction numérique en données simulées de:

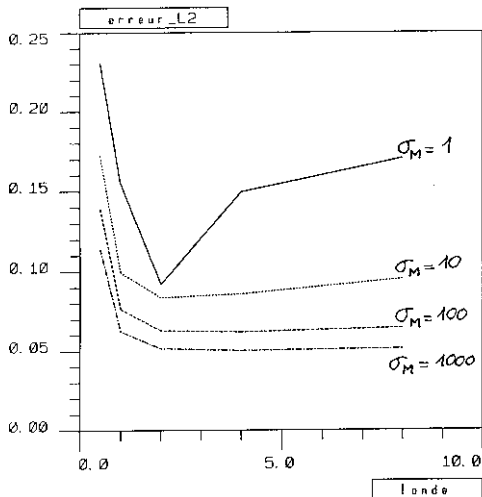
$$U(\theta, z) = \begin{cases} \cos^2 \theta \cos^2(\pi z/3) & |z| \leq 1.5, \\ & |\theta| \leq \pi/2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Information a priori:

- Matrice de covariance  $\mathbf{C}_{\mathcal{P}}$ :  
 $(C_{\mathcal{P}})_{ij} = \sigma_{\mathcal{P}}^2 \exp(|y_i - y_j|/L)$
- Matrice de covariance  $\mathbf{C}_{\mathcal{D}} = \text{Diag}\{\sigma_j^2\}$ .



## Résultats: erreurs de reconstruction



Erreur relative  $L^2$  entre solution "exacte" et calculée par inversion gaussienne pour  $U$ , en fonction de  $L$  et pour quelques valeurs de  $\sigma_p$ .

## Comparaison inversion gaussienne – moindres carrés

	Inversion gaussienne		Moindres carrés	
	Erreur $L^2$	$P$	Erreur $L^2$	$P$
$\sigma_{\mathcal{D}} = 0.$	0.0086	0.	$1.6 \cdot 10^{-7}$	0.
$\sigma_{\mathcal{D}} = 10^{-5}$	0.0089	0.	0.23	$1.0 \cdot 10^{-121}$
$\sigma_{\mathcal{D}} = 10^{-4}$	0.024	0.	2.27	$1.6 \cdot 10^{-75}$
$\sigma_{\mathcal{D}} = 10^{-3}$	0.23	$8.4 \cdot 10^{-98}$	22.7	$8.7 \cdot 10^{-3}$
$\sigma_{\mathcal{D}} = 10^{-2}$	1.37	1.	227.	0.63
$\sigma_{\mathcal{D}} = 10^{-1}$	2.09	1.	2271.	1.

$$(P = P\{\chi^2 = S(\langle \mathbf{p} \rangle)\})$$

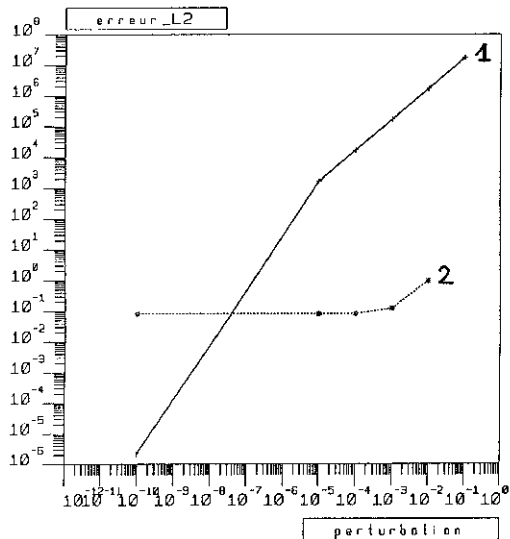
Comparaison d'erreurs relatives quadratiques sur  $U$  reconstruit par inversion gaussienne ou moindres carrés ordinaires, en fonction de l'écart-type  $\sigma_{\mathcal{D}}$  du bruit simulé ( $kR = 0.5$ ).

## Comparaison inversion gaussienne – moindres carrés

	Inversion gaussienne		Moindres carrés	
	Erreur $L^2$	$P\{\chi^2 = S(\langle \mathbf{p} \rangle)\}$	Erreur $L^2$	$P\{\chi^2 = S(\langle \mathbf{p} \rangle)\}$
$\sigma_{\mathcal{D}} = 0.$	0.0018	0.	$1.6 \cdot 10^{-7}$	0.
$\sigma_{\mathcal{D}} = 10^{-5}$	0.0033	0.	0.022	$8.7 \cdot 10^{-122}$
$\sigma_{\mathcal{D}} = 10^{-4}$	0.024	0.	0.22	$5.6 \cdot 10^{-75}$
$\sigma_{\mathcal{D}} = 10^{-3}$	0.24	$1.8 \cdot 10^{-93}$	2.18	$7.7 \cdot 10^{-30}$
$\sigma_{\mathcal{D}} = 10^{-2}$	1.25	1.	21.8	0.62
$\sigma_{\mathcal{D}} = 10^{-1}$	2.37	1.	218.	1.

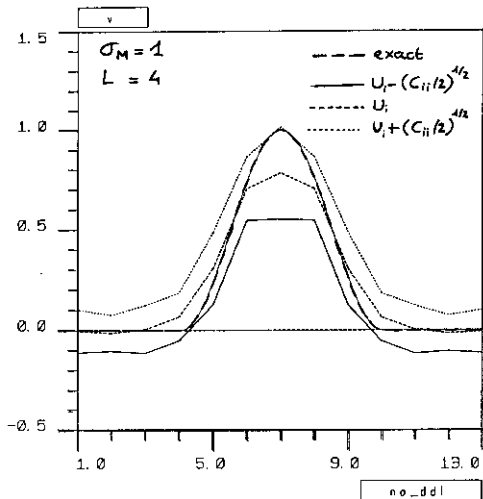
$$(P = P\{\chi^2 = S(\langle \mathbf{p} \rangle)\})$$

Comparaison d'erreurs relatives quadratiques sur  $U$  reconstruit par inversion gaussienne ou moindres carrés ordinaires, en fonction de l'écart-type  $\sigma_{\mathcal{D}}$  du bruit simulé ( $kR = 2.$ ).



## Résultats: indicateurs a posteriori

Encadrement des valeurs nodales de  $U$  à l'aide des écarts-types diagonaux *a posteriori*.



## Résultats: indicateurs a posteriori

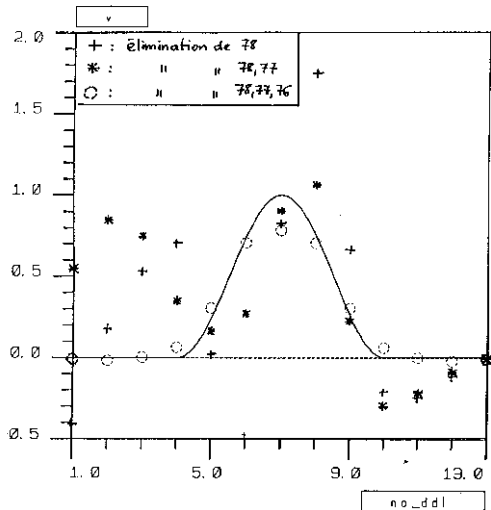
Indicateurs de confiance  $\langle \sigma^{post} \rangle$ ,  $r$  et erreur  $L^2$  pour quatre cas.

	champ lointain		champ proche	
	$kR = 0.5$	$kR = 2.$	$kR = 0.5$	$kR = 2.$
Erreur $L^2$	$8.38 \cdot 10^{-2}$	$4.48 \cdot 10^{-2}$	$1.44 \cdot 10^{-3}$	$2.61 \cdot 10^{-4}$
$\langle \sigma^{post} \rangle$	0.57	0.080	0.010	$2.8 \cdot 10^{-3}$
$r$	0.316	0.523	0.908	0.976

$$\langle \sigma^{post} \rangle = [\det(\mathbf{C})]^{1/2n} \quad r = \frac{1}{n} \text{Tr}(\mathbf{I} - \mathbf{C}\mathbf{C}_p^{-1})$$

## Résultats: application du test du $\chi^2$

Valeurs nodales de  $U$  après détection et élimination automatique de (i) donnée 78 (ii) données 78,77 (iii) données 78, 77 et 76, par l'algorithme.





### 13. Approche probabiliste des problèmes inverses

Approche par conjonction d'information (Tarantola)

Lien avec le théorème de Bayes

Modélisation par lois de probabilité gaussiennes

Modélisation par lois de probabilité gaussiennes généralisées

Echantillonnage de la densité a posteriori

Exemple numérique en acoustique

Exemple en dynamique des structures (thèse E. Zhang, UTC, 2010)

### 14. Assimilation de données, filtrage de Kalman

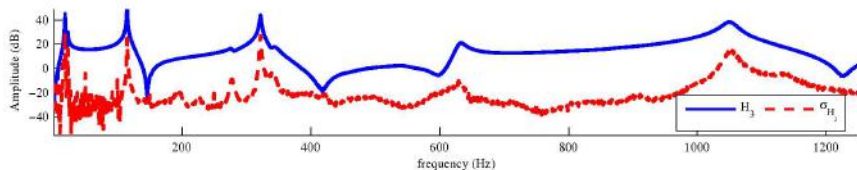
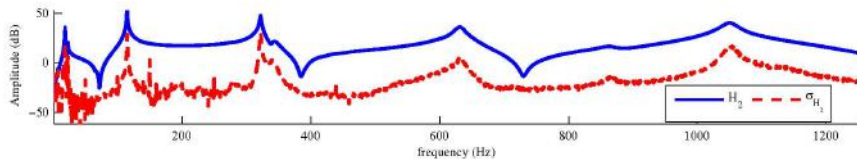
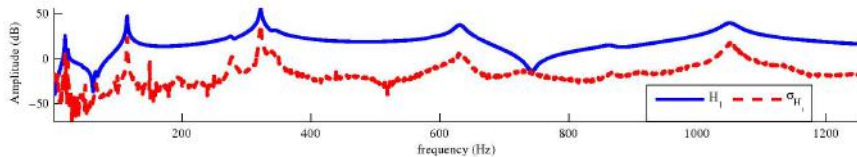
# Principe



- Illustration de l'approche "Monte Carlo" ("échantillonnage des densités")
- Exploite des données expérimentales

Extrait de la thèse de Erliang Zhang (UTC, 2009, direction P. Feissel et J. Antoni)

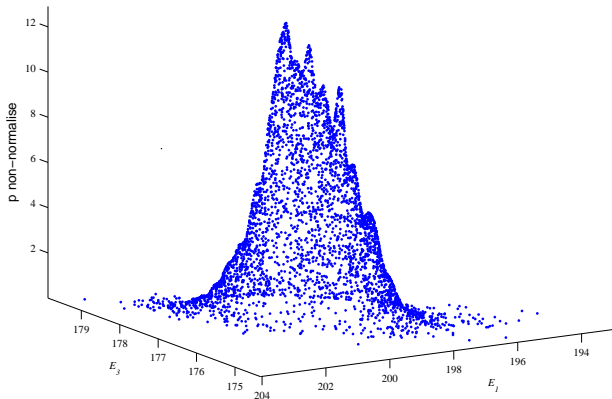
## Fonctions de transfert expérimentales



Extrait de la thèse de Erliang Zhang (UTC, 2009, direction P. Feissel et J. Antoni)

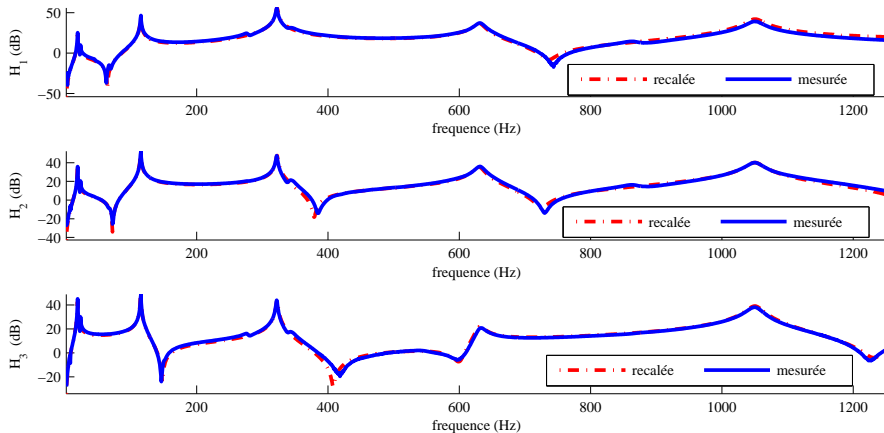
## Identification de modules de Young

- Poutre découpée en 4 tronçons, modules constants incertains inconnus  $E_1, E_2, E_3, E_4$ ;
- Raideur en flexion d'extrémité (encastrement imparfait) inconnue;
- Information a priori sur  $E$ :  $E = \mathcal{N}(180, 12)$  GPa



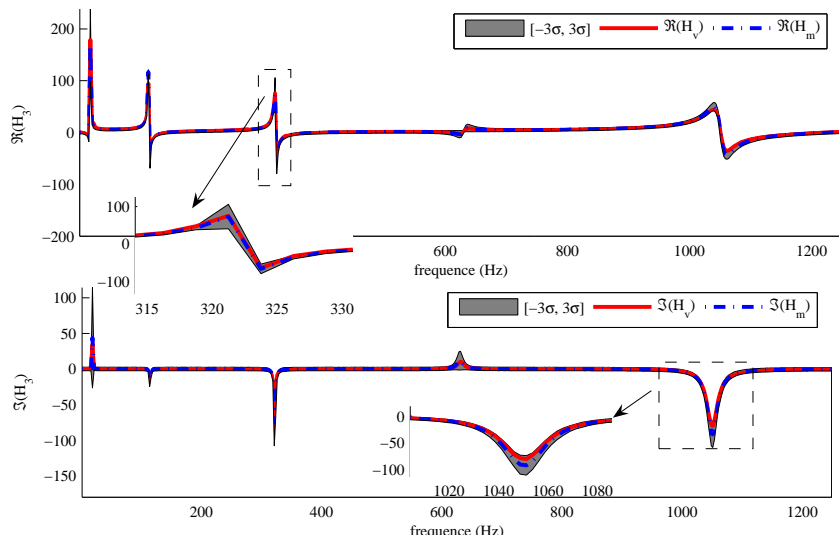
Extrait de la thèse de Erliang Zhang (UTC, 2009, direction P. Feissel et J. Antoni)

## Fonctions de transfert recalées



Extrait de la thèse de Erliang Zhang (UTC, 2009, direction P. Feissel et J. Antoni)

## Intervalle de confiance



Extrait de la thèse de Erliang Zhang (UTC, 2009, direction P. Feissel et J. Antoni)

### 13. Approche probabiliste des problèmes inverses

Approche par conjonction d'information (Tarantola)

Lien avec le théorème de Bayes

Modélisation par lois de probabilité gaussiennes

Modélisation par lois de probabilité gaussiennes généralisées

Echantillonnage de la densité a posteriori

Exemple numérique en acoustique

Exemple en dynamique des structures (thèse E. Zhang, UTC, 2010)

### 14. Assimilation de données, filtrage de Kalman

Problématique de l'assimilation de données

Interpolation statistique, estimateur BLUE

Interpolation séquentielle

Filtre de Kalman linéaire

Filtre de Kalman étendu

Formalisme variationnel

Exemple: dynamique d'une barre

Exemple: tempête de 1999

### 13. Approche probabiliste des problèmes inverses

### 14. Assimilation de données, filtrage de Kalman

Problématique de l'assimilation de données

Interpolation statistique, estimateur BLUE

Interpolation séquentielle

Filtre de Kalman linéaire

Filtre de Kalman étendu

Formalisme variationnel

Exemple: dynamique d'une barre

Exemple: tempête de 1999

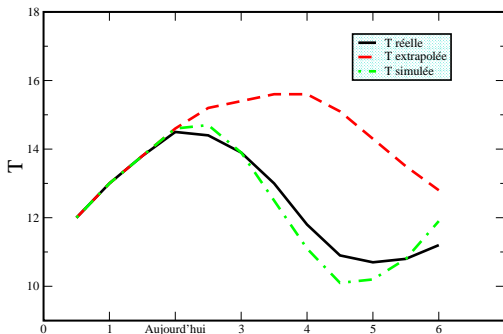


## Problématique de l'assimilation de données

- **Prévision** de l'état futur de systèmes **complexes** et **évolutifs**
    - Atmosphère (météo), océan, structure au cours de sa vie...
- Modélisation:** Navier-Stokes, dynamique des structures...
- Observations** recueillies au fil du temps (discret ou continu)

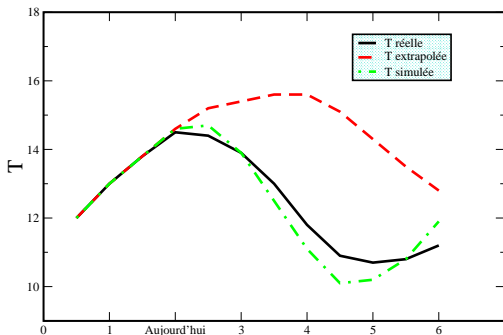
## Problématique de l'assimilation de données

- **Prévision** de l'état futur de systèmes **complexes** et **évolutifs**  
→ Atmosphère (météo), océan, structure au cours de sa vie...  
**Modélisation**: Navier-Stokes, dynamique des structures...  
**Observations** recueillies au fil du temps (discret ou continu)



*Exemple: températures moyennes journalières réelles, extrapolées ou simulées*

# Problématique de l'assimilation de données



**Assimilation de données:** ensemble de méthodes permettant l'amélioration de la connaissance (passée, présente ou future) d'un système évolutif par prise en compte **simultanée** d'informations (i) **théoriques** (modèle) et (ii) **observationnelles**.

- Estimation de l'état du système
- Estimation de paramètres du système

# Problématique de l'assimilation de données

1. **Connaissance théorique (modèle):** état  $\mathbf{X}$  supposé vérifier des équations de la forme

$$\frac{d\mathbf{X}}{dt} = \mathcal{F}(\mathbf{X}, \mathbf{p}, t) \quad (\text{équations d'évolution})$$

$$\mathbf{X}(0) = \mathbf{q} \quad (\text{conditions initiales})$$

$\mathbf{X}$ : variable d'état;  $\mathbf{p}$ : paramètres du système;  $\mathbf{q}$ : donnée initiale.

# Problématique de l'assimilation de données

1. **Connaissance théorique (modèle):** état  $\mathbf{X}$  supposé vérifier des équations de la forme

$$\frac{d\mathbf{X}}{dt} = \mathcal{F}(\mathbf{X}, \mathbf{p}, t) \quad (\text{équations d'évolution})$$

$$\mathbf{X}(0) = \mathbf{q} \quad (\text{conditions initiales})$$

$\mathbf{X}$ : variable d'état;  $\mathbf{p}$ : paramètres du système;  $\mathbf{q}$ : donnée initiale.

- Exemples de variables d'état:

- $\mathbf{X} = \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$  (vitesse, dynamique des fluides,  $\mathcal{F}$  issu de Navier-Stokes)
- $\mathbf{X} = \mathbf{U}(t), \dot{\mathbf{U}}(t)$  (DDLs en déplacement et vitesse,  $\mathcal{F}$  issu d'un modèle FEM d'une structure)

# Problématique de l'assimilation de données

1. **Connaissance théorique (modèle)**: état  $\mathbf{X}$  supposé vérifier des équations de la forme

$$\frac{d\mathbf{X}}{dt} = \mathcal{F}(\mathbf{X}, \mathbf{p}, t) \quad (\text{équations d'évolution})$$

$$\mathbf{X}(0) = \mathbf{q} \quad (\text{conditions initiales})$$

$\mathbf{X}$ : variable d'état;  $\mathbf{p}$ : paramètres du système;  $\mathbf{q}$ : donnée initiale.

- Exemples de variables d'état:

- $\mathbf{X} = \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$  (vitesse, dynamique des fluides,  $\mathcal{F}$  issu de Navier-Stokes)
- $\mathbf{X} = \mathbf{U}(t), \dot{\mathbf{U}}(t)$  (DDLs en déplacement et vitesse,  $\mathcal{F}$  issu d'un modèle FEM d'une structure)

2. **Données observationnelles** en temps discret

$$\mathbf{Y}(t_k) = \mathbf{h}^{(k)}(\mathbf{X}(t_k)) + \mathbf{e}_{\mathcal{D}}^{(k)} \quad k = 1, 2, 3 \dots$$

$\mathbf{X} \mapsto \mathbf{h}^{(k)}(\mathbf{X})$ : opérateur d'observation à l'instant  $t^{(k)}$ ;  $\mathbf{e}_{\mathcal{D}}^{(k)}$ : erreur d'observation

# Problématique de l'assimilation de données

## Problématique de l'assimilation de données:

- **évaluation** de l'état (passé ou futur)  $\mathbf{X}(t)$ , et éventuellement des paramètres  $\mathbf{p}$ , par prise en compte des informations théoriques et expérimentales;
- **actualisation** de l'évaluation selon la disponibilité de nouvelles mesures  $\mathbf{Y}(t_k)$

## Problématique de l'assimilation de données

### Problématique de l'assimilation de données:

- **évaluation** de l'état (passé ou futur)  $\mathbf{X}(t)$ , et éventuellement des paramètres  $\mathbf{p}$ , par prise en compte des informations théoriques et expérimentales;
- **actualisation** de l'évaluation selon la disponibilité de nouvelles mesures  $\mathbf{Y}(t_k)$

Par exemple, **actualisation de l'estimation des conditions initiales**, pour rendre le modèle prédictif à un horizon (futur) plus lointain.



## Problématique de l'assimilation de données

### Problématique de l'assimilation de données:

- **évaluation** de l'état (passé ou futur)  $\mathbf{X}(t)$ , et éventuellement des paramètres  $\mathbf{p}$ , par prise en compte des informations théoriques et expérimentales;
- **actualisation** de l'évaluation selon la disponibilité de nouvelles mesures  $\mathbf{Y}(t_k)$

Par exemple, **actualisation de l'estimation des conditions initiales**, pour rendre le modèle prédictif à un horizon (futur) plus lointain.

### Méthodes d'assimilation de données:

(a) Assimilation variationnelle (contrôle optimal):

$$(\mathbf{X}, \mathbf{p}, \mathbf{q}) = \arg \min_{\mathbf{X}', \mathbf{p}', \mathbf{q}'} \frac{1}{2} \sum_{k < k_0} \|\mathbf{Y}(t_k) - \mathbf{h}^{(k)}(\mathbf{X}(t_k))\|^2$$

sous contraintes  $\frac{d\mathbf{X}}{dt} = \mathcal{F}(\mathbf{X}, \mathbf{p}, t), \quad \mathbf{X}(0) = \mathbf{q}$

Non traité dans la suite (mais important!), cf. section 8 pour méthodes d'optimisation, états adjoints...

# Problématique de l'assimilation de données

## Problématique de l'assimilation de données:

- **évaluation** de l'état (passé ou futur)  $\mathbf{X}(t)$ , et éventuellement des paramètres  $\mathbf{p}$ , par prise en compte des informations théoriques et expérimentales;
- **actualisation** de l'évaluation selon la disponibilité de nouvelles mesures  $\mathbf{Y}(t_k)$

Par exemple, **actualisation de l'estimation des conditions initiales**, pour rendre le modèle prédictif à un horizon (futur) plus lointain.

## Méthodes d'assimilation de données:

(a) Assimilation variationnelle (contrôle optimal):

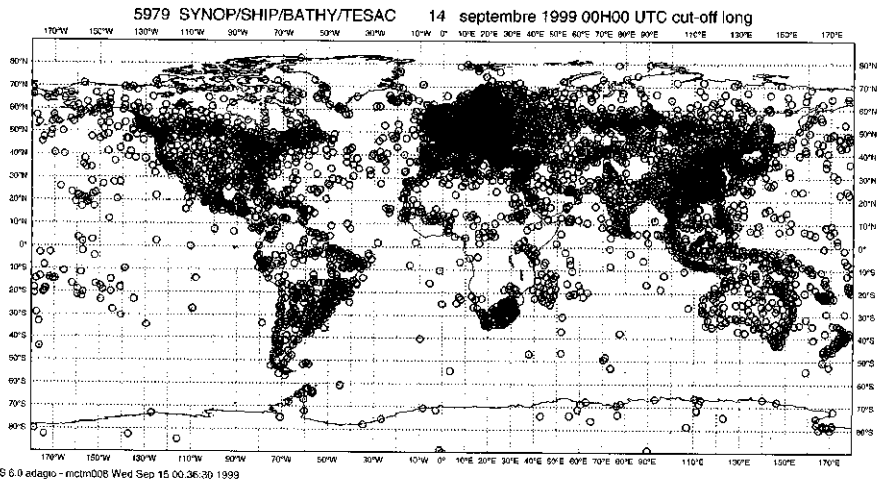
$$(\mathbf{X}, \mathbf{p}, \mathbf{q}) = \arg \min_{\mathbf{X}', \mathbf{p}', \mathbf{q}'} \frac{1}{2} \sum_{k < k_0} \|\mathbf{Y}(t_k) - \mathbf{h}^{(k)}(\mathbf{X}(t_k))\|^2$$

sous contraintes  $\frac{d\mathbf{X}}{dt} = \mathcal{F}(\mathbf{X}, \mathbf{p}, t), \quad \mathbf{X}(0) = \mathbf{q}$

Non traité dans la suite (mais important!), cf. section 8 pour méthodes d'optimisation, états adjoints...

(b) Assimilation séquentielle par filtrage (traité dans la suite)

# Observations météorologiques



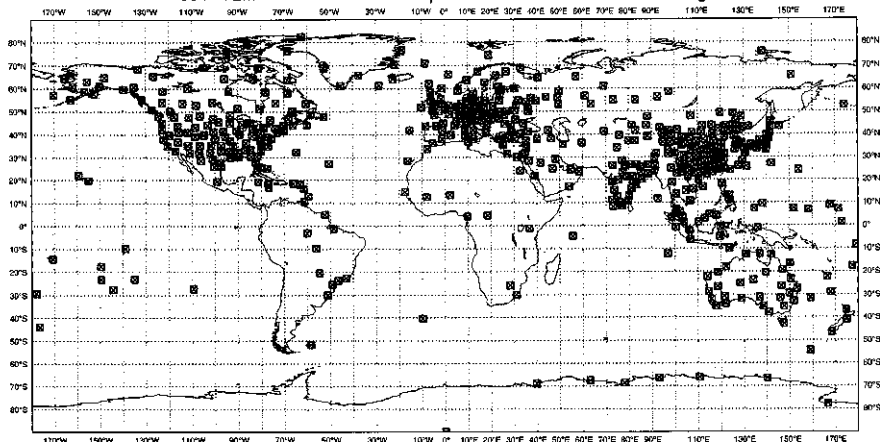
Distribution géographique des observations météorologiques disponibles en temps réel pour la prévision numérique du temps le 14/09/99: observations de surface.

F. X. le Dimet, J. Pailleux, *Assimilation de données en météorologie* (chap. 7, Problèmes Inverses, Arago 22, Tec et Doc, 1999)

# Observations météorologiques

534 TEMP

14 septembre 1999 00H00 UTC cut-off long

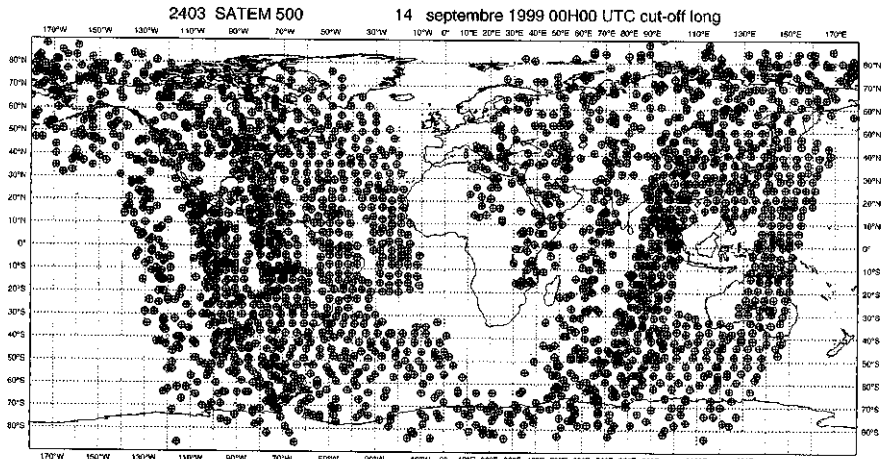


MAGICS 6.0 adagio - mctm008 Wed Sep 15 01:00:15 1999

Distribution géographique des observations météorologiques disponibles en temps réel pour la prévision numérique du temps le 14/09/99: observations de radiosondages.

F. X. le Dimet, J. Pailleux, *Assimilation de données en météorologie* (chap. 7, Problèmes Inverses, Arago 22, Tec et Doc, 1999)

# Observations météorologiques



Distribution géographique des observations météorologiques disponibles en temps réel pour la prévision numérique du temps le 14/09/99: observations satellitaires.

F. X. le Dimet, J. Pailleux, *Assimilation de données en météorologie* (chap. 7, Problèmes Inverses, Arago 22, Tec et Doc, 1999)

### 13. Approche probabiliste des problèmes inverses

### 14. Assimilation de données, filtrage de Kalman

Problématique de l'assimilation de données

**Interpolation statistique, estimateur BLUE**

Interpolation séquentielle

Filtre de Kalman linéaire

Filtre de Kalman étendu

Formalisme variationnel

Exemple: dynamique d'une barre

Exemple: tempête de 1999

## Interpolation statistique: principe

**Problème:** estimer une grandeur  $x \in \mathbb{R}^n$  connaissant

- des observations  $y \in \mathbb{R}^m$  telles que

$$y = Hx + e_{\mathcal{D}}$$

où l'erreur de mesure  $e_{\mathcal{D}}$  est **non biaisée** ( $\mathbb{E}(e_{\mathcal{D}}) = \mathbf{0}$ ) et de covariance  $C_{\mathcal{D}}$

- une estimation a priori  $x_0$  ("ébauche") telle que l'**erreur d'ébauche**  $e_{\mathcal{P}}$  est **non biaisée** ( $\mathbb{E}(e_{\mathcal{P}}) = \mathbf{0}$ ) et de covariance  $C_{\mathcal{P}}$

## Interpolation statistique: principe

**Problème:** estimer une grandeur  $x \in \mathbb{R}^n$  connaissant

- des observations  $y \in \mathbb{R}^m$  telles que

$$y = Hx + e_{\mathcal{D}}$$

où l'erreur de mesure  $e_{\mathcal{D}}$  est **non biaisée** ( $\mathbb{E}(e_{\mathcal{D}}) = \mathbf{0}$ ) et de covariance  $C_{\mathcal{D}}$

- une estimation a priori  $x_0$  ("ébauche") telle que l'**erreur d'ébauche**  $e_{\mathcal{P}}$  est **non biaisée** ( $\mathbb{E}(e_{\mathcal{P}}) = \mathbf{0}$ ) et de covariance  $C_{\mathcal{P}}$

**Principe de l'interpolation statistique:** définir une estimation  $x_a$  donnée par une formule d'estimation ("analyse") réalisant une interpolation linéaire entre  $x_0$  et  $y$ :

$$x_a = Lx_0 + Ky$$

(où les matrices  $K$  et  $L$  sont à déterminer)



## Interpolation statistique: principe

**Problème:** estimer une grandeur  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  connaissant

- des observations  $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$  telles que

$$\mathbf{y} = \mathbf{H}\mathbf{x} + \mathbf{e}_{\mathcal{D}}$$

où l'erreur de mesure  $\mathbf{e}_{\mathcal{D}}$  est **non biaisée** ( $\mathbb{E}(\mathbf{e}_{\mathcal{D}}) = \mathbf{0}$ ) et de covariance  $\mathbf{C}_{\mathcal{D}}$

- une estimation a priori  $\mathbf{x}_0$  ("ébauche") telle que l'**erreur d'ébauche**  $\mathbf{e}_{\mathcal{P}}$  est **non biaisée** ( $\mathbb{E}(\mathbf{e}_{\mathcal{P}}) = \mathbf{0}$ ) et de covariance  $\mathbf{C}_{\mathcal{P}}$

**Principe de l'interpolation statistique:** définir une estimation  $\mathbf{x}_a$  donnée par une formule d'estimation ("analyse") réalisant une interpolation linéaire entre  $\mathbf{x}_0$  et  $\mathbf{y}$ :

$$\mathbf{x}_a = \mathbf{L}\mathbf{x}_0 + \mathbf{K}\mathbf{y}$$

(où les matrices  $\mathbf{K}$  et  $\mathbf{L}$  sont à déterminer)

**Détermination de  $\mathbf{L}$  et  $\mathbf{K}$ :** repose sur la mise en œuvre de deux critères:

- L'estimateur est non biaisé;
- L'estimateur est optimal (erreur d'estimation moyenne minimale).

## Interpolation statistique: nullité du biais

$$x_a = Lx_0 + Ky$$

## Interpolation statistique: nullité du biais

$$x_a = Lx_0 + Ky$$

**Erreur d'analyse** (la vraie valeur  $x$  est inconnue!), l'opérateur d'observation étant ici supposé linéaire:

$$\begin{aligned} e_a &\stackrel{\text{déf}}{=} x_a - x \\ &= Lx_0 + Ky - x \\ &= L(x_0 - x) + Lx + K(Hx + e_D) - x \\ &= Le_P + Ke_D + (L + KH - I)x \end{aligned}$$

## Interpolation statistique: nullité du biais

$$x_a = Lx_0 + Ky$$

**Erreur d'analyse** (la vraie valeur  $x$  est inconnue!), l'opérateur d'observation étant ici supposé linéaire:

$$\begin{aligned} e_a &\stackrel{\text{déf}}{=} x_a - x \\ &= Lx_0 + Ky - x \\ &= L(x_0 - x) + Lx + K(Hx + e_D) - x \\ &= Le_P + Ke_D + (L + KH - I)x \end{aligned}$$

$e_P$  et  $e_D$  étant sans biais ( $\mathbb{E}(e_P) = \mathbb{E}(e_D) = 0$ ), le choix

$$L = I - KH$$

assure un **biais d'analyse nul**, i.e.  $\mathbb{E}(e_a) = 0$ .

## Interpolation statistique: erreur moyenne minimale

Le résultat  $L = I - KH$  met la formule d'estimation ("analyse") sous la forme

$$x_a = x_0 + K(y - Hx_0)$$

## Interpolation statistique: erreur moyenne minimale

Le résultat  $L = I - KH$  met la formule d'estimation ("analyse") sous la forme

$$x_a = x_0 + K(y - Hx_0)$$

L'erreur d'analyse s'écrit alors:

$$\begin{aligned} e_a &= Le_{\mathcal{P}} + Ke_{\mathcal{D}} + (L + KH - I)x && \text{(transparent précédent)} \\ &= Le_{\mathcal{P}} + Ke_{\mathcal{D}} && (L = I - KH) \end{aligned}$$

## Interpolation statistique: erreur moyenne minimale

Le résultat  $L = I - KH$  met la formule d'estimation ("analyse") sous la forme

$$x_a = x_0 + K(y - Hx_0)$$

L'erreur d'analyse s'écrit alors:

$$\begin{aligned} e_a &= Le_P + Ke_D + (L + KH - I)x && \text{(transparent précédent)} \\ &= Le_P + Ke_D && (L = I - KH) \end{aligned}$$

En faisant l'hypothèse d'indépendance entre  $e_D$  et  $e_P$ , i.e.  $\mathbb{E}(e_D e_P^T) = 0$ , la covariance d'analyse  $C_a$  est donnée par

$$C_a = K\mathbb{E}(e_D e_D^T)K^T + L\mathbb{E}(e_P e_P^T)L^T$$

soit, avec  $L = I - KH$

$$C_a = KC_D K^T + (I - KH)C_P (I - KH)^T$$

Choix optimal de la [matrice de gain  \$K\$](#) ?

## Interpolation statistique: erreur moyenne minimale

- La matrice de gain  $K$  est maintenant déterminée selon

$$\begin{aligned} K &= \arg \min_{K'} \text{Tr}(\mathbf{C}_a) \\ &= \arg \min_{K'} \text{Tr}(\mathbf{K}' \mathbf{C}_D \mathbf{K}'^T + (\mathbf{I} - \mathbf{K}' \mathbf{H}) \mathbf{C}_P (\mathbf{I} - \mathbf{K}' \mathbf{H})^T) \end{aligned}$$

(minimisation en moyenne quadratique de l'écart-type d'erreur d'analyse)



## Interpolation statistique: erreur moyenne minimale

- La matrice de gain  $K$  est maintenant déterminée selon

$$\begin{aligned} K &= \arg \min_{K'} \text{Tr}(\mathbf{C}_a) \\ &= \arg \min_{K'} \text{Tr}(K' \mathbf{C}_D K'^T + (\mathbf{I} - K' \mathbf{H}) \mathbf{C}_P (\mathbf{I} - K' \mathbf{H})^T) \end{aligned}$$

(minimisation en moyenne quadratique de l'écart-type d'erreur d'analyse)

- Un peu de calcul des variations:

$$\begin{aligned} \delta \mathbf{C}_a &= K \mathbf{C}_D \delta K^T + \delta K \mathbf{C}_D K^T \\ &\quad - (\mathbf{I} - K \mathbf{H}) \mathbf{C}_P \mathbf{H}^T \delta K^T - \delta K \mathbf{H} \mathbf{C}_P (\mathbf{I} - K \mathbf{H})^T \\ \delta \text{Tr}(\mathbf{C}_a) &= 2 \text{Tr}[(K \mathbf{C}_D + (K \mathbf{H} - \mathbf{I}) \mathbf{C}_P \mathbf{H}^T) \delta K^T] \end{aligned}$$

Donc:

$$\begin{aligned} \delta \text{Tr}(\mathbf{C}_a) = 0 \quad \forall \delta K &\implies K \mathbf{C}_D + (K \mathbf{H} - \mathbf{I}) \mathbf{C}_P \mathbf{H}^T = \mathbf{0} \\ &\implies K(\mathbf{C}_D + \mathbf{H} \mathbf{C}_P \mathbf{H}^T) = \mathbf{C}_P \mathbf{H}^T \end{aligned}$$

## Interpolation statistique: erreur moyenne minimale

- La matrice de gain  $K$  est maintenant déterminée selon

$$\begin{aligned} K &= \arg \min_{K'} \text{Tr}(\mathbf{C}_a) \\ &= \arg \min_{K'} \text{Tr}(\mathbf{K}' \mathbf{C}_D \mathbf{K}'^T + (\mathbf{I} - \mathbf{K}' \mathbf{H}) \mathbf{C}_P (\mathbf{I} - \mathbf{K}' \mathbf{H})^T) \end{aligned}$$

(minimisation en moyenne quadratique de l'écart-type d'erreur d'analyse)

- Un peu de calcul des variations:

$$\begin{aligned} \delta \mathbf{C}_a &= \mathbf{K} \mathbf{C}_D \delta \mathbf{K}^T + \delta \mathbf{K} \mathbf{C}_D \mathbf{K}^T \\ &\quad - (\mathbf{I} - \mathbf{K} \mathbf{H}) \mathbf{C}_P \mathbf{H}^T \delta \mathbf{K}^T - \delta \mathbf{K} \mathbf{H} \mathbf{C}_P (\mathbf{I} - \mathbf{K} \mathbf{H})^T \\ \delta \text{Tr}(\mathbf{C}_a) &= 2 \text{Tr}[(\mathbf{K} \mathbf{C}_D + (\mathbf{K} \mathbf{H} - \mathbf{I}) \mathbf{C}_P \mathbf{H}^T) \delta \mathbf{K}^T] \end{aligned}$$

Donc:

$$\begin{aligned} \delta \text{Tr}(\mathbf{C}_a) = 0 \quad \forall \delta \mathbf{K} &\implies \mathbf{K} \mathbf{C}_D + (\mathbf{K} \mathbf{H} - \mathbf{I}) \mathbf{C}_P \mathbf{H}^T = \mathbf{0} \\ &\implies \mathbf{K} (\mathbf{C}_D + \mathbf{H} \mathbf{C}_P \mathbf{H}^T) = \mathbf{C}_P \mathbf{H}^T \end{aligned}$$

- Matrice de gain optimale:

$$\mathbf{K} = \mathbf{C}_P \mathbf{H}^T (\mathbf{C}_D + \mathbf{H} \mathbf{C}_P \mathbf{H}^T)^{-1}$$

## Interpolation statistique: erreur moyenne minimale

$$K = C_P H^T (C_D + H C_P H^T)^{-1}$$

Expression alternative équivalente du gain optimal:

$$K = (C_P^{-1} + H^T C_D^{-1} H)^{-1} H^T C_D^{-1}$$

## Interpolation statistique: erreur moyenne minimale

$$K = C_P H^T (C_D + H C_P H^T)^{-1}$$

Expression alternative équivalente du gain optimal:

$$K = (C_P^{-1} + H^T C_D^{-1} H)^{-1} H^T C_D^{-1}$$

On trouve ensuite:

$$\begin{aligned} L &= I - KH \\ &= (C_P^{-1} + H^T C_D^{-1} H)^{-1} C_P^{-1} \\ C_a &= K C_D K^T + L C_P L^T \\ &= (C_P^{-1} + H^T C_D^{-1} H)^{-1} \\ &= (I - KH) C_P \\ K &= C_a H^T C_D^{-1} \end{aligned}$$

## Interpolation statistique: récapitulation

### Estimateur BLUE (Best Linear Unbiased Estimator)

$$\mathbf{C}_a = (\mathbf{C}_P^{-1} + \mathbf{H}^T \mathbf{C}_D^{-1} \mathbf{H})^{-1} \text{ (covariance d'analyse)}$$

$$\mathbf{K} = \mathbf{C}_a \mathbf{H}^T \mathbf{C}_D^{-1} \text{ (gain)}$$

$$\mathbf{x}_a = \mathbf{x}_0 + \mathbf{K}(\mathbf{y} - \mathbf{H}\mathbf{x}_0) \text{ (analyse)}$$

## Interpolation statistique: récapitulation

### Estimateur BLUE (Best Linear Unbiased Estimator)

$$\mathbf{C}_a = (\mathbf{C}_P^{-1} + \mathbf{H}^T \mathbf{C}_D^{-1} \mathbf{H})^{-1} \text{ (covariance d'analyse)}$$

$$\mathbf{K} = \mathbf{C}_a \mathbf{H}^T \mathbf{C}_D^{-1} \quad \text{(gain)}$$

$$\mathbf{x}_a = \mathbf{x}_0 + \mathbf{K}(\mathbf{y} - \mathbf{H}\mathbf{x}_0) \quad \text{(analyse)}$$

**Identité avec l'inversion gaussienne:** en remarquant  $\mathbf{L} = \mathbf{I} - \mathbf{K}\mathbf{H} = \mathbf{C}_a \mathbf{C}_P^{-1}$ , la formule d'analyse s'écrit

$$\mathbf{x}_a = \mathbf{C}_a [\mathbf{H}^T \mathbf{C}_D^{-1} \mathbf{y} + \mathbf{C}_P^{-1} \mathbf{x}_0]$$

On retrouve les relations de l'inversion gaussienne (section 13) avec  $(\mathbf{H}, \mathbf{x}, \mathbf{y}) \longleftrightarrow (\mathbf{G}, \mathbf{p}, \mathbf{d})$

## Interpolation statistique: formulation variationnelle

- L'identité formelle de l'estimation BLUE avec l'inversion gaussienne implique la caractérisation variationnelle de  $x_a$ :

$$x_a = \arg \min_{x'} S(x')$$

$$S(x') = \frac{1}{2}(y - Hx')^T C_D^{-1}(y - Hx') + \frac{1}{2}(x' - x_0)^T C_P^{-1}(x' - x_0)$$

Approche parfois connue sous le nom de 3D-Var.

## Interpolation statistique: formulation variationnelle

- L'identité formelle de l'estimation BLUE avec l'inversion gaussienne implique la caractérisation variationnelle de  $\mathbf{x}_a$ :

$$\mathbf{x}_a = \arg \min_{\mathbf{x}'} S(\mathbf{x}')$$

$$S(\mathbf{x}') = \frac{1}{2}(\mathbf{y} - \mathbf{H}\mathbf{x}')^T \mathbf{C}_{\mathcal{D}}^{-1}(\mathbf{y} - \mathbf{H}\mathbf{x}') + \frac{1}{2}(\mathbf{x}' - \mathbf{x}_0)^T \mathbf{C}_{\mathcal{P}}^{-1}(\mathbf{x}' - \mathbf{x}_0)$$

Approche parfois connue sous le nom de **3D-Var**.

- Extension naturelle au cas d'un opérateur d'observation non-linéaire  $\mathbf{h}(\mathbf{x})$ :

$$\mathbf{x}_a = \arg \min_{\mathbf{x}'} S_{\text{NL}}(\mathbf{x}')$$

$$S_{\text{NL}}(\mathbf{x}') = \frac{1}{2}(\mathbf{y} - \mathbf{h}(\mathbf{x}'))^T \mathbf{C}_{\mathcal{D}}^{-1}(\mathbf{y} - \mathbf{h}(\mathbf{x}')) + \frac{1}{2}(\mathbf{x}' - \mathbf{x}_0)^T \mathbf{C}_{\mathcal{P}}^{-1}(\mathbf{x}' - \mathbf{x}_0)$$



### 13. Approche probabiliste des problèmes inverses

### 14. Assimilation de données, filtrage de Kalman

Problématique de l'assimilation de données

Interpolation statistique, estimateur BLUE

**Interpolation séquentielle**

Filtre de Kalman linéaire

Filtre de Kalman étendu

Formalisme variationnel

Exemple: dynamique d'une barre

Exemple: tempête de 1999

## Interpolation séquentielle: principe

**Objectif:** estimation de l'état **évolutif** d'un système, en **temps discret**.

## Interpolation séquentielle: principe

**Objectif:** estimation de l'état **évolutif** d'un système, en **temps discret**.

### Ingrédients:

- Temps discret:  $t_0, t_1, \dots, t_k, \dots$
- Variables d'état  $\mathbf{x}^{(k)} = \mathbf{x}(t_k)$ ; observations  $\mathbf{y}^{(k)} = \mathbf{y}(t_k)$ ;
- Observations (bruitées) décrites par un opérateur d'observation  $\mathbf{h}(\mathbf{x})$  pouvant dépendre du temps discret:

$$\mathbf{y}^{(k)} = \mathbf{h}^{(k)}(\mathbf{x}^{(k)}) + \mathbf{e}_D^{(k)} \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

- Transition (bruitée) décrite par un opérateur de transition  $\mathbf{m}(\mathbf{x})$  pouvant dépendre du temps discret:

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{m}^{(k)}(\mathbf{x}^{(k)}) + \mathbf{e}_M^{(k)} \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

## Interpolation séquentielle: principe

**Objectif:** estimation de l'état **évolutif** d'un système, en **temps discret**.

### Ingrédients:

- Temps discret:  $t_0, t_1, \dots, t_k, \dots$
- Variables d'état  $\mathbf{x}^{(k)} = \mathbf{x}(t_k)$ ; observations  $\mathbf{y}^{(k)} = \mathbf{y}(t_k)$ ;
- Observations (bruitées) décrites par un opérateur d'observation  $\mathbf{h}(\mathbf{x})$  pouvant dépendre du temps discret:

$$\mathbf{y}^{(k)} = \mathbf{h}^{(k)}(\mathbf{x}^{(k)}) + \mathbf{e}_D^{(k)} \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

- Transition (bruitée) décrite par un opérateur de transition  $\mathbf{m}(\mathbf{x})$  pouvant dépendre du temps discret:

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{m}^{(k)}(\mathbf{x}^{(k)}) + \mathbf{e}_M^{(k)} \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

**Note:** L'opérateur  $\mathbf{m}^{(k)}(\mathbf{x})$  résulte généralement d'une **modélisation** du système.

- Exemple (dynamique linéaire des structures):  $\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{M}^{(k)}\mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{e}_M^{(k)}$ , avec  $\mathbf{x}^{(k)} = (\mathbf{u}^{(k)}, \dot{\mathbf{u}}^{(k)})$  et  $\mathbf{M}^{(k)}$  traduisant (par exemple) l'action d'un schéma de Newmark.

## Interpolation séquentielle: principe

### Hypothèses:

- Erreurs d'observation **non biaisées** ( $\mathbb{E}(\mathbf{e}_D) = \mathbf{0}$ ) et de covariance  $\mathbf{C}_D^{(k)} = \mathbb{E}(\mathbf{e}_D \mathbf{e}_D^T)$ ;
- Erreurs de modélisation **non biaisés** ( $\mathbb{E}(\mathbf{e}_M) = \mathbf{0}$ ) et de covariance  $\mathbf{C}_M^{(k)} = \mathbb{E}(\mathbf{e}_M \mathbf{e}_M^T)$ ;
- **Indépendance** entre erreurs d'observation et de modélisation:  $\mathbb{E}(\mathbf{e}_D \mathbf{e}_M^T) = \mathbf{0}$ .

## Interpolation séquentielle: principe

### Hypothèses:

- Erreurs d'observation **non biaisées** ( $\mathbb{E}(\mathbf{e}_D) = \mathbf{0}$ ) et de covariance  $\mathbf{C}_D^{(k)} = \mathbb{E}(\mathbf{e}_D \mathbf{e}_D^T)$ ;
- Erreurs de modélisation **non biaisés** ( $\mathbb{E}(\mathbf{e}_M) = \mathbf{0}$ ) et de covariance  $\mathbf{C}_M^{(k)} = \mathbb{E}(\mathbf{e}_M \mathbf{e}_M^T)$ ;
- **Indépendance** entre erreurs d'observation et de modélisation:  $\mathbb{E}(\mathbf{e}_D \mathbf{e}_M^T) = \mathbf{0}$ .

**Principe général de l'interpolation séquentielle:** application séquentielle de l'estimation BLUE à chaque pas de temps, pour trouver une suite de **prédicteurs**  $\mathbf{x}_F^{(k)}$  et d'**estimations**  $\mathbf{x}_a^{(k)}$  des variables d'état. Pour la transition  $k \rightarrow k + 1$ :

- Ebauche:  $\mathbf{x}_F^{(k)}$  (notation  $\mathbf{x}_F$ : F pour *forecast*)
- Analyse:  $\mathbf{x}_a^{(k)}$
- Prédicteur (ébauche pour le prochain pas de temps)  $\mathbf{x}_F^{(k+1)}$

### 13. Approche probabiliste des problèmes inverses

### 14. Assimilation de données, filtrage de Kalman

Problématique de l'assimilation de données

Interpolation statistique, estimateur BLUE

Interpolation séquentielle

**Filtre de Kalman linéaire**

Filtre de Kalman étendu

Formalisme variationnel

Exemple: dynamique d'une barre

Exemple: tempête de 1999

## Interpolation séquentielle: cas linéaire

Hypothèses de linéarité:

$$\begin{cases} \mathbf{y}^{(k)} = \mathbf{H}^{(k)} \mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{e}_{\mathcal{D}}^{(k)}, \\ \mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{M}^{(k)} \mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{e}_M^{(k)} \end{cases} \quad (k = 0, 1, 2 \dots)$$



## Interpolation séquentielle: cas linéaire

Hypothèses de linéarité:

$$\begin{cases} \mathbf{y}^{(k)} = \mathbf{H}^{(k)} \mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{e}_{\mathcal{D}}^{(k)}, \\ \mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{M}^{(k)} \mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{e}_M^{(k)} \end{cases} \quad (k = 0, 1, 2, \dots)$$

### Etape 1: analyse BLUE

- ébauche  $\mathbf{x}_F^{(k)}$ , covariances d'ébauche  $\mathbf{C}_F^{(k)}$  et d'observation  $\mathbf{C}_{\mathcal{D}}^{(k)}$  supposées connues

$$\mathbf{C}_a^{(k)} = (\mathbf{C}_F^{(k)-1} + \mathbf{H}^{(k)\top} \mathbf{C}_{\mathcal{D}}^{(k)-1} \mathbf{H}^{(k)})^{-1} \text{ (covariance d'analyse)}$$

$$\mathbf{K}^{(k)} = \mathbf{C}_a^{(k)} \mathbf{H}^{(k)\top} \mathbf{C}_{\mathcal{D}}^{(k)-1} \text{ (gain)}$$

$$\mathbf{x}_a^{(k)} = \mathbf{x}_F^{(k)} + \mathbf{K}^{(k)} (\mathbf{y}^{(k)} - \mathbf{H}^{(k)} \mathbf{x}_F^{(k)}) \text{ (analyse)}$$

## Interpolation séquentielle: cas linéaire

Hypothèses de linéarité:

$$\begin{cases} \mathbf{y}^{(k)} = \mathbf{H}^{(k)} \mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{e}_{\mathcal{D}}^{(k)}, \\ \mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{M}^{(k)} \mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{e}_M^{(k)} \end{cases} \quad (k = 0, 1, 2, \dots)$$

### Etape 1: analyse BLUE

- ébauche  $\mathbf{x}_F^{(k)}$ , covariances d'ébauche  $\mathbf{C}_F^{(k)}$  et d'observation  $\mathbf{C}_{\mathcal{D}}^{(k)}$  supposées connues

$$\mathbf{C}_a^{(k)} = (\mathbf{C}_F^{(k)-1} + \mathbf{H}^{(k)\top} \mathbf{C}_{\mathcal{D}}^{(k)-1} \mathbf{H}^{(k)})^{-1} \text{ (covariance d'analyse)}$$

$$\mathbf{K}^{(k)} = \mathbf{C}_a^{(k)} \mathbf{H}^{(k)\top} \mathbf{C}_{\mathcal{D}}^{(k)-1} \text{ (gain)}$$

$$\mathbf{x}_a^{(k)} = \mathbf{x}_F^{(k)} + \mathbf{K}^{(k)} (\mathbf{y}^{(k)} - \mathbf{H}^{(k)} \mathbf{x}_F^{(k)}) \text{ (analyse)}$$

### Etape 2: prévision

$$\mathbf{x}_F^{(k+1)} = \mathbf{M}^{(k)} \mathbf{x}_a^{(k)}$$

## Interpolation séquentielle, cas linéaire: erreur de prévision

- Erreur associée au prédicteur:

$$\begin{aligned}\mathbf{e}_F^{(k+1)} &= \mathbf{x}_F^{(k+1)} - \mathbf{x}^{(k+1)} \\ &= \mathbf{M}^{(k)}(\mathbf{x}_a^{(k)} - \mathbf{x}^{(k)}) + \mathbf{M}^{(k)}\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}^{(k+1)} \\ &= \mathbf{M}^{(k)}\mathbf{e}_a^{(k)} - \mathbf{e}_M^{(k)} \\ \mathbb{E}(\mathbf{e}_F^{(k+1)}) &= \mathbf{M}^{(k)}\mathbb{E}(\mathbf{e}_a^{(k)}) - \mathbb{E}(\mathbf{e}_M^{(k)}) \\ &= \mathbf{M}^{(k)}\mathbb{E}(\mathbf{e}_a^{(k)})\end{aligned}$$

De plus:  $\mathbb{E}(\mathbf{e}_F^{(k)}) = \mathbf{0} \implies \mathbb{E}(\mathbf{e}_a^{(k)}) = \mathbf{0}$  (conséquence de BLUE), et donc

$$\boxed{\mathbb{E}(\mathbf{e}_F^{(k)}) = \mathbf{0} \implies \mathbb{E}(\mathbf{e}_F^{(k+1)}) = \mathbf{0}}$$

## Interpolation séquentielle, cas linéaire: erreur de prévision

- Erreur associée au prédicteur:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{e}_F^{(k+1)} &= \mathbf{x}_F^{(k+1)} - \mathbf{x}^{(k+1)} \\
 &= \mathbf{M}^{(k)}(\mathbf{x}_a^{(k)} - \mathbf{x}^{(k)}) + \mathbf{M}^{(k)}\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}^{(k+1)} \\
 &= \mathbf{M}^{(k)}\mathbf{e}_a^{(k)} - \mathbf{e}_M^{(k)} \\
 \mathbb{E}(\mathbf{e}_F^{(k+1)}) &= \mathbf{M}^{(k)}\mathbb{E}(\mathbf{e}_a^{(k)}) - \mathbb{E}(\mathbf{e}_M^{(k)}) \\
 &= \mathbf{M}^{(k)}\mathbb{E}(\mathbf{e}_a^{(k)})
 \end{aligned}$$

De plus:  $\mathbb{E}(\mathbf{e}_F^{(k)}) = \mathbf{0} \implies \mathbb{E}(\mathbf{e}_a^{(k)}) = \mathbf{0}$  (conséquence de BLUE), et donc

$$\mathbb{E}(\mathbf{e}_F^{(k)}) = \mathbf{0} \implies \mathbb{E}(\mathbf{e}_F^{(k+1)}) = \mathbf{0}$$

- Covariance de l'erreur associée au prédicteur:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{C}_F^{(k+1)} &= \mathbf{M}^{(k)}\mathbb{E}(\mathbf{e}_a^{(k)}\mathbf{e}_a^{(k)\top})\mathbf{M}^{(k)\top} + \mathbf{C}_M^{(k)} \\
 &= \mathbf{M}^{(k)}\mathbf{C}_a^{(k)}\mathbf{M}^{(k)\top} + \mathbf{C}_M^{(k)}
 \end{aligned}$$

## Interpolation séquentielle: le filtre de Kalman linéaire

1. Initialisation:  $\mathbf{x}_F^0$  (ébauche initiale),  $\mathbf{C}_F^0$  (covariance initiale de prévision)
2. Interpolation séquentielle: pour  $k = 1, 2, \dots$

(a) Analyse

$$\mathbf{C}_a^{(k)} = \lambda \mathbf{C}_F^{(k-1)} + \mathbf{H}^{(k)\top} \mathbf{C}_D^{(k)-1} \mathbf{H}^{(k)} \quad (\text{covariance d'analyse})$$

$$\mathbf{K}^{(k)} = \mathbf{C}_a^{(k)} \mathbf{H}^{(k)\top} \mathbf{C}_D^{(k)-1} \quad (\text{gain})$$

$$\mathbf{x}_a^{(k)} = \mathbf{x}_F^{(k)} + \mathbf{K}^{(k)} (\mathbf{y}^{(k)} - \mathbf{H}^{(k)} \mathbf{x}_F^{(k)}) \quad (\text{analyse})$$

(b) Prévision

$$\mathbf{x}_F^{(k+1)} = \mathbf{M}^{(k)} \mathbf{x}_a^{(k)} \quad (\text{prévision})$$

$$\mathbf{C}_F^{(k+1)} = \mathbf{M}^{(k)} \mathbf{C}_a^{(k)} \mathbf{M}^{(k)\top} + \mathbf{C}_M^{(k)} \quad (\text{covariance de prévision})$$

## Filtre de Kalman linéaire: régime stabilisé

Hypothèse: les matrices  $\mathbf{H}^{(k)}$ ,  $\mathbf{M}^{(k)}$ ,  $\mathbf{C}_D^{(k)}$ ,  $\mathbf{C}_M^{(k)}$  ne dépendent pas de  $k$ . Alors on montre que la covariance de prévision  $\mathbf{C}_F^{(k)}$  tend vers une limite  $\mathbf{C}_F^\infty$  telle que (équation de Riccati algébrique – souvent difficile à résoudre!)

$$\mathbf{C}_F^\infty = \mathbf{M}(\mathbf{C}_F^\infty - \mathbf{C}_F^\infty \mathbf{H}^T (\mathbf{H} \mathbf{C}_F^\infty \mathbf{H}^T + \mathbf{C}_D)^{-1} \mathbf{H} \mathbf{C}_F^\infty) + \mathbf{C}_M$$

Cette limite donc est indépendante de l'initialisation  $\mathbf{C}_F^{(0)}$ . Conséquence:

$$\mathbf{C}_a^\infty = (\mathbf{C}_F^{\infty -1} + \mathbf{H}^T \mathbf{C}_D^{-1} \mathbf{H})^{-1} \quad (\text{covariance d'analyse stabilisée})$$

$$\mathbf{K}^\infty = \mathbf{C}_a^\infty \mathbf{H}^T \mathbf{C}_D^{-1} \quad (\text{gain stabilisé})$$

### 13. Approche probabiliste des problèmes inverses

### 14. Assimilation de données, filtrage de Kalman

Problématique de l'assimilation de données

Interpolation statistique, estimateur BLUE

Interpolation séquentielle

Filtre de Kalman linéaire

**Filtre de Kalman étendu**

Formalisme variationnel

Exemple: dynamique d'une barre

Exemple: tempête de 1999

## Filtre de Kalman étendu

Généralisation du filtre de Kalman pour des équations de transition et d'observation non-linéaires:

$$\begin{cases} \mathbf{y}^{(k)} = \mathbf{h}^{(k)}(\mathbf{x}^{(k)}) + \mathbf{e}_D^{(k)} \\ \mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{m}^{(k)}(\mathbf{x}^{(k)}) + \mathbf{e}_M^{(k)} \end{cases} \quad (k = 0, 1, 2 \dots)$$



## Filtre de Kalman étendu

**Erreur et covariance associés au prédicteur:** par extension du filtre linéaire, la prévision est donnée par

$$\mathbf{x}_F^{(k+1)} = \mathbf{m}^{(k)}(\mathbf{x}_a^{(k)})$$

## Filtre de Kalman étendu

**Erreur et covariance associés au prédicteur:** par extension du filtre linéaire, la prévision est donnée par

$$\mathbf{x}_F^{(k+1)} = \mathbf{m}^{(k)}(\mathbf{x}_a^{(k)})$$

- Evaluation de l'erreur associés au prédicteur:

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_F^{(k+1)} &= \mathbf{x}_F^{(k+1)} - \mathbf{x}^{(k+1)} \\ &= \mathbf{m}^{(k)}(\mathbf{x}_a^{(k)}) - \mathbf{x}^{(k+1)} \\ &= \mathbf{m}^{(k)}(\mathbf{x}^{(k)}) + \mathbf{M}^{(k)}\mathbf{e}_a^{(k)} - \mathbf{x}^{(k+1)} + o(\|\mathbf{e}_a^{(k)}\|) \\ &= \mathbf{M}^{(k)}\mathbf{e}_a^{(k)} - \mathbf{e}_M^{(k)} + o(\|\mathbf{e}_a^{(k)}\|) \end{aligned}$$

## Filtre de Kalman étendu

**Erreur et covariance associés au prédicteur:** par extension du filtre linéaire, la prévision est donnée par

$$\mathbf{x}_F^{(k+1)} = \mathbf{m}^{(k)}(\mathbf{x}_a^{(k)})$$

- Evaluation de l'erreur associés au prédicteur:

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_F^{(k+1)} &= \mathbf{x}_F^{(k+1)} - \mathbf{x}^{(k+1)} \\ &= \mathbf{m}^{(k)}(\mathbf{x}_a^{(k)}) - \mathbf{x}^{(k+1)} \\ &= \mathbf{m}^{(k)}(\mathbf{x}^{(k)}) + \mathbf{M}^{(k)}\mathbf{e}_a^{(k)} - \mathbf{x}^{(k+1)} + o(\|\mathbf{e}_a^{(k)}\|) \\ &= \mathbf{M}^{(k)}\mathbf{e}_a^{(k)} - \mathbf{e}_M^{(k)} + o(\|\mathbf{e}_a^{(k)}\|) \end{aligned}$$

- Covariance de l'erreur associés au prédicteur:

$$\mathbf{C}_F^{(k+1)} = \mathbf{M}^{(k)}\mathbf{C}_a^{(k)}\mathbf{M}^{(k)\top} + \mathbf{C}_M^{(k)} + o(\|\mathbf{e}_a^{(k)}\|^2)$$

## Filtre de Kalman étendu

**Erreur et covariance associés au prédicteur:** par extension du filtre linéaire, la prévision est donnée par

$$\mathbf{x}_F^{(k+1)} = \mathbf{m}^{(k)}(\mathbf{x}_a^{(k)})$$

- Evaluation de l'erreur associés au prédicteur:

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_F^{(k+1)} &= \mathbf{x}_F^{(k+1)} - \mathbf{x}^{(k+1)} \\ &= \mathbf{m}^{(k)}(\mathbf{x}_a^{(k)}) - \mathbf{x}^{(k+1)} \\ &= \mathbf{m}^{(k)}(\mathbf{x}^{(k)}) + \mathbf{M}^{(k)} \mathbf{e}_a^{(k)} - \mathbf{x}^{(k+1)} + o(\|\mathbf{e}_a^{(k)}\|) \\ &= \mathbf{M}^{(k)} \mathbf{e}_a^{(k)} - \mathbf{e}_M^{(k)} + o(\|\mathbf{e}_a^{(k)}\|) \end{aligned}$$

- Covariance de l'erreur associés au prédicteur:

$$\mathbf{C}_F^{(k+1)} = \mathbf{M}^{(k)} \mathbf{C}_a^{(k)} \mathbf{M}^{(k)\top} + \mathbf{C}_M^{(k)} + o(\|\mathbf{e}_a^{(k)}\|^2)$$

**Note:**  $\mathbf{M}^{(k)} := \mathbf{m}^{(k)'}(\mathbf{x}^{(k)})$  (matrice tangente, ou jacobienne, de  $\mathbf{m}^{(k)}$  en  $\mathbf{x} = \mathbf{x}^{(k)}$ ). Comme  $\mathbf{x}^{(k)}$  n'est pas connu, on pose en pratique

$$\mathbf{M}^{(k)} \approx \mathbf{m}^{(k)'}(\mathbf{x}_a^{(k)})$$

## Filtre de Kalman étendu

**Erreur et covariance d'analyse:** on conserve une étape d'analyse de la forme

$$\mathbf{x}_a^{(k)} = \mathbf{x}_F^{(k)} + \mathbf{K}^{(k)} [\mathbf{y}^{(k)} - \mathbf{h}^{(k)}(\mathbf{x}_F^{(k)})]$$

## Filtre de Kalman étendu

**Erreur et covariance d'analyse:** on conserve une étape d'analyse de la forme

$$\mathbf{x}_a^{(k)} = \mathbf{x}_F^{(k)} + \mathbf{K}^{(k)} [\mathbf{y}^{(k)} - \mathbf{h}^{(k)}(\mathbf{x}_F^{(k)})]$$

- Evaluation de l'erreur d'analyse:

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_a^{(k)} &= \mathbf{x}_a^{(k)} - \mathbf{x}^{(k)} \\ &= \mathbf{x}_F^{(k)} - \mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{K}^{(k)} [\mathbf{y}^{(k)} - \mathbf{h}^{(k)}(\mathbf{x}^{(k)}) - \mathbf{H}^{(k)} \mathbf{e}_F^{(k)}] + o(\|\mathbf{e}_F^{(k)}\|) \\ &= \mathbf{e}_F^{(k)} + \mathbf{K}^{(k)} [\mathbf{e}_D^{(k)} - \mathbf{H}^{(k)} \mathbf{e}_F^{(k)}] + o(\|\mathbf{e}_F^{(k)}\|) \end{aligned}$$

## Filtre de Kalman étendu

**Erreur et covariance d'analyse:** on conserve une étape d'analyse de la forme

$$\mathbf{x}_a^{(k)} = \mathbf{x}_F^{(k)} + \mathbf{K}^{(k)} [\mathbf{y}^{(k)} - \mathbf{h}^{(k)}(\mathbf{x}_F^{(k)})]$$

- Evaluation de l'erreur d'analyse:

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_a^{(k)} &= \mathbf{x}_a^{(k)} - \mathbf{x}^{(k)} \\ &= \mathbf{x}_F^{(k)} - \mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{K}^{(k)} [\mathbf{y}^{(k)} - \mathbf{h}^{(k)}(\mathbf{x}^{(k)}) - \mathbf{H}^{(k)} \mathbf{e}_F^{(k)}] + o(\|\mathbf{e}_F^{(k)}\|) \\ &= \mathbf{e}_F^{(k)} + \mathbf{K}^{(k)} [\mathbf{e}_D^{(k)} - \mathbf{H}^{(k)} \mathbf{e}_F^{(k)}] + o(\|\mathbf{e}_F^{(k)}\|) \end{aligned}$$

- Covariance de l'erreur d'analyse (cf. BLUE):

$$\mathbf{C}_a^{(k)} = (\mathbf{I} - \mathbf{K}^{(k)} \mathbf{H}^{(k)}) \mathbf{C}_F^{(k)} (\mathbf{I} - \mathbf{K}^{(k)} \mathbf{H}^{(k)})^T + \mathbf{K}^{(k)} \mathbf{C}_D^{(k)} \mathbf{K}^{(k)T} + o(\|\mathbf{e}_F^{(k)}\|^2)$$

- Gain de Kalman (cf. BLUE encore):

$$\mathbf{K}^{(k)} = \mathbf{C}_F^{(k)} \mathbf{H}^{(k)T} (\mathbf{C}_D^{(k)} + \mathbf{H}^{(k)} \mathbf{C}_F^{(k)} \mathbf{H}^{(k)T})^{-1}$$

Matrice tangente de  $\mathbf{h}^{(k)}(\mathbf{x})$  en  $\mathbf{x} = \mathbf{x}^{(k)}$  approchée par

$$\mathbf{H}^{(k)} \approx \mathbf{h}^{(k)'}(\mathbf{x}_F^{(k)})$$

## Filtre de Kalman étendu

1. Initialisation:  $\mathbf{x}_F^0$  (ébauche initiale),  $\mathbf{C}_F^0$  (covariance initiale de prévision)
2. Interpolation séquentielle: pour  $k = 1, 2, \dots$

(a) Analyse

$$\mathbf{C}_a^{(k)} = \lambda \mathbf{C}_F^{(k-1)} + \mathbf{H}^{(k)\top} \mathbf{C}_D^{(k-1)} \mathbf{H}^{(k)} \quad (\text{covariance d'analyse})$$

$$\mathbf{K}^{(k)} = \mathbf{C}_a^{(k)} \mathbf{H}^{(k)\top} \mathbf{C}_D^{(k-1)-1} \quad (\text{gain})$$

$$\mathbf{x}_a^{(k)} = \mathbf{x}_F^{(k)} + \mathbf{K}^{(k)} (\mathbf{y}^{(k)} - \mathbf{h}^{(k)}(\mathbf{x}_F^{(k)})) \quad (\text{analyse})$$

avec  $\mathbf{H}^{(k)} = \mathbf{h}^{(k)'}(\mathbf{x}_F^{(k)})$

(b) Prévision

$$\mathbf{x}_F^{(k+1)} = \mathbf{m}^{(k)}(\mathbf{x}_a^{(k)}) \quad (\text{prévision})$$

$$\mathbf{C}_F^{(k+1)} = \mathbf{M}^{(k)} \mathbf{C}_a^{(k)} \mathbf{M}^{(k)\top} + \mathbf{C}_M^{(k)} \quad (\text{covariance de prévision})$$

avec  $\mathbf{M}^{(k)} = \mathbf{m}^{(k)'}(\mathbf{x}_a^{(k)})$



### 13. Approche probabiliste des problèmes inverses

### 14. Assimilation de données, filtrage de Kalman

Problématique de l'assimilation de données

Interpolation statistique, estimateur BLUE

Interpolation séquentielle

Filtre de Kalman linéaire

Filtre de Kalman étendu

**Formalisme variationnel**

Exemple: dynamique d'une barre

Exemple: tempête de 1999

## Formalisme variationnel: le 4D-Var

L'analogie variationnel du filtre de Kalman est donné par la formulation dite 4D-Var

$$\begin{aligned}
 J_{4D\text{-Var}}(\mathbf{x}^{(0)}) &= \frac{1}{2}(\mathbf{x}^{(0)} - \mathbf{x}_F^{(0)})^T \mathbf{C}_F^{(0)-1} (\mathbf{x}^{(0)} - \mathbf{x}_F^{(0)}) \\
 &\quad + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^n (\mathbf{y}^{(k)} - \mathbf{h}^{(k)}(\mathbf{x}^{(k)}))^T \mathbf{C}_D^{(k)-1} (\mathbf{y}^{(k)} - \mathbf{h}^{(k)}(\mathbf{x}^{(k)})) \\
 &\quad \text{sous contraintes } \mathbf{x}^{(k+1)} - \mathbf{m}^{(k)}(\mathbf{x}^{(k)}) = \mathbf{0} \quad (k \geq 0)
 \end{aligned}$$

Le lagrangien associé à ce problème est ainsi

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}_{4D\text{-Var}}(\mathbf{x}^{(0)}; \mathbf{x}^{(1)}, \dots, \mathbf{x}^{(n)}; \mathbf{w}^{(1)}, \dots, \mathbf{w}^{(n)}) \\
 = J(\mathbf{x}^{(0)}) + \sum_{k=1}^n \mathbf{w}^{(k)T} (\mathbf{x}^{(k+1)} - \mathbf{m}^{(k)}(\mathbf{x}^{(k)}))
 \end{aligned}$$

## Formalisme variationnel: le 4D-Var

$$J_{4D-Var}(\mathbf{x}^{(0)}) = \frac{1}{2}(\mathbf{x}^{(0)} - \mathbf{x}_F^{(0)})^T \mathbf{C}_F^{(0)-1}(\mathbf{x}^{(0)} - \mathbf{x}_F^{(0)}) + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^n (\mathbf{y}^{(k)} - \mathbf{h}^{(k)}(\mathbf{x}^{(k)}))^T \mathbf{C}_D^{(k)-1}(\mathbf{y}^{(k)} - \mathbf{h}^{(k)}(\mathbf{x}^{(k)}))$$

- “4D” signifie que la formulation variationnelle sert à estimer l'état d'un système avec variables d'état 3D en espace + 1D en temps (ex. météo, océan).
- Sert en particulier à estimer l'état initial  $\mathbf{x}^{(0)}$
- L'analyse finale  $\mathbf{x}_a^{(n)}$  produite par le filtre de Kalman (pour la même covariance d'ébauche initiale  $\mathbf{C}_F^{(0)}$ ) coïncide avec l'état final  $\mathbf{x}^{(n)}$  produit par le 4D-Var (preuve: écrire les équations de stationnarité de  $\mathcal{L}_{4D-Var}$  et comparer avec les équations du filtre de Kalman)

### 13. Approche probabiliste des problèmes inverses

### 14. Assimilation de données, filtrage de Kalman

Problématique de l'assimilation de données

Interpolation statistique, estimateur BLUE

Interpolation séquentielle

Filtre de Kalman linéaire

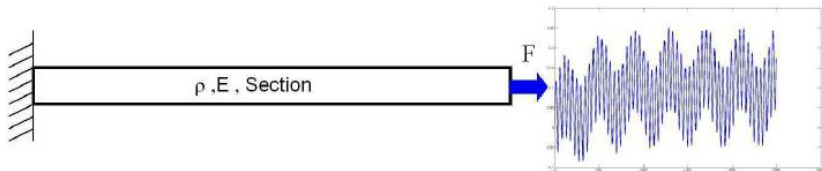
Filtre de Kalman étendu

Formalisme variationnel

**Exemple: dynamique d'une barre**

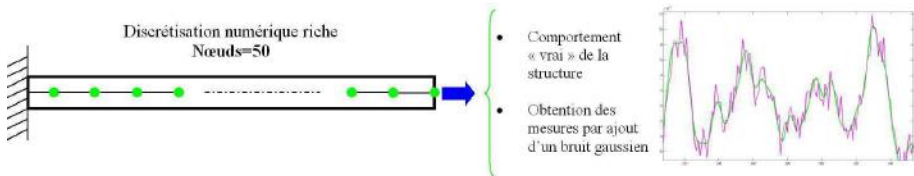
Exemple: tempête de 1999

## Exemple: dynamique d'une barre

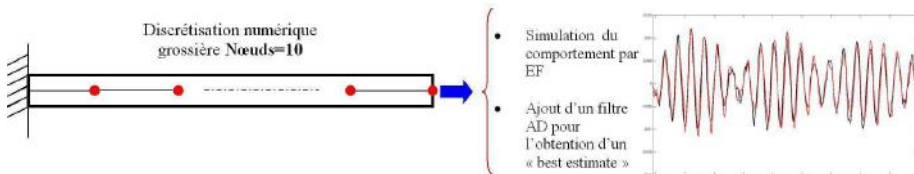


## Exemple: dynamique d'une barre

Modèle fin (considéré comme la structure réelle):

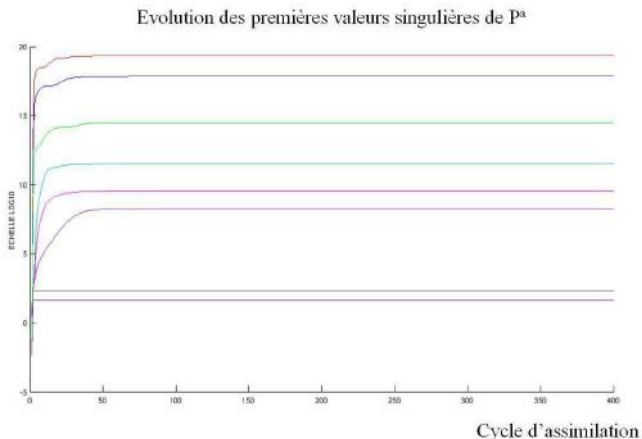


Modèle grossier (utilisé par le filtre)



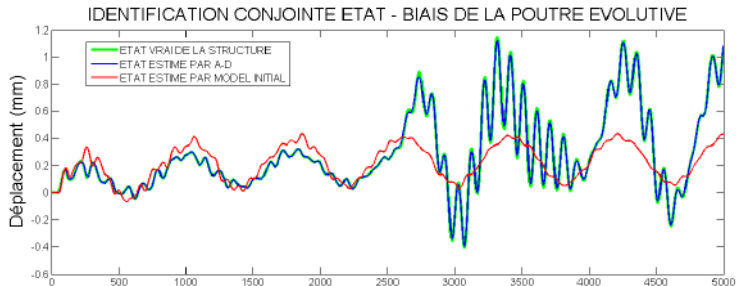
## Exemple: dynamique d'une barre

Evolution au cours de l'assimilation de la matrice de covariance  $\mathbf{C}_a$



## Exemple: dynamique d'une barre

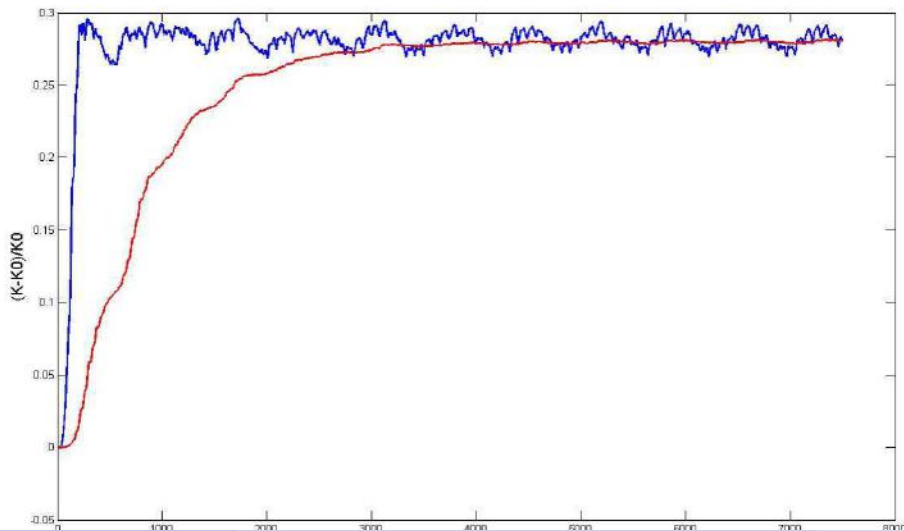
Recherche d'un biais global de 30% sur la raideur au cours d'un cycle d'assimilation (filtre de Kalman étendu)





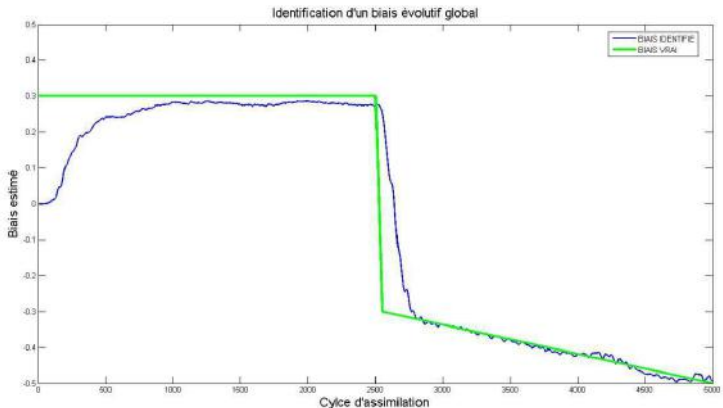
## Exemple: dynamique d'une barre

Recherche d'un biais global évolutif sur la raideur au cours d'un cycle d'assimilation: identification conjointe de l'état et de la raideur (filtre de Kalman étendu)



## Exemple: dynamique d'une barre

Recherche d'un biais global évolutif sur la raideur au cours d'un cycle d'assimilation



### 13. Approche probabiliste des problèmes inverses

### 14. Assimilation de données, filtrage de Kalman

Problématique de l'assimilation de données

Interpolation statistique, estimateur BLUE

Interpolation séquentielle

Filtre de Kalman linéaire

Filtre de Kalman étendu

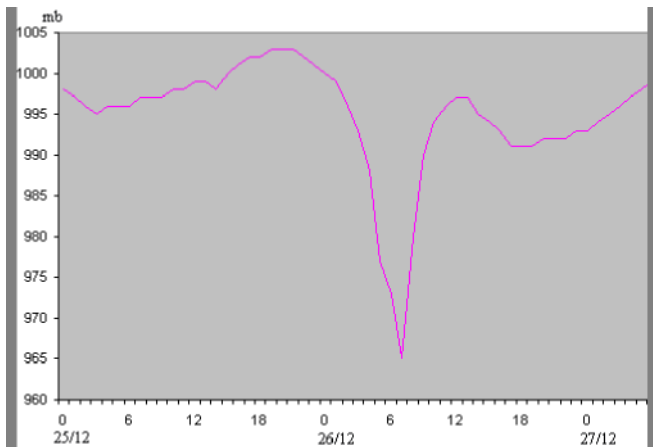
Formalisme variationnel

Exemple: dynamique d'une barre

Exemple: tempête de 1999

## Exemple: tempête de 1999

Mesures de pression à Paris Charles de Gaulle pendant la tempête de 1999 :

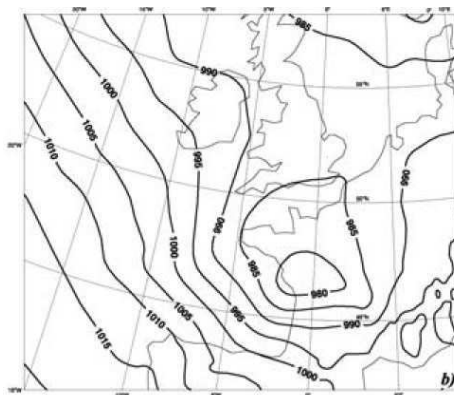


Mesures de vent éliminées au fur et à mesure de leur arrivée par le 3D-VAR opérationnel (exemple : 529 km/h à 8000m par radiosondage à Brest)

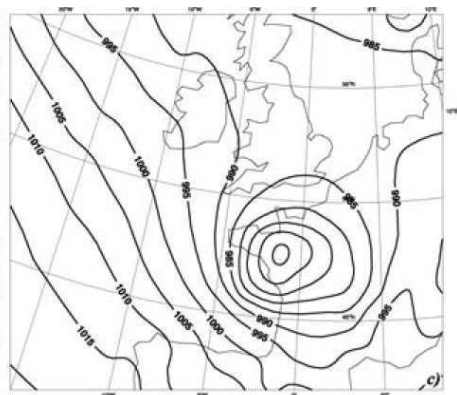
Extrait du cours "Assimilation de données" (D. Auroux, Univ. Nice, <http://math.unice.fr/~auroux>)

## Exemple: tempête de 1999

Tempête de Décembre 1999 sur la France (vents  $\sim 200$  km/h au sol,  $> 300$  km/h au sommet de montagnes)



3D-VAR opérationnel



réanalyse par le 4D-VAR

Extrait du cours "Assimilation de données" (D. Auroux, Univ. Nice, <http://math.unice.fr/~auroux>)

# Plan général

## Partie 1: Généralités

Séance 1: Problèmes inverses, identification: notions, motivations, exemples

## Partie 2: Identification en mécanique des solides

Séance 2: Mesures de champs, exemple de l'essai essai brésilien (GP)

Séance 3: Identification: champs virtuels, erreur en relation de comportement

Séance 5: Identification sur mesures de champs, TP CORRELI (GP)

## Partie 3: Outils: algèbre linéaire, moindres carrés, optimisation

Séance 4: Moindres carrés linéaires, notion de conditionnement

Séance 6: Principes des principales méthodes d'optimisation

Séance 7: Outils matlab (ODE, toolbox optimisation...) (GP)

## Partie 4: Problèmes mal posés et leur régularisation

Séances 8, 9: Régularisation des problèmes mal posés, exemples.

## Partie 5: Approches bayésiennes

Séances 9, 10: méthodes bayésiennes, assimilation, filtrage de Kalman.