
PROBLÈMES INVERSES

Master recherche – Ecole Centrale de Paris
Mention Matière, Structures, Fluides, Rayonnement
Spécialité Dynamique des Structures et Systèmes Couplés
octobre 2008

Marc BONNET

Directeur de recherche CNRS,
Laboratoire de Mécanique des Solides, UMR CNRS 7649
Ecole Polytechnique, 91128 Palaiseau cedex

téléphone: (1)-69333327, télécopie: (1)-69333026
courrier électronique: *bonnet@lms.polytechnique.fr*

Table des matières

1	Introduction	5
1.1	Préliminaire	6
1.2	Problèmes directs, problèmes inverses	7
1.3	Gravimétrie	9
1.4	Identification de sources ou de sollicitations	10
1.5	Reconstruction de conditions aux limites inaccessibles	11
1.6	Problèmes inverses associés aux vibrations de structures	13
1.7	Tomographie, imagerie, contrôle non destructif	15
1.8	Problèmes inverses avec géométrie inconnue	17
	Bibliographie	18
2	Problèmes mal posés	21
2.1	Exemples de problèmes mal posés	22
2.2	Analyse en dimension finie	25
2.3	La dimension infinie	31
	Bibliographie	35
3	Stabilisation de l'inversion	37
3.1	Régularisation au sens de Tikhonov et applications.	38
3.2	Un exemple unidimensionnel semi-analytique	47
3.3	Approche probabiliste des problèmes inverses.	53
3.4	Elements de comparaison des deux approches.	63
3.5	Un exemple d'inversion gaussienne linéaire en variable complexe	64
	Bibliographie	71
4	Identification de grandeurs distribuées	73
4.1	Problème de la reconstruction de la conductivité thermique	74
4.2	Problème de la reconstruction de constantes élastiques	80
4.3	Résolution numérique du problème inverse	84
4.4	Exemples numériques	88
4.5	Reconstruction de déformations ou contraintes résiduelles	92
	Bibliographie	95
5	Minimisation de fonction-coût et méthode d'état adjoint	97
5.1	Aperçu de quelques méthodes de minimisation	98
5.2	Minimisation d'une fonctionnelle quadratique	100
5.3	Méthodes d'évaluation du gradient : discussion	102

5.4	Méthode de l'état adjoint en dimension infinie	104
5.5	Etat adjoint et analyse modale	109
5.6	Linéarisation, équations d'observation	111
5.7	Etat adjoint et problèmes d'évolution non-linéaires	113
5.8	Identification de domaines inconnus par équations intégrales de frontière	116
5.9	Algorithmes évolutionnaires : principe et exemples	120
	Bibliographie	123
	Bibliographie générale	125

Chapitre 1

Introduction

Sommaire

1.1	Préliminaire	6
1.2	Problèmes directs, problèmes inverses	7
1.3	Gravimétrie	9
1.4	Identification de sources ou de sollicitations	10
1.5	Reconstruction de conditions aux limites inaccessibles	11
1.6	Problèmes inverses associés aux vibrations de structures	13
1.7	Tomographie, imagerie, contrôle non destructif	15
1.8	Problèmes inverses avec géométrie inconnue	17
	Bibliographie	18

1.1 Préliminaire

Qu'entend-on par « problème inverse » ? Cette question, en apparence simple, ne l'est pas tant que cela. D'un point de vue « physique » ou « expérimental », on qualifie volontiers de problème inverse toute situation où l'on souhaite évaluer une certaine grandeur physique \mathbf{p} *inaccessible à l'expérience* à partir de la mesure d'une autre grandeur \mathbf{d} *directement accessible à l'expérience*, connaissant un *modèle mathématique du problème direct* qui donne explicitement \mathbf{d} à partir de \mathbf{p} (ce que l'on note symboliquement $\mathbf{d} = \mathbf{G}(\mathbf{p})$). Mais une telle définition est trop vaste : en termes de mathématiques, elle conduit pratiquement à appeler « problème inverse » la résolution de toute équation (algébrique, matricielle, différentielle, aux dérivées partielles, intégrale...) ou la minimisation de toute fonctionnelle, y compris dans les cas les plus classiques et les mieux connus.

Tous ces candidats au statut de « problème inverse » peuvent être répartis en deux classes. Ceux qui, pour toute mesure \mathbf{d} , admettent une *solution unique* \mathbf{p} continue par rapport à \mathbf{d} sont dits « bien posés ». Ils sont généralement résolus (de manière exacte ou approchée) par des méthodes classiques. On réserve généralement, dans la littérature, le qualificatif d'« inverse » aux problèmes (a) d'inversion (b) mal posés : l'existence, l'unicité et/ou la continuité de la solution par rapport aux mesures ne sont pas toutes vérifiées. Du point de vue physique, cela signifie qu'une mesure \mathbf{d} , compte tenu de la plage d'incertitude qui l'accompagne, peut correspondre à un grand nombre de valeurs de \mathbf{p} ; ces dernières pouvant être fort éloignées les unes des autres.

La physique mathématique a longtemps ignoré les problèmes mal posés, les considérant soit dénués de sens physique, soit reflétant une modélisation inadéquate. La réalité actuelle est toute autre : le caractère fondamentalement mal posé de certains problèmes (en gravimétrie par exemple) est reconnu et motive de nombreuses recherches en mathématiques. Outre des méthodes générales pour l'approche des problèmes inverses que l'on verra plus loin, de nombreux travaux mathématiques traitent de *l'identifiabilité* d'une grandeur donnée : voir par exemple Barcilon [10], Calderon [19], Colton et Monk [25], Friedman et Vogelius [30], Kohn et Vogelius [35].

Les causes d'incertitude sont nombreuses :

- Les données ont une origine expérimentale, ce qui implique l'existence d'erreurs de mesure.
- Elles sont collectées en nombre fini, même si, dans le modèle mathématique, elles sont décrites par des fonctions.
- L'algorithme d'inversion lui-même peut parfois créer une altération des données : interpolation requise pour la discrétisation d'un modèle initialement continu par exemple.
- Le modèle lui-même procède d'une idéalisation de la réalité physique et repose sur des hypothèses simplificatrices, il est donc également une source d'incertitudes. D'autant que certains paramètres du modèle (constantes physiques d'un milieu par exemple) ne sont connus que de manière expérimentale, donc approximativement.

La sensibilité des problèmes inverses aux incertitudes induit un changement d'optique important vis-à-vis du concept de solution, car la recherche des solutions *au sens strict* associées par le modèle aux mesures \mathbf{d} n'est plus un objectif suffisant. En effet, tout \mathbf{p} qui reproduit *aux incertitudes près*, via le modèle physique, la mesure \mathbf{d} est une réponse a priori possible au problème inverse. Un problème inverse, pour un modèle physique et une

mesure donnés, peut n'avoir aucune solution au sens strict mais beaucoup de solutions « à ϵ près ».

Toute « théorie de l'inversion » doit donc tenir compte du caractère éventuellement incomplet, imprécis et/ou redondant des données. La stratégie idéale consisterait à inventorier *l'ensemble complet des solutions « à ϵ près » de $\mathbf{d} = \mathbf{G}(\mathbf{p})$* , parmi lesquelles on opérerait ensuite un choix suivant des critères additionnels (vraisemblance physique, informations supplémentaires a priori) afin de retenir la ou les solutions jugées vraisemblables. Une telle « approche exhaustive » pose des problèmes pratiques insurmontables si le nombre de variables scalaires à identifier n'est pas très petit (cf les problèmes inverses linéaires avec contraintes unilatérales, Cuen [27], Sabatier [44]). En pratique, les méthodes d'investigation des problèmes inverses se répartissent selon Nashed [41] en trois catégories principales :

1. Les méthodes relevant de l'analyse mathématique et la théorie des fonctions se proposent de transformer un problème mal posé en problème bien posé en jouant sur le choix des *espaces*, qui servent à décrire les variables, et de leurs topologies, qui formalisent les notions d'écart ou d'erreur. Elles proposent également d'introduire des contraintes globales sur les classes de solutions. Les « bons » espaces ou les « bonnes » contraintes ne sont pas dictés par les mathématiques mais traduisent des considérations physiques.
2. La *régularisation des problèmes mal posés*, due initialement à Tikhonov [46], cherche à redéfinir les notions d'inversion et de solution (quasi-solution, solution approchée,...), de façon que la « solution régularisée » obtenue par « inversion régularisée » dépende continûment des données et soit proche de la solution exacte (supposant que celle-ci existe pour des données proches des valeurs effectivement obtenues par la mesure). En d'autres termes, on remplace le problème initial mal posé par un autre, « proche » du premier et bien posé.
3. L'*inversion stochastique* développée par Tarantola [45] (voir aussi Menke [40]) dont le principe est de considérer toutes les variables comme aléatoires afin de représenter toutes les incertitudes. La solution du problème inverse est la *fonction densité de probabilité* associée à l'inconnue \mathbf{p} et la mesure \mathbf{d} , à partir de laquelle on peut chercher des grandeurs caractéristiques : valeur moyenne, valeur de plus grande probabilité, dispersion, corrélations...

Ces trois approches ont comme préoccupation commune de fournir un cadre permettant d'incorporer, outre le modèle physique à inverser, des *informations a priori* ou des *critères de choix*. Ceux-ci proviennent de considérations extra-mathématiques et influent fortement sur le résultat de l'inversion.

L'approche 1 ne sera pas abordée dans le cadre de ce cours. Elle est orientée vers l'analyse théorique des problèmes inverses et l'obtention de résultats généraux. Son applicabilité à leur résolution pratique est moins immédiate ; d'autre part cela demanderait de rentrer trop loin dans les mathématiques. On n'examinera donc que les aspects 2 et 3, jugés plus proches des applications.

1.2 Problèmes directs, problèmes inverses

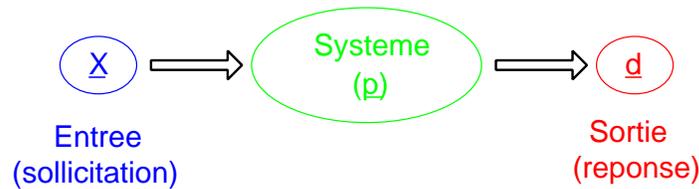
On peut expliciter et reformuler les notions de problème direct et problème inverse à l'aide de l'artifice de présentation assez commode utilisant la notion de système.

La résolution d'un problème mécanique ou thermique peut être vu sous l'angle du calcul de la *réponse* \mathbf{d} (déplacement, contrainte, température,...) à des *sollicitations* \mathbf{X} (forces, conditions aux limites, sources, conditions initiales...)

PROBLÈME DIRECT. Le système (par exemple la structure mécanique analysée) dépend habituellement de paramètres, symboliquement notés \mathbf{p} : géométrie (la région de l'espace occupée), caractéristiques des matériaux constitutifs, liaisons cinématiques... Le *problème direct* consiste à calculer la réponse \mathbf{d} à partir de la donnée des sollicitations \mathbf{X} et des paramètres \mathbf{p} . Les équations de la physique donnent en général la réponse \mathbf{d} comme fonction implicite de \mathbf{X}, \mathbf{p} :

$$G(\mathbf{X}, \mathbf{d}; \mathbf{p}) = 0 \quad (1.1)$$

La notation \mathbf{G} symbolise les équations de la physique du problème considéré ; on parle parfois du *modèle physique*.



Dans la plupart des cas, le problème direct est *bien posé*, ce qui signifie la réalisation des trois conditions (problème bien posé au sens d'Hadamard) :

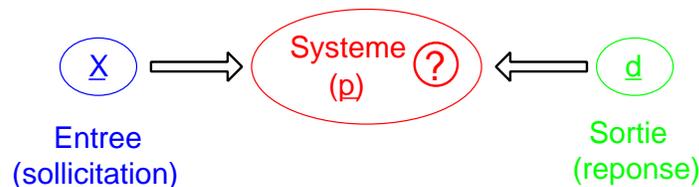
- Existence d'une solution
- Unicité de la solution
- Stabilité de la réponse par rapport aux petites erreurs (de données, de discrétisation...)

Dans certains cas (gravimétrie, certains problèmes linéarisés), le modèle physique est *explicite* :

$$\mathbf{d} = G(\mathbf{X}, \mathbf{p}) \quad (1.2)$$

En Mécanique ou en thermique, on est toutefois le plus souvent confronté à des modèles physiques de type implicite.

PROBLÈME INVERSE. Il s'agit généralement de situations où on est dans l'ignorance au moins partielle du système (certaines informations concernant la géométrie, les matériaux, les conditions initiales...) ne sont pas connues. En compensation, il faut disposer (en plus des entrées) d'informations, éventuellement partielles, sur la sortie \mathbf{d} afin de reconstruire au mieux l'information manquante. Le terme inverse rappelle qu'on utilise l'information concernant le modèle physique « à l'envers » : connaissant (partiellement) les sorties, on cherche à remonter à certaines caractéristiques, habituellement internes et échappant à la mesure directe.



L'analyse des nombreux problèmes de type inverse (au sens proposé ici) met en évidence leur caractère *mal posé*, au sens où au moins une des trois conditions énumérées plus haut ne sont pas vérifiées.

En effet, en raison d'incertitudes expérimentale, des données \mathbf{d} pourront être incompatibles avec l'entrée \mathbf{X} (c'est-à-dire qu'aucun système ne parvient à produire \mathbf{d} à partir de \mathbf{X}), d'où l'absence de solution pour les données disponibles. De nombreux cas présentent également des possibilités de solutions multiples. Enfin, une caractéristique très répandue est la très grande sensibilité d'une solution par rapport à une perturbation des données.

Dans les sections qui suivent, on présente quelques exemples de problèmes inverses et met en évidence le caractère mal posé.

1.3 Gravimétrie

EXEMPLE : PROBLÈME INVERSE EN GRAVIMÉTRIE. En prospection gravimétrique, on souhaite déterminer la distribution de masse volumique $\rho(\mathbf{y})$ dans une certaine région souterraine V à partir de mesures en certains points \mathbf{x} de la surface de la perturbation créée sur la composante verticale $g_3(\mathbf{x})$ de l'accélération de la pesanteur,.

MODÈLE PHYSIQUE. L'accélération gravitationnelle créée par une distribution $\rho(\mathbf{y})$ de masse volumique dans une région V de l'espace est donnée par

$$g_3(\mathbf{x}) = \mathcal{G} \frac{\partial}{\partial x_3} \int_V \frac{1}{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|} \rho(\mathbf{y}) \, dV \quad (1.3)$$

\mathcal{G} étant la constante de gravitation universelle de Newton. Cette relation constitue le *modèle physique* du problème :

$$g_3 = G(\rho)$$

de plus, g_3 est ici donné *explicitement* en fonction de ρ . Le problème direct consiste donc simplement à calculer g_3 pour ρ donné.

PROBLÈME INVERSE. Il consiste à déterminer la répartition de masse volumique à partir de mesures d'accélération de la pesanteur. Le modèle physique étant une relation linéaire entre ρ et g_3 , la résolution pratique du problème inverse par discrétisation du champ ρ dans (1.3) semble ne pas poser de problème.

La remarque suivante montre qu'il n'en est rien. En effet, soit $f(\mathbf{y})$ une fonction scalaire définie sur V et telle que :

$$(\forall \mathbf{y} \in dV) \quad f(\mathbf{y}) = \frac{\partial}{\partial n} f(\mathbf{y}) = 0 \quad (1.4)$$

Puisque $\Delta(1/\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|) = 0$ ($\forall \mathbf{y} \in V$) la troisième formule de Green permet d'écrire :

$$\int_V \frac{1}{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|} \Delta f \, dV = \int_{\partial V} \left\{ \frac{1}{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|} \frac{\partial f}{\partial n} - f \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|} \right\} dS = 0 \quad (1.5)$$

ce qui implique que les distributions de masse volumique ρ et $\rho + \Delta f$ (f vérifiant (1.4)) sont indiscernables du point de vue du champ de gravitation créé à l'extérieur de V .

Si on prend par exemple pour V une région sphérique de rayon R et \mathbf{x} un point extérieur à V , il est bien connu que le champ de gravitation créé en \mathbf{x} par un V sphérique

de masse volumique $\rho(r)$ à symétrie sphérique est égal à celui qui régnerait si toute la masse de V était concentrée au centre de la sphère. En d'autres termes, toutes les distributions $\rho(r)$ à symétrie sphérique et de même masse totale créent, hors de V , le même champ de gravitation.

Le problème de la gravimétrie est donc essentiellement sous-déterminé ; des informations supplémentaires indépendantes (« informations a priori ») sur $\rho(\mathbf{y})$ sont nécessaires.

Cet aspect sous-déterminé *s'ajoute* aux autres aspects mal posés : en effet, $\rho(\mathbf{y})$ (inconnue du problème inverse), est gouvernée par (1.3), qui est une équation intégrale de première espèce, dont l'inversion est connue pour être une opération mal posée (voir chapitre 2), très sensible aux erreurs sur les données $g_3(\mathbf{x})$. Dans cet exemple, les pathologies propres à ce type d'équation viennent donc *en sus* du caractère sous-déterminé de l'inversion gravimétrique, qui est donc mal posée à deux titres différents. Ces remarques laissent augurer des difficultés qui attendent quiconque tenterait d'évaluer $\rho(\mathbf{y})$ par une discrétisation « naïve » de (1.3).

1.4 Identification de sources ou de sollicitations

La reconstruction de sources ou sollicitations mal connues, généralement à partir de données externes, est aussi un problème d'importance pratique.

Montrons sur un exemple simple (reconstruction d'une charge ponctuelle appliquée à une poutre élastique) que ce type de problème est aussi sujet à l'amplification d'erreurs sur les données expérimentales.

Avec les notations de la figure 1.1, on suppose mesurés la flèche $\delta(L)$ et la rotation d'extrémité $\delta'(L)$. Un calcul très simple donne l'intensité F et l'emplacement aL de la force en fonction de δ, δ' :

$$aL = 3(L - (\delta/\delta')) \quad F = 2EI\delta'(aL)^{-2}$$

Il est intéressant de remarquer qu'une perturbation relative sur δ et δ' :

$$\delta'_{\text{mesure}} = \delta'_{\text{exact}}(1 + \varepsilon) \quad (\delta/\delta')_{\text{mesure}} = (\delta/\delta')_{\text{exact}}(1 + \varepsilon')$$

induit une erreur de reconstruction sur F qui vaut, tous calculs faits :

$$\frac{F_{\text{mesure}}}{F_{\text{exact}}} - 1 = \frac{\varepsilon - \varepsilon' \frac{3-a}{a}}{1 + \varepsilon' \frac{3-a}{a}}$$

L'amplification de l'erreur expérimentale augmente quand a diminue. Par exemple, avec 1% d'erreur relative sur δ et δ' ($\varepsilon' = 2\varepsilon = 0.02$), on trouve dans le cas le plus défavorable :

$$\begin{aligned} F_{\text{mesure}}/F_{\text{exact}} - 1 &= 0.117 & (a = 0.25) \\ &= 0.240 & (a = 0.1) \\ &= 0.384 & (a = 0.5) \end{aligned}$$

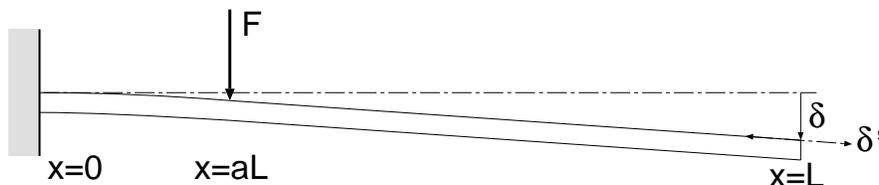


Fig. 1.1: Poutre droite et reconstruction d'une force ponctuelle

EQUATION INTÉGRALE. L'identification de sources peut parfois être formulée comme une équation intégrale. Par exemple, en élasticité, le déplacement \mathbf{u} et le vecteur-contrainte \mathbf{t} à la frontière sont reliés à une distribution volumique \mathbf{f} d'efforts par :

$$\frac{1}{2}u_k(\mathbf{x}) + (\text{VP}) \int_{\partial\Omega} \Sigma_{ij}^k(\mathbf{x}, \mathbf{y}) n_j(\mathbf{y}) u_i(\mathbf{x}) dS_y - \int_{\partial\Omega} U_i^k(\mathbf{x}, \mathbf{y}) t_i(\mathbf{x}) dS_y = \int_{\Omega} U_i^k(\mathbf{x}, \mathbf{y}) f_i(\mathbf{y}) dV_y \quad (1.6)$$

L'équation en \mathbf{f} obtenus en supposant connus le déplacement \mathbf{u} et le vecteur contrainte \mathbf{t} sur $\partial\Omega$, du type Fredholm de première espèce, définit un problème mathématique mal posé (unicité de la solution non garantie, grande sensibilité aux données erronées).

Même le problème de calculer $\mathbf{t}|_{\partial\Omega}$ connaissant $\mathbf{u}|_{\partial\Omega}$ (pour \mathbf{f} donné, par exemple nul), c'est-à-dire d'estimer les efforts sur la frontière à partir de la donnée du déplacement est mal posé, pour la même raison.

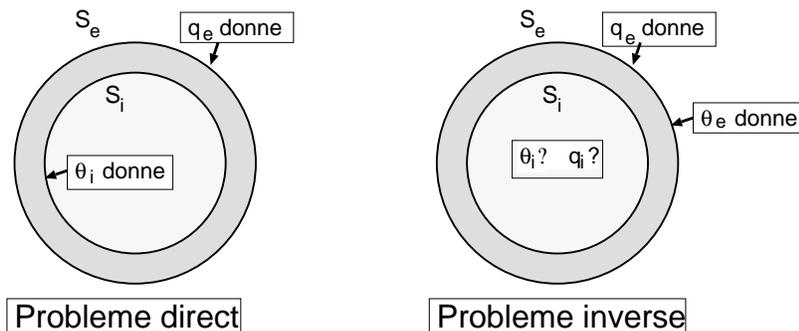
Voir par exemple Audebert et Andriambololona [4], Audoly [5], Bui et Maigre [18], Bonnet [13], Borgiotti et coll. [16], [39]

1.5 Reconstruction de conditions aux limites inaccessibles

En voici un exemple typique, en thermique. Un fluide s'écoule dans une conduite. Les conditions d'échange thermique (par exemple, donnée du flux q) avec le milieu extérieur sont connues.

- Si la température θ du fluide au contact de la paroi interne (ou encore, la condition d'échange avec le fluide) est connue, on est en présence d'un calcul de thermique classique (problème direct).
- Parfois aucune de ces conditions en paroi interne n'est accessible, alors même que leur connaissance revêt une grande importance pratique (pour calculer les contraintes d'origine thermique dans la conduite, par exemple). On est ainsi amené à envisager la reconstruction de la température (par exemple) en peau interne à partir de données complémentaires, par exemple la température relevée en peau externe ou en des capteurs placés dans le solide.

La connaissance des conditions en paroi interne est parfois utile pour accéder à des informations sur l'état du fluide lui-même. Exemple : un problème de stratification thermique qui s'est posé à EDF (rencontre d'un écoulement chaud et d'un écoulement froid dans une conduite de réacteur PWR) : il fallait déterminer la position de l'interface et les températures (supposées uniformes) des fluides en contact à partir de mesures externes de température.



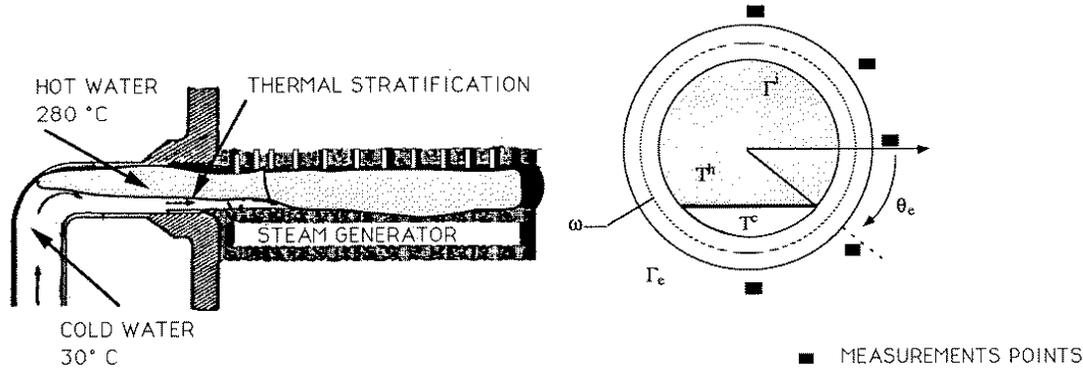


Fig. 1.2: Stratification thermique dans une conduite.

SENSIBILITÉ AUX ERREURS DE MESURE DE LA TEMPÉRATURE. Un exemple analytique permet de la mettre en évidence. On s'intéresse à l'équilibre thermique de la région de l'espace comprise entre deux cylindres concentriques de rayons interne aR (conduite cylindrique rectiligne infinie) et externe R , dans des conditions telles que les variables ne dépendent que des coordonnées polaires r, φ dans un plan perpendiculaire à l'axe.

L'équation de la chaleur

$$\Delta\theta \equiv \frac{\partial^2\theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial\theta}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial\theta}{\partial\varphi} = 0$$

admet en coordonnées polaires la solution générale

$$\theta(r, \varphi) = (\text{Cste}) + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n r^n + a_{-n} r^{-n}) \cos n\varphi + (b_n r^n + b_{-n} r^{-n}) \sin n\varphi$$

Supposons θ et q donnés simultanément sur la frontière externe (situation-modèle du problème inverse) :

$$\theta(R, \varphi) = f(\varphi) = \sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_n \cos n\varphi + \alpha_n \sin n\varphi \quad (1.7)$$

$$\theta_{,n}(R, \varphi) = g(\varphi) = \sum_{n=1}^{+\infty} \gamma_n \cos n\varphi + \delta_n \sin n\varphi \quad (1.8)$$

Tous calculs faits, l'expression analytique du champ de température en $r = xR, \varphi$ est alors :

$$\begin{aligned} \theta(xR, \varphi) = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} \left[\left(\alpha_n + \frac{R}{n} \gamma_n \right) \cos n\varphi + \left(\beta_n + \frac{R}{n} \delta_n \right) \sin n\varphi \right] x^n \\ + \left[\left(\alpha_n - \frac{R}{n} \gamma_n \right) \cos n\varphi + \left(\beta_n - \frac{R}{n} \delta_n \right) \sin n\varphi \right] x^{-n} \quad (1.9) \end{aligned}$$

On note la présence d'un terme général en $x^{-n} = (r/R)^{-n}$ dans la série ci-dessus. Supposons que le coefficient α_N du développement de la température donnée $f(\varphi)$ dans (1.7) présente une erreur relative ε . L'erreur commise sur θ est alors

$$\Delta\theta = \frac{1}{2} \varepsilon \alpha_N (x^N + x^{-N})$$

L'amplification de l'erreur de mesure est donc de l'ordre de $A = x^N + x^{-N}$. Par exemple :

$$\begin{aligned} x = 0.9 &\rightarrow A = 2.87 (N = 10) & A = 8.23 (N = 20) \\ x = 0.8 &\rightarrow A = 9.31 (N = 10) & A = 86.7 (N = 20) \end{aligned}$$

Les bruits expérimentaux de mode de Fourier élevé sont donc très pénalisants pour ce qui est de la température interne, et ce d'autant plus que la conduite est épaisse.

1.6 Problèmes inverses associés aux vibrations de structures

Il n'est pas rare de pouvoir accéder, sur des structures en service, à des informations sur leur comportement vibratoire : valeurs de fréquences propres ou de déplacements modaux.

Si la structure est parfaitement connue par ailleurs (caractéristiques physiques, géométrie, conditions aux limites), ces données modales peuvent être calculées (sortie) au moyen d'un modèle (continu ou discrétisé, système), et sont donc surabondantes. Réciproquement, ces données modales permettent de compenser un certain degré d'ignorance sur le système. Plus concrètement, on les utilise par exemple pour

- Le recalage du modèle, si celui-ci est suspect. Par exemple, la structure évolue et se dégrade au cours de son fonctionnement, et sa modélisation initiale s'en écarte donc progressivement.
- L'identification de conditions aux limites imparfaitement connues.
- La surveillance, la détection ou la quantification de défauts.

Parmi quelques travaux représentatifs de cette tendance, citons Andriambololona [2], Ben Abdallah [11], Ben-Haïm [12] Ladevèze, Reynier et Nedjar [36], Link [37].

SENSIBILITÉ AUX DONNÉES IMPARFAITES. Considérons un exemple obtenu par simulation numérique, sur les vibrations en flexion plane d'une poutre élastique droite encastree-libre (figure 1.3). Les n_f premières fréquences propres f_i ($1 \leq i \leq n_f$) sont données, ainsi que les valeurs en n_c capteurs des déplacements verticaux modaux u_{ij} ($1 \leq j \leq n_c$) correspondants. Ces données sont utilisées pour la reconstruction de la rigidité de flexion EI et la masse linéique ρ , inconnues et supposées constantes par élément. La poutre est découpée en 26 éléments finis.

Dans notre exemple, 10 modes sont mesurés en 13 capteurs, soit au total 140 données (en comptant les fréquences mesurées). Des données synthétiques ont été créées pour $EI(x) = EI_0$ et $\rho(x) = \rho_0$ uniformes à l'exception de l'élément 16, sur lequel $EI(x) =$

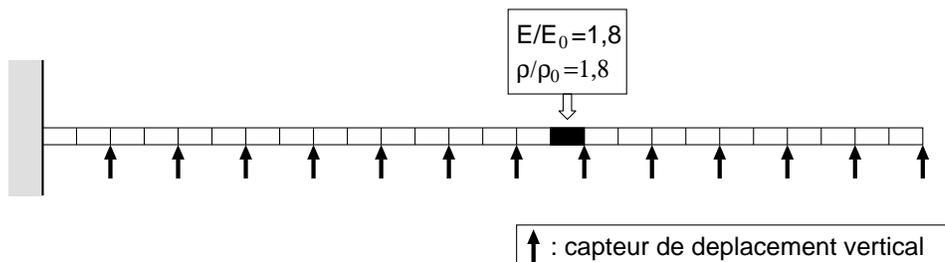


Fig. 1.3: Reconstruction de rigidité et masse linéique d'une poutre élastique : configuration.

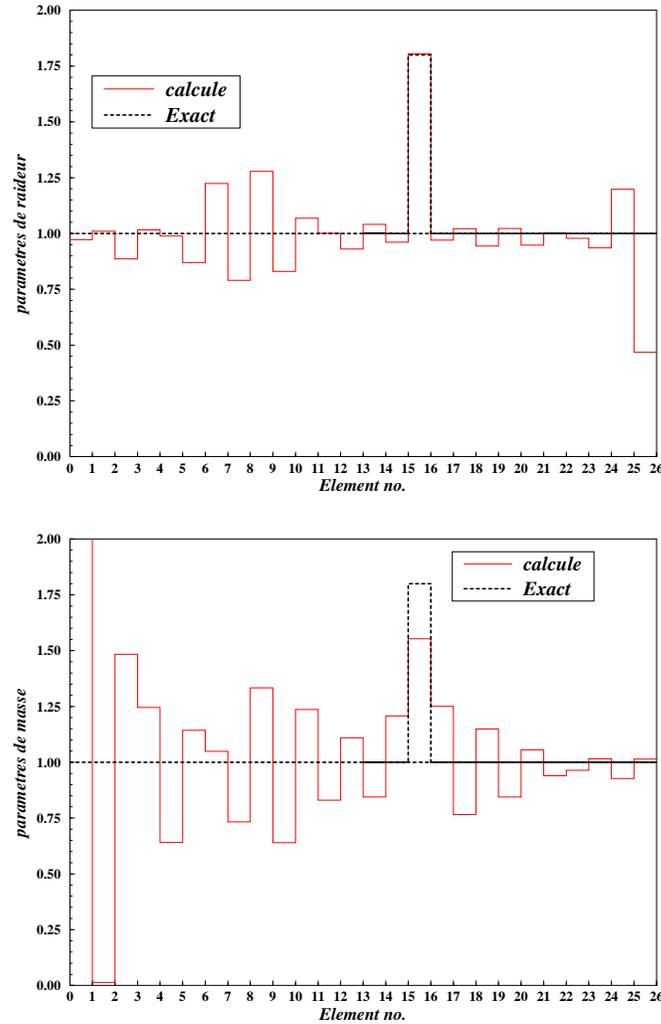


Fig. 1.4: Reconstruction de rigidité et de masse linéique d'une poutre élastique : simulation, avec données exactes et bruitées.

$1,8EI_0$ et $\rho(x) = 1,8\rho_0$. Ces données synthétiques sont alors utilisées pour retrouver la répartition de rigidité et de masse par minimisation d'un écart quadratique

$$\min_{EI, \rho} \sum_{i=1}^{n_f} \left([f_i^{mes} - f_i(EI, \rho)]^2 + \sum_{j=1}^{n_c} [u_{ij}^{mes} - u_{ij}(EI, \rho)]^2 \right)$$

La figure 1.4 montre la reconstruction à partir des données synthétiques soit exactes, soit bruitées par

$$(\text{donnée bruitée}) = (\text{donnée exacte}) \times (1 + r)$$

où r est une variable aléatoire uniforme de moyenne nulle et d'écart-type 10^{-3} . Tandis que l'inversion des données exactes conduit à un résultat parfait, on voit que le bruit, pourtant faible, dégrade violemment la qualité de la reconstruction (notamment en ce qui concerne la masse volumique).

Cette forte dépendance aux données imprécise peut être mathématiquement mise en évidence d'une manière plus générale. Ce type de problème inverse est donc également mal posé.

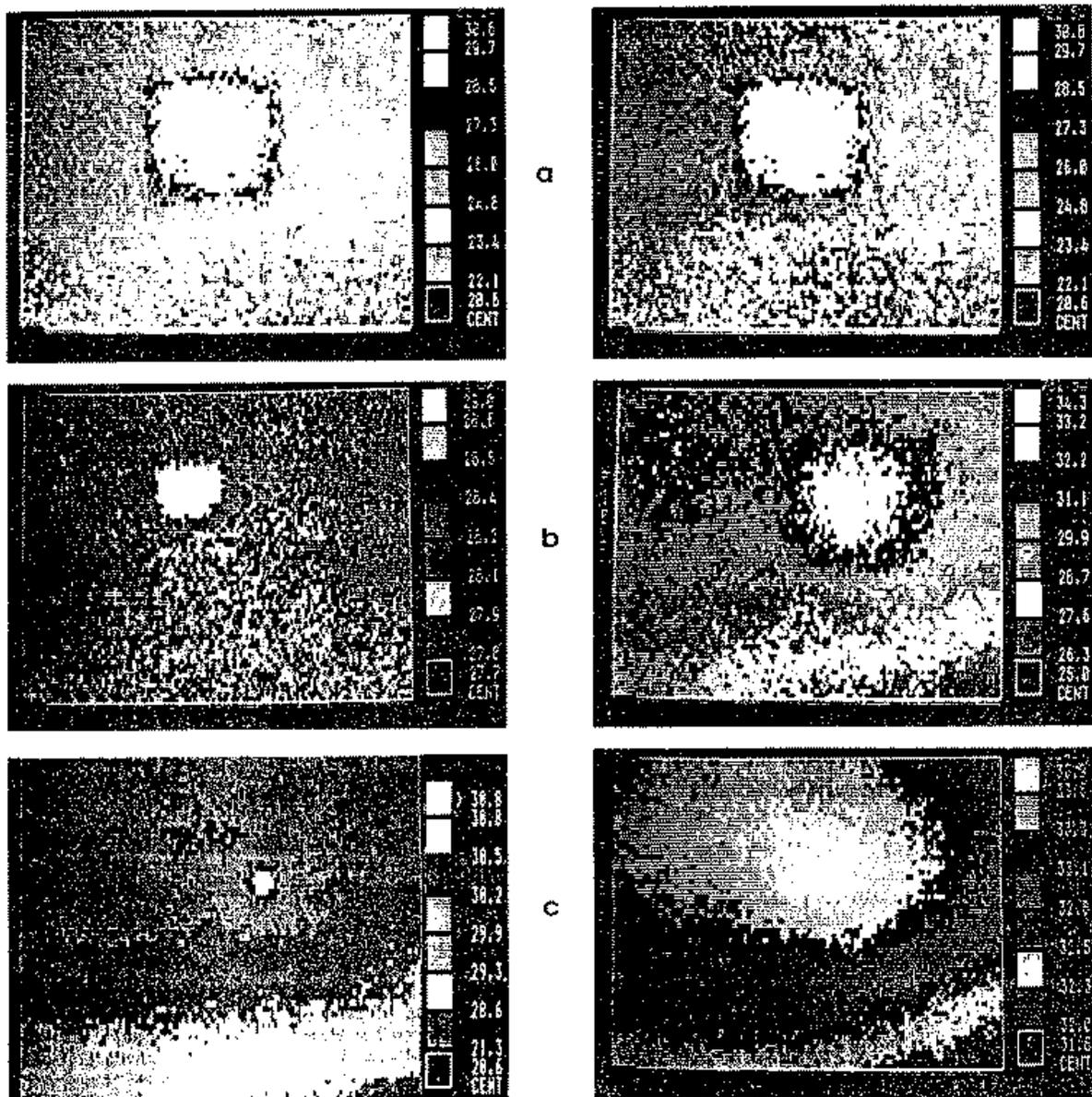


Fig. 1.5: Images thermiques de composites graphite-epoxy contenant des défauts en téflon implantés. A gauche, images traitées, défauts situés à une profondeur de 0.3mm, de dimensions 20×20 mm (a) 10×10 mm (b) et 3×3 mm (c). A droite, images non traitées, défaut de dimensions 20×20 mm situé à une profondeur de 0.3mm (a), 1,12mm (b), 2,25mm (c). D'après Cielo et al. [20].

1.7 Tomographie, imagerie, contrôle non destructif

C'est un domaine très vaste, qui excède largement la mécanique. D'une manière générale, il s'agit de reconstruire une variable interne hétérogène, caractéristique locale du matériau constitutif, à l'aide de données relevées à l'extérieur. En voici quelques exemples :

THERMOGRAPHIE INFRAROUGE. Un flux thermique connu est imposé à un échantillon ; le champ de température en surface est mesuré par caméra infra-rouge (données surabondantes). On cherche à reconstruire le coefficient de conductivité $k(\mathbf{x})$ ou d'autres

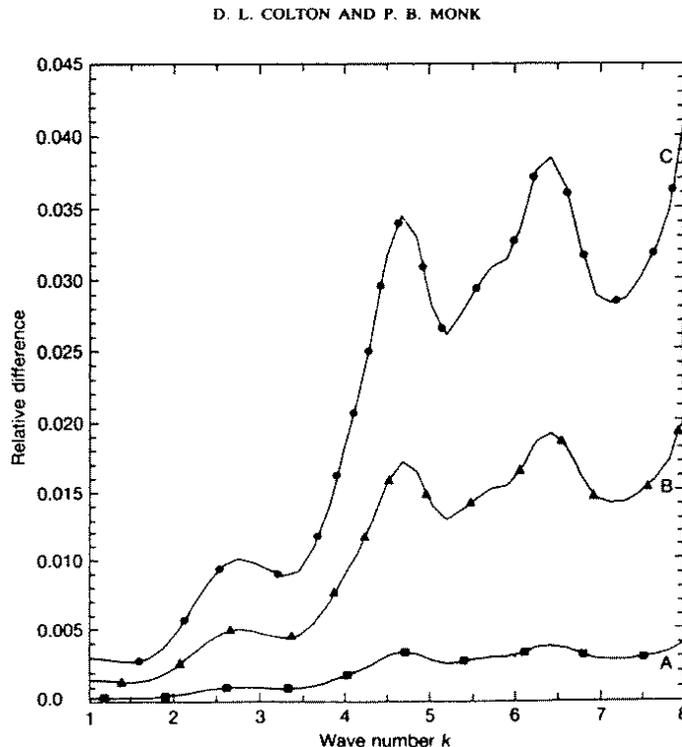


Fig. 1.6: Sensibilité d'un diagramme de rayonnement à une erreur sur la reconstruction d'une inhomogénéité de célérité (d'après Colton et Monk [25]).

paramètres tels que des résistances d'interface. Application : détection et quantification de défauts internes. Quand les défauts sont proches de la surface, l'image du champ de température en surface renseigne sur l'emplacement de défauts (Balageas et coll. [7], Banks et Kojima [9], Bonnet, Maigre, Manaa [15], Cielo et coll. [20], Lund et Vogel [38]).

IMAGERIE ACOUSTIQUE, TOMOGRAPHIE SISMIQUE. Une onde incidente connue est émise. Elle est perturbée par une variation des caractéristiques nominales du milieu (hétérogénéité, présence d'obstacles, de fissures).

Si ces variations sont connues, le calcul de la perturbation subie par l'onde incidente (problème direct) relève de méthodes classiques. Réciproquement, la mesure du signal perturbé fournit des données supplémentaires permettant d'envisager la reconstruction d'une variation inconnue des caractéristiques nominales (problème inverse).

A titre d'exemple, la figure 1.6 (Colton et Monk [25]) montre sur une simulation numérique l'erreur relative en norme L^2 commise sur le diagramme de rayonnement du signal perturbé par la présence d'une inhomogénéité (de support géométrique borné) de la célérité des ondes, en fonction du nombre d'onde adimensionnel k et pour trois valeurs (10%, 50% et 100%) de l'erreur faite sur l'évaluation de cette inhomogénéité. On voit nettement qu'aux basses valeurs de k , le champ lointain (grandeur mesurable) est à peine affecté par des erreurs de reconstruction de 100%.

La tomographie sismique du sous-sol constitue un problème voisin : des sources (naturelles ou provoquées) créent des ondes mécaniques dans le sous-sol. Le signal créé par cette expérience est mesuré en des capteurs, confondus ou non avec les sources (données surabondantes). On cherche à reconstruire la masse volumique $\rho(\mathbf{x})$, les célérités $c_{L,T}(\mathbf{x})$

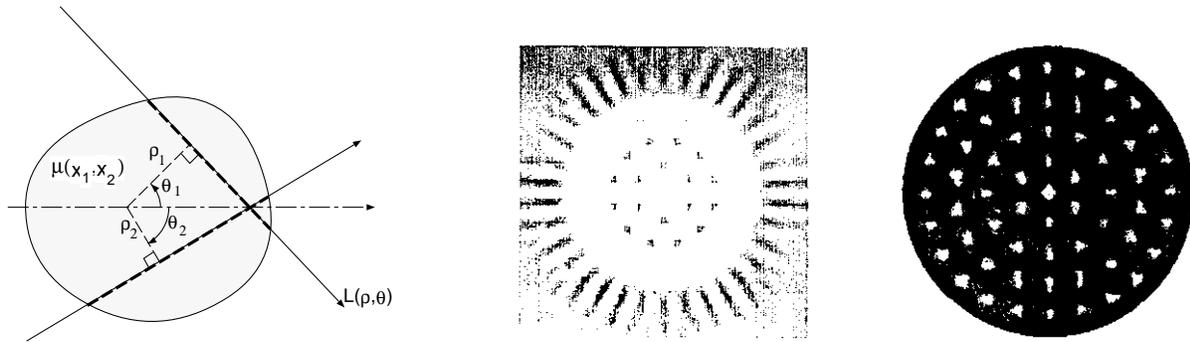


Fig. 1.7: Tomographie par rayons : principe (à gauche); exemple d'inversion de la transformée de Radon sans (milieu) et avec contraintes (à droite), d'après Fauquet et coll. [29]

des ondes élastiques,... L'interprétation de ces résultats fournit des informations sur la nature du sous-sol. Applications : géophysique, prospection ([6], Bamberger, Chavent, Lailly [8], Cote et Lagabrielle [26], [27], [40], [43], Tarantola [45]).

TOMOGRAPHIE ÉLECTROSTATIQUE OU ÉLECTROMAGNÉTIQUE. Il s'agit de reconstruire la conductivité électrique $\sigma(\mathbf{x})$ à partir de données simultanées de couples champ électrique / potentiel (tomographie électrostatique) ou encore de couples champ électrique incident / courants de Foucault. Application : contrôle non destructif et reconstruction de défauts, imagerie. (Allers et Santosa [1], Kohn et McKenney [34], Zorgati et coll. [47], [48]).

TOMOGRAPHIE PAR RAYONS X. L'atténuation totale a (différence entre sortie et entrée) des rayons X à travers un milieu est mesurée; elle dépend d'un coefficient d'absorption local $\mu(\mathbf{x})$ par l'intermédiaire de la transformée de Radon. Celle-ci, dans le plan, est définie par :

$$a(\rho, \theta) = \int_{L(\rho, \theta)} \mu(\mathbf{x}) d\ell$$

où ρ, θ sont deux paramètres géométriques définissant un rayon rectiligne $L(\rho, \theta)$. L'inverse de la transformée de Radon est connu explicitement, de sorte que la connaissance des $a(\rho, \theta)$ permet de reconstruire $\mu(\mathbf{x})$. Toutefois l'inversion est instable par rapport aux erreurs commises sur $a(\rho, \theta)$ (Herman [31]).

1.8 Problèmes inverses avec géométrie inconnue

Il existe d'assez nombreux problèmes dérivés des précédents pour lesquels une composante géométrique du domaine d'étude est inconnue, comme par exemple :

- Identification de fissures internes.
- Reconstruction d'inclusions de caractéristiques connues mais de géométrie inconnue.

Ils sont habituellement associés à des méthodes non destructives : mesure d'une onde diffractée, de grandeurs mécaniques et/ou thermiques en surface externe... Les applications pratiques concernent par exemple les méthodes quantitatives en contrôle non destructif, la détection (Angell et coll. [3], Banks et Kojima [9], Bonnet [14], Colton, Colton et Monk [24, 21, 22, 23], Ding et Planchard [28], Idemen et Akduman [32], Kirsch et Kress [33]).

En raison de la présence d'une frontière comme inconnue principale, l'étude de ce type de problème inverse utilise fréquemment les formulations par équations intégrales de frontière (Bonnet [14], Nishimura et Kobayashi [42], ainsi que les articles contenus dans [17]).

Bibliographie

- [1] ALLERS, A., SANTOSA, F. Stability and resolution analysis of a linearized problem in electrical impedance tomography. *Inverse Problems*, **7** :515–533 (1991).
- [2] ANDRIAMBOLOLONA, H. *Optimisation des essais et recalage de modèles structuraux*. Ph.D. thesis, Université de Besançon, France (1990).
- [3] ANGELL, T. S., KLEINMAN, R. E., KOK, B., ROACH, G. F. A Constructive Method for Identification of an Impenetrable Scatterer. *Wave Motion*, **11** :185–200 (1989).
- [4] AUDEBERT, S. Characterization of the damping effect of a vibrating system. In H. D. Bui M. Tanaka (ed.), *Inverse problems in engineering mechanics*, pp. 327–336. Springer-Verlag (1993).
- [5] AUDOLY, C. Sur l'utilisation de l'holographie acoustique pour les antennes d'émission. Rapport n. 061208, DCN Toulon (1989).
- [6] BACKUS, G., GILBERT, F. Uniqueness in the inversion of inaccurate gross data. *Phil. Trans. Roy. Soc. London*, **266** :123–192 (1970).
- [7] BALAGEAS, D. L., DEOM, A. A., BOSCHER, D. M. Characterization of non destructive testing of carbon-epoxy composites by a pulsed photothermal method. *Materials Evaluation*, **45** :461–465 (1987).
- [8] BAMBERGER, A., CHAVENT, G., LAILLY, P. An optimal control solution of the inverse problem of reflection seismics. In Glowinski R., Lions J. L. (eds.), *Computing methods in applied sciences and engineering*. North Holland (1980).
- [9] BANKS, H. T., KOJIMA, F. Boundary shape identification problems in two-dimensional domains related to thermal testing of materials. *Quart. Appl. Math.*, **47** :273–293 (1989).
- [10] BARCILON, V. Inverse problem for the vibrating beam in the free-clamped configuration. *Phil. Trans. Roy. Soc. London*, **A 304** :211–251 (1982).
- [11] BEN ABDALLAH, J. *Inversion gaussienne appliquée à la correction paramétrique de modèles structuraux*. Ph.D. thesis, Ecole Polytechnique, Paris, France (1995).
- [12] BEN-HAÏM, Y. Identification of certain polynomial nonlinear structures by adaptive selectively-sensitive excitation. *ASME J. Vibr. Acoust.*, **115** :246–255 (1993).
- [13] BONNET, M. A numerical investigation for a source inverse problem in linear acoustics. *J. Acoust.*, **4** :307–334 (1991).
- [14] BONNET, M. BIE and material differentiation applied to the formulation of obstacle inverse problems. *Engng. Anal. with Bound. Elem.*, **15** :121–136 (1995).
- [15] BONNET, M., MAIGRE, H., MANAA, M. Numerical reconstruction of interfacial defects and interface thermal resistances using thermal measurements. In D. Balageas (ed.), *Quantitative Infrared Thermography (QIRT 92)*, pp. 266–271. Editions Européennes Thermique et Industrie (1992). Congrès QIRT 92, 7-9 juillet 1992, Paris).

-
- [16] BORGIOTTI, G. V., SARKISSIAN, A., WILLIAMS, E. G., SCHUETZ, L. Conformal generalized near-field acoustic holography for axisymmetric geometries. *J. Acoust. Soc. Am.*, **84** :385–391 (1988).
- [17] BUI, H. D., BONNET, M. (eds.). *Unknown or variable domains, inverse problems.*, Engng. Anal. with Bound. Elem. **15**(2), 12 articles (1995).
- [18] BUI, H. D., MAIGRE, H. Facteur d'intensité dynamique des contraintes tiré des grandeurs mécaniques globales. *C.R. Acad. Sci. Paris, série II*, **306** :1213–1216 (1988).
- [19] CALDERON, A. P. On an inverse boundary value problem. In *Seminar on Numerical Analysis and its applications to Continuum Physics.*, pp. 65–73. Soc. Brasilian de Matematica, Rio de Janeiro (1980).
- [20] CIELO, P., MALDAGUE, X., DEOM, A. A., LEWAK, R. Thermographic non-destructive evaluation of industrial materials and structures. *Materials Evaluation*, **45** :452–460 (1987).
- [21] COLTON, D. The inverse scattering problem for time-harmonic acoustic waves. *SIAM Review*, **26** :323–350 (1984).
- [22] COLTON, D., MONK, P. A novel method for solving the inverse scattering problem for time-harmonic acoustic waves in the resonance region. *SIAM J. Appl. Math.*, **45** :1039–1053 (1985).
- [23] COLTON, D., MONK, P. A novel method for solving the inverse scattering problem for time-harmonic acoustic waves in the resonance region II. *SIAM J. Appl. Math.*, **46** :506–523 (1986).
- [24] COLTON, D., MONK, P. Projection theorems for far-field patterns and the inverse scattering problem. In I. H. W. Eng, C. W. Groetsch (eds.), *Inverse and ill-posed problems.*, pp. 261–277. Academic Press (1987).
- [25] COLTON, D., MONK, P. The inverse scattering problem for time-harmonic acoustic waves in an inhomogeneous medium : numerical experiments. *IMA J. Appl. Math.*, **42** :77–95 (1989).
- [26] COTE, PH., LAGABRIELLE, R. La tomographie sismique comme méthode de reconnaissance détaillée du sous-sol. *Rev. Franç. Géotech.*, **36** :47–53 (1986).
- [27] CUER, M. *Des questions bien posées dans des problèmes inverses de gravimétrie et géomagnétisme : une nouvelle application de la programmation linéaire.* Ph.D. thesis, USTL Montpellier, France (1984).
- [28] DING, Y., PLANCHARD, J. Méthode d'optimisation non linéaire pour résoudre le problème inverse des ondes acoustiques en régime harmonique diffractées par une surfac rigide en 2D. Note interne hi-70/6586, EDF/DER (1989).
- [29] FAUQUET, PH., SOURYI, A., JOLY-BLANCHARD, G., YVON, J. P. Determination of local void fraction in a two phase flow by gamma densitometry. In M. Tanaka H. D. Bui, et al. (eds.), *Inverse problems in engineering mechanics*, pp. 363–370. A. A. Balkema, Rotterdam (1994). (International Symposium on Inverse Problems, Clamart, 2-4 nov. 1994).
- [30] FRIEDMAN, A., VOGELIUS, M. Determining cracks by boundary measurements. *Indiana University Mathematics Journal*, **38** (1989).
- [31] HERMAN, G. T. *Image reconstruction from projections (the fundamentals of computerized tomography).* Academic Press (1980).

-
- [32] IDEMEN, M., AKDUMAN, I. Some geometrical inverse problems connected with two-dimensional static fields. *SIAM J. Appl. Math.*, **48** :703–718 (1988).
- [33] KIRSCH, A., KRESS, R. A numerical method for an inverse scattering problem. In I H. W. Eng, C. W. Groetsch (eds.), *Inverse and ill-posed problems.*, pp. 279–289. Academic Press (1987).
- [34] KOHN, R., MCKENNEY, A. Numerical implementation of a variational method for electric impedance tomography. *Inverse Problems*, **6** :389–414 (1990).
- [35] KOHN, R., VOGELIUS, M. Determining conductivity by boundary measurements. *Comm Pure Appl. Math.*, **37** :289–298 (1984).
- [36] LADEVEZE, P., REYNIER, M., NEDJAR, D. Parametric correction of finite element models using modal tests. In H. D. Bui M. Tanaka (ed.), *Inverse problems in engineering mechanics*, pp. 91–100. Springer-Verlag (1993).
- [37] LINK, M. Requirements for the structure of analytical models used for parameter identification. In H. D. Bui M. Tanaka (ed.), *Inverse problems in engineering mechanics*, pp. 133–146. Springer-Verlag (1993).
- [38] LUND, J., VOGEL, C. R. A fully-Galerkin approach for the numerical solution of an inverse problem in a parabolic partial differential equation. *Inverse Problems*, **6** :205–217 (1990).
- [39] LUZZATO, E. Méthodes de reconstruction des structures en vibration : problèmes monodimensionnels. Note interne hp-62/90. 056, EDF/DER (1990).
- [40] MENKE, W. *Geophysical data analysis : discrete inverse theory*. Academic Press (1984).
- [41] NASHED, Z. Approximate regularized solutions to improperly posed linear integral and operator equations. In A. Dold, B. Eckmann (eds.), *Constructive and computational methods for differential and integral equations*. Springer-Verlag (1974).
- [42] NISHIMURA, N., KOBAYASHI, S. A boundary integral equation method for an inverse problem related to crack detection. *Int. J. Num. Meth. in Eng.*, **32** :1371–1387 (1991).
- [43] SABATIER, P. C. Problèmes inverses et applications. Ecole d’été d’analyse numérique, CEA/INRIA/EDF (1985).
- [44] SABATIER, P. C. A few geometrical features of inverse and ill-posed problems. In I H. W. Eng, C. W. Groetsch (eds.), *Inverse and ill-posed problems.*. Academic Press (1987).
- [45] TARANTOLA, A. *Inverse problem theory*. Elsevier (1987).
- [46] TIKHONOV, A. N., ARSENIN, V. Y. *Solutions to ill-posed problems*. Winston-Wiley, New York (1977).
- [47] ZORGATI, R., DUCHENE, B., LESSELIER, D., PONS, F. Eddy currents testing of anomalies in conductive materials, part I : qualitative imaging via diffraction tomography techniques. *IEEE Trans. on Magn.*, **27** :4416–4437 (1991).
- [48] ZORGATI, R., DUCHENE, B., LESSELIER, D., PONS, F. Eddy currents testing of anomalies in conductive materials, part II : quantitative imaging via deterministic and stochastic inversion techniques. *IEEE Trans. on Magn.*, **28** :1850–1862 (1991).

Chapitre 2

Problèmes mal posés

Sommaire

2.1	Exemples de problèmes mal posés	22
2.2	Analyse en dimension finie	25
2.2.1	Décomposition en valeurs singulières de \mathbf{G}	26
2.2.2	Analyse du problème inverse discret (2.18)	26
2.2.3	Notion d'inverse généralisé	27
2.2.4	Conditionnement et régularisation	28
2.3	La dimension infinie	31
2.3.1	G est un opérateur compact	32
2.3.2	Cas général	35
	Bibliographie	35

2.1 Exemples de problèmes mal posés

Les exemples qui suivent sont des problèmes « mal posés » bien connus. Le but de cette partie est uniquement de mettre en évidence le caractère mal posé de certains problèmes, c'est pourquoi l'indication d'approches adaptées de résolution est renvoyée au chapitre 3. Toutefois certains de ces exemples seront repris plus loin.

EQUATION INTÉGRALE DE PREMIÈRE ESPÈCE. Pour des fonctions $k(x, y) \in L^2([c, d] \times [a, b])$ et $f \in L^2([c, d])$, on peut considérer l'équation intégrale de première espèce associée au noyau $k(x, y)$ et à la donnée f :

$$\text{trouver } \phi \in L^2([a, b]) \text{ telle que, pour tout } x \in [c, d] \\ \int_a^b k(x, y)\phi(y) dy \equiv (K\phi)(x) = f(x) \quad (2.1)$$

L'équation (2.1) n'a pas toujours de solution. En effet, supposons $k(x, y)$ continûment dérivable par rapport à x sur $[c, d]$; alors le premier membre de (2.1) est continûment dérivable par rapport à x quel que soit $\phi \in L^2([a, b])$ en raison du théorème de dérivation sous le signe intégral. Par suite (2.1) n'a aucune solution si le second membre f n'est pas dérivable sur $[c, d]$.

Plaçons-nous dans le cas le plus favorable où (2.1) admet une solution unique ψ (on sait formuler des conditions nécessaires et suffisantes sur le noyau $k(x, y)$ et le second membre f pour l'existence et l'unicité de la solution, voir partie 2.3). Considérons alors une perturbation de ψ de la forme :

$$\hat{\psi}(y) = \psi(y) + A \sin \omega y \quad (2.2)$$

On a alors d'une part :

$$\| \psi - \hat{\psi} \|_{L^2([a, b])}^2 = \int_a^b A^2 \sin^2 \omega y dy = \frac{1}{2} A^2 (b - a) \quad (2.3)$$

et d'autre part :

$$\| f - K\hat{\psi} \|_{L^2([c, d])}^2 = \| K\psi - K\hat{\psi} \|_{L^2([c, d])}^2 = \int_c^d \left[\int_a^b k(x, y) A \sin \omega y dy \right]^2 dx \quad (2.4)$$

Or, par le lemme de Riemann-Lebesgue, on a (sous réserve que k soit continu par rapport à y) :

$$(\forall x) \quad \lim_{\omega \rightarrow \infty} \left| \int_a^b k(x, y) A \sin \omega y dy \right| = 0 \quad (2.5)$$

Cela permet, en choisissant ω suffisamment grand, de rendre la norme (2.4) aussi petite que l'on veut, quelle que soit la valeur (fixée au départ) de A . Cette remarque jointe à (2.3) revient à constater que l'on peut trouver une perturbation *de norme finie et arbitraire* de la solution ψ qui induit une perturbation *aussi petite que l'on voudra* sur la donnée f . En d'autres termes, la solution de (2.1), quand elle existe, ne dépend pas continûment du second membre f ; une « petite » erreur sur celui-ci (construit à partir de données expérimentales) peut mener à une « grande » erreur sur la reconstitution de la fonction inconnue ψ . Le problème (2.1) est donc mal posé à deux titres :

1. Il n'admet pas nécessairement de solution.
2. Il n'est pas stable vis-à-vis de petites erreurs sur les données.

Cet exemple est fondamental. De nombreux problèmes inverses, issus de domaines variés de la physique, se ramènent à une équation intégrale de première espèce.

Les ouvrages classiques de physique mathématique (Courant & Hilbert [2], ...) traitent peu l'équation de première espèce. Celle-ci a probablement été jugée pendant longtemps sans intérêt. D'une part, ses « mauvaises » propriétés sont connues depuis le début du siècle. D'autre part, les problèmes directs de la physique mathématique peuvent en général être décrits par des équations intégrales de deuxième espèce, qui sont stables par rapport aux données (Tricomi [16], Kupradze [4], [5], Mikhlin [8]). Pour mémoire, rappelons qu'une équation intégrale de deuxième espèce diffère de (2.1) par l'ajout d'un « terme libre » et a la forme :

$$\text{trouver } \phi \in L^2([a, b]) \text{ telle que, pour tout } x \in [a, b]$$

$$\phi(x) + \int_a^b k(x, y)\phi(y) dy = f(x) \quad f \in L^2([a, b]) \text{ donnée} \quad (2.6)$$

Le problème (2.1) est l'archétype du problème inverse en dimension infinie ; Tikhonov l'utilise [15] pour introduire la notion de problème mal posé.

APPROXIMATION DE LA DÉRIVÉE D'UNE FONCTION CONNUE APPROXIMATIVEMENT. Le problème de la recherche de la dérivée $z(x)$ d'ordre n d'une fonction $f(x)$ définie sur $[0, 1]$ (ie $f^{(n)} = z$) se ramène [15] à la résolution de l'équation intégrale :

$$f(x) = \frac{1}{(n-1)!} \int_0^x (x-t)^{(n-1)} z(t) dt \quad (0 \leq t \leq 1) \quad (2.7)$$

en supposant pour simplifier que $f(0) = f'(0) = \dots = f^{(n-1)}(0) = 0$. Cette équation intégrale, dite de Volterra de première espèce, diffère de (2.1) par la présence de la variable x comme borne d'intégration. Ce type d'équation intégrale présente un caractère mal posé analogue à (2.1) (voir par exemple Tricomi [16]). Cela signifie ici encore que si $f(x)$ n'est pas connue exactement (ou encore si on n'en connaît qu'un nombre fini de valeurs), $f^{(n)}(x) = z(x)$ peut être entachée d'une erreur arbitrairement grande. Il est du reste bien connu que la « dérivation numérique » est une opération instable. Posons comme en (2.2) :

$$\hat{f}(x) = f(x) + \varepsilon \sin \omega x \quad (2.8)$$

d'où

$$\frac{d}{dx} \hat{f}(x) = \frac{d}{dx} f(x) + \varepsilon \omega \cos \omega x \quad (2.9)$$

ce qui conduit à :

$$\| \hat{f} - f \|_{L^2([0,1])}^2 = \frac{1}{2} \varepsilon^2 \quad (2.10)$$

$$\| \frac{d}{dx} \hat{f} - \frac{d}{dx} f \|_{L^2([0,1])}^2 = \frac{1}{2} \varepsilon^2 \omega^2 \quad (2.11)$$

Si la « fréquence » ω du « bruit » $\varepsilon \sin \omega x$ est élevée, l'erreur en norme quadratique peut être rendue arbitrairement grande pour une amplitude de perturbation ε aussi petite que l'on veut sur la fonction donnée f .

PROBLÈME DE CAUCHY POUR L'ÉQUATION DE LAPLACE. On considère le problème de la recherche d'une fonction à deux variables $\phi(x, y)$ définie sur $\Omega = \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ et vérifiant :

$$\begin{cases} \Delta\phi \equiv \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \phi = 0 \\ \phi(0, y) = f(y) \\ \frac{\partial\phi}{\partial x}(0, y) = g(y) \end{cases} \quad \begin{matrix} (y \in \mathbb{R}) \\ (y \in \mathbb{R}) \end{matrix} \quad (2.12)$$

Ce problème aux limites n'est pas « bien posé » car une partie de la frontière de Ω (la droite $x = 0$) supporte deux conditions aux limites tandis que l'autre ($x = \infty$) n'en supporte aucune. Si les données aux limites sont nulles ($f(y) = g(y) = 0$), la solution de (2.12) est $\phi(x, y) = 0$. Cherchons maintenant la fonction $\hat{\phi}(x, y)$ solution de (2.12) avec les données perturbées $\hat{f}(y) = 0$ et $\hat{g}(y) = 1/a \sin ay$ ($a \geq 0$ fixé). Il est facile de montrer, par séparation de variables, que

$$\hat{\phi}(x, y) = \frac{1}{a^2} \sin ay \operatorname{sh} ax \quad (2.13)$$

convient. Or, pour a « grand », la perturbation $\hat{g} - g$ est d'amplitude « petite » tandis que la perturbation $\hat{\phi} - \phi$ prend des valeurs arbitrairement élevées pour tout $x > 0$: en effet,

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \frac{1}{a} \operatorname{sh} ax = \infty \quad \text{pour tout } x > 0 \text{ fixé} \quad (2.14)$$

Le problème (2.12), dit « de Cauchy » (problème du second ordre où une partie de la frontière supporte *deux* conditions aux limites et une autre en supporte *zéro*) est donc instable par rapport aux perturbations de conditions aux limites, alors que les problèmes aux limites classiques (conditions de Dirichlet, Neumann, Robin, . . .) sont stables.

Un problème voisin, mal posé lui aussi, est celui du prolongement analytique d'une fonction connue sur une partie de son domaine (voir par exemple Lavrentiev [7]).

PROBLÈME RÉTROGRADE POUR L'ÉQUATION DE LA CHALEUR. Imaginons une expérience de thermique : un corps Ω de conductivité thermique k est chauffé (peu importe comment). Nous connaissons les conditions aux limites à tout instant. De plus, à un certain instant $T > 0$, on mesure le champ de température $\theta(\mathbf{x}, T)$ qui règne dans Ω . Peut-on retrouver le champ de température initial $\theta(\mathbf{x}, t = 0)$?

Ce problème revient à résoudre l'équation de la chaleur :

$$\frac{\partial\theta}{\partial t} - \operatorname{div}(k\nabla\theta) = 0 \quad + \text{(conditions aux limites)} \quad (2.15)$$

dans le sens *rétrograde* (en donnant, outre les conditions aux limites, des conditions finales). Or, si le problème d'évolution direct ((2.15) + conditions aux limites + conditions initiales) est stable, sa contrepartie rétrograde est instable [6], [15] : une petite erreur sur la mesure de $\theta(\mathbf{x}, T)$ peut entraîner une grande erreur sur la reconstruction de $\theta(\mathbf{x}, 0)$.

Pour s'en convaincre, plaçons-nous dans le cas le plus simple : $\Omega = \mathbb{R}$ et $k(\mathbf{x}) =$ (constante) et considérons le problème d'évolution associé :

$$\frac{\partial\theta}{\partial t} - k \frac{\partial^2\theta}{\partial x^2} = 0 \quad \begin{cases} \theta(\mathbf{x}, 0) = \theta_0(\mathbf{x}) & \text{(condition initiale)} \\ \theta(\mathbf{x}, t) \xrightarrow{x \rightarrow \pm\infty} 0 & \text{(conditions à l'infini)} \end{cases} \quad (2.16)$$

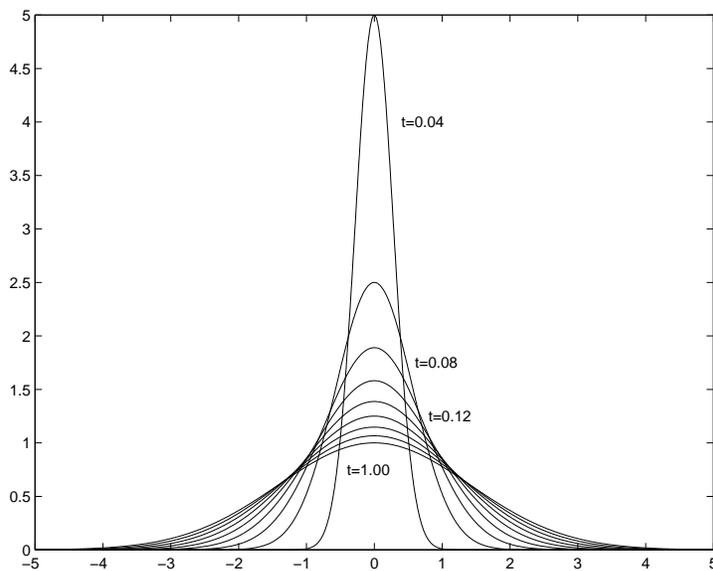


Fig. 2.1: Evolution, directe et rétrograde, à partir d'une singularité initiale.

Prenant la transformée de Fourier en espace de (2.16), on obtient sans difficulté l'expression générale de θ solution de (2.16) sous réserve que la transformée de Fourier en espace $\hat{\theta}_0(\omega)$ de $\theta_0(\mathbf{x})$ ait un sens :

$$\theta(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{-\omega^2 kt} e^{i\omega t} \hat{\theta}_0(\omega) d\omega \quad (2.17)$$

L'intégrale ci-dessus n'a de sens que pour t positif et diverge pour t négatif, d'où l'impossibilité de résoudre (2.16) « en remontant le temps ». Cet exemple se généralise à (2.15) [6].

D'une manière plus qualitative, on peut aussi considérer la solution élémentaire bien connue de l'équation de la chaleur, où une singularité initiale ($\theta_0(\mathbf{x}) = \delta(\mathbf{x})$) se diffuse au fil du temps, le champ de température à l'instant t étant une gaussienne (figure 2.1). Réciproquement, connaissant la solution élémentaire à un instant T , il est impossible de « remonter » à un instant négatif, en-deçà de la singularité initiale : on ne sait pas donner de sens aux événements antérieurs à cette singularité. Si, se trompant sur la date de la condition initiale, on la cherche à un instant $t_0 < 0$, on ne peut aboutir.

Remarquons que ce phénomène de « dilution » d'une singularité initiale est lié au caractère *parabolique* de l'équation d'évolution thermique. Dans le cas des équations d'évolution hyperboliques (équation des ondes, ...), les singularités se *propagent* et leur nature se conserve au cours du temps.

2.2 Analyse en dimension finie

Avant d'examiner les problèmes inverses dans leur généralité, nous commençons par le cas, fréquent en pratique, où le problème direct est linéaire. Ceci permettra de mieux appréhender le caractère « mal posé » et l'effet des approches « régularisantes » ; Par ailleurs, de nombreux problèmes inverses non linéaires sont résolus par linéarisations successives.

Considérons donc deux espaces de Hilbert \mathcal{P} (espace des paramètres) et \mathcal{D} (espace des données mesurables) munis de leurs produits scalaires $(\cdot, \cdot)_{\mathcal{P}}$ et $(\cdot, \cdot)_{\mathcal{D}}$. Le problème direct

considéré est modélisé à l'aide d'un opérateur $G : M \rightarrow \mathcal{D}$ linéaire continu. Le problème inverse associé est posé ainsi :

$$\text{Trouver } \mathbf{p} \in \mathcal{P} \text{ tel que } \quad \mathbf{G}\mathbf{p} = \mathbf{d} \quad (\mathbf{d} \in \mathcal{D} \text{ donné}) \quad (2.18)$$

Nous reprenons ici l'analyse « classique » du problème inverse linéaire exposée par exemple par Nashed [9], Groetsch [3] ou Sabatier [12], en considérant successivement les cas de la dimension finie puis de la dimension infinie.

On prend $\mathcal{P} = \mathbb{C}^n$ et $\mathcal{D} = \mathbb{C}^m$ pour (m, n) entiers quelconques. L'opérateur \mathbf{G} s'exprime à l'aide d'une matrice $m \times n$ à coefficients complexes $[g_{ij}]$; la matrice $n \times m$ de l'opérateur adjoint \mathbf{G}^* est obtenue par transposition et conjugaison de \mathbf{G} : $g_{ij}^* = \bar{g}_{ji}$. L'analyse du problème inverse (2.18) utilise la *décomposition en valeurs singulières* d'une matrice, que nous commençons par rappeler.

2.2.1 Décomposition en valeurs singulières de \mathbf{G} .

Les opérateurs $\mathbf{G}^*\mathbf{G}$ et $\mathbf{G}\mathbf{G}^*$ sont autoadjoints, carrés d'ordre n et m respectivement. Ils admettent des valeurs propres réelles non-négatives. De plus, ils ont même rang $r \leq \inf(m, n)$ et possèdent les mêmes valeurs propres non nulles, au nombre de r (multiplicités comprises). Cela permet de démontrer qu'il existe :

1. r réels $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_r > 0$ strictement positifs (conventionnellement classés dans l'ordre décroissant, et en comptant d'éventuelles multiplicités).
2. n vecteurs orthonormés $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n) \in \mathcal{P}^n$, qui constituent les colonnes d'une matrice carrée orthogonale \mathbf{V} et forment une suite orthonormée complète de vecteurs propres de la matrice $\mathbf{G}^*\mathbf{G}$ (carrée, hermitienne, de dimension $n \times n$) associés aux n valeurs propres λ_i^2 (nulles pour $i > r$).
3. m vecteurs orthonormés $(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_m) \in \mathcal{D}^m$, qui constituent les colonnes d'une matrice carrée orthogonale \mathbf{U} et forment une suite orthonormée complète de vecteurs propres de la matrice $\mathbf{G}\mathbf{G}^*$ (carrée, hermitienne, de dimension $m \times m$) associés aux m valeurs propres λ_i^2 (nulles pour $i > r$)

vérifiant :

$$\begin{aligned} \mathbf{G}\mathbf{v}_i &= \lambda_i \mathbf{u}_i & \mathbf{G}^*\mathbf{u}_i &= \lambda_i \mathbf{v}_i \\ \mathbf{G}^*\mathbf{G}\mathbf{v}_i &= \lambda_i^2 \mathbf{v}_i & \mathbf{G}\mathbf{G}^*\mathbf{u}_i &= \lambda_i^2 \mathbf{u}_i \end{aligned} \quad (2.19)$$

Dans (2.19) λ_i est prise égale à zéro pour $i > r$. La matrice \mathbf{G} admet alors la *décomposition en valeurs singulières* suivante :

$$\mathbf{G} = \mathbf{U}\mathbf{\Lambda}\mathbf{V}^* \quad (2.20)$$

La matrice $\mathbf{\Lambda}$, de dimensions $m \times n$, contient les *valeurs singulières* λ_i : $\Lambda_{ii} = \lambda_i$ pour $1 \leq i \leq r$ et $\Lambda_{ij} = 0$ sinon.

2.2.2 Analyse du problème inverse discret (2.18)

On réécrit (2.18) compte tenu de la décomposition (2.20). Après multiplication à gauche par \mathbf{U}^* , on obtient :

$$\mathbf{\Lambda}\mathbf{V}^*\mathbf{p} = \mathbf{U}^*\mathbf{d} \quad (2.21)$$

soit

$$\mathbf{\Lambda}\mathbf{x} = \mathbf{y} \quad \text{en posant } \mathbf{x} = \mathbf{V}^*\mathbf{p}; \mathbf{y} = \mathbf{U}^*\mathbf{d} \quad (2.22)$$

(\mathbf{x} et \mathbf{y} sont donc le n -vecteur des composantes de \mathbf{p} dans la base \mathbf{V} et le m -vecteur des composantes de \mathbf{d} dans la base \mathbf{U} , respectivement). L'écriture (2.22) du problème met en évidence les principales caractéristiques de l'opérateur \mathbf{G} :

- Noyau : $\text{Ker}(\mathbf{G}) = \text{Vect}_{\mathcal{P}}(\mathbf{v}_{r+1}, \dots, \mathbf{v}_n)$.
- Image : $\text{Im}(\mathbf{G}) = \text{Vect}_{\mathcal{D}}(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_r)$.

L'existence d'une solution (au sens strict du terme) pour (2.18) nécessite l'appartenance de \mathbf{d} à $\text{Im}(\mathbf{G})$. Cela se traduit par :

$$(\mathbf{d}, \mathbf{u}_i)_{\mathcal{D}} = 0 \quad \forall i > r \quad (2.23)$$

L'unicité de la solution, si celle-ci existe, équivaut à $\text{Ker}(\mathbf{G}) = \{\mathbf{0}_{\mathcal{P}}\}$, ou encore $r = n$. Ceci n'est possible que pour $m \geq n$. En l'absence de solution (condition (2.23) non satisfaite), il faut se limiter à la recherche des solutions de (2.18) au sens des moindres carrés, dites *quasi-solutions* de (2.18), qui sont définies par :

$$\min_{\mathbf{p} \in \mathcal{P}} \|\mathbf{G}\mathbf{p} - \mathbf{d}\|_{\mathcal{D}}^2 \quad (2.24)$$

ce qui revient à chercher la ou les solutions d'un problème de type (2.18) dont le second membre est la projection orthogonale de \mathbf{d} sur $\text{Im}(\mathbf{G})$. Ces quasi-solutions sont données par :

$$\mathbf{p} = \sum_{i=1}^r \frac{y_i}{\lambda_i} \mathbf{v}_i + \sum_{i=r+1}^n \alpha_i \mathbf{v}_i \quad (2.25)$$

où les α_i sont des scalaires arbitraires.

Quand le rang de \mathbf{G} est inférieur à n (ce qui est toujours vrai si le nombre de mesures m est inférieur à n et parfois vrai sinon) on obtient ainsi une infinité de quasi-solutions. D'où l'idée de choisir « la meilleure » de ces quasi-solutions en se donnant un critère : par exemple on choisit la quasi-solution la plus proche d'une certaine « référence » $\mathbf{p}_0 \in \mathcal{P}$ en cherchant :

$$\min_{(\alpha_{(r+1)}, \dots, \alpha_m)} \sum_{i=1}^r \left[\frac{y_i}{\lambda_i} - (\mathbf{p}_0, \mathbf{v}_i)_{\mathcal{P}} \right]^2 + \sum_{i=r+1}^n [\alpha_i - (\mathbf{p}_0, \mathbf{v}_i)_{\mathcal{P}}]^2 \quad (2.26)$$

Ce qui conduit à retenir la quasi-solution définie par $\alpha_i = (\mathbf{p}_0, \mathbf{v}_i)_{\mathcal{P}}$; son écart à la « référence » \mathbf{p}_0 étant donné par le premier terme de (2.26). En d'autres termes, la quasi-solution particulière définie par (2.26) est la *projection orthogonale de \mathbf{p}_0 sur le sous-espace de toutes les quasi-solutions*.

2.2.3 Notion d'inverse généralisé

L'approche de (2.18) par moindres carrés (relations (2.24), (2.25) et (2.26) peut être exprimée en terme d'inverse généralisé d'un opérateur linéaire. Une matrice \mathbf{G}^+ rectangulaire $n \times m$ est un inverse généralisé de la matrice rectangulaire $n \times m$ \mathbf{G} si, quel que soit \mathbf{d} pris dans l'image de \mathbf{G} , $\mathbf{p} = \mathbf{G}^+ \mathbf{d}$ est solution de $\mathbf{G}\mathbf{p} = \mathbf{d}$. Une matrice \mathbf{G} fixée admet en général une infinité d'inverses généralisés. Ils doivent tous satisfaire la condition nécessaire et suffisante :

$$\mathbf{G}^+ \text{ est un inverse généralisé pour } \mathbf{G} \text{ si et seulement si } \mathbf{G}\mathbf{G}^+\mathbf{G} = \mathbf{G} \quad (2.27)$$

Si \mathbf{G} est une matrice carrée de rang maximal, son inverse généralisé est unique et est confondu avec son inverse : $\mathbf{G}^+ = \mathbf{G}^{-1}$.

Nous avons vu que, de par sa définition même, un inverse généralisé associe à tout second membre \mathbf{d} de l'image de \mathbf{G} une solution (au sens strict) au problème (2.18). Mais choisissons maintenant un vecteur \mathbf{d} qui n'appartienne pas à l'image de \mathbf{G} . Dans ce cas, le vecteur $\mathbf{p} = \mathbf{G}^+ \mathbf{d}$ est une *quasi-solution* du problème (2.18). Ceci explique pleinement pourquoi \mathbf{G}^+ est bien un inverse généralisé : pour n'importe quelle matrice \mathbf{G} et appliqué à n'importe quel second membre \mathbf{d} , il conduit à l'une des quasi solutions. Ceci est directement lié au fait, exprimé par exemple par (2.25), que *toute équation linéaire du type (2.18) en dimension finie possède au moins une solution au sens des moindres carrés*. On va voir que ce n'est plus nécessairement vrai en dimension infinie.

On a vu qu'il existe en général une infinité d'inverses généralisés pour une matrice \mathbf{G} donnée. Il y a en fait autant d'inverses généralisés que de solutions au sens des moindres carrés ; chacun d'entre eux correspond à un choix des valeurs des paramètres $\alpha_{r+1}, \dots, \alpha_m$ dans (2.25). Parmi ceux-ci, on considère souvent dans la littérature l'inverse dit « naturel » ou « de Moore-Penrose », noté \mathbf{G}_{MP}^+ et défini par :

$$\mathbf{G}\mathbf{G}_{MP}^+ = \mathbf{P}_{\text{Im}(\mathbf{G})} \quad \mathbf{G}^+\mathbf{G}_{MP} = \mathbf{P}_{\text{Im}(\mathbf{G}^*)} \quad (2.28)$$

\mathbf{P}_X étant la projection orthogonale sur le sous-espace X . L'inverse de Moore-Penrose peut être explicité à l'aide des notations du 2.2.2. Pour ce faire, on introduit les matrices \mathbf{U}_r et \mathbf{V}_r formées des r premières colonnes de \mathbf{U} et \mathbf{V} respectivement : ces matrices, non carrées, sont cependant « semiorthogonales » :

$$\mathbf{U}_r^* \mathbf{U}_r = \mathbf{V}_r^* \mathbf{V}_r = \mathbf{I}_r \quad (2.29)$$

D'autre part, soit $\mathbf{\Lambda}_r$ la matrice carrée diagonale d'ordre r formée des r premières lignes et colonnes de $\mathbf{\Lambda}$. On montre que l'inverse de Moore-Penrose \mathbf{G}_{MP}^+ de \mathbf{G} est donné par :

$$\mathbf{G}_{MP}^+ = \mathbf{V}_r \mathbf{\Lambda}_r^{-1} \mathbf{U}_r^* \quad (2.30)$$

Il est facile de voir que l'inverse de Moore-Penrose conduit à la quasi solution de norme minimale, c'est-à-dire celle qui correspond à $\alpha_{r+1} = \dots = \alpha_m = 0$ dans (2.25) et à la « valeur de référence » $\mathbf{p}_0 = \mathbf{0}$ dans (2.26).

2.2.4 Conditionnement et régularisation

Pour l'instant, nous ne nous sommes intéressés aux (quasi)-solutions du problème inverse linéaire discret (2.18) que dans l'hypothèse (implicite) d'un second membre \mathbf{d} connu exactement. Le problème peut alors être mal posé pour les raisons suivantes :

- La solution (au sens strict du terme) peut ne pas exister.
- Il peut exister une infinité de (quasi)-solutions, parmi lesquelles il faut exercer un choix.

Le choix d'un inverse généralisé constitue une « régularisation » du problème inverse à second membre exact : il conduit à une quasi-solution unique et repose sur un *critère de sélection* (quasi-solution de norme minimale, ou encore la plus proche d'une valeur de référence, etc). Ce dernier fait est caractéristique des approches de « régularisation » dont la définition rigoureuse est reportée à la partie 3.

L'hypothèse d'une connaissance exacte des données \mathbf{d} n'est pas réaliste pour beaucoup de raisons (erreurs expérimentales, modélisation imparfaite, ...). L'étude du problème

inverse linéaire serait donc incomplète sans l'examen de la stabilité des (quasi)-solutions vis-à-vis de perturbations du second membre, qui est l'objet du présent paragraphe.

Pour commencer, plaçons-nous dans le cas le plus favorable $m = n = r$: la matrice \mathbf{G} est carrée et inversible, la solution unique de (2.18) est :

$$\mathbf{p} = \sum_{i=1}^r \frac{y_i}{\lambda_i} \mathbf{v}_i \quad (2.31)$$

Supposons que le second membre \mathbf{d} de (2.18) est en réalité égal à $\mathbf{d} + \delta\mathbf{d}$, avec $|\delta\mathbf{d}|_{\mathcal{D}} \leq \varepsilon$ (ε fixé > 0). La matrice \mathbf{U}^* étant orthogonale, on a également $|\delta\mathbf{y}| = |\mathbf{U}^*\delta\mathbf{d}|_{\mathcal{D}} \leq \varepsilon$, cette erreur pouvant porter sur n'importe quelle(s) composante(s). Dans le cas où

$$\delta\mathbf{y} = \mathbf{U}^*\delta\mathbf{d} = \varepsilon\mathbf{v}_k \quad k \text{ fixé } \in [0, n] \quad (2.32)$$

la variation $\delta\mathbf{p}$ de la solution \mathbf{p} est alors :

$$\delta\mathbf{p} = \frac{\varepsilon}{\lambda_k} \mathbf{v}_k \quad (2.33)$$

soit une variation relative :

$$\frac{\|\delta\mathbf{x}\|_{\mathcal{P}}}{\|\delta\mathbf{y}\|_{\mathcal{D}}} = \frac{1}{\lambda_k} \quad (2.34)$$

Il résulte de ceci qu'une erreur sur y_n crée une perturbation λ_1/λ_n fois plus grande qu'une erreur sur y_1 . Le rapport λ_1/λ_n est le *conditionnement* de \mathbf{G} , noté $\text{cond}(\mathbf{G})$; une grande valeur de $\text{cond}(\mathbf{G})$ est l'indice d'une grande sensibilité du problème aux perturbations possibles des données. En particulier, si $\text{cond}(\mathbf{G})$ est de l'ordre de N , le résultat pratique de l'inversion n'a plus de valeur si l'ordre de grandeur de l'erreur commise sur le second membre n'est pas nettement inférieur à $1/N$. On s'est pourtant placé dans le cas favorable ($m = n = r$) où l'inverse \mathbf{G}^{-1} existe et est continu.

Dans le cas général (matrice \mathbf{G} rectangulaire quelconque), on est confronté à un problème double :

- Définir une solution approchée à (2.18), stable par rapport aux erreurs sur \mathbf{d} .
- Faire en sorte que le conditionnement de la méthode d'inversion retenue ait une valeur inférieure à $\text{cond}(\mathbf{G}) = \lambda_1/\lambda_n$.

Pour cela, il faut « régulariser » l'inversion du problème. Dans le cas linéaire, deux approches au moins peuvent être envisagées :

QUASI-SOLUTION TRONQUÉE. On part d'une quasi-solution (2.25) (où les α_i sont fixés d'après un critère quelconque, par exemple (2.26) et on la tronque à un ordre $p < r$:

$$\mathbf{p}^p = \sum_{i=1}^p \frac{y_i}{\lambda_i} \mathbf{v}_i + \sum_{i=r+1}^n \alpha_i \mathbf{v}_i \quad (2.35)$$

de façon à obtenir un nombre de conditionnement après troncature λ_1/λ_p acceptable. Cela revient, en d'autres termes, à ne *pas tenir compte* des composantes des mesures portées par $\mathbf{u}_{p+1}, \dots, \mathbf{u}_n$ en raison de l'effet amplificateur des plus petites valeurs singulières $\lambda_{p+1}, \dots, \lambda_n$ vis-à-vis des erreurs sur la solution \mathbf{p} .

RÉGULARISATION PAR OPTIMISATION. Cette forme consiste à prendre pour « solution » un \mathbf{p} qui minimise une fonction-coût S_β de la forme :

$$S_\beta(\mathbf{p}) = (1 - \beta) \|\mathbf{G}\mathbf{p} - \mathbf{d}\|_{\mathcal{D}}^2 + \beta \|\mathbf{p} - \mathbf{p}_0\|_{\mathcal{P}}^2 \quad (2.36)$$

ou encore

$$S_\beta(\mathbf{p}) = (1 - \beta) \left[\sum_{i=1}^r (\lambda_i x_i - y_i)^2 + \sum_{i=r+1}^m y_i^2 \right] + \beta \sum_{i=1}^n (x_i - x_i^0)^2 \quad (2.37)$$

où β est un « paramètre de compromis ». Le choix $\beta = 0$ revient simplement à résoudre (2.18) au sens des moindres carrés ; le choix $\beta = 1$ conduit à $\mathbf{p} = \mathbf{p}_0$ (seule l'information a priori est prise en compte. Pour des valeurs strictement positives de β , on peut montrer que :

1. Il existe \mathbf{p} unique minimisant $S_\beta(\mathbf{p})$; il est donné par :

$$\mathbf{p}^\beta = [(1 - \beta)\mathbf{G}^*\mathbf{G} + \beta\mathbf{I}]^{-1}[(1 - \beta)\mathbf{G}^*\mathbf{d} + \beta\mathbf{p}_0] \quad (2.38)$$

ou encore

$$\mathbf{x}^\beta = [(1 - \beta)\mathbf{\Lambda}^*\mathbf{p}^\beta + \beta\mathbf{I}]^{-1}[(1 - \beta)\mathbf{\Lambda}^*\mathbf{y} + \beta\mathbf{x}_0] \quad (2.39)$$

soit enfin, en termes de composantes :

$$x_i^\beta = \frac{(1 - \beta)\lambda_i y_i + \beta x_i^0}{(1 - \beta)\lambda_i^2 + \beta} \quad (2.40)$$

Les expressions (2.39) et (2.40) montrent clairement que la matrice $(1 - \beta)\mathbf{G}^*\mathbf{G} + \beta\mathbf{I}$ est inversible : en effet pour $0 < \beta \leq 1$, les valeurs propres de cette matrice (carrée d'ordre $n \times n$) sont les nombres $(1 - \beta)\lambda_i^2 + \beta$, qui sont tous réels strictement positifs.

2. La limite de \mathbf{p}^β quand β tend vers zéro est la quasi solution définie par (2.26).
3. \mathbf{p}^β varie continûment par rapport à \mathbf{y} . De plus le module de continuité et le conditionnement de (2.38), (2.39), (2.40) sont des fonctions décroissantes de β pour $0 < \beta \leq \beta_0$ avec β_0 petit devant 1. En effet, changeons \mathbf{y} en $\mathbf{y} + \delta\mathbf{y}$ et \mathbf{x} en $\mathbf{x} + \delta\mathbf{x}$ dans (2.40). On trouve que, pour un indice j fixé :

$$\delta x_i^\beta = \frac{(1 - \beta)\lambda_j \delta y_j}{(1 - \beta)\lambda_j^2 + \beta} \quad (2.41)$$

Le module de continuité est défini par

$$L = \max_{j \leq r} \frac{|\delta x_j|}{|\delta y_j|} = \max_{j \leq r} \frac{(1 - \beta)\lambda_j}{(1 - \beta)\lambda_j^2 + \beta} \quad (2.42)$$

et vaut :

$$L = \frac{(1 - \beta)\lambda_r}{(1 - \beta)\lambda_r^2 + \beta} \quad \text{si } \beta \leq \frac{\lambda_r^2}{1 + \lambda_r^2} \quad (2.43)$$

$$L = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1 - \beta}{\beta}} \quad \text{si } \beta \geq \frac{\lambda_r^2}{1 + \lambda_r^2} \quad (2.44)$$

Il est facile de montrer à l'aide de (2.43), (2.44) que L est une fonction décroissante de β . De même, l'étude du conditionnement de la matrice $(1 - \beta)\mathbf{G}^*\mathbf{G} + \beta\mathbf{I}$ conduit à :

$$\text{cond}((1 - \beta)\mathbf{G}^*\mathbf{G} + \beta\mathbf{I}) = \max_{j \leq r} \frac{(1 - \beta)\lambda_1^2 + \beta \lambda_j}{(1 - \beta)\lambda_j^2 + \beta \lambda_1} \quad (2.45)$$

$$= \frac{(1 - \beta)\lambda_1^2 + \beta \lambda_r}{(1 - \beta)\lambda_r^2 + \beta \lambda_1} \quad \text{si } \beta \leq \frac{\lambda_r^2}{1 + \lambda_r^2} \quad (2.46)$$

$$= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1 - \beta}{\beta} \frac{(1 - \beta)\lambda_1^2 + \beta}{\lambda_1}} \quad \text{si } \beta \geq \frac{\lambda_r^2}{1 + \lambda_r^2} \quad (2.47)$$

Les expressions (2.45), (2.46), (2.47) permettent de montrer que le conditionnement de l'inversion régularisée par optimisation est fonction décroissante de β .

En pratique, les précédents résultats signifient qu'on a intérêt à augmenter β pour améliorer la stabilité de la méthode. Mais alors on augmente également l'écart entre résultat mesuré \mathbf{d} et résultat calculé $\mathbf{G}\mathbf{p}$. En effet, tous calculs faits :

$$\| \mathbf{G}\mathbf{p}^\beta - \mathbf{d} \|_{\mathcal{D}}^2 = \sum_{i=1}^r \frac{\beta^2 (\lambda_i x_i^0 - y_i)^2}{[(1 - \beta)\lambda_i^2 + \beta]^2} + \sum_{i=r+1}^m m y_i^2 \quad (2.48)$$

et cette expression est une fonction croissante de β , tout au moins pour β « assez petit » (il suffit de développer (2.48) au premier ordre en β).

Il reste donc à trouver des valeurs acceptables pour β . La condition $\| \mathbf{G}\mathbf{p}^\beta - \mathbf{d} \|_{\mathcal{D}} \leq \varepsilon$ (ε : « tolérance » fournie par l'utilisateur) permet, par (2.20), de majorer β . D'autre part, la considération de l'erreur maximum $\delta \mathbf{p}$ tolérée sur \mathbf{p} et de l'écart maximum toléré sur \mathbf{p} par rapport au modèle de référence \mathbf{p}_0 permet de définir un minorant sur β . La plage de valeurs de β obtenue définit le compromis ainsi réalisé entre (a) la compatibilité entre mesures \mathbf{d} et paramètres \mathbf{p} , et (b) la stabilité de la méthode ainsi que la vraisemblance de la solution calculée.

2.3 La dimension infinie

Cete fois, nous considérons deux espaces de Hilbert \mathcal{P} et \mathcal{D} quelconques et un opérateur linéaire continu $G : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{D}$. Par exemple :

- $\mathcal{P} = \mathcal{D} = L^2([a, b])$, $G : p(t) \rightarrow \hat{p}()$ transformée de Fourier de $p(t)$.
- $\mathcal{P} = \mathcal{D} = L^2(\mathbb{R})$, G : opérateur intégral de première espèce.

En dimension finie, nous avons vu que toute équation linéaire admet au moins une solution au sens des moindres carrés. Cette propriété n'est plus nécessairement vraie en dimension infinie. En effet, chercher le minimum de $\| \mathbf{G}\mathbf{p} - \mathbf{d} \|_{\mathcal{D}}$ revient à chercher la projection orthogonale $P_{\text{Im}(G)}(\mathbf{d})$ des données \mathbf{d} sur l'image de G dans \mathcal{D} et chercher les solutions (au sens strict) du problème :

$$G\mathbf{p} = P_{\text{Im}(G)}(\mathbf{d}) \quad (2.49)$$

Or cette projection peut ne pas exister si le sous-espace $\text{Im}(G)$ n'est pas fermé, ce qui peut se produire en dimension infinie (tout sous-espace vectoriel de dimension finie est fermé).

Le problème (2.18) n'admet une quasi-solution (solution au sens des moindres carrés) que si le second membre d admet une projection orthogonale sur $\text{Im}(G)$, c'est-à-dire si :

$$d \in \text{Im}(G) \oplus \text{Im}(G)^\perp \quad (2.50)$$

L'inverse généralisé G^+ d'un opérateur linéaire G n'agit donc pas sur tout \mathcal{D} comme en dimension finie mais sur le sous-espace de \mathcal{D} défini par (2.50).

D'autre part l'analyse spectrale par décomposition en valeurs singulières ne se transporte à la dimension infinie que pour les *opérateurs compacts*. Nous allons donc commencer par examiner ce cas, particulier mais important, avant de donner quelques indications sur le cas général.

2.3.1 G est un opérateur compact

G est un opérateur compact si l'image $G(B)$ par G de la boule unité B dans \mathcal{P} est relativement compacte dans \mathcal{D} (c'est-à-dire si l'adhérence de $G(B)$ est incluse dans un ensemble compact de \mathcal{D}).

Cette classe d'opérateurs linéaires est importante car elle contient les opérateurs intégraux à noyau de carré intégrable :

$$G : L^2(\Omega_1) \rightarrow L^2(\Omega_2) \quad d(y) = [Gp](y) \equiv \int_{\Omega_1} k(y, x)p(x) dx \quad (2.51)$$

avec

$$k \in L^2(\Omega_1 \times \Omega_2) \quad \text{c.à.d.} \quad \int_{\Omega_1} \int_{\Omega_2} |k^2(x, y)| dx dy < \infty$$

qui interviennent dans une grande quantité de problèmes inverses.

ANALYSE SPECTRALE ET CONDITIONNEMENT. Les opérateurs compacts ont pour propriété essentielle de posséder un ensemble discret et dénombrable de valeurs singulières. Cela permet une analyse spectrale proche de celle faite en dimension finie par la décomposition en valeurs singulières.

En effet, si G est compact, les opérateurs G^*G et GG^* sont alors autoadjoints et compacts. Les résultats classiques de décomposition spectrale d'opérateurs autoadjoints (Schwarz [13], par exemple) permettent d'écrire qu'il existe une suite de valeurs singulières complexes $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}_N}$ et deux suites orthonormées $(v_n)_{n \in \mathbb{N}_N}$ et $(u_n)_{n \in \mathbb{N}_N}$ d'éléments de \mathcal{P} et \mathcal{D} respectivement telles que :

$$\begin{aligned} Gv_i &= \lambda_i u_i & G^*u_i &= \lambda_i v_i \\ G^*Gv_i &= \lambda_i^2 v_i & GG^*u_i &= \lambda_i^2 u_i \end{aligned} \quad (2.52)$$

En outre, toutes les valeurs singulières non nulles sont de multiplicité finie, ce qui entraîne que le sous-espace $\text{Im}(G)$ est somme directe de sous-espaces *de dimension finie*. Enfin, si la suite $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}_N}$ n'est pas finie, elle tend vers zéro.

Pour que (2.18) ait une solution (au sens strict), les conditions suivantes (dites « de Picard ») sont nécessaires et suffisantes (Nashed [9]) :

$$d \in \overline{\text{Im}(G)} = (\text{Ker}(G^*))^\perp \quad (2.53)$$

$$\sum_{n \geq 0} \frac{1}{\lambda_n^2} (d, u_n)_{\mathcal{D}}^2 < \infty \quad (2.54)$$

avec la convention $\lambda_n = 0 \Rightarrow (d, u_n)_{\mathcal{D}} = 0$. Une solution est alors :

$$p = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{\lambda_n} (d, u_n)_{\mathcal{D}} v_n \quad (2.55)$$

La solution (2.55) n'est unique que si le noyau de G est nul, c'est-à-dire si toutes les valeurs singulières sont non nulles. Dans le cas contraire, (2.55) est la *solution de norme minimale* de (2.18).

L'analyse de l'existence et l'unicité de la solution est donc formellement analogue à celle faite en dimension finie, à ceci près que la condition de sommabilité (2.54) doit être satisfaite.

La quasi-solution (c'est-à-dire la solution au sens des moindres carrés de norme minimale) de (2.18) doit vérifier (2.54) et (2.55). De plus, le second membre d doit vérifier

$$d \in \overline{\text{Im}(G)} \oplus \overline{\text{Im}(G)}^{\perp} \quad (2.56)$$

en lieu et place de (2.53).

Il reste à examiner la dépendance de la (quasi)-solution (2.55) par rapport aux perturbations de d . Ici le « conditionnement » de l'inversion de (2.18), par analogie avec la dimension finie, est $\lambda_1/\lambda_{\infty}$, c'est-à-dire l'infini (car la suite des valeurs singulières tend vers zéro) : l'inverse d'un opérateur compact, s'il existe, n'est ni borné ni continu. La sensibilité du problème (2.18) aux erreurs peut donc être arbitrairement grande, cela dépend totalement de l'allure de la décomposition de l'erreur sur les vecteurs propres u_n .

CAS PARTICULIER OÙ \mathcal{D} EST DE DIMENSION FINIE : L'APPROCHE DE BACKUS ET GILBERT [1]. Supposons l'espace des paramètres \mathcal{P} de dimension infinie mais l'espaces des mesures \mathcal{D} de dimension finie p . Ce cas de figure peut être considéré comme très important dans la pratique car, si les paramètres à identifier sont souvent modélisés par des fonctions, les mesures *réellement effectuées* seront presque toujours en nombre fini. Les valeurs singulières non nulles $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ sont en nombre fini $r \leq p$; r est le rang de GG^* . La condition (2.56) est automatiquement satisfaite puisque \mathcal{D} est de dimension finie, et la quasi-solution de norme minimale est donnée par :

$$p = \sum_{n=1}^r \frac{1}{\lambda_n} (d, u_n)_{\mathcal{D}} v_n \quad (2.57)$$

Si $r = p$, l'expression (2.57) de la quasi-solution peut s'interpréter comme :

$$p = G^*[GG^*]^{-1}d \quad (2.58)$$

Backus et Gilbert [1] ont obtenu ce résultat en considérant le problème suivant, issu de la gravimétrie, posé sur un domaine géométrique $\Omega \subset \mathbb{R}^3$:

trouver $m \in L^2(\Omega)$ telle que

$$\int_{\Omega} g_i(y)p(y) dV_y = d_i \quad (1 \leq i \leq p) \quad g_i \in L^2(\Omega) \text{ données} \quad (2.59)$$

On mesure les valeurs d_i du champ de gravitation terrestre et on cherche un estimateur $p_{\text{est}}(y_0)$ de la densité de matière en un point y_0 de Ω . Backus et Gilbert sont partis du

principe que, puisque le problème direct est linéaire, ils cherchent $p_{\text{est}}(y_0)$ comme *fonction linéaire des données* :

$$p_{\text{est}}(y_0) = \sum_{i=1}^p q_i(y_0) d_i \quad (2.60)$$

où les $q_i(y_0)$ sont à déterminer. Si on remplace (2.60) dans (2.59), on obtient :

$$p_{\text{est}}(y_0) = \sum_{i=1}^p q_i(y_0) \int_{\Omega} g_i(y) p(y) dV_y \equiv \int_{\Omega} R(y_0, y) p(y) dV_y \quad (2.61)$$

L'estimation $p_{\text{est}}(y_0)$ est une version « filtrée » de la vraie fonction $p(y_0)$, le filtre $R(y_0, y)$ est appelé « noyau résolvant ». Ce filtre est d'autant meilleur qu'il est plus proche de la mesure de Dirac $\delta(y_0 - y)$. Les $q_i(y_0)$ qui satisfont au mieux cette exigence sont donnés par [1], [14] :

$$q_i(y_0) = \sum_{j=1}^p g_j(y_0) (S^{-1})_{ij} \quad \text{avec} \quad (S)_{ij} = \int_{\Omega} g_i(y) g_j(y) dV_y \quad (2.62)$$

soit

$$p_{\text{est}}(y_0) = G^T [GG^T]^{-1} d \quad (2.63)$$

On retrouve ainsi (2.58) puisque l'opérateur G est ici à coefficients réels.

Remarquons, pour clore ce paragraphe, que le conditionnement du problème est fini et vaut λ_1/λ_r comme en dimension finie. La méthode de Backus et Gilbert n'est pas régularisée dans la mesure où les erreurs sur d peuvent, ici encore, être amplifiées par un facteur certes fini mais dont l'ordre de grandeur sera parfois très élevé.

EFFET D'UN CHANGEMENT DE TOPOLOGIE SUR \mathcal{P} ET \mathcal{D} . On peut imaginer de rétablir la continuité entre données et inconnues en jouant sur la condition (2.54). En effet (Sabatier [12]), on peut par exemple définir un sous-espace \mathcal{D}' de \mathcal{D} par :

$$\mathcal{D}' = \left\{ d \in \mathcal{D} \mid \sum_{n \geq 0} w_n^* w_n(d, u_n)_{\mathcal{D}}^2 < \infty \right\} \quad (2.64)$$

en tentant d'ajuster les poids $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de façon à ce que (2.54) converge, c'est-à-dire de telle sorte que :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} w_n \lambda_n = 1 \quad (2.65)$$

Cette approche cherche à rendre le problème (2.18) bien posé (a) par restriction de l'espace des données possibles et (b) par changement de topologie dans \mathcal{D} (définition modifiée de la notion de distance dans \mathcal{D} , qui s'applique en particulier à la notion d'erreur). Mais, puisque la théorie spectrale des opérateurs autoadjoints dit que les λ_n tendent vers zéro, cela demande aux poids w_n de tendre vers l'infini. En d'autres termes, la condition (2.65) équivaut à un filtre sur les données : leurs composantes de Fourier d'indice élevé doivent être négligeables. Si cette condition peut être facilement envisageable pour les données exactes d , elle sera en revanche irréaliste pour les erreurs de mesure, assimilées à un bruit. Cela rejoint la constatation faite plus haut suivant laquelle la solution d'une équation de première espèce peut être perturbée par une fonction très oscillante et d'amplitude élevée tandis que les mesures n'accusent qu'une faible perturbation.

En d'autres termes, la substitution de \mathcal{D} par \mathcal{D}' n'améliore que formellement l'inversion du problème (2.18) puisqu'elle revient à *exclure* la plupart des données bruitées. Or il est clair qu'une telle pétition de principe est totalement irréaliste quand on vise l'inversion de données réelles. Ici encore apparaît la nécessité de méthodes pratiques de régularisation, qui seront abordées dans le chapitre 3.

2.3.2 Cas général

L'extension du concept d'inverse généralisé, décrit en 2.2.3 pour la dimension finie, permet de traiter l'inversion de (2.18) en dimension infinie dans le cas général. Cette approche fait en particulier l'objet des travaux de Groetsch [3] et Nashed [10], [9], [11].

Un opérateur linéaire peut se voir attribuer une infinité d'inverses généralisés si son noyau est non nul ; chacun conduit à un $p \in \mathcal{P}$ minimisant $\| \mathbf{G}p - \mathbf{d} \|_{\mathcal{D}}^2$. Groetsch choisit de donner le nom d'inverse généralisé pour G à un opérateur $G^+ : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{P}$ tel que $p = G^+d$ soit la quasi-solution de (2.18) de norme minimale. Cet inverse généralisé n'est défini que pour d vérifiant :

$$d \in \mathcal{D}(G^+) = \text{Im}(G) \oplus \text{Im}(G)^\perp \quad (2.66)$$

ce qui classe les opérateurs linéaires en deux catégories :

- $\text{Im}(G)$ est *fermé*. Dans ce cas, la projection du second membre d sur $\text{Im}(G)$ existe toujours, ce qui permet d'appliquer l'inverse généralisé à *tous* les seconds membres $d \in \mathcal{D}$. Ceci est vrai en particulier :
 - En dimension finie quel que soit G .
 - Pour une équation intégrale de deuxième espèce.
- $\text{Im}(G)$ *n'est pas fermé*. Dans ce cas, certains seconds membres d n'admettent pas de projection orthogonale sur $\text{Im}(G)$ et ainsi ne conduisent pas à une quasi-solution. Ceci est en particulier vrai pour le cas très important des équations intégrales de première espèce du type (2.51). D'ailleurs, la condition de sommabilité (2.54) qui apparaît lors de l'analyse spectrale des opérateurs compacts implique que l'image de \mathcal{P} par G compact est un ensemble *ouvert* de \mathcal{D} , d'où l'absence constatée de quasi-solution pour certains G .

Groetsch [3] propose diverses méthodes d'approximation de l'opérateur G^+ : méthode de plus grande pente, gradient conjugué, algorithmes dérivés d'un théorème de représentation spectrale continue des opérateurs linéaires continus. Ces travaux s'intéressent essentiellement à l'analyse mathématique du problème inverse et des méthodes d'approximation et ne présentent pas (du moins dans les références dont nous disposons) d'application numérique. D'autre part, l'approche par pseudo-inverse ne résout pas le problème de la dépendance non-continue de la solution par rapport aux données.

Bibliographie

- [1] BACKUS, G., GILBERT, F. Uniqueness in the inversion of inaccurate gross data. *Phil. Trans. Roy. Soc. London*, **266** :123–192 (1970).
- [2] COURANT, R., HILBERT, D. *Methods of mathematical physics (2 volumes)*. Interscience (1953).
- [3] GROETSCH, C. W. *Generalized inverses of linear operators (representation and approximation)*. Marcel Dekker (1977).

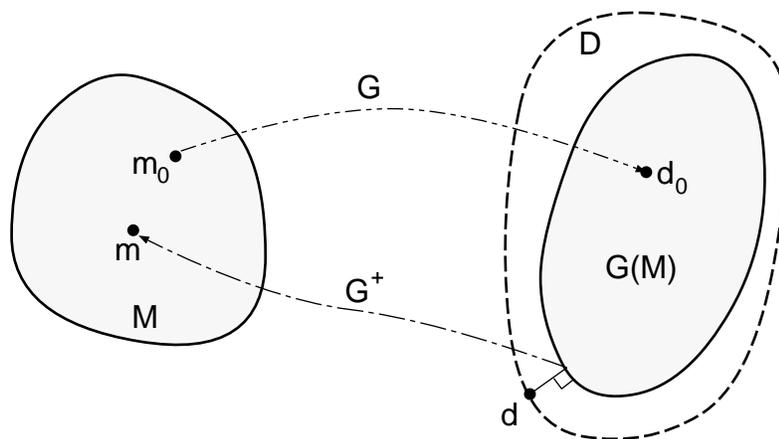


Fig. 2.2: Quasi-inversion (cas où $\text{Im}(G)$ est fermé).

- [4] KUPRADZE, V. D. *Dynamical problems in elasticity*, vol. 3 of *Progress in solids mechanics*. North Holland (1963).
- [5] KUPRADZE, V. D. (ed.). *Three-dimensional problems of the mathematical theory of elasticity and thermoelasticity*. North Holland (1979).
- [6] LATTES, R., LIONS, J. L. *Méthode de quasi-réversibilité et applications*. Dunod (Paris) (1967).
- [7] LAVRENTIEV, M. M. *Some improperly posed problems of mathematical physics*. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg (1967).
- [8] MIKHLIN, S. G. *Multi-dimensional singular integrals and singular integral equations*. Pergamon Press (1965).
- [9] NASHED, Z. Approximate regularized solutions to improperly posed linear integral and operator equations. In A. Dold, B. Eckmann (eds.), *Constructive and computational methods for differential and integral equations*. Springer-Verlag (1974).
- [10] NASHED, Z. On the perturbation theory for generalized inverse operators in Banach spaces. In Z. Nashed (ed.), *Functionnal analysis and applications*, pp. 180–195. Springer-Verlag (1979).
- [11] NASHED, Z. A new approach to classification and regularization of ill-posed operator equations. In I. H. W. Eng, C. W. Groetsch (eds.), *Inverse and ill-posed problems.*, pp. 53–75. Academic Press (1987).
- [12] SABATIER, P. C. Problèmes inverses et applications. Ecole d'été d'analyse numérique, CEA/INRIA/EDF (1985).
- [13] SCHWARZ, L. *Analyse*. Hermann (1981).
- [14] TARANTOLA, A. *Inverse problem theory*. Elsevier (1987).
- [15] TIKHONOV, A. N., ARSEININ, V. Y. *Solutions to ill-posed problems*. Winston-Wiley, New York (1977).
- [16] TRICOMI, F. G. *Integral equations*. Interscience Publishers, New York (1957).

Chapitre 3

Stabilisation de l'inversion

Sommaire

3.1	Régularisation au sens de Tikhonov et applications.	38
3.1.1	Définition et propriétés d'un opérateur régularisant [24].	38
3.1.2	Construction d'opérateurs régularisants.	39
3.1.3	Exemple de problèmes inverses régularisés.	42
3.1.4	Régularisation par quasi-réversibilité de problèmes aux limites mal posés.	45
3.2	Un exemple unidimensionnel semi-analytique	47
3.3	Approche probabiliste des problèmes inverses.	53
3.3.1	Principe.	53
3.3.2	Problèmes inverses discrets.	55
3.3.3	Problèmes inverses en dimension infinie.	59
3.4	Elements de comparaison des deux approches.	63
3.5	Un exemple d'inversion gaussienne linéaire en variable complexe	64
	Bibliographie	71

Le chapitre 2, consacré aux problèmes inverses linéaires, a permis de mettre en évidence leur caractère mal posé et d'en analyser les raisons. D'autre part, nous y avons vu, dans le cadre de la dimension finie, que la méthode de *régularisation par optimisation* conduit à une solution (a) unique, (b) stable par rapport aux données et (c) qui tend vers une quasi-solution du problème inverse quand le paramètre de compromis β tend vers zéro.

Ces trois propriétés, que nous avons ainsi pu constater de manière élémentaire dans le cas de la dimension finie, forment l'essence du concept de régularisation développé initialement par Tikhonov et Arsénine [24]. L'objectif de toute méthode de « régularisation » d'un problème inverse est double :

- (i) Définir un cadre permettant d'incorporer toutes les informations supplémentaires dont on dispose et qui proviennent nécessairement de considérations physiques ou qualitatives *extérieures aux mathématiques* (les mathématiques ne remplacent pas l'absence d'information, elles peuvent seulement utiliser au mieux celles dont on dispose) ;
- (ii) Faire en sorte que la solution obtenue compte tenu de ces informations supplémentaires soit stable par rapport aux mesures.

Dans cette partie, nous nous proposons de reprendre ce qui semble être les deux principales approches du problème inverse : d'une part la voie « abstraite » initiée par Tikhonov, enracinée dans l'analyse fonctionnelle et le calcul des variations ; d'autre part l'approche « stochastique » qui cherche à modéliser toutes les incertitudes par des lois de probabilité, développée en particulier par Tarantola [22, 23].

3.1 Régularisation au sens de Tikhonov et applications.

Comme dans le chapitre 2, nous supposons que les ensembles de « paramètres à identifier » \mathbf{p} et de « données » ou « mesures » \mathbf{d} sont deux espaces de Hilbert (respectivement \mathcal{P} et \mathcal{D}). Le problème direct est supposé modélisé à l'aide d'un opérateur $\mathbf{G} : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{D}$. Le problème inverse s'écrit :

$$\text{Trouver } \mathbf{p} \in \mathcal{P} \text{ tel que } \mathbf{G}(\mathbf{p}) = \mathbf{d} \text{ (} \mathbf{d} \in \mathcal{D} \text{ donné)} \quad (3.1)$$

Ici \mathbf{G} n'est pas a priori supposé linéaire, d'où la notation $\mathbf{G}(\mathbf{p})$ au lieu de $\mathbf{G}\mathbf{p}$.

3.1.1 Définition et propriétés d'un opérateur régularisant [24].

L'idée est la suivante : choisissons un couple $(\mathbf{p}_0, \mathbf{d}_0) \in \mathcal{P} \times \mathcal{D}$ tel que :

$$\mathbf{G}(\mathbf{p}_0) = \mathbf{d}_0 \quad (3.2)$$

\mathbf{p}_0 n'étant pas nécessairement unique.

Définition 1 *Un opérateur $\mathbf{R}(\mathbf{d}, \alpha)$, dépendant du paramètre réel positif α , est dit régularisant pour l'équation $\mathbf{G}(\mathbf{p}_0) = \mathbf{d}_0$ au voisinage de $\mathbf{d} = \mathbf{d}_0$ s'il possède les propriétés suivantes :*

- *Il existe $\delta_1 > 0$ tel que $\mathbf{R}(\mathbf{d}, \alpha)$ soit défini pour tout $\alpha > 0$ et pour tout $\mathbf{d} \in \mathcal{D}$ vérifiant :*

$$\|\mathbf{d} - \mathbf{d}_0\| \leq \delta_1$$

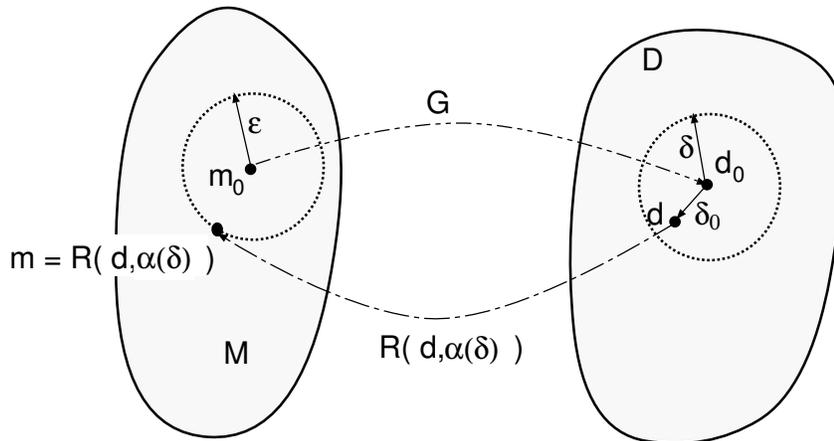


Fig. 3.1: Opérateur régularisant pour $G(p_0) = d_0$.

- Il existe une fonction $\alpha = \alpha(\delta)$ de la variable δ telle que pour tout $\epsilon > 0$ il existe $\delta(\epsilon) \leq \delta_1$ tel que :

$$\| \mathbf{d} - \mathbf{d}_0 \| \leq \delta(\epsilon) \Rightarrow \| \mathbf{R}(\mathbf{d}, \alpha(\delta)) - \mathbf{p}_0 \| \leq \epsilon$$

Autrement dit, un tel opérateur $\mathbf{R}(\mathbf{d}, \alpha)$ indexé par le paramètre α agit sur un voisinage de \mathbf{d}_0 et, moyennant un choix judicieux du paramètre α , transforme tout $\mathbf{d} \in \mathcal{D}$ « voisin » de \mathbf{d}_0 en $\mathbf{p} = \mathbf{R}(\mathbf{d}, \alpha)$ « voisin » de \mathbf{p}_0 dans \mathcal{P} . De plus, $\mathbf{p}_0 \in \mathcal{P}$ peut être approché par $\mathbf{R}(\mathbf{d}, \alpha)$ d'aussi près que l'on veut avec un « bon » choix de α .

Dans le cas où l'opérateur \mathbf{G} est continu, les opérateurs régularisants vérifient le

Théorème 1 Soit $\mathbf{G} : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{D}$ un opérateur et soit $\mathbf{R}(\mathbf{d}, \alpha) : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{P}$ un opérateur défini pour tout $\mathbf{d} \in \mathcal{D}$ et pour tout $\alpha > 0$ et continu par rapport à \mathbf{d} .

Si pour tout $\mathbf{p} \in \mathcal{P}$ on a :

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \mathbf{R}(\mathbf{G}(\mathbf{p}), \alpha) = \mathbf{p}$$

alors $\mathbf{R}(\mathbf{d}, \alpha)$ est un opérateur régularisant pour $\mathbf{G}(\mathbf{p}) = \mathbf{d}$.

Pour l'instant, ces considérations n'ont pas de caractère constructif. Pour que le concept d'opérateur régularisant soit utile, il faut indiquer des méthodes de construction.

3.1.2 Construction d'opérateurs régularisants.

Celle-ci peut découler d'un principe de sélection (Tikhonov & Arsenine). En effet, supposons que le second membre \mathbf{d} en notre possession soit entaché, par rapport au second membre exact $\mathbf{d}_{\text{exact}}$, d'un écart ne dépassant pas une certaine valeur δ :

$$\| \mathbf{d} - \mathbf{d}_{\text{exact}} \|_{\mathcal{D}} \leq \delta \quad (3.3)$$

On va alors chercher naturellement une solution au problème inverse (3.1 dans le sous-ensemble $\mathcal{P}_\delta \subset \mathcal{P}$ des éléments \mathbf{p} vérifiant :

$$\| \mathbf{G}(\mathbf{p}) - \mathbf{d} \|_{\mathcal{D}} \leq \delta \quad (3.4)$$

Mais il ne suffit pas de prendre pour solution de (3.1) un élément quelconque de \mathcal{P}_δ : une telle « solution » n'est en général pas continue par rapport à δ . Il faut donc adopter un « principe

de sélection » qui permette, pour tout δ « suffisamment petit », de choisir un élément \mathbf{p}_δ de \mathcal{P}_δ de telle sorte que \mathbf{p}_δ dépende continûment de δ . Pour cela, la méthode proposée dans [24] exerce cette sélection par l'intermédiaire d'une *fonctionnelle stabilisatrice* Ω qui doit posséder les propriétés suivantes :

1. Ω est définie sur une partie dense \mathcal{P}_1 de \mathcal{P} .
2. Ω est non-négative continue.
3. Toute solution de (3.1) appartient à \mathcal{P}_1 .
4. Pour tout $d > 0$, l'ensemble $\mathcal{P}_{1,d}$ des éléments de \mathcal{P}_1 tels que $\Omega(\mathbf{p}) \leq d$ est compact sur \mathcal{P}_1 .

Par exemple, on peut prendre :

$$\Omega(\mathbf{p}) = \|\mathbf{p} - \bar{\mathbf{p}}\|_{\mathcal{P}}^2 \quad \bar{\mathbf{p}} \in \mathcal{P} \text{ fixé ; } \mathcal{P}_1 = \mathcal{P} \quad (3.5)$$

Cela signifie qu'on va chercher, parmi toutes les solutions « à δ près » de (3.1) celle qui est la plus proche (ou la moins éloignée...) d'une valeur de référence $\bar{\mathbf{p}}$ jugée vraisemblable ou représentative à partir de considérations physiques.

Il existe une infinité de manières de choisir Ω ; ce choix traduira de façon mathématique le critère de sélection que l'on souhaite utiliser pour restreindre le champ des solutions approchées de (3.1). Une fois Ω choisie, on prend pour *solution régularisée* de (3.1) un élément \mathbf{p}_δ qui *minimise* $\Omega(\mathbf{p})$ sur $\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_\delta$ (il est démontré qu'un tel élément existe). Cet élément \mathbf{p}_δ peut être considéré comme le résultat de l'action sur \mathbf{d} d'un opérateur $\hat{\mathbf{R}}(\mathbf{d}, \delta)$ dépendant de δ . De plus, il est démontré [24] que l'opérateur ainsi défini est *régularisant* pour (3.1) au sens de la définition du 3.1.1.

La propriété de toute solution régularisée \mathbf{p}_α est donc de minimiser $\Omega(\mathbf{p})$ sous la contrainte (3.4). Cela revient donc à minimiser le *lagrangien*

$$S_\alpha(\mathbf{p}, \mathbf{d}) = \alpha \left[\frac{1}{\alpha} \|\mathbf{G}(\mathbf{p}) - \mathbf{d}\|_{\mathcal{D}}^2 + \Omega(\mathbf{p}) \right] = \|\mathbf{G}(\mathbf{p}) - \mathbf{d}\|_{\mathcal{D}}^2 + \alpha \Omega(\mathbf{p}) \quad (3.6)$$

où $1/\alpha$ est le multiplicateur de Lagrange associé à la contrainte (3.4). En fait, on a le

Théorème 2 *Soit $\mathbf{G} : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{D}$ un opérateur continu. Quels que soient $\mathbf{d} \in \mathcal{D}$ et $\alpha > 0$, il existe un élément $\mathbf{p}_\alpha \in \mathcal{P}_1$ tel que :*

$$\inf_{\mathbf{p} \in \mathcal{P}_1} S_\alpha(\mathbf{p}, \mathbf{d}) = S_\alpha(\mathbf{p}_\alpha, \mathbf{d})$$

Donc, quelle que soit la valeur fixée du paramètre α , $S_\alpha(\mathbf{p}, \mathbf{d})$ admet un minimum au moins. Pour α fixé, \mathbf{p}_α , obtenu par minimisation de S_α , peut être considéré comme le résultat de l'action d'un opérateur $R_1(\mathbf{d}, \alpha)$ sur \mathbf{d} . De plus, le théorème suivant est démontré :

Théorème 3 *Soit $\delta_1 > 0$. Soient $\mathbf{p}_{\text{exact}}$ et $\mathbf{d}_{\text{exact}}$ une solution exacte et le second membre exact associé à (3.1). Pour tout $\epsilon > 0$ et quelles que soient les fonctions $\beta_1(\delta)$ et $\beta_2(\delta)$ définies sur $[0, \delta_1]$, non-négatives, non décroissantes et continues telles que :*

$$\beta_2(0) = 0 \quad \text{et} \quad \forall \delta \in [0, \delta_1] \quad \frac{\delta^2}{\beta_1^2(\delta)} \leq \beta_2(\delta)$$

il existe δ_0 ($= \delta_0(\beta_1, \beta_2, \epsilon)$) tel que pour $\mathbf{d} \in \mathcal{D}$ et $\delta \leq \delta_0$ l'inégalité

$$\|\mathbf{d} - \mathbf{d}_{exact}\|_{\mathcal{D}} \leq \delta$$

entraîne l'inégalité :

$$\|\mathbf{p}_\alpha - \mathbf{p}_{exact}\|_{\mathcal{P}} \leq \epsilon$$

pour tous les α vérifiant

$$\frac{\delta^2}{\beta_1^2(\delta)} \leq \alpha \leq \beta_2(\delta)$$

Ce théorème (d'énoncé un peu rébarbatif, convenons-en) signifie en clair que :

1. L'opérateur $R_1(\mathbf{d}, \alpha)$ associé à la minimisation du lagrangien $S_\alpha(\mathbf{p}, \mathbf{d})$ est régularisant : une « petite » perturbation sur le second membre entraîne une « petite » perturbation sur la solution \mathbf{p}_α .
2. Et ceci à condition que le paramètre α appartienne à *une certaine plage* de valeurs.

On remarque donc que le caractère régularisant de $R_1(\mathbf{d}, \alpha)$ est vrai pour toute une gamme de valeurs de α , et non pour une valeur unique. Une manière de choisir α consiste à imposer la condition (critère de Morozov) :

$$\|\mathbf{G}(\mathbf{p}) - \mathbf{d}\|_{\mathcal{D}} = \delta \tag{3.7}$$

dans laquelle la valeur numérique de δ est fixée « empiriquement » à partir de l'idée qu'on se fait de la qualité des mesures \mathbf{d} et du modèle \mathbf{G} . Une autre, dite critère d'Arcangeli, conduit à chercher α solution de :

$$\|\mathbf{G}(\mathbf{p}) - \mathbf{d}\|_{\mathcal{D}}^2 = \frac{\delta^2}{\alpha} \tag{3.8}$$

D'autres critères sont envisageables ([24] chapitre II.6).

Quoi qu'il en soit, le problème du « meilleur » choix de α , qui correspond au compromis optimal entre la satisfaction (au sens des moindres carrés) du modèle ($\mathbf{G}(\mathbf{p}) = \mathbf{d}$) et le respect du « critère de choix » stabilisateur ($\Omega(\mathbf{p})$ « pas trop grand »), est difficile et semble, d'un point de vue théorique, encore largement ouvert. Les critères (Morozov ou autres) sont d'application délicate de par leur nature « a posteriori » et nécessitent des méthodes itératives pour être mis en oeuvre. Des auteurs (voir Engl & Neubauer [8], [10] ainsi que les références de ces articles) ont étudié la convergence de la solution régularisée \mathbf{p}_α vers une quasi-solution en fonction de α et de l'écart δ entre seconds membres approché et exact.

L'article [8] se place dans le cas de \mathbf{G} linéaire et $\Omega(\mathbf{p}) = \|\mathbf{p}\|^2$. Il y est en particulier signalé que la solution régularisée \mathbf{p}_α obtenue par minimisation de $S_\alpha(\mathbf{p}, \mathbf{d})$ converge vers la quasi-solution de norme minimale

- comme $O(\delta^{1/2})$ si $\mathbf{G}^+ \mathbf{d} \in \text{Im}(\mathbf{G}^*)$.
- comme $O(\delta^{2/3})$ si $\mathbf{G}^+ \mathbf{d} \in \text{Im}(\mathbf{G}^* \mathbf{G})$.

dans le meilleur des cas, c'est-à-dire avec le meilleur choix possible du paramètre de régularisation α ajusté en fonction de δ (\mathbf{G}^+ désignant le pseudo-inverse de \mathbf{G} associant à tout \mathbf{d} vérifiant l'équation 2.58, la quasi-solution de norme minimale). Cet article indique également que les critères (3.7) et (3.8) ne sont pas optimaux du point de vue de la vitesse de convergence. Des versions plus élaborées de ces critères, qui reposent sur l'utilisation

de la *régularisation de Tikhonov itérée*, y sont étudiées; leur convergence est optimale. Pour ne pas alourdir le présent texte, nous préférons renvoyer à [8], [10], [20] le lecteur intéressé par les détails.

En pratique on pourra éventuellement se contenter de choisir α de manière intuitive en se rappelant sa signification de « paramètre de compromis ».

En résumé, la résolution de (3.1) par la méthode de régularisation de Tikhonov utilise les étapes suivantes :

1. Choix de la fonctionnelle stabilisatrice Ω (qui traduit mathématiquement des informations a priori et des considérations qualitatives) et construction de la famille de fonctionnelles $S_\alpha(\mathbf{p}, \mathbf{d})$ pour $\alpha > 0$.
2. Choix du paramètre de régularisation α , *qui doit être strictement positif*.
3. Recherche, par minimisation de $S_\alpha(\mathbf{p}, \mathbf{d})$ par rapport à \mathbf{p} , de \mathbf{p}_α , qui sera une solution régularisée pour le problème inverse (3.1).

Le principe de sélection n'est pas la seule façon de régulariser un problème inverse. Une autre voie possible consiste à remplacer le problème direct initial, décrit par l'opérateur \mathbf{G} , par une famille (indexée par un paramètre $\alpha > 0$) de problèmes directs « proches », décrits par des opérateurs \mathbf{G}_α « proches » de \mathbf{G} . Les opérateurs \mathbf{G}_α doivent avoir un inverse continu \mathbf{R}_α régularisant au sens de Tikhonov. Par exemple, le problème inverse linéaire (2.18) peut être remplacé par :

$$\mathbf{G}_\alpha \mathbf{p} \equiv [\mathbf{G}^* \mathbf{G} + \alpha \mathbf{I}] \mathbf{p} = \mathbf{G}^* \mathbf{d} \quad (3.9)$$

où l'opérateur \mathbf{G}_α est, par construction, inversible. L'opérateur \mathbf{R}_α , qui est donc donné par :

$$\mathbf{R}_\alpha = [\mathbf{G}^* \mathbf{G} + \alpha \mathbf{I}]^{-1} \mathbf{G}^* \quad (3.10)$$

est régularisant (la solution \mathbf{p}_α obtenue par (3.10) tend vers la quasi-solution de norme minimale quand $\alpha \rightarrow 0$). Il faut d'ailleurs remarquer que (3.9) peut également être obtenue en écrivant que la première variation de la fonctionnelle S_α ci dessous est nulle quand \mathbf{p} en réalise le minimum :

$$S_\alpha(\mathbf{p}, \mathbf{d}) = \|\mathbf{G}\mathbf{p} - \mathbf{d}\|_{\mathcal{D}}^2 + \alpha \|\mathbf{p}\|_{\mathcal{P}}^2 \quad (3.11)$$

Sur cet exemple, les deux approches sont donc équivalentes.

L'exemple de la régularisation des équations de convolution, qui sera présenté au 3.1.3, est un autre cas de modification de l'opérateur initial. D'autre part, les méthodes de *quasi réversibilité* proposées par Lattès et Lions [16] pour résoudre les problèmes aux limites mal posés relèvent également de cette approche; leur description fera l'objet du 3.1.4.

3.1.3 Exemple de problèmes inverses régularisés.

LE PROBLÈME LINÉAIRE DISCRET. Le stabilisateur Ω le plus naturel est défini à partir de la donnée d'une valeur « de référence » \mathbf{p}_0 de la grandeur à identifier :

$$\Omega(\mathbf{p}) = \|\mathbf{p} - \mathbf{p}_0\|_{\mathcal{P}}^2 \quad (3.12)$$

$$S_\alpha(\mathbf{p}, \mathbf{d}) = \|\mathbf{G}\mathbf{p} - \mathbf{d}\|_{\mathcal{D}}^2 + \alpha \|\mathbf{p} - \mathbf{p}_0\|_{\mathcal{P}}^2 \quad (3.13)$$

On retrouve en fait la méthode décrite au chapitre 2 (équations (2.36,2.37)) sous le nom de *régularisation par optimisation*, en prenant $\alpha = \beta/(1 - \beta)$. L'étude de stabilité associée

permet de prouver élémentairement le caractère régularisant au sens de Tikhonov de la fonctionnelle $S_\alpha(\mathbf{p}, \mathbf{d})$.

D'autres stabilisateurs Ω sont bien entendu utilisables, en particulier tous ceux de la forme :

$$\Omega(\mathbf{p}) = \| \mathbf{L}\mathbf{p} - \mathbf{g} \|_{\mathcal{P}}^2 \quad (3.14)$$

où \mathbf{L} est une matrice de dimensions $q \times n$. Afin de garantir l'unicité de la solution de la minimisation de $S_\alpha(\mathbf{p}, \mathbf{d})$ ainsi construite, il faut supposer :

$$\text{Dim}[\text{Ker}(\mathbf{L}) \cap \text{Ker}(\mathbf{G})] = 0$$

ce qui implique en particulier $m + q \geq n$.

L'ÉQUATION INTÉGRALE DE PREMIÈRE ESPÈCE. On a vu au chapitre 2 que la solution d'une équation intégrale de première espèce (de Fredholm ou de Volterra) peut être perturbée par des termes fortement oscillants. Le critère de sélection qui vient alors à l'esprit consiste à ne considérer, comme candidates à la solution, que des fonctions ψ « peu oscillantes ». La fonctionnelle stabilisante Ω portera donc sur la norme des dérivées de ψ . En effet les dérivées de fonctions fortement oscillantes, multiples d'une puissance de la fréquence ω , prennent des valeurs beaucoup plus élevées que la fonction elle-même. D'où l'introduction des « stabilisateurs d'ordre p » ($p \geq 0$) :

$$\Omega_p(\psi) = \int_a^b \left[\sum_{q=0}^p a_q(x) \frac{d^q}{dx^q} \psi \right]^2 dx \quad (3.15)$$

A titre d'illustration, reprenons un exemple de résolution numérique, présenté dans [24], d'une équation intégrale de première espèce associée à un problème de décomposition spectrale de rayonnement. Le problème est discrétisé. La figure 3.2 reproduit le résultat d'une inversion avec (a) des données exactes (mais en nombre fini) puis avec (b) des données bruitées. La régularisation utilise un stabilisateur d'ordre 1. On voit sur cet exemple, d'une part que l'inversion non régularisée « explose » (courbe (a)), d'autre part que l'inversion régularisée montre une certaine stabilité par rapport aux erreurs de mesure (courbe (b)).

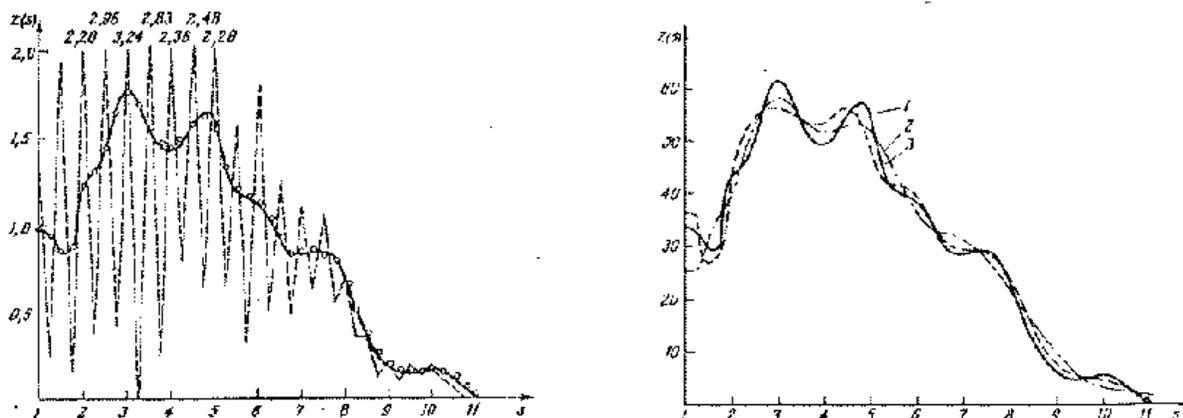


Fig. 3.2: Inversion d'une équation intégrale avec données bruitées [24] : (a) sans régularisation (b) avec régularisation (solution exacte en trait plein).

L'ÉQUATION DE CONVOLUTION. De nombreux problèmes (par exemple le filtrage d'un signal) conduisent à une *équation de convolution*, dont voici la forme la plus simple :

$$[K * z](t) \equiv \int_{\mathbb{R}} K(t - \tau)z(\tau)d\tau = u(t) \quad (3.16)$$

Le membre de gauche de (3.16) est appelé *produit de convolution* des fonctions K et z . Il est bien connu que sa transformée de Fourier est la multiplication des transformées de K et z : $(\hat{K}z = \hat{K}\hat{z}$. La transformée de Fourier semble donc fournir une solution immédiate à (3.16) :

$$\hat{z}(\omega) = \frac{\hat{u}(\omega)}{\hat{K}(\omega)} \quad (3.17)$$

sous réserve que $\hat{u}(\omega)/\hat{K}(\omega)$ soit de carré intégrable sur \mathbb{R} . Cela est satisfaisant dans le cas de données $u(t)$ exactes. Mais supposons que $u(t)$ se décompose en :

$$u(t) = u_{\text{exact}}(t) + v(t) \quad (3.18)$$

où v est un processus aléatoire, qu'on pourra supposer décorréolé par rapport à u_{exact} et d'espérance nulle. Dans ce cas la « solution » de (3.16) s'écrit :

$$\hat{z}(\omega) = \frac{\hat{u}_{\text{exact}}(\omega)}{\hat{K}(\omega)} + \frac{\hat{v}(\omega)}{\hat{K}(\omega)} = \hat{z}_{\text{exact}}(\omega) + \frac{\hat{v}(\omega)}{\hat{K}(\omega)} \quad (3.19)$$

après quoi $z(t)$ est obtenu par transformée de Fourier inverse :

$$z(t) = z_{\text{exact}}(t) + \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{-i\omega t} \frac{\hat{v}(\omega)}{\hat{K}(\omega)} d\omega \quad (3.20)$$

C'est à ce stade que les ennuis apparaissent : en effet, $v(t)$ étant un « bruit », son comportement dans les hautes fréquences peut être tel que la transformée de Fourier inverse de $\hat{v}(\omega)/\hat{K}(\omega)$ prenne des valeurs arbitrairement grandes, ou même ne soit pas définie. En d'autres termes, les caractéristiques aux hautes fréquences du bruit peuvent rendre (3.16) mal posé.

La méthode de régularisation proposée dans [24] consiste à modifier la transformation inverse (3.20) en posant :

$$z(t; f, \alpha) = [R(f, \alpha)u](t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{-i\omega t} \frac{\hat{u}(\omega)}{\hat{K}(\omega)} f(\omega, \alpha) d\omega \quad (3.21)$$

où la fonction $f(\omega, \alpha)$ vérifie les propriétés suivantes :

1. $f(\omega, \alpha)$ est définie sur $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$.
2. $0 \leq f(\omega, \alpha) \leq 1$.
3. $f(\omega, 0) = 1$.
4. $f(-\omega, \alpha) = f(\omega, \alpha)$ pour tout $\alpha > 0$.
5. $f(\omega, \alpha) \in L^2(\mathbb{R})$ pour tout $\alpha > 0$ fixé.
6. $f(\omega, \alpha) \rightarrow 0$ si $\omega \rightarrow \pm\infty$ pour tout $\alpha > 0$ fixé.
7. $f(\omega, \alpha) \rightarrow 1$ si $\alpha \rightarrow 0^+$, sans décroître et uniformément sur tout intervalle $[\omega_1, \omega_1]$.
8. $f(\omega, \alpha)/\hat{K}(\omega) \in L^2(\mathbb{R})$ pour tout $\alpha > 0$.

9. $f(\omega, \alpha) \rightarrow 0$ si $\alpha \rightarrow \infty$, pour tout ω non nul, uniformément sur tout intervalle $[\omega_1, \omega_2]$ avec $0 \leq \omega_1 \leq \omega_2$.

Théorème 4 (voir [24]) *L'opérateur $R(f, \alpha)$ défini par (3.21), où f vérifie (1) à (9) ci-dessus, est continu par rapport à u et régularisant pour l'équation de convolution (3.16).*

Exemple 1 : $f(\omega, \alpha) = e^{-\alpha^2 \omega^2}$.

Exemple 2 : $f(\omega, \alpha) = 1$ ($|\omega| \leq 1/\alpha$) et $f(\omega, \alpha) = 0$ ($|\omega| > 1/\alpha$)

où α est le pas de discrétisation employé pour une résolution approchée de (3.16).

Exemple 3 : Soit $M(\omega)$ une fonction paire, continue par morceaux, non-négative ($M(0) \geq 0$ et $M(\omega) > 0$ si $\omega > 0$) et telle que

1. $M(\omega) \geq C > 0$ pour $|\omega|$ suffisamment grand.

2. $\frac{\hat{K}(-\omega)}{\hat{K}(-\omega)\hat{K}(\omega) + \alpha M(\omega)} \in L^2(\mathbb{R})$

alors, en posant :

$$f(\omega, \alpha) = \frac{\hat{K}(-\omega)\hat{K}(\omega)}{\hat{K}(-\omega)\hat{K}(\omega) + \alpha M(\omega)}$$

on obtient des classes d'opérateurs régularisants. En particulier, le choix $M(\omega) = \omega^{2p}$ correspond (par Fourier) au stabilisateur d'ordre p donné par (3.15). De plus, pour ces choix de ω , [24] donne des résultats de convergence de la solution régularisée vers la solution exacte en fonction de α .

3.1.4 Régularisation par quasi-réversibilité de problèmes aux limites mal posés.

Considérons à nouveau le problème rétrograde pour l'équation de la chaleur évoqué au chapitre 2 (en prenant pour simplifier un coefficient de conductivité k constant dans Ω) :

$$\text{Trouver } \theta(\mathbf{x}, 0) = \theta_0(\mathbf{x}) \text{ (condition initiale inconnue)}$$

sachant que le champ de température $\theta(\mathbf{x}, t)$ vérifie :

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} \theta - k \Delta \theta = 0 & \mathbf{x} \in \omega \text{ et } t \geq 0 \\ \theta(\mathbf{x}, T) = \chi(\mathbf{x}) & T \text{ fixé } > 0 \\ \theta(\mathbf{x}, t) = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \quad (3.22)$$

La résolution « brutale » de (3.22) est impraticable (voir le chapitre 2). Lattès et Lions proposent pour aborder ce problème la méthode dite de Quasi-Réversibilité (ou QR). Celle-ci revient à remplacer l'équation aux dérivées partielles rétrograde (3.22) par une autre, « proche » de (3.22) en un certain sens, telle que le problème d'évolution rétrograde modifié soit bien posé; en particulier ils montrent que la famille de problèmes suivante (P_ϵ), indexée par un petit paramètre $\epsilon > 0$, est bien posée :

$$(P_\epsilon) \begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} \theta_\epsilon - k \Delta \theta_\epsilon - \epsilon \Delta^2 \theta_\epsilon = 0 & \mathbf{x} \in \Omega \text{ et } t \geq 0; \epsilon > 0 \\ \theta_\epsilon(\mathbf{x}, T) = \chi(\mathbf{x}) & T \text{ fixé } > 0 \\ \theta_\epsilon(\mathbf{x}, t) = 0 & \text{sur } \partial\Omega \\ \Delta \theta_\epsilon(\mathbf{x}, t) = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \quad (3.23)$$

La résolution de (P_ϵ) permet alors en particulier de calculer $\theta_\epsilon(\mathbf{x}, 0) = \theta_{0,\epsilon}(\mathbf{x})$. Par ailleurs la famille de problèmes (P_ϵ) converge, quand $\epsilon \rightarrow 0$, au sens suivant. On résout le problème thermique *direct* obtenu en prenant pour donnée initiale le champ $\theta_{0,\epsilon}(\mathbf{x})$ donné par la résolution de (P_ϵ) ; appelons $\Theta_\epsilon(\mathbf{x}, t)$ le champ de température ainsi obtenu. En particulier on peut calculer $\Theta_\epsilon(\mathbf{x}, T)$ à l'instant T . Lattès et Lions [16] ont prouvé que $\Theta_\epsilon(\mathbf{x}, T) \rightarrow \chi(\mathbf{x})$ quand $\epsilon \rightarrow 0$ (au sens d'une norme qu'on ne précisera pas ici), et aussi que $\Theta_\epsilon(\mathbf{x}, t)$ *ne converge pas* pour $0 < t < T$. La méthode QR fournit donc *une* condition initiale compatible avec la condition finale (aux incertitudes près); il peut exister une infinité de telles conditions initiales. En revanche, elle ne permet pas nécessairement d'obtenir un champ de température proche de la solution du problème rétrograde (3.22) pour les instants intermédiaires.

L'exemple numérique suivant, tiré de [16], concerne le problème (3.22) à une dimension d'espace posé sur le segment $x \in [0, 1]$. Chacune des deux courbes de la figure 3.3 correspond à un choix de condition finale $\chi(x)$ et représente la vraie condition finale $\chi(x)$

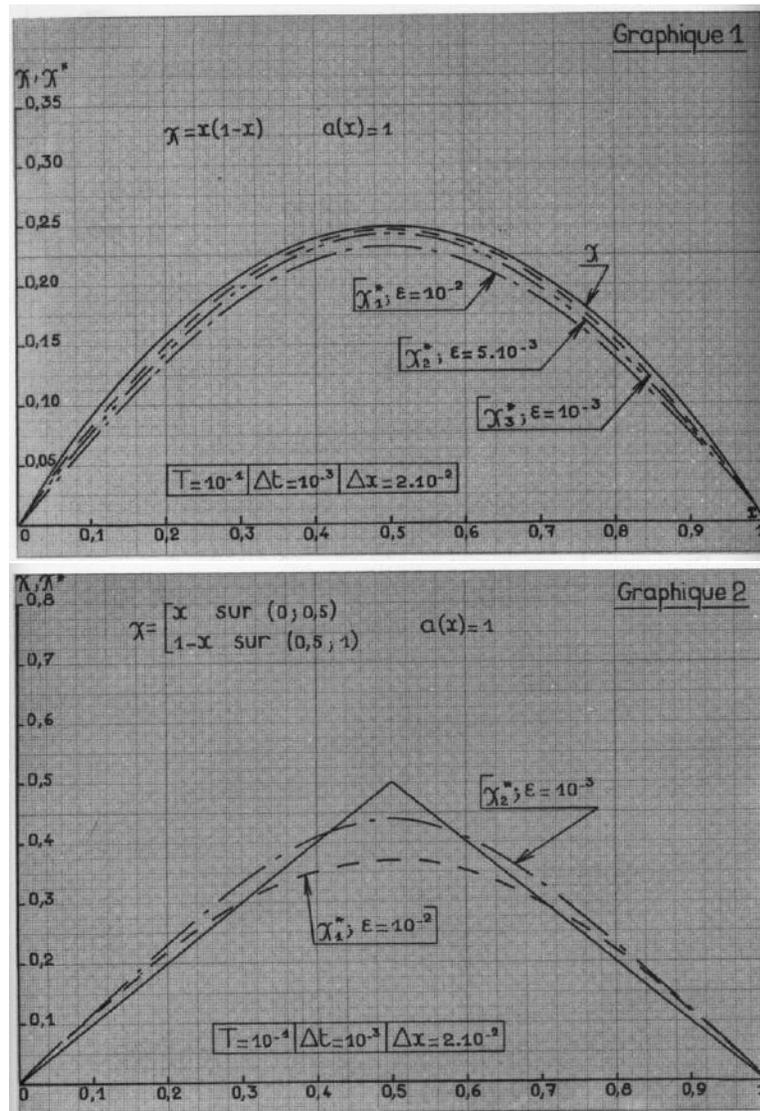


Fig. 3.3: Exemple d'application de la méthode QR sur un problème unidimensionnel (d'après [16]).

comparée avec les conditions finales $\chi^*(x)$ obtenues, pour différentes valeurs de ϵ , par calcul de la condition initiale $\theta_{0,\epsilon}(x)$ à l'aide du problème P_ϵ puis résolution du problème (3.22) direct avec condition initiale $\theta_{0,\epsilon}(x)$. On voit ainsi que la condition initiale $\theta_{0,\epsilon}(x)$ « explique » raisonnablement la condition finale donnée $\chi(x)$.

La méthode QR n'est pas limitée aux problèmes d'évolution rétrogrades. Lattès et Lions développent des méthodes QR pour d'autres problèmes mal posés : le problème de Cauchy (opérateur elliptique et conditions aux limites mal posées, voir chapitre 2) ou contrôle de conditions aux limites. Une version de la méthode QR a été, plus récemment, proposée par Bourgeois [5, 6] pour le problème de Cauchy dans le cas de l'équation de Laplace.

3.2 Un exemple unidimensionnel semi-analytique

On se propose d'illustrer la nécessité et le fonctionnement de la régularisation sur un problème lié à l'équation de la chaleur stationnaire unidimensionnelle : la température u et la conductivité $k(x)$ vérifient

$$\frac{d}{dx}\left(k(x)\frac{du}{dx}\right) + r(x) = 0 \quad x \in [0, L] \quad (3.24)$$

et on considère, pour fixer les idées, les conditions aux limites

$$u(x=0) = u_0 \quad k(L)\frac{du}{dx}(L) = q \quad (3.25)$$

Pour une conductivité $k(x)$, une source r et des valeurs u_0, q données, (3.24-3.25) définissent le problème direct, dont la résolution est extrêmement simple :

$$R(x) = q + \int_x^L r(y) dy \quad u(x) = u_0 + \int_0^x \frac{R(y)}{k(y)} dy \quad (3.26)$$

On considère le problème inverse de la reconstruction de $k(x)$ à partir de la donnée de r, q et supposant $u(x)$ connu sur tout l'intervalle $[0, L]$.

Formellement, $k(x)$ est donc solution de l'équation intégrale

$$u(x) = u_0 + \int_0^x \frac{R(y)}{k(y)} dy$$

qui est linéaire en $1/k$ (c'est une *équation intégrale de Volterra de première espèce*).

CARACTÈRE INSTABLE DU PROBLÈME INVERSE CONTINU. Considérons une perturbation de $k(y)$ de la forme

$$\tilde{k}(y) = k(y) + A \cos \omega y \quad (0 < A < \min_{y \in [0, L]} k(y))$$

Alors

$$\frac{1}{\tilde{k}(y)} - \frac{1}{k(y)} = -A \frac{R(y)}{k(y)(k(y) + A \cos \omega y)} \cos \omega y$$

En supposant le facteur de $\cos \omega y$ continu dans l'équation ci-dessus, le lemme de Riemann-Lebesgue entraîne :

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} \left| \int_0^x \frac{R(y)}{\tilde{k}(y)} dy \right| = 0$$

Ici encore, une perturbation fortement oscillante (par exemple) d'amplitude finie et de fréquence spatiale élevée contamine l'inversion car elle induit une perturbation faible sur la donnée $u(x)$.

Une autre manière de voir consiste à dire qu'intégrer une fois l'équation (3.24) donne

$$\frac{du}{dx} = \frac{R(x)}{k(x)} \quad (3.27)$$

Cela donne $k(x)$ en fonction de la dérivée première de u . Or, si u est mesuré en un nombre fini de points, la dérivation numérique amplifie les erreurs sur u (chapitre 2).

PROBLÈME INVERSE DISCRÉTISÉ. On envisage maintenant une discrétisation très simple : l'intervalle d'étude $[0, L]$ est découpé en n segments égaux de longueur $\Delta x = L/n$, k est supposée constante sur chaque segment. Appelant $x_i = i\Delta x$ ($0 \leq i \leq n$) les extrémités des segments, $u_i = u(x_i)$ les valeurs de u , supposées connues, en ces points et $x_{i-1/2} = (i-1/2)\Delta x$ ($0 \leq i \leq n$) les milieux des segments, l'équation (3.27) est approchée à l'aide de différences finies :

$$\frac{\Delta u_i}{\Delta x} \equiv \frac{u_i - u_{i-1}}{\Delta x} = R(x_{i-1/2}) \frac{1}{k_i} \quad (1 \leq i \leq n) \quad (3.28)$$

Ce système d'équations est diagonal ; il conduit à la *solution non régularisée*

$$k_i = \frac{R(x_{i-1/2})\Delta x}{\Delta u_i} \quad (3.29)$$

Des données u_i exactes conduisent à une solution $(k_i)_{1 \leq i \leq n}$ raisonnable, voire exacte si la discrétisation constante par morceaux est compatible avec la conductivité à identifier. Des données u_i inexactes, en revanche, peuvent perturber gravement le résultat. Par exemple, si les mesures sont

$$\tilde{u}_i = u_i + \varepsilon_i \quad (\varepsilon_i : \text{erreur sur la mesure } u_i)$$

l'inversion (3.29) donne

$$\tilde{k}_i = \frac{R(x_{i-1/2})\Delta x}{\Delta \tilde{u}_i}$$

et la différence relative entre \tilde{k}_i et k_i est donnée par

$$\rho_i \equiv \frac{\tilde{k}_i}{k_i} - 1 = \frac{\Delta u_i - \Delta \tilde{u}_i}{\Delta \tilde{u}_i} = -\frac{\Delta \varepsilon_i}{\Delta u_i + \Delta \varepsilon_i} \quad (3.30)$$

avec $\Delta \varepsilon_i = \varepsilon_i - \varepsilon_{i-1}$. En développant au premier ordre en Δx la différence finie Δu_i , on obtient

$$\rho_i = \frac{\Delta \varepsilon_i}{\Delta \varepsilon_i + \frac{1}{2}u'(x_{i-1/2})\Delta x}$$

On remarque ainsi que

- Pour une discrétisation fixée (Δx invariable), $\rho_i \rightarrow 0$ si $|\varepsilon_i| \rightarrow 0$.
- En revanche, pour un niveau d'erreur ε_i fixé sur la mesure u_i , ρ_i ne tend pas vers zéro quand le pas Δx de discrétisation décroît. La figure 3.4 illustre ce point, avec $n = 5, 6, 15, 50$ et un défaut de conductivité $\Delta k/k_0 = +0.5$ de support $[L/3, 2L/3]$; les ε_i sont des nombres aléatoires uniformément répartis sur $[-\varepsilon, \varepsilon]$ avec ici $\varepsilon = 10^{-2}$.

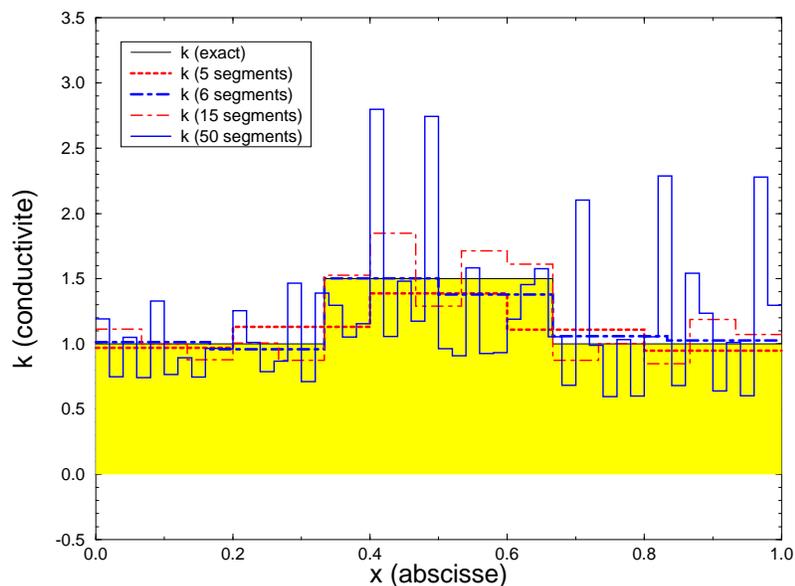


Fig. 3.4: Inversion non régularisée et influence du pas de discrétisation : exemple.

RÉGULARISATION. La régularisation la plus simple consiste à utiliser comme information *a priori* la proximité des k_i avec une valeur de référence k_0 (on parle parfois de *régularisation d'ordre zéro*). Les \tilde{k}_i sont alors solution du problème de moindres carrés

$$\min_{k_1, \dots, k_n} \sum_{i=1}^n \left(\frac{\Delta \tilde{u}_i}{\Delta x} \tilde{k}_i - R_i \right)^2 + \alpha \sum_{i=1}^n (\tilde{k}_i - k_0)^2 \quad (3.31)$$

où les $\Delta \tilde{u}_i$ proviennent des données disponibles, *a priori bruitées*, \tilde{u}_i et $R_i = R(x_{i-1/2})$.

Le calcul de la solution exacte au problème (3.31) est très simple : le gradient s'annule

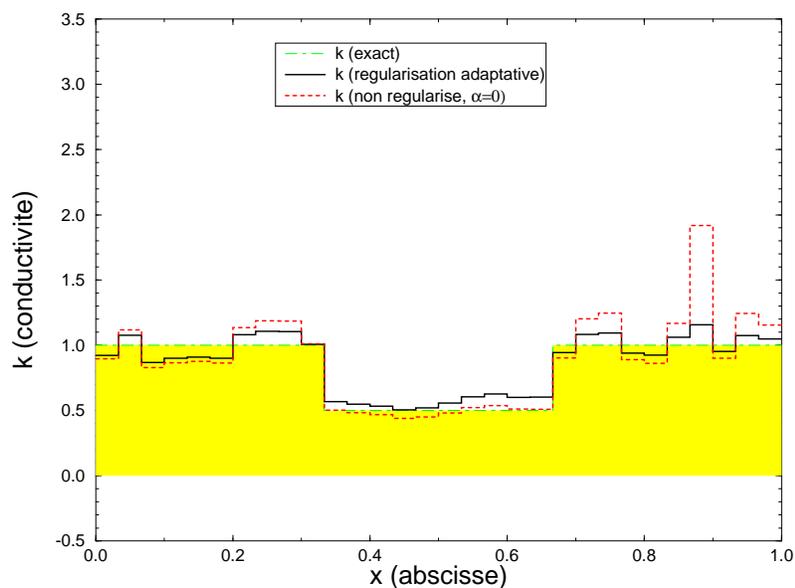


Fig. 3.5: Effet de la régularisation d'ordre 0 : $\varepsilon = 0.01$, 30 segments.

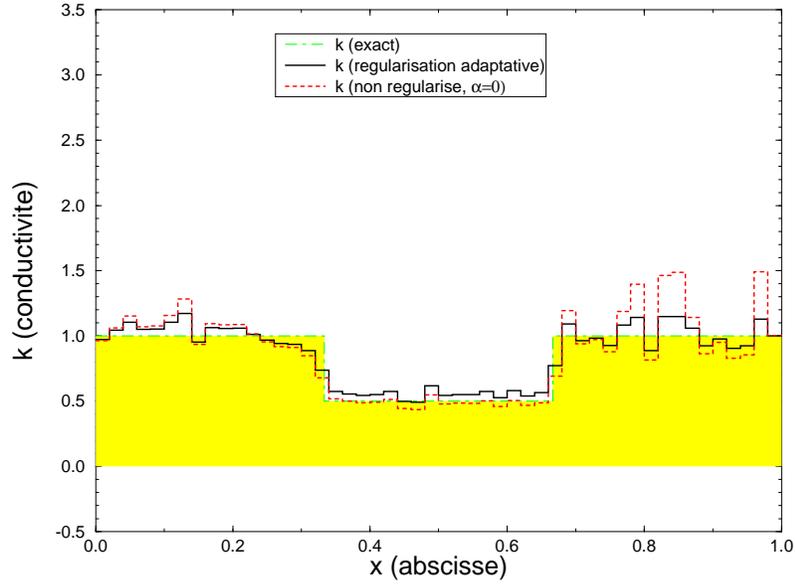


Fig. 3.6: Effet de la régularisation d'ordre 0 : $\varepsilon = 0.005$, 50 segments.

si

$$\frac{\Delta \tilde{u}_i}{\Delta x} \left(\frac{\Delta \tilde{u}_i}{\Delta x} \tilde{k}_i - R_i \right) + \alpha (\tilde{k}_i - k_0) = 0$$

ce qui donne :

$$\tilde{k}_i = \frac{\Delta \tilde{u}_i R_i \Delta x + \alpha \Delta x^2 k_0}{(\Delta \tilde{u}_i)^2 + \alpha \Delta x^2} \quad (3.32)$$

L'erreur relative ρ_i commise sur k_i vaut alors, en fonction des erreurs sur les données et du paramètre de régularisation :

$$\rho_i = \frac{\Delta \tilde{u}_i}{(\Delta \tilde{u}_i)^2 + \alpha \Delta x^2} \Delta \varepsilon_i + \frac{1}{(\Delta \tilde{u}_i)^2 + \alpha \Delta x^2} \left(\frac{k_0}{k_i} - 1 \right) \alpha \quad (3.33)$$

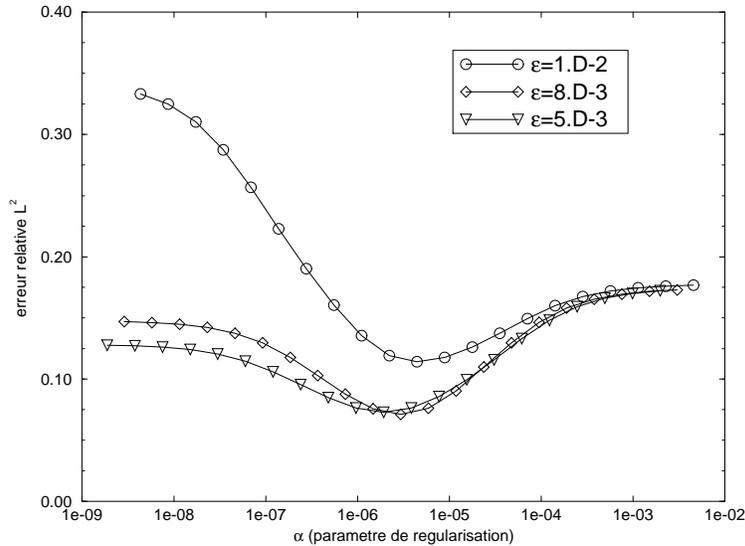


Fig. 3.7: Variation de l'erreur relative $E(\alpha)$ avec le paramètre de régularisation α .

	$E(0)$	$E(\alpha_{opt})$	$E(\alpha_{min})$
$\varepsilon = 0.02, \Delta x = L/30$	0.457	0.190	0.172
$\varepsilon = 0.01, \Delta x = L/30$	0.211	0.115	0.108
$\varepsilon = 0.005, \Delta x = L/30$	0.092	0.066	0.065
$\varepsilon = 0.01, \Delta x = L/60$	0.531	0.207	0.178
$\varepsilon = 0.005, \Delta x = L/50$	0.175	0.109	0.108
$\varepsilon = 0.002, \Delta x = L/60$	0.066	0.062	0.060

Tableau 3.1: Effet de la régularisation d'ordre 0 : erreur relative L^2 commise sur k avec et sans régularisation.

L'effet de cette régularisation est illustré sur les figures 3.5, 3.6. Le tableau 3.1 permet de comparer les erreurs relatives en norme L^2 :

$$E(\alpha) = \left\{ \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n n \left(\frac{\tilde{k}_i(\alpha)}{k_i} - 1 \right)^2 \right\}^{1/2} \quad (3.34)$$

$\tilde{k}_i(\alpha)$ désignant la solution obtenue pour les données bruitées et avec la valeur α du paramètre de régularisation et k_i la solution exacte.

- $\alpha = 0$ (pas de régularisation).
- $\alpha = \alpha_{opt}$, paramètre de régularisation optimal obtenu par le critère de Morozov (3.7).
- $\alpha = \alpha_{min}$, valeur de α pour laquelle $E(\alpha)$ est minimum pour le jeu de données u_i utilisé.

Le calcul de α_{min} n'est réalisable que quand la solution exacte du problème inverse est connue à l'avance!. Il est intéressant de constater que α_{opt} trouvé par régularisation itérative est proche de α_{min} . La figure 3.7 met en évidence le fait que l'erreur relative $E(\alpha)$ atteint un minimum pour une valeur $\alpha = \alpha_{min} > 0$.

RÉGULARISATION D'ORDRE UN. Elle consiste à faire porter l'information *a priori* sur le caractère peu oscillant de la solution k , et donc à pénaliser les dérivées de normé élevée. Après discrétisation de cette dérivée par différences finies, les \tilde{k}_i sont solution du problème

	$\alpha = 0$	$\alpha = \alpha_{opt}$	$\alpha = \alpha_{min}$
$\varepsilon = 0.02, \Delta x = L/30$	0.397	0.175	0.164
$\varepsilon = 0.01, \Delta x = L/30$	0.228	0.109	0.096
$\varepsilon = 0.005, \Delta x = L/30$	0.0350	0.0316	0.0304
$\varepsilon = 0.01, \Delta x = L/60$	0.392	0.144	0.135
$\varepsilon = 0.005, \Delta x = L/60$	0.174	0.074	0.0735
$\varepsilon = 0.002, \Delta x = L/60$	0.069	0.047	0.0467

Tableau 3.2: Effet de la régularisation d'ordre 1 : erreur relative L^2 commise sur k avec et sans régularisation.

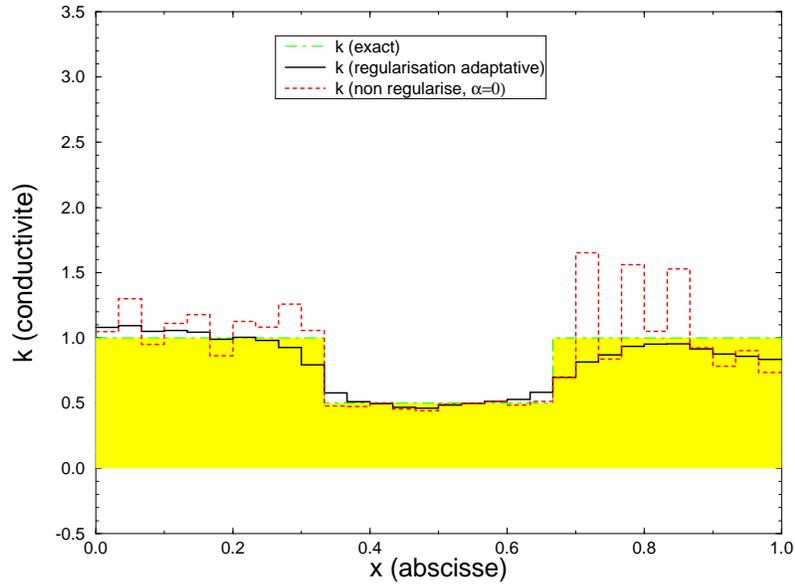


Fig. 3.8: Effet de la régularisation d'ordre 1 : $\varepsilon = 0.01$, 30 segments.

de moindres carrés

$$\min_{k_1, \dots, k_n} \sum_{i=1}^n \left(\frac{\Delta \tilde{u}_i}{\Delta x} \tilde{k}_i - R_i \right)^2 + \alpha \sum_{i=1}^{n-1} \left(\frac{\tilde{k}_{i+1} - \tilde{k}_i}{\Delta x} \right)^2 \quad (3.35)$$

L'effet de cette régularisation est illustré sur les figures 3.8, 3.9. Le tableau 3.2 permet de comparer les erreurs relatives (3.34). On constate une nouvelle fois que α_{opt} trouvé par régularisation itérative est proche de α_{min} .

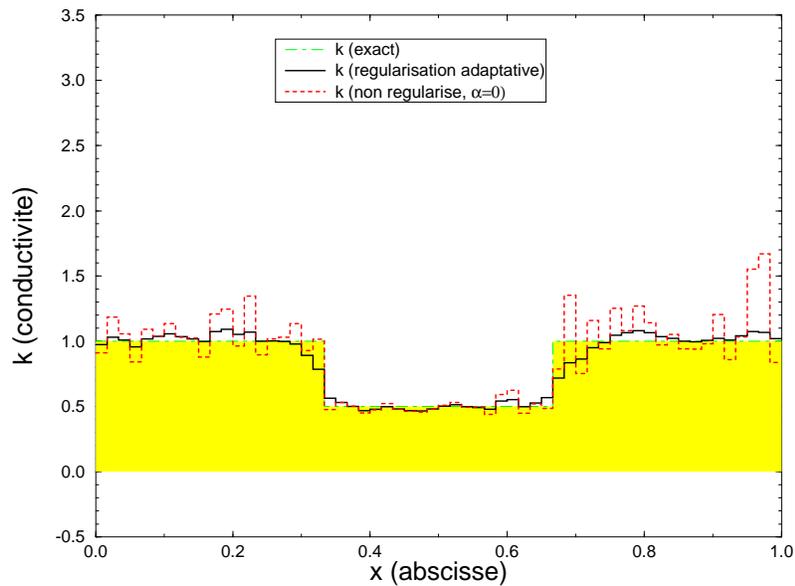


Fig. 3.9: Effet de la régularisation d'ordre 1 : $\varepsilon = 0.005$, 60 segments.

3.3 Approche probabiliste des problèmes inverses.

3.3.1 Principe.

L'approche probabiliste des problèmes inverses adopte le point de vue suivant, radicalement différent des méthodes de régularisation : l'information que nous possédons sur une variable \mathbf{x} peut être entièrement contenue dans la donnée d'une fonction densité de probabilité $f_X(\mathbf{x})$. Par exemple, pour une certaine grandeur scalaire x :

- x prend avec certitude la valeur x_0 :

$$f_X(x) = \delta(x - x_0)$$

- x peut prendre, de manière équiprobable, toutes les valeurs comprises entre a et b :

$$f_X(x) = \frac{1}{b-a} \quad (a \leq x \leq b) \quad f_X(x) = 0 \quad \text{sinon}$$

Le traitement des problèmes inverses, dans le principe de cette approche, se décompose comme suit :

1. Les mesures \mathbf{d} et les inconnues \mathbf{p} sont initialement considérées comme statistiquement indépendantes. On introduit :
 - Une loi d'erreur sur les mesures \mathbf{d} , sous la forme d'une densité de probabilité $f_D(\mathbf{d})$.
 - Des informations *a priori* sur les valeurs de \mathbf{p} (être positif, être compris entre telle et telle valeur, etc...) qui correspondent généralement à une connaissance *qualitative* de l'inconnue \mathbf{p} , également sous la forme d'une densité de probabilité $f_P(\mathbf{p})$.
 - Une loi d'erreur qui caractérise le degré supposé d'exactitude du modèle physique direct \mathbf{G} , exprimée par une densité de probabilité $f_G(\mathbf{p}, \mathbf{d})$.

Les densités f_P et f_D décrivent l'état de notre connaissance de \mathbf{d} et \mathbf{p} *avant prise en compte du modèle physique \mathbf{G}* (dans la suite, ce stade est qualifié d'« *a priori* »), tandis que la densité f_G permet d'exprimer une plus ou moins grande confiance.

2. En fait \mathbf{d} et \mathbf{p} sont *corrélés* du fait de l'existence du modèle physique \mathbf{G} . Tarantola propose donc de traduire mathématiquement cette *conjonction* de deux états d'information indépendants sur les grandeurs \mathbf{p} et \mathbf{d} par une densité de probabilité « *a posteriori* » $F(\mathbf{p}, \mathbf{d})$. Cette densité décrit donc toute l'information que l'on possède après exploitation de la corrélation par le modèle \mathbf{G} . L'opération de conjonction $f_1, f_2 \rightarrow C(f_1, f_2)$ de deux états d'information (représentés par deux densités de probabilité f_1, f_2), telle que Tarantola la définit, repose sur une analogie avec le connecteur logique « *et* » ; on lui demande de jouir des propriétés suivantes :

- Commutativité : $C(f_1, f_2) = C(f_2, f_1)$.
- Associativité : $C(f_1, C(f_2, f_3)) = C(C(f_1, f_2), f_3)$.
- Invariance par reparamétrisation.
- La conjonction d'un état d'information f_1 avec l'état d'« ignorance totale » μ redonne l'état initial f_1 : $C(f_1, \mu) = f_1$.
- Continuité absolue par rapport à f_1, f_2 c'est-à-dire :

$$[f_1(A) = 0 \text{ ou } f_2(A) = 0] \Rightarrow [C(f_1, f_2)(A) = 0]$$

μ désignant la densité de probabilité dite « d'information nulle » ou encore d'« ignorance totale ». Une définition de $C(\cdot, \cdot)$ qui remplit ces propriétés est [22] :

$$C(f_1, f_2) = \frac{f_1 f_2}{\mu} \quad (3.36)$$

En particulier, la densité a posteriori $F(\mathbf{p}, \mathbf{d})$, suivant ce raisonnement, est donnée par :

$$F(\mathbf{p}, \mathbf{d}) = \frac{f_D(\mathbf{d}) f_P(\mathbf{p}) f_G(\mathbf{p}, \mathbf{d})}{\mu(\mathbf{p}, \mathbf{d})} \quad (3.37)$$

Ce concept de conjonction peut aussi être interprété comme l'écriture d'une probabilité conditionnelle « généralisée » (présentation bayésienne), où le supplément d'information est constitué par la relation $\mathbf{d} = \mathbf{G}(\mathbf{p})$.

Le résultat (3.37) est l'élément central de l'approche stochastique des problèmes inverses. Il fournit *la solution* du problème inverse au sens où la densité a posteriori $F(\mathbf{p}, \mathbf{d})$ contient *toute* l'information disponible sur \mathbf{p} et \mathbf{d} après prise en compte (a) des erreurs de mesure, (b) des informations a priori et (c) du modèle physique. En fait, le résultat (3.37) est un peu trop général pour être aisément exploitable dans la pratique et on souhaite surtout connaître la loi de probabilité *a posteriori* $F_P(\mathbf{p})$ sur \mathbf{p} . Si on fait les hypothèses (peu restrictives) suivantes :

1. $\mu(\mathbf{p}, \mathbf{d}) = \mu_P(\mathbf{p}) \mu_D(\mathbf{d})$
2. $f_G(\mathbf{p}, \mathbf{d}) = f_G(\mathbf{d} | \mathbf{p}) \mu_P(\mathbf{p})$

qui expriment (a) qu'on a affaire à des espaces \mathcal{D} et \mathcal{P} qui représentent des grandeurs physiquement très différentes et (b) que l'écart au modèle exact suit une loi de probabilité conditionnelle sur \mathbf{d} pour tout \mathbf{p} donné. $F_P(\mathbf{p})$ s'écrit alors comme la loi marginale de F à \mathbf{p} fixé :

$$F_P(\mathbf{p}) = \int_{\mathcal{D}} F(\mathbf{p}, \mathbf{d}) d\mathbf{d} = f_P(\mathbf{p}) \int_{\mathcal{D}} \frac{f_D(\mathbf{d}) f_G(\mathbf{d} | \mathbf{p})}{\mu_D(\mathbf{d})} d\mathbf{d} \quad (3.38)$$

Si, de plus, le modèle physique est exact, cela se traduit par :

$$f_G(\mathbf{d} | \mathbf{p}) = \delta(\mathbf{d} - \mathbf{G}(\mathbf{p})) \quad (3.39)$$

$$F_P(\mathbf{p}) = f_P(\mathbf{p}) \left(\frac{f_D(\mathbf{d})}{\mu_D(\mathbf{d})} \right)_{\mathbf{d}=\mathbf{G}(\mathbf{p})} \quad (3.40)$$

Par contraste avec toutes les remarques formulées plus haut sur les difficultés liées aux problèmes inverses, les résultats (3.37) ou (3.38) peuvent dérouter par leur simplicité apparente. Les difficultés ont, en fait, été transférées dans le pré-traitement et le post-traitement qui accompagnent implicitement (3.37) ou (3.38). En effet, la modélisation du problème et des diverses informations a priori est entièrement laissée au jugement de l'analyste. D'autre part, le calcul (3.37) ou (3.38) fournit en sortie une *fonction (densité de probabilité)* de la « variable » \mathbf{p} qu'il faut interpréter (exploration de la « surface » $\mathbf{y} = F_P(\mathbf{p})$) pour achever de résoudre le problème inverse. Or \mathbf{p} peut être une variable scalaire, un n -vecteur ou même une fonction. Cela fait qu'une grande partie du contenu informatif de la densité F_P est, en pratique, *inaccessible dans la majorité des cas* : il est quasiment impossible d'avoir une vue globale d'une fonction de plus de deux variables. Cette dernière constatation n'est pas propre à l'approche probabiliste : la minimisation

d'une fonctionnelle « à la Tikhonov » se fera également « à l'aveuglette » par tâtonnements, pour des raisons identiques.

Ceci étant, il est malgré tout possible d'extraire des renseignements significatifs sur \mathbf{p} à partir de F_G :

- valeur moyenne a posteriori de \mathbf{p} .
- valeur(s) de \mathbf{p} de plus forte probabilité a posteriori.
- estimateur de dispersion a posteriori sur \mathbf{p} (écart-type, ...).
- corrélations a posteriori.
- ...

En particulier, la possibilité de calculer des indicateurs de dispersion et de corrélation, qui fournissent des informations sur le *degré de confiance* vis-à-vis de l'estimation obtenue, constitue un avantage conceptuel essentiel.

Enfin, pour clore cette présentation de principe, remarquons qu'elle ne s'applique, telle quelle, qu'aux problèmes inverses discrets. La raison principale est qu'une densité de probabilité n'est définie que pour des variables aléatoires *de dimension finie*. Tarantola considère que le problème théorique de l'extension rigoureuse à la dimension infinie des concepts probabilistes nécessaires à son approche est ouvert. Certaines extensions à la dimension infinie sont toutefois possibles, ce qui fera l'objet du 3.3.3.

3.3.2 Problèmes inverses discrets.

Ainsi, c'est en dimension finie que les expressions (3.37), (3.38) prennent un sens clairement défini. Pour la résolution pratique de problèmes inverses discrets ou discrétisés, il reste à indiquer les choix de lois de probabilité qui permettent d'explicitier ces expressions et de les exploiter. Tarantola s'est essentiellement attaché aux lois (i) gaussiennes et (ii) gaussiennes généralisées.

LOIS DE PROBABILITÉ GAUSSIENNES. Rappelons que le vecteur aléatoire $\mathbf{y} = [y_j]_{j=1,n}^T$ suit une loi gaussienne $\mathcal{N}(\langle \mathbf{y} \rangle, \mathbf{C})$ de moyenne $\langle \mathbf{y} \rangle$ et de matrice de covariance \mathbf{C} (définie positive) si la densité de probabilité correspondante s'écrit :

$$f(\mathbf{y}) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n \det(\mathbf{C})}} \exp\left(-\frac{1}{2}(\mathbf{y} - \langle \mathbf{y} \rangle)^T \mathbf{C}^{-1}(\mathbf{y} - \langle \mathbf{y} \rangle)\right) \quad (3.41)$$

Supposons que :

1. L'écart entre la mesure observée \mathbf{d}_{obs} et la mesure vraie \mathbf{d} suit une loi gaussienne $\mathcal{N}(\mathbf{d}_{obs}, \mathbf{C}_d)$.
2. L'écart entre la mesure réelle \mathbf{d} et la mesure calculée $\mathbf{G}(\mathbf{p})$ suit une loi gaussienne $\mathcal{N}(\mathbf{G}(\mathbf{p}), \mathbf{C}_T)$ (incertitude de modélisation).

L'intégrale (3.38) est calculable analytiquement (produit de convolution des densités, correspondant à la somme des variables aléatoires) et la loi de probabilité a posteriori sur \mathbf{p} est donnée par :

$$F_P(\mathbf{p}) = \text{cste} f_P(\mathbf{p}) \exp\left(-\frac{1}{2}(\mathbf{G}(\mathbf{p}) - \mathbf{d}_{obs})^T \mathbf{C}_D^{-1}(\mathbf{G}(\mathbf{p}) - \mathbf{d}_{obs})\right) \quad (3.42)$$

$$\mathbf{C}_D = \mathbf{C}_d + \mathbf{C}_T \quad (3.43)$$

Les incertitudes de modélisation et de mesure s'ajoutent, on peut donc raisonner comme si le modèle était exact, \mathbf{C}_D ne représentant que des incertitudes expérimentales.

Si on suppose de plus que l'information a priori sur \mathbf{p} est également représentée par une loi gaussienne $\mathcal{N}(\mathbf{p}_{pr}, \mathbf{C}_P)$, on obtient immédiatement d'après (3.41) :

$$F_P(\mathbf{p}) = \text{cste} \exp\left(-\frac{1}{2}S(\mathbf{p})\right) \quad (3.44)$$

avec

$$S_P(\mathbf{p}) = (\mathbf{G}(\mathbf{p}) - \mathbf{d}_{obs})^T \mathbf{C}_D^{-1} (\mathbf{G}(\mathbf{p}) - \mathbf{d}_{obs}) + (\mathbf{p} - \mathbf{p}_{pr})^T \mathbf{C}_P^{-1} (\mathbf{p} - \mathbf{p}_{pr}) \quad (3.45)$$

L'opérateur \mathbf{G} est linéaire : $\mathbf{G}(\mathbf{p}) = \mathbf{G}\mathbf{p}$. Dans ce cas, la quantité $S(\mathbf{p})$ est quadratique et F_P est gaussienne. Elle est donc entièrement caractérisée par (i) sa moyenne $\langle \mathbf{y} \rangle$ et (ii) sa matrice de covariance \mathbf{C} . Le calcul de ces deux quantités, à partir des données \mathbf{G} , \mathbf{p}_{pr} , \mathbf{C}_P , \mathbf{d}_{obs} , \mathbf{C}_D , ne fait intervenir que l'algèbre linéaire (une seule inversion de matrice) :

$$\mathbf{C} = [\mathbf{G}^T \mathbf{C}_D^{-1} \mathbf{G} + \mathbf{C}_P^{-1}]^{-1} \quad (3.46)$$

$$\langle \mathbf{p} \rangle = \mathbf{C} [\mathbf{G}^T \mathbf{C}_D^{-1} \mathbf{d}_{obs} + \mathbf{C}_P^{-1} \mathbf{p}_{pr}] \quad (3.47)$$

Le cadre gaussien, par la simplicité de sa mise en oeuvre et de l'interprétation du résultat, est ici privilégié. Il semble que ce soit le seul pour lequel la solution du P.I ne nécessite qu'une inversion de matrice – et ne fasse pas intervenir un algorithme (itératif) d'optimisation. Il fournit en fait une interprétation probabiliste de méthodes « classiques » de moindres carrés « pondérés » et « régularisés » au sens de Tikhonov :

- Si $\mathbf{C}_P = \infty$ (ie pas d'information a priori sur la valeur de \mathbf{p}), on retrouve l'ajustement « simple » par moindres carrés entre paramètres inconnus et mesures (recherche de quasi-solutions).
- Si $\mathbf{C}_P < \infty$ on retrouve l'ajustement par moindres carrés avec addition d'un terme « régularisant » dont le coefficient multiplicateur est fixé a priori par l'interprétation statistique et quantifie les degrés relatifs de confiance accordés aux mesures et aux informations a priori.

L'opérateur \mathbf{G} n'est pas linéaire. . Dans ce cas, l'expression de $S(\mathbf{p})$ ne peut pas être simplifiée. On ne sait a priori rien sur l'existence ou l'unicité d'un vecteur \mathbf{p} qui minimise S , ce qui rend beaucoup plus difficile l'exploration de l'hypersurface $y = F_P(p_1, \dots, p_n)$. Toutefois, si on suppose (a) qu'il existe un minimum unique \mathbf{p}_∞ pour S et (b) que le modèle \mathbf{G} est linéarisable autour de \mathbf{p}_∞ , on peut exhiber une matrice de covariance \mathbf{C} tangente autour de \mathbf{p}_∞ qui s'écrit :

$$\mathbf{C} = [\mathbf{J}_\infty^T \mathbf{C}_D^{-1} \mathbf{J}_\infty + \mathbf{C}_P^{-1}]^{-1} \quad (3.48)$$

$$\mathbf{J}_\infty = (\mathbf{grad}\mathbf{G})(\mathbf{p}_\infty) \quad (3.49)$$

Le point important des résultats (3.46)-(3.47) et (3.48)-(3.49) est l'obtention de la *matrice de covariance a posteriori* qui caractérise l'incertitude sur l'estimation $\langle \mathbf{p} \rangle$ (resp. \mathbf{p}_∞) obtenue. Son examen permet de dire si l'inversion nous a fait gagner ou non de l'information.

Un autre trait saillant des lois gaussiennes est que la valeur de $S(\langle \mathbf{p} \rangle)$ suit une loi du χ^2 à m (m : nombre de mesures) degrés de liberté, dont la moyenne et l'écart-type valent respectivement m et $(\sqrt{2m})$. Une valeur comparativement éloignée de l'intervalle $[m - \sqrt{2m}, m + \sqrt{2m}]$ signifie que les hypothèses gaussiennes formulées doivent être remises en cause : il se peut par exemple qu'un petit nombre de mesures soient *aberrantes*. Ce manque de robustesse des méthodes de moindres carrés, intimement liées aux lois gaussiennes, est bien connu et peut inciter à s'intéresser à d'autres méthodes d'inversion, fondées par exemple sur des lois de probabilité gaussiennes généralisées.

LOIS DE PROBABILITÉ GAUSSIENNES GÉNÉRALISÉES. Une autre classe importante d'hypothèses conduisant à une expression analytique de $F_P(\mathbf{p})$ est la suivante :

1. On suppose que le modèle physique est exact.
2. Les erreurs sur les mesures d_i sont indépendantes.
3. Les incertitudes sur les valeurs a priori p_j^{pr} sont indépendantes.
4. Les densités de probabilité a priori sur \mathbf{p} et \mathbf{d} sont du type « gaussienne généralisée » d'ordre p ($1 \leq p < \infty$) :

$$f_P(\mathbf{p}) = \text{Cste} \prod_{j=1}^n \exp \left(-\frac{1}{p} \frac{|p_j - p_j^{pr}|^p}{(\sigma_j^P)^p} \right) \quad (3.50)$$

$$\frac{f_D(\mathbf{d})}{\mu_D(\mathbf{d})} = \text{Cste} \prod_{i=1}^m \exp \left(-\frac{1}{p} \frac{|g_i(\mathbf{p}) - d_i^{obs}|^p}{(\sigma_i^D)^p} \right) \quad (3.51)$$

Ces lois sont entièrement caractérisées par la donnée (i) des moyennes (ici \mathbf{p}^{pr} et \mathbf{d}^{obs} respectivement) et (ii) des estimateurs de dispersion en norme L^p (ici $(\sigma_i^D)^p$ et $(\sigma_j^P)^p$ respectivement). D'une manière plus précise, une loi gaussienne généralisée d'ordre p du type (3.50) est celle de *plus grand étalement possible* (ou encore de *plus faible contenu informatif*) parmi toutes les lois de probabilité de moyenne et d'estimateur de dispersion en norme L^p donnés.

La densité a posteriori $F_P(\mathbf{p})$ qui correspond aux hypothèses (1), (2), (3), (4) ci-dessus est alors :

$$F_P(\mathbf{p}) = \text{Cste} \exp \left(-\frac{1}{p} S(\mathbf{p}) \right) \quad (3.52)$$

avec

$$S(\mathbf{p}) = \sum_{j=1}^n \frac{|p_j - p_j^{pr}|^p}{(\sigma_j^P)^p} + \sum_{i=1}^m \frac{|g_i(\mathbf{p}) - d_i^{obs}|^p}{(\sigma_i^D)^p} \quad (3.53)$$

F_P admet un maximum unique \mathbf{p}_∞ , qui correspond à la minimisation de $S(\mathbf{p})$. On voit que la loi gaussienne généralisée est associée à la minimisation d'un résidu en norme L^p .

- Le cas $p = 2$ dans (3.50)-(3.51) redonne les lois gaussiennes ordinaires.
- Le cas $p = 1$ correspond aux densités (3.50), (3.51), les plus « étalées » (voir figure 3.10), c'est à dire aux lois d'écart les plus souples. Sa robustesse est meilleure que pour $p = 2$; en effet une mesure « aberrante » d_k se manifeste par la valeur absolue du résidu $g_k(\mathbf{p}) - d_k$ pour $p = 1$ mais par le carré de ce résidu pour $p = 2$. Ceci crée donc un écart relatif sur la fonctionnelle $S(\mathbf{p})$ beaucoup plus important et, de ce fait, une perturbation beaucoup plus sensible, dans ce dernier cas.

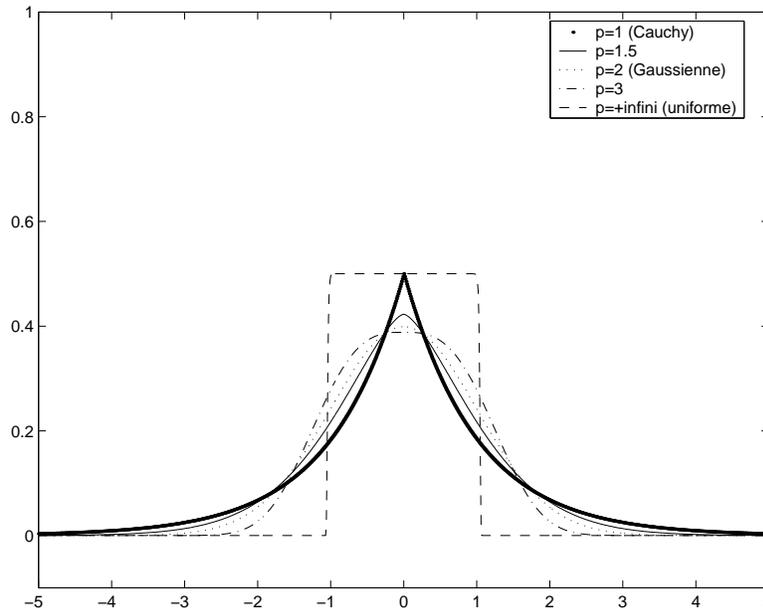


Fig. 3.10: Gaussiennes généralisées à une variable ($p = 1, 1.5, 2, 3, \infty$).

Pour illustrer cette notion de robustesse, reprenons un exemple, proposé dans [22], de régression linéaire ; le propos est de montrer comment « résiste » l'inversion quand on ajoute, à un ensemble de points alignés aux incertitudes expérimentales près, un point supplémentaire *aberrant* (figure 3.11). On observe la droite obtenue par régression, les lois d'erreurs étant successivement gaussiennes ($p = 2$ - figure 3.12) et exponentielle ($p = 1$ - figure 3.13), en considérant pour chaque cas des données saines puis des données polluées. La partie gauche de chaque figure représente sous forme de carte la densité de probabilité a posteriori $F_P(a, b)$ dans le plan (a, b) , a et b étant respectivement la pente et l'ordonnée à l'origine de la droite de régression.

- Enfin, quand $p \rightarrow \infty$, la gaussienne généralisée tend vers une densité uniforme ; (3.50), (3.51) deviennent :

$$p_j^{pr} - \sigma_j^P \leq p_j \leq p_j^{pr} + \sigma_j^P \quad (3.54)$$

$$d_i - \sigma_i^D \leq g_i(\mathbf{p}) \leq d_i + \sigma_i^D \quad (3.55)$$

La densité de probabilité a posteriori (3.52)-(3.53), quant à elle, est alors donnée par :

$$F_P(\mathbf{p}) = \begin{cases} \text{Cste} & \text{si les bornes (3.54)-(3.55) sont satisfaites} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (3.56)$$

On remarque que, puisque F_P est uniforme, le point de vraisemblance maximale n'est pas défini. De plus, l'expression (3.53) de $S(\mathbf{p})$ (pour $p \rightarrow \infty$) vaut soit zéro, soit l'infini, suivant que les bornes (3.54)-(3.55) sont satisfaites ou non. Ces inconvénients peuvent être contournés en remarquant que, pour p fini, il est équivalent de chercher le minimum de $S(\mathbf{p})$ ou celui de $R(\mathbf{p}) = [S(\mathbf{p})]^{1/p}$. Quand $p \rightarrow \infty$, $R(\mathbf{p})$ devient :

$$\max_{i,j} \left\{ \left(\frac{|p_j - p_j^{pr}|^p}{(\sigma_j^P)^p} \right)_{1 \leq j \leq n}, \left(\frac{|g_i(\mathbf{p}) - d_i^{obs}|^p}{(\sigma_i^D)^p} \right)_{1 \leq i \leq m} \right\} \quad (3.57)$$

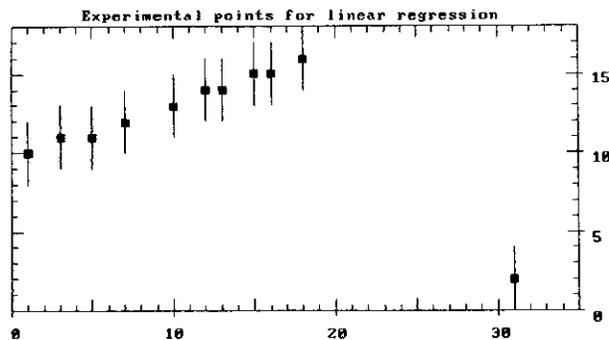


Fig. 3.11: Points expérimentaux (dont un « aberrant ») s'apprêtant à subir une régression linéaire.

On peut alors chercher la valeur \mathbf{p}_∞ de \mathbf{p} qui minimise $R(\mathbf{p})$, c'est-à-dire qui satisfait le critère du *minimax* :

$$\min_{\mathbf{p}} \max_{i,j} \left\{ \left(\frac{|p_j - p_j^{pr}|^p}{(\sigma_j^P)^p} \right)_{1 \leq j \leq n}, \left(\frac{|g_i(\mathbf{p}) - d_i^{obs}|^p}{(\sigma_i^D)^p} \right)_{1 \leq i \leq m} \right\} \quad (3.58)$$

Outre les diverses méthodes de gradient usuelles en optimisation, les cas $p = 1$ (minimisation d'une somme de valeurs absolues) et $p = \infty$ (minimax) peuvent être résolus par programmation linéaire (simplexe) si \mathbf{G} est linéaire [19].

3.3.3 Problèmes inverses en dimension infinie.

Dans l'état actuel des connaissances, il semble que l'approche probabiliste, telle que développée par Tarantola, des problèmes inverses continus a un degré de généralité bien moindre que dans le cas des problèmes discrets. En effet, il nous faut considérer non plus des variables aléatoires (de dimension finie) mais des fonctions aléatoires; en particulier le concept de « densité de probabilité » n'a pas d'équivalent pour les fonctions aléatoires. Comme nous allons le voir, l'approche « fonctionnelle » existe néanmoins pour des fonctions aléatoires gaussiennes [22].

FONCTIONS ALÉATOIRES. Une fonction aléatoire, notée $t \rightarrow X(t)$, est une variable aléatoire dont chaque réalisation est une fonction (ordinaire) $t \rightarrow x(t)$. Pour t fixé, $X(t)$ est une variable aléatoire (monodimensionnelle) ordinaire, qui admet une densité de probabilité $f_t(x)$. Si cette densité est connue pour tout t , il est possible de calculer des indicateurs classiques : moyenne

$$m(t) = \int x f_t(x) dx \quad (3.59)$$

écart-type

$$\sigma^2(t) = \int (x - m(t))^2 f_t(x) dx \quad (3.60)$$

etc... par les définitions classiques. Ces indicateurs sont des fonctions (ordinaires) de t . Par contre, la connaissance de $f_t(x)$ ne donne pas d'information sur la *corrélation* entre les variables aléatoires $X(t_1)$ et $X(t_2)$. Cette corrélation ne peut découler que de la donnée de la densité-produit $f_{t_1, t_2}(x_1, x_2)$ pour tout (t_1, t_2) . En particulier, la *fonction covariance*

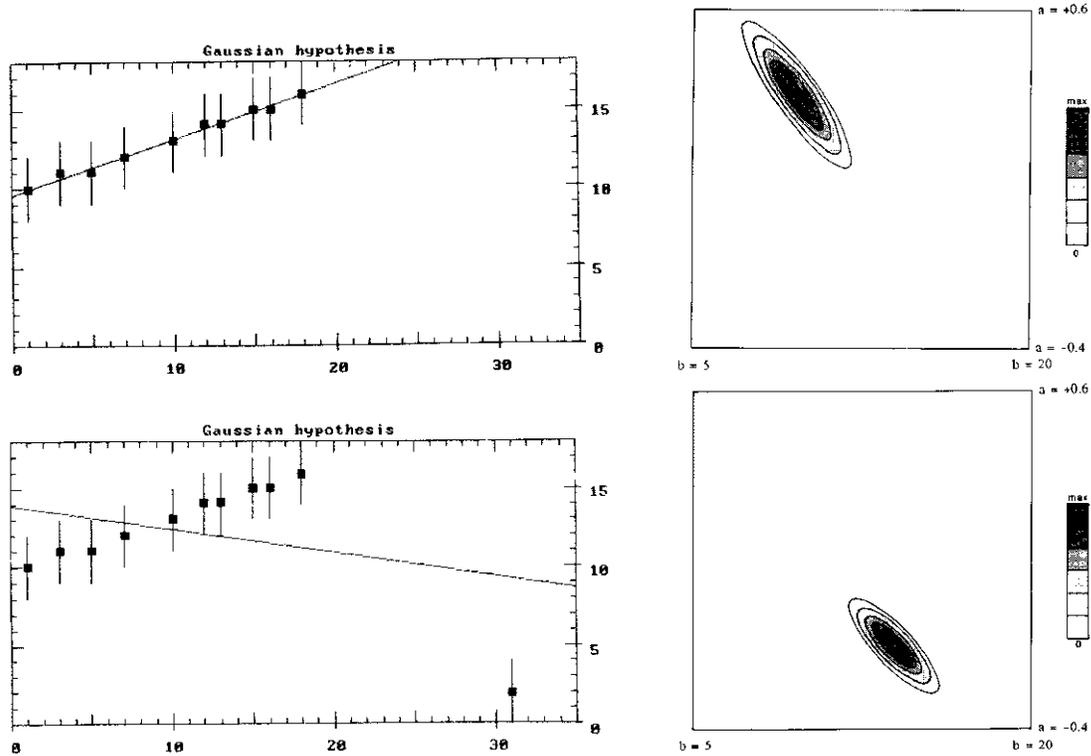


Fig. 3.12: Résultat de la régression linéaire avec incertitudes gaussiennes pour les points expérimentaux de la figure 3.11 (en haut : données saines, en bas : données polluées).

$C(t_1, t_2)$ de la fonction aléatoire $X(t)$ est définie comme étant la covariance (ordinaire) entre les variables $X(t_1)$ et $X(t_2)$:

$$C(t_1, t_2) = \int (x_1 - m(t_1))(x_2 - m(t_2)) f_{t_1, t_2}(x_1, x_2) dx_1 dx_2 \quad (3.61)$$

La connaissance de la densité bidimensionnelle $f_{t_1, t_2}(x_1, x_2)$ ne permet pas d'obtenir d'information sur les moments d'ordre supérieur à 2. En poursuivant ce raisonnement, une connaissance complète du comportement de la fonction aléatoire passe nécessairement par la connaissance de *toutes* les densités $f_{t_1 \dots t_n}(x_1 \dots x_n)$ pour tous les $(t_1 \dots t_n)$ et tout n (mais cela ne suffit pas puisqu'un résultat classique de la théorie des probabilités indique que deux variables aléatoires différentes peuvent avoir *tous* leurs moments égaux). Dans la suite, on ne considérera connues que les fonctions moyenne $m(t)$ et covariance $C(t_1, t_2)$ d'une fonction aléatoire. Si on suppose en plus un comportement aléatoire de type gaussien, ceci permet de décrire complètement la fonction aléatoire : pour tous n et $(t_1 \dots t_n)$ fixés, la densité de probabilité est donnée par :

$$f_{t_1 \dots t_n}(x_1 \dots x_n) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n \text{Det}(\mathbf{C})}} (\mathbf{x} - \mathbf{p})^T \mathbf{C} (\mathbf{x} - \mathbf{p}) \quad (3.62)$$

avec

$$\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \quad \mathbf{p} = (m(t_1), \dots, m(t_n)) \quad \mathbf{C} = [C(t_i, t_j)] \quad (3.63)$$

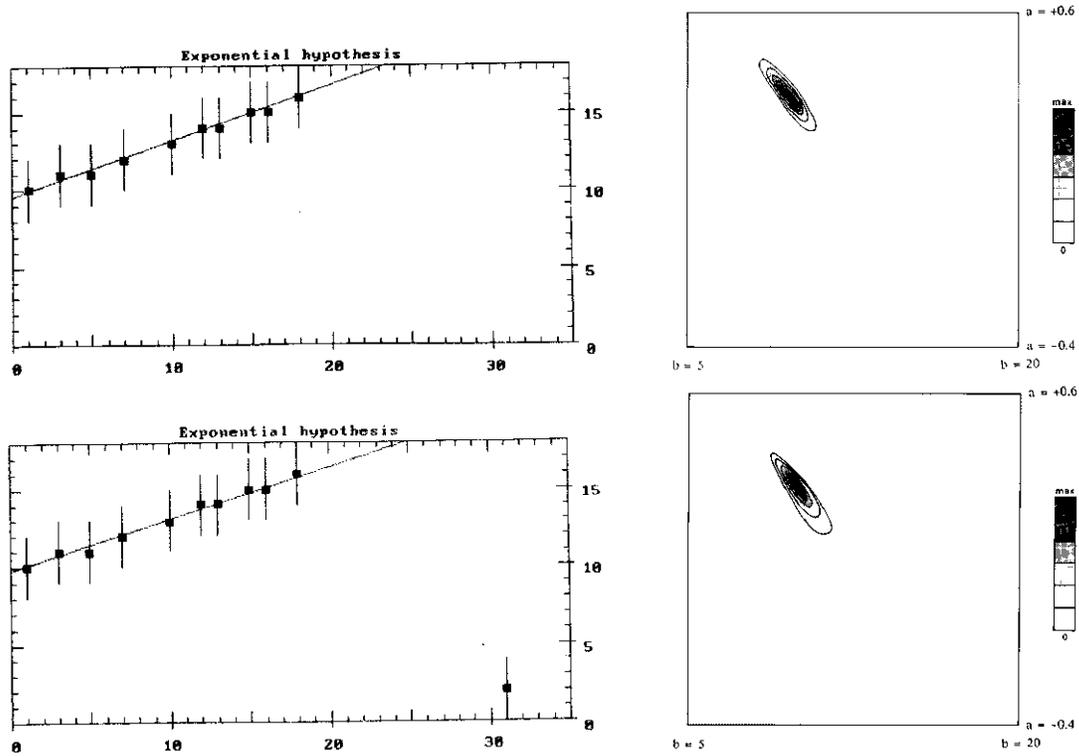


Fig. 3.13: Résultat de la régression linéaire avec incertitudes en loi exponentielle pour les points expérimentaux de la figure 3.11 (en haut : données saines, en bas : données polluées).

Des exemples « classiques » de fonctions covariance sont :

$$C(t_1, t_2) = \begin{cases} \sigma^2 e^{-|t_1 - t_2|/L} & \text{covariance exponentielle} \\ \sigma^2 e^{-|t_1 - t_2|^2/2L^2} & \text{covariance gaussienne} \\ w(t_1)\delta(t_1 - t_2) & \text{bruit blanc d'intensité } w(t_1) \\ C_0 \min(t_1, t_2) & \text{marche aléatoire} \end{cases} \quad (3.64)$$

Dans les deux premières expressions ci-dessus, σ est un *écart type de référence* pour la fonction aléatoire et L une *longueur de corrélation* caractéristique.

Montrons au passage, sur la figure 3.14 ci-après, trois réalisations de fonctions aléatoires gaussiennes de covariance exponentielle obtenues en faisant varier σ^2 et L de façon à maintenir constant le produit $\sigma^2 L$ (à la limite $L \rightarrow 0$, on obtient un bruit blanc).

Insistons bien sur le caractère restrictif de l'hypothèse gaussienne. C'est une *hypothèse de travail* dans la mesure où on ne sait pas actuellement développer de théorie d'inversion probabiliste pour les problèmes inverses continus en-dehors de ce cadre [22].

INVERSION GAUSSIENNE POUR LES PROBLÈMES CONTINUS. Le résultat important, montré par Tarantola, est le suivant :

Théorème 5 *Les résultats d'inversion gaussienne (linéaire ou non-linéaire) obtenus pour la dimension finie restent valables pour la dimension infinie.*

Pour cela, il faut définir l'extension de certaines notions : opérateur covariance, opérateur transposé, gradient, ... pour donner un sens précis à ces résultats.

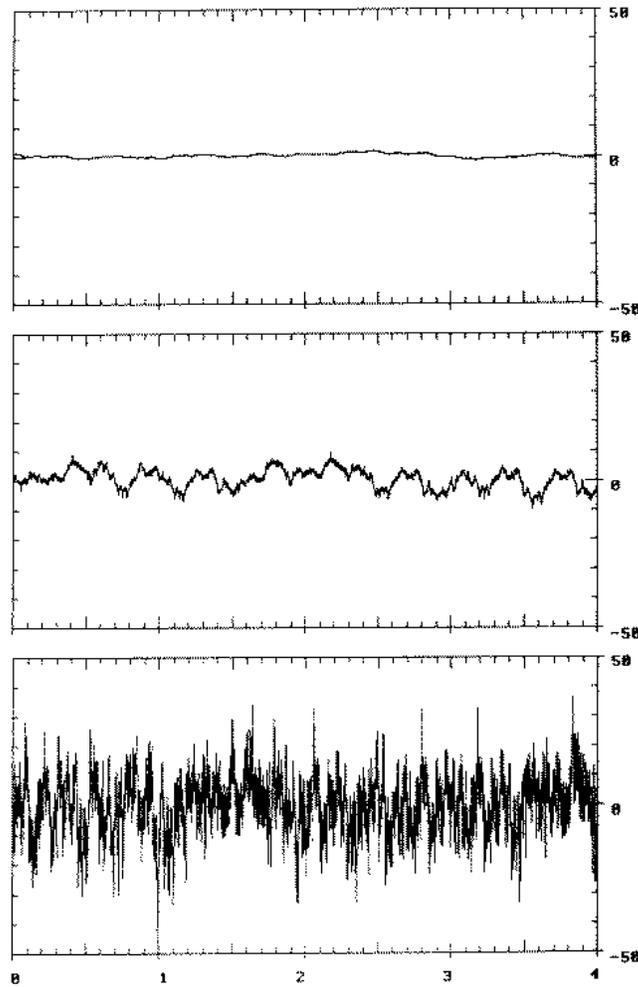


Fig. 3.14: Fonctions aléatoires gaussiennes de covariance exponentielle et de longueur de corrélation décroissante (respectivement $\sigma^2 = 1, L = 1, \sigma^2 = 10, L = 0.1, \sigma^2 = 100, L = 0.01$).

Formes linéaires et dualité. Si E est un espace vectoriel (de fonctions, pour ce qui nous concerne), son *dual* \hat{E} est l'espace vectoriel des formes linéaires sur E . L'application d'une forme linéaire $\hat{\mathbf{b}} \in \hat{E}$ à un vecteur $\mathbf{a} \in E$ donne un réel *sans dimension* noté $\langle \hat{\mathbf{b}}, \mathbf{a} \rangle$. Le théorème de représentation de Riesz affirme que toute forme linéaire $\hat{\mathbf{b}}$ peut être représentée par un vecteur \mathbf{b} ; dans le cas d'espaces de fonctions, cela s'écrit :

$$(\exists \mathbf{b} \in E) \quad \langle \hat{\mathbf{b}}, \mathbf{a} \rangle = \int b(\mathbf{x})a(\mathbf{x})d\mathbf{x} \quad (3.65)$$

Opérateur covariance. Un opérateur covariance sur E est un opérateur $\mathbf{C} : \hat{E} \rightarrow \hat{E}$ linéaire, symétrique, défini non-négatif. Compte tenu du théorème de représentation rappelé ci-dessus, \mathbf{C} peut être défini par la donnée d'une *fonction covariance* C :

$$\mathbf{C}\hat{\mathbf{a}} = \int C(\mathbf{x}, \mathbf{y})a(\mathbf{y})d\mathbf{y} \quad (3.66)$$

Opérateur transposé. Si \mathcal{P} et \mathcal{D} sont deux espaces vectoriels et $\mathbf{G} : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{D}$ est un opérateur linéaire, son transposé est un opérateur linéaire $\mathbf{G}^T : \hat{\mathcal{D}} \rightarrow \hat{\mathcal{P}}$ tel que :

$$\langle \mathbf{G}^T \mathbf{d}, \mathbf{p} \rangle = \langle \mathbf{d}, \mathbf{G}\mathbf{p} \rangle \quad (3.67)$$

En particulier, le transposé d'un opérateur intégral K , de noyau $k(x, y)$, vérifie :

$$(K\phi)(x) = \int_a^b k(x, y)\phi(y) dy \quad (\forall x \in [c, d]) \quad (3.68)$$

$$(K^T\psi)(x) = \int_c^d \bar{k}(y, x)\psi(y) dy \quad (\forall x \in [a, b]) \quad (3.69)$$

Produit scalaire et norme associés à un opérateur covariance. Un opérateur covariance $\mathbf{C} : \hat{E} \rightarrow E$ est défini non-négatif. Si il est défini positif, il admet un inverse $\mathbf{C}^{-1} : E \rightarrow \hat{E}$. De plus cet inverse définit sur E un produit scalaire :

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b})_E = \mathbf{a}\mathbf{C}^{-1}\mathbf{b} \quad (3.70)$$

Tarantola appelle la norme associée au produit scalaire (3.70) « norme de moindres carrés ». Pour les choix usuels de fonction covariance, E muni du produit scalaire (3.70) est un espace de Hilbert. Par exemple prenons pour E l'espace des fonctions de variable réelle (suffisamment régulières pour que les intégrales dans (3.71), (3.72), (3.73) aient un sens). Les trois dernières fonctions covariance données par (3.64) conduisent respectivement par (3.70) aux normes de moindres carrés définies par :

$$\|\mathbf{f}\| = \frac{1}{2}\sigma^2 \left[\frac{1}{L} \int_{\mathbb{R}} f^2(x) dx + L \int_{\mathbb{R}} (df/dx)^2 dx \right] \quad (3.71)$$

$$\|\mathbf{f}\| = \int_{\mathbb{R}} \frac{f^2(x)}{w(x)} dx \quad (3.72)$$

$$\|\mathbf{f}\| = \frac{1}{\beta} \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{d}{dx} f \right)^2 dx \quad (3.73)$$

On voit en particulier que (3.71) est une norme pondérée de type espace de Sobolev $H^1(\mathbb{R})$; la norme de moindres carrés est donc plus générale que les normes L^2 classiques. D'autres cas sont traités par Tarantola [22].

Compte tenu de toutes ces définitions, la solution du problème inverse gaussien continu, pour \mathbf{G} linéaire, est encore donnée par (3.46)-(3.47). Si \mathbf{G} est non-linéaire, on opère comme dans le cas discret une minimisation de la fonctionnelle $S(\mathbf{p})$ dont l'expression est donnée par (3.45). Tarantola donne beaucoup d'expressions de $\langle \mathbf{p} \rangle$ et \mathbf{C}^{-1} équivalentes à (3.46)-(3.47); en particulier il pourra être judicieux d'utiliser :

$$\mathbf{C} = \mathbf{C}_P - \mathbf{C}_P \mathbf{G}^T [\mathbf{G} \mathbf{C}_P \mathbf{G}^T + b f \mathbf{C}_D]^{-1} \mathbf{G} \mathbf{C}_P \quad (3.74)$$

$$\langle \mathbf{p} \rangle = \mathbf{p}_{pr} + \mathbf{C}_P \mathbf{G}^T [\mathbf{G} \mathbf{C}_P \mathbf{G}^T + \mathbf{C}_D]^{-1} [\mathbf{d}_{obs} - \mathbf{G} \mathbf{p}_{pr}] \quad (3.75)$$

car, contrairement à (3.46)-(3.47), on n'a pas besoin de la forme explicite des inverses des opérateurs covariance.

3.4 Elements de comparaison des deux approches.

Les deux approches présentées dans ce chapitre (régularisation au sens de Tikhonov et inversion stochastique) procèdent de points de vue complètement différents. Elles présentent néanmoins la caractéristique commune de conduire fréquemment à des problèmes

d'optimisation. La différence essentielle, à ce stade, entre les deux approches réside dans l'interprétation des quantités qui composent la fonctionnelle à optimiser.

Reprenons par exemple le problème inverse linéaire. La méthode de régularisation la plus simple conduit à minimiser la fonctionnelle :

$$S_\alpha(\mathbf{p}, \mathbf{d}) = \|\mathbf{G}\mathbf{p} - \mathbf{d}\|_D^2 + \alpha \|\mathbf{p} - \mathbf{p}_0\|_P^2 \quad (3.76)$$

L'approche probabiliste, quant à elle, conduit (sous l'hypothèse gaussienne) à minimiser :

$$S_P(\mathbf{p}) = (\mathbf{G}(\mathbf{p}) - \mathbf{d}_{obs})^T \mathbf{C}_D^{-1} (\mathbf{G}(\mathbf{p}) - \mathbf{d}_{obs}) + (\mathbf{p} - \mathbf{p}_{pr})^T \mathbf{C}_P^{-1} (\mathbf{p} - \mathbf{p}_{pr}) \quad (3.77)$$

En fait, si on prend $\mathbf{C}_P = C_P \mathbf{I}$ et $\mathbf{C}_D = C_D \mathbf{I}$ dans (3.77), les deux fonctionnelles (3.76) et (3.77) sont égales à un facteur multiplicatif près en prenant $\alpha = C_D/C_P$ (en supposant $\mathbf{p}_0 = \mathbf{p}_{pr}$). Toutefois, dans la première approche, la valeur de α doit être *ajustée* suivant des considérations fonctionnelles et algorithmiques (théorie de la régularisation optimale, qui joue sur la vitesse de convergence) tandis que, pour la deuxième, sa valeur est *fixée* et égale au rapport de deux indicateurs statistiques représentatifs des incertitudes sur \mathbf{d} et sur l'information a priori. Remarquons quand même qu'une connaissance précise de cette dernière, il faut le reconnaître, n'étant guère réaliste).

On peut également remarquer que, pour les problèmes inverses continus traités par moindres carrés, des équivalences apparaissent entre le principe de sélection (première approche) ou le choix de l'opérateur de corrélation (deuxième approche). Par exemple, l'usage d'un stabilisateur d'ordre 1 du type (3.15) ou d'une fonction de covariance exponentielle (3.59) conduisent tous deux à faire apparaître comme terme régularisant le carré de la norme L^2 du gradient de la fonction à identifier.

Enfin, pour autant que nous puissions en juger, l'approche de Tikhonov semble mieux adaptée à l'inversion de problèmes continus que l'approche probabiliste qui, hormis le cas des moindres carrés sous des hypothèses gaussiennes, permet surtout d'aborder des problèmes inverses déjà discrétisés (ou discrets). Tarantola considère que l'argument « technologique », suivant lequel de toute manière une fonction sera toujours représentée, dans un ordinateur, par une suite finie de nombres tronqués, suggère que la théorie des problèmes inverses puisse être limitée à la dimension finie. Cela permettrait d'évacuer les difficultés soulevées par l'extension aux problèmes continus des concepts issus de la théorie des probabilités, voir 3.3.3. Mais dans cette hypothèse, la théorie ne saura pas définir de critère pour tenter de répondre à la question : qu'est-ce qu'une *bonne* discrétisation du problème inverse continu ?

BIBLIOGRAPHIE. Pour terminer cette section, mentionnons les publications suivantes qui traitent elles aussi de la régularisation au sens de Tikhonov : analyse mathématique et théorie de la régularisation optimale [2], [7], [8], [10], [11], [9], [14], [18], [20] , analyse numérique et applications [1], [12], [15], [17], [25].

3.5 Un exemple d'inversion gaussienne linéaire en variable complexe

A l'occasion d'une étude soutenue par EDF/AMV¹ [4], nous avons étendu l'inversion gaussienne linéaire au traitement de problèmes inverses discrétisés en variable complexe.

¹Département Acoustique et Mécanique Vibratoire, Direction des Etudes et Recherches, EDF, Clamart.

Du point de vue des applications, cette étude est motivée par l'existence de nombreux problèmes inverses linéaires liés aux vibrations et à l'acoustique (donc traités en variable complexe), qui se ramènent généralement à déterminer des forces ou autres sources, ainsi que des conditions aux limites, dans des situations mal posées.

Cette extension est relativement simple, sauf en ce qui concerne l'interprétation des matrices de covariance (à coefficients complexes, hermitiennes, définies positives) associées aux variables aléatoires complexes : leur emploi signifie qu'on fait l'hypothèse selon laquelle, pour un couple de composantes complexes du vecteur aléatoire, les corrélations entre parties réelles et entre parties imaginaires sont égales tandis que les corrélations croisées entre une partie réelle et une partie imaginaire sont opposées². Diverses améliorations originales d'ordre algorithmique, que nous décrivons brièvement ci-après, ont été proposées, mises en oeuvre et testées à cette occasion ; elles utilisent la matrice de covariance *a posteriori* \mathbf{C} (3.47), résultat de l'inversion gaussienne.

Calcul d'indicateurs de qualité du résultat. A partir de la matrice de covariance *a posteriori* \mathbf{C} (3.47), on peut par exemple définir les quantités :

$$\langle \sigma^{post} \rangle = [\det(\mathbf{C})]^{1/2n} \quad r = \frac{1}{n} \text{Tr}(\mathbf{I} - \mathbf{C}\mathbf{C}_P^{-1}) \quad (3.78)$$

respectivement moyenne géométrique des écarts-types *a posteriori* sur \mathbf{p} et indicateur de proximité du résultat \mathbf{p} de l'inversion gaussienne à la solution que donnerait en l'absence de mauvais conditionnement la méthode des moindres carrés simples. On doit avoir $r \leq 1$ par construction car \mathbf{C}_P, \mathbf{C} sont définies positives ; $r = 1$ est la valeur idéale.

Élimination automatique de mesures aberrantes. D'autre part, la robustesse de l'algorithme a été améliorée par élimination automatique de données aberrantes. Cette dernière fonctionnalité repose sur le calcul de l'effet de la suppression d'une mesure, fait tour à tour pour toutes les mesures, associé au test du χ^2 utilisé pour décider de la conservation ou de la suppression d'une donnée. Afin d'éviter de refaire une inversion complète pour chaque donnée supprimée, nous avons eu l'idée d'utiliser des formules de réactualisation d'inverses de matrices pour des perturbations de rang 1 [13]. Ainsi, le résultat ($\langle \mathbf{p} \rangle^*$, \mathbf{C}^*) que donne l'inversion gaussienne après suppression de la ligne \mathbf{g} de \mathbf{G} et de la valeur correspondante d de \mathbf{d} est exprimé en fonction de ($\langle \mathbf{p} \rangle$, \mathbf{C}) correspondant à (\mathbf{G} , \mathbf{d}) complets comme :

$$\mathbf{C}^* = \mathbf{C} + \frac{1}{\sigma^2 - \mathbf{g}\mathbf{C}\mathbf{g}^T} (\mathbf{C}\mathbf{g}^T)(\mathbf{C}\mathbf{g}^T)^T \quad (3.79)$$

$$\langle \mathbf{p} \rangle^* = \langle \mathbf{p} \rangle + \frac{\mathbf{g}\langle \mathbf{p} \rangle - d}{\sigma^2 - \mathbf{g}\mathbf{C}\mathbf{g}^T} (\mathbf{C}\mathbf{g}^T) \quad (3.80)$$

On a fait l'hypothèse que les incertitudes expérimentales sont indépendantes, et donc que \mathbf{C}_D est diagonale ; σ^2 dans (3.79-3.80) désigne le terme diagonal de \mathbf{C}_D correspondant à la mesure supprimée. Une fois (\mathbf{p} , \mathbf{C}) connu, le calcul de (3.79-3.80) est clairement beaucoup plus rapide qu'une réinversion complète.

²Par conséquent, en termes d'autocorrélation, les parties réelles et imaginaires d'un nombre aléatoire gaussien ont des variances égales et une corrélation nulle

LOGICIEL D'INVERSION GAUSSIENNE. Cette étude a conduit à l'écriture d'un logiciel d'inversion gaussienne, susceptible de traiter tout problème inverse linéaire en variable complexe, qui nous semble inclure tous les perfectionnements que l'on peut envisager dans le cadre de cette approche. Il a été utilisé au sein d'EDF/AMV pour des applications nécessitant l'inversion de données expérimentales réelles, comme :

- Démonstration du caractère anti-vibratoire d'une bretelle de ligne (via une identification de forces équivalentes) [3].
- Etude des vibrations d'un dôme d'alternateur de centrale nucléaire (identification de conditions aux limites inconnues).
- Etude en cours sur l'apport de l'inversion stochastique gaussienne dans les techniques d'intensimétrie vibratoire.

EXEMPLE NUMÉRIQUE D'INVERSION GAUSSIENNE EN VARIABLE COMPLEXE. Une étude des performances comparées de cette méthode et de celle des moindres carrés ordinaires met nettement en évidence les améliorations résultant de la prise en compte d'information *a priori*. Le problème inverse de la reconstruction de la vitesse normale $U(\mathbf{y})$, $\mathbf{y} \in \partial\Omega$ de vibration d'un solide Ω à l'aide de valeurs connues de la pression $p(\mathbf{x}_i)$, en des capteurs \mathbf{x}_i extérieurs au solide, créée par son rayonnement acoustique³ [4].

Le problème direct (calculer $\{p(\mathbf{x}_i)\}$ connaissant U), linéaire, est résolu à l'aide de la méthode des éléments de frontière : l'équation intégrale reliant (p, U) sur $\partial\Omega$ est résolue en p pour U donné, puis les $\{p(\mathbf{x}_i)\}$ sont calculés à l'aide de la formule de représentation intégrale.

Le problème inverse (calculer U connaissant $\{p(\mathbf{x}_i)\}$) est mal conditionné. Pour le voir, on a représenté (figure 3.15), pour un solide Ω sphérique (rayon a) en vibration axisymétrique⁴, le nombre de conditionnement $\text{Cond}(\mathbf{G})$ de la matrice \mathbf{G} (10×10 , coefficients complexes) donnant les valeurs de p en 10 capteurs en fonction des 10 premiers coefficients du développement de U sur les polynômes de Legendre. $\text{Cond}(\mathbf{G})$ prend des valeurs d'autant plus grandes (jusqu'à 10^3 à 10^6 , valeurs élevées pour une matrice de taille modeste), et donc le problème inverse est d'autant plus mal posé, que la distance ra des capteurs au centre de la sphère est grande et que la fréquence adimensionnelle ka est basse.

Des résultats de reconstruction numérique ont été obtenus sur l'exemple d'un cylindre vibrant (axe z , rayon $R = 1m$, longueur $6m$), la vitesse de vibration « exacte » à reconstruire étant donnée (en coordonnées cylindriques (θ, z) sur la surface $r = R$) par :

$$U(\theta, z) = \begin{cases} \cos^2 \theta \cos^2(\pi z/3) & |z| \leq 1.5, \quad |\theta| \leq \pi/2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (3.81)$$

On a défini 282 capteurs \mathbf{x}_i : deux grilles carrées G1, G2 disposées symétriquement par rapport à l'axe du cylindre, écartées de $10m$ et de côté $10m$, en contiennent chacune $11^2 = 121$, les 40 autres étant disposées sur un carré C de côté $10m$ et situé parallèlement et à égale distance de G1, G2 (figure 3.16). La surface $\partial\Omega$ est discrétisée par 54 éléments de frontière à 8 noeuds, supportant au total $n = 188$ valeurs nodales de U , inconnues du problème inverse discrétisé. Les 282 valeurs $p(\mathbf{x}_i)$ sont synthétiques (calculées numériquement). On

³Parfois appelé *holographie acoustique*

⁴Problème classique possédant une solution exacte en termes de fonctions de Bessel et d'harmoniques sphériques

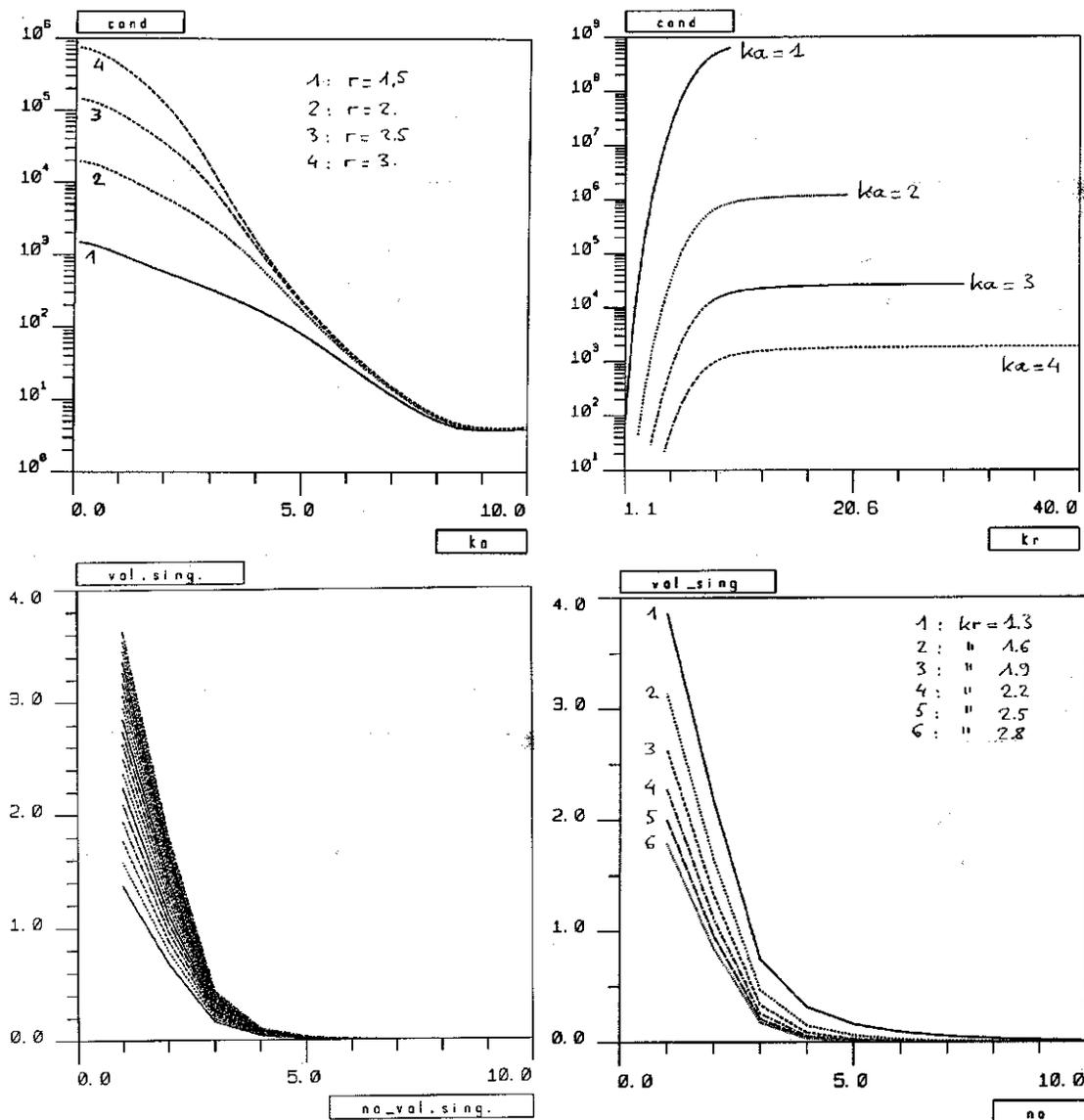


Fig. 3.15: Sphère en vibration axisymétrique (solution exacte, 10 coefficients et 10 capteurs) : nombre de conditionnement $\text{Cond}(G)$ (en haut), distribution des valeurs singulières de G (en bas).

a considéré deux nombres d'onde acoustiques $kR = 0.5, kR = 2$. Le modèle physique discrétisé G est une matrice complexe 188×282 pleine. L'information a priori introduite consiste en :

- Une matrice de covariance C_P dont les coefficients ont la forme

$$(C_P)_{ij} = \sigma_P^2 \exp(|\mathbf{y}_i - \mathbf{y}_j|/L)$$

où les \mathbf{y}_k sont les noeuds du maillage de $\partial\Omega$ et L est une *longueur de corrélation* permettant d'exprimer un certain degré de connaissance qualitative sur la fréquence spatiale de vibration de $\partial\Omega$; les informations a priori sont donc σ_P et L .

- Une matrice de covariance $C_D = \text{Diag}\{\sigma_j^2\}$ avec $\sigma_j = 10^{-3} |p(\mathbf{x}_j)|^5$.

⁵Valeur en fait peu vraisemblable pratiquement, car trop faible, et donc mal choisie, mais ce point est de peu d'importance ici puisque l'exemple présenté n'a porté que sur des données simulées.

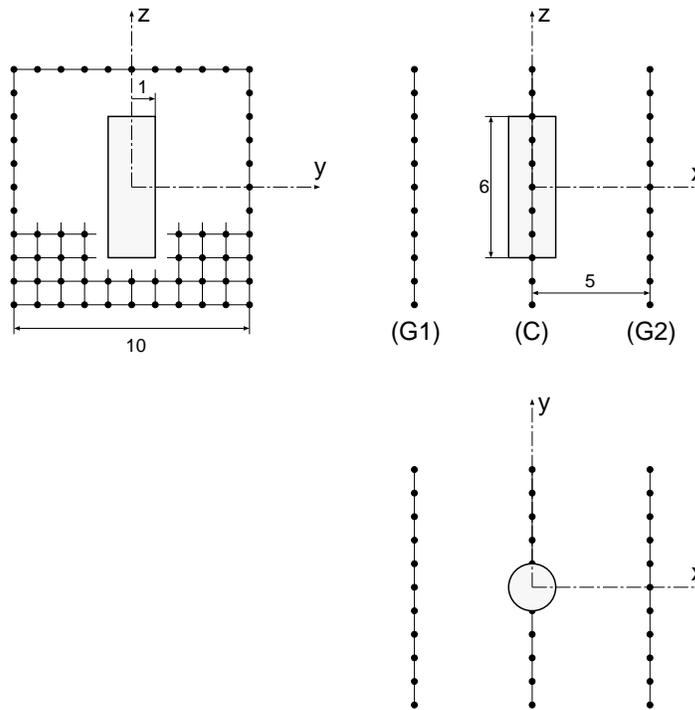


Fig. 3.16: Configuration géométrique du cylindre vibrant et des capteurs de pression.

On notera que cet exemple particulier de matrice de covariance a priori C_P est assez intéressant car il illustre une manière non immédiate d'introduire une donnée a priori physiquement fondée (L dépend de la connaissance du comportement vibratoire de la structure).

La figure 3.17 montre qu'une valeur trop petite < 1 de L dégrade le résultat, ainsi qu'une valeur ($= 1$) trop petite de σ_P , ce dernier cas correspondant à une information a

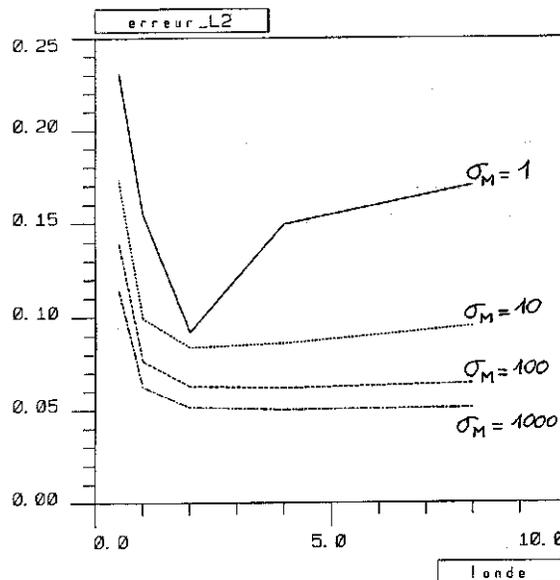


Fig. 3.17: Erreur relative L^2 entre solution « exacte » (3.81) et calculée par inversion gaussienne pour U , en fonction de L et pour quelques valeurs de σ_P ($kR = 2$).

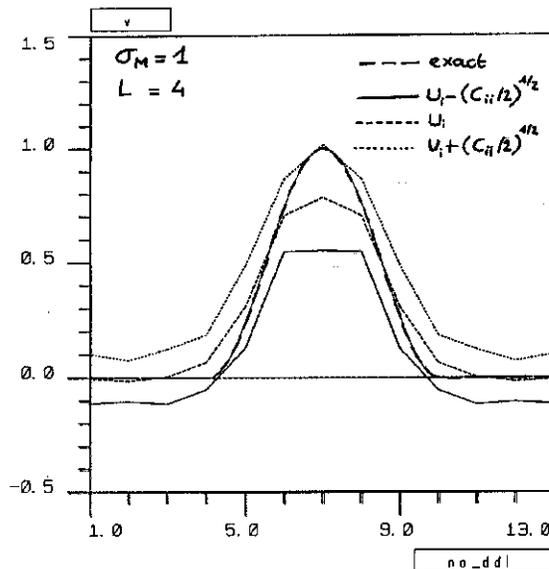


Fig. 3.18: Encadrement des valeurs nodales de U à l'aide des écarts-types diagonaux a posteriori.

priori trop restrictive. La figure 3.18 présente pour la génératrice $\theta = 0$ du cylindre les valeurs nodales U_j encadrées par $U_j \pm (C_{jj}/2)^{1/2}$; on voit que la solution « exacte » est à l'intérieur de cet encadrement. Le tableau 3.3 met en évidence le fait que l'inversion gaussienne résiste mieux que la méthode des moindres carrés ordinaire à l'introduction d'erreurs, simulées à l'aide de nombres aléatoires gaussiens d'écart-type $\sigma_P \times |p(\mathbf{x}_i)|$. Le tableau 3.4 présente les valeurs des indicateurs (3.78) calculés à partir du résultat (\mathbf{U}, \mathbf{C})

	Inversion gaussienne		Moindres carrés	
	Erreur L^2	$P\{\chi^2 = S(\langle \mathbf{p} \rangle)\}$	Erreur L^2	$P\{\chi^2 = S(\langle \mathbf{p} \rangle)\}$
$\sigma_p = 0.$	0.0086	0.	$1.6 \cdot 10^{-7}$	0.
$\sigma_p = 10^{-5}$	0.0089	0.	0.23	$1.0 \cdot 10^{-121}$
$\sigma_p = 10^{-4}$	0.024	0.	2.27	$1.6 \cdot 10^{-75}$
$\sigma_p = 10^{-3}$	0.23	$8.4 \cdot 10^{-98}$	22.7	$8.7 \cdot 10^{-3}$
$\sigma_p = 10^{-2}$	1.37	1.	227.	0.63
$\sigma_p = 10^{-1}$	2.09	1.	2271.	1.

	Inversion gaussienne		Moindres carrés	
	Erreur L^2	$P\{\chi^2 = S(\langle \mathbf{p} \rangle)\}$	Erreur L^2	$P\{\chi^2 = S(\langle \mathbf{p} \rangle)\}$
$\sigma_p = 0.$	0.0018	0.	$1.6 \cdot 10^7$	0.
$\sigma_p = 10^{-5}$	0.0033	0.	0.022	$8.7 \cdot 10^{-122}$
$\sigma_p = 10^{-4}$	0.024	0.	0.22	$5.6 \cdot 10^{-75}$
$\sigma_p = 10^{-3}$	0.24	$1.8 \cdot 10^{-93}$	2.18	$7.7 \cdot 10^{-30}$
$\sigma_p = 10^{-2}$	1.25	1.	21.8	0.62
$\sigma_p = 10^{-1}$	2.37	1.	218.	1.

Tableau 3.3: Comparaison d'erreurs relatives quadratiques sur U reconstruit par inversion gaussienne ou moindres carrés ordinaires, en fonction de l'écart-type σ_p du bruit simulé (en haut : $kR = 0.5$, en bas : $kR = 2.$).

	champ lointain		champ proche	
	$kR = 0.5$	$kR = 2.$	$kR = 0.5$	$kR = 2.$
Erreur L^2	$8.38 \cdot 10^2$	$4.48 \cdot 10^{-2}$	$1.44 \cdot 10^{-3}$	2.610^{-4}
$\langle \sigma^{post} \rangle$ (3.78)	0.57	0.080	0.010	$2.8 \cdot 10^{-3}$
r (3.78)	0.316	0.523	0.908	0.976

Tableau 3.4: Indicateurs de confiance $\langle \sigma^{post} \rangle$, r et erreur L^2 pour quatre cas (« champ lointain » et « champ proche » désignent respectivement le jeu de capteurs décrit dans le texte et un autre similaire mais tels que $G1$, $G2$ et C sont rectangulaires ($2.5m \times 6.5m$) et $G1, G2$ sont distants de $2.5m$).

de l'inversion gaussienne (et sans connaître la solution exacte!). On voit que ces dernières suivent la même tendance que l'erreur L^2 entre solution numérique et exacte (les valeurs « idéales » sont $\langle \sigma^{post} \rangle = 0^+$, $r = 1^-$).

Enfin, la figure 3.19 montre l'algorithme d'élimination de mesures aberrantes au moyen du test du χ^2 en action : les valeurs nodales de U obtenues sur la génératrice $\theta = 0$ sont représentées aux divers stades d'élimination de mesures aberrantes. Sur cet exemple particulier, les trois (sur 282) valeurs aberrantes de p (n^{os} 76, 77, 78) qui avaient été introduites dans les données ont été détectées et le résultat final (c.à.d sans utiliser les données aberrantes) pour U calculé.

COMMENTAIRES. Cet exemple met nettement en évidence l'amélioration apportée par la prise en compte d'informations *a priori* et l'influence du choix de ces dernières : les meilleurs résultats sont obtenus quand les valeurs de L, σ_P sont compatibles avec la solution U effective. De même, l'évolution des indicateurs *a posteriori* $\langle \sigma^{post} \rangle, r$ (calculés à partir de la matrice de covariance *a posteriori*) et celle de l'erreur effectivement commise sur la solution du problème inverse sont concordantes. Enfin, la recherche et l'élimination

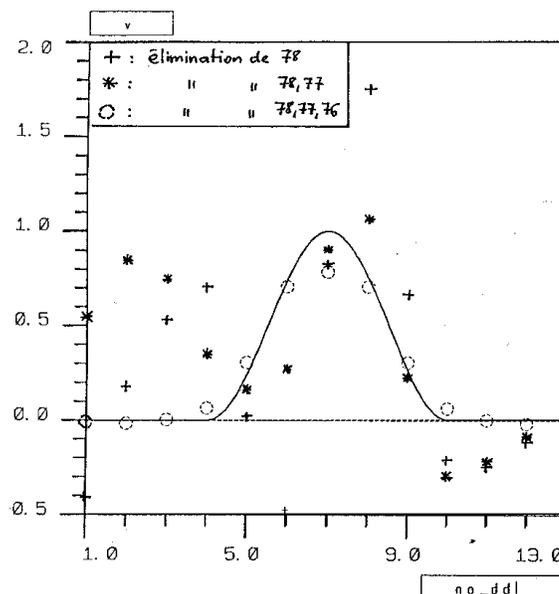


Fig. 3.19: Valeurs nodales de U , pour les mêmes noeuds que sur la figure 3.18, après détection et élimination automatique de (i) aucune donnée (ii) donnée 78 (iii) données 78,77 (iv) données 78, 77 et 76, par l'algorithme.

de données aberrantes, qui par le biais du test du χ^2 fait usage de l'interprétation gaussienne du résultat de l'inversion, fonctionne très bien, ce qui fournit un remède pratique aux problèmes de robustesse communs à toutes les méthodes de type moindres carrés.

Ces remarques tendent à confirmer l'intérêt pratique que peut présenter la démarche d'inversion gaussienne pour les problèmes inverses linéaires.

Bibliographie

- [1] ALLERS, A., SANTOSA, F. Stability and resolution analysis of a linearized problem in electrical impedance tomography. *Inverse Problems*, **7**, 515–533 (1991).
- [2] AMATO, U., HUGUES, W. Maximum entropy regularization of Fredholm integral equations of the first kind. *Inverse Problems*, **7**, 793–808 (1991).
- [3] AUDEBERT, S. Characterization of the damping effect of a vibrating system. In H. D. Bui M. Tanaka (ed.), *Inverse problems in engineering mechanics*, pp. 327–336. Springer-Verlag (1993).
- [4] BONNET, M. A numerical investigation for a source inverse problem in linear acoustics. *J. Acoust.*, **4**, 307–334 (1991).
- [5] BOURGEOIS, L. A mixed formulation of quasi-reversibility to solve the Cauchy problem for Laplace's equation. *Inverse Problems*, **21**, 1087–1104 (2005).
- [6] BOURGEOIS, L. Convergence rates for the quasi-reversibility method to solve the Cauchy problem for Laplace's equation. *Inverse Problems*, **22**, 413–430 (2006).
- [7] DOBSON, D. C. Estimates on resolution and stabilization for the linearized inverse conductivity problem. *Inverse Problems*, **8**, 71–81 (1992).
- [8] ENGL, H. W. Discrepancy principles for Tikhonov regularization of ill-posed problems leading to optimal convergence rates. *J. Optim. Th. & Appl.*, **52**, 209–215 (1987).
- [9] ENGL, H. W., ANDERSSON, R. S. The role of linear functionals in improving convergence rates for parameter identification via Tikhonov regularization. In M. Yamaguti, et al. (eds.), *Inverse problems in engineering sciences*. Springer-Verlag (1991). (ICM 90 Satellite Conference Proceedings).
- [10] ENGL, H. W., GROETSCH, C. W. (eds.). *Inverse and ill-posed problems..* Academic Press (1987).
- [11] ENGL, H. W., NEUBAUER, A. Optimal parameter choice for ordinary and iterated Tikhonov regularization. In H. W. Eng, C. W. Groetsch (eds.), *Inverse and ill-posed problems..* Academic Press (1987).
- [12] GROETSCH, C. W. Some integral equations of the first kind in mechanics and regularization of ill-posed linear operator equations. In M. Yamaguti, et al. (eds.), *Inverse problems in engineering sciences*. Springer-Verlag (1991). (ICM 90 Satellite Conference Proceedings).
- [13] HAGER, W. W. Updating the inverse of a matrix. *SIAM Review*, **31**, 221–239 (1989).
- [14] KITAGAWA, T., HOSODA, Y. New approaches to the optimal regularization. In H. D. Bui M. Tanaka (ed.), *Inverse problems in engineering mechanics*, pp. 21–26. Springer-Verlag (1993).
- [15] KRESS, R., ZINN, A. Three dimensional reconstructions from near-field data in obstacle scattering. In M. Yamaguti, et al. (eds.), *Inverse problems in engineering sciences*. Springer-Verlag (1991). (ICM 90 Satellite Conference Proceedings).

- [16] LATTES, R., LIONS, J. L. *Méthode de quasi-réversibilité et applications*. Dunod (Paris) (1967).
- [17] NATKE, H. G. On regularization methods within system identification. In H. D. Bui M. Tanaka (ed.), *Inverse problems in engineering mechanics*, pp. 3–20. Springer-Verlag (1993).
- [18] NEUBAUER, A. An a posteriori parameter choice for Tikhonov regularisation in Hilbert scales leading to optimal convergence rates. *SIAM J. Numer. Anal.*, **25**, – (1988).
- [19] SABATIER, P. C. Problèmes inverses et applications. Ecole d'été d'analyse numérique, CEA/INRIA/EDF (1985).
- [20] SCHOCK, E. On the asymptotic order of accuracy of Tikhonov regularisation. *J. Optim. Th. & Appl.*, **44**, 95–104 (1984).
- [21] TANAKA, M., BUI, H. D. (eds.). *Inverse problems in engineering mechanics*. Springer-Verlag (1993). Proceedings of the IUTAM International Symposium on Inverse Problems in Engineering Mechanics, Tokyo, Japan, May 11-15, 1992.
- [22] TARANTOLA, A. *Inverse problem theory*. Elsevier (1987).
- [23] TARANTOLA, A. *Inverse problem theory and methods for model parameter estimation*. SIAM (2005).
- [24] TIKHONOV, A. N., ARSEININ, V. Y. *Solutions to ill-posed problems*. Winston-Wiley, New York (1977).
- [25] VOGEL, C. R. An overview of numerical methods for nonlinear ill-posed problems. In I H. W. Eng, C. W. Groetsch (eds.), *Inverse and ill-posed problems.*, pp. 231–245. Academic Press (1987).
- [26] YAMAGUTI, M., ET AL. (eds.). *Inverse problems in engineering sciences.*. Springer-Verlag (1991). (ICM 90 Satellite Conference Proceedings).

Chapitre 4

Identification de grandeurs distribuées

Sommaire

4.1	Problème de la reconstruction de la conductivité thermique	74
4.2	Problème de la reconstruction de constantes élastiques . . .	80
4.3	Résolution numérique du problème inverse	84
4.4	Exemples numériques	88
4.5	Reconstruction de déformations ou contraintes résiduelles . .	92
	Bibliographie	95

La résolution d'un problème de mécanique ou de thermique demande la connaissance de données d'origine externe (sources réparties, conditions aux limites, éventuellement conditions initiales) et interne (caractéristiques physiques du ou des matériaux considérés). Un calcul direct classique mécanique ou thermique consiste à calculer l'état physique en tout point à partir de ces données, généralement à l'aide d'une méthode numérique : parfois les différences finies ou les éléments de frontière, plus souvent les éléments finis.

De nombreux problèmes inverses d'importance pratique consistent en la recherche d'informations quantitatives sur des caractéristiques internes, dans des cas où elles ne sont pas, ou pas complètement, connues : modules d'élasticité, célérité locale des ondes, conductivités thermique ou électrique, présence de défauts, d'endommagement, de cavités, . . . Par exemple :

- Imagerie et prospection : il s'agit de déterminer l'emplacement géométrique et les constantes physiques de parties cachées à l'observation externe et dont les caractéristiques physiques diffèrent de celles de la partie externe, observable, du corps. Cela correspond en pratique à l'imagerie médicale (via la conductivité électrique ou les propriétés d'atténuation des rayons X), la détermination de la nature de couches souterraines par prospection sismique, . . .
- Recherche de défauts internes au moyen de techniques de contrôle non destructif : ce problème est très voisin du précédent. En l'absence d'information très précise sur la nature physique des défauts, une approche quantitative utilisera fréquemment la *représentation* des défauts comme des variations de paramètres physiques distribués (conductivités, modules élastiques).
- Recalage de modèles éléments finis : une structure est susceptible d'évoluer au fil du temps. Suite à l'altération de ses caractéristiques physiques initiales, ou de certaines conditions aux limites qui ne sont pas toujours parfaitement connues, il peut être nécessaire d'actualiser un modèle initialement correct de la structure (par exemple par éléments finis). Ce *recalage* du modèle conduit à une correction des caractéristiques physiques ou géométriques (module d'Young, épaisseur ou section, . . .) sur lequel il repose.

La résolution pratique de ces problèmes ne peut être envisagée qu'à condition de compenser l'absence partielle ou totale d'informations sur les caractéristiques internes par des données supplémentaires. Dans de nombreux cas, seules des mesures externes, effectuées sur la frontière du corps, sont possibles (contraintes d'accès) ou souhaitables (utilisation d'approches non destructives). Les données supplémentaires disponibles consistent alors en des conditions aux limites ou initiales surabondantes.

4.1 Problème de la reconstruction de la conductivité thermique

La reconstruction d'un coefficient de conduction thermique, supposé hétérogène, est une situation-modèle représentative.

On s'intéresse donc à la conduction thermique (coefficient de conductivité inhomogène $k(\mathbf{x})$) dans un milieu tridimensionnel Ω de frontière externe S^1 , régie par l'équation de la

¹La frontière externe S diffère de la frontière $\partial\Omega$ en présence d'une cavité interne inconnue.

chaleur instationnaire :

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} - \operatorname{div}(k(\mathbf{x})\nabla\theta) = 0 \quad (\mathbf{x} \in \Omega) \quad (4.1)$$

$$\theta(\mathbf{x}, t \leq 0) = 0 \quad (\text{conditions initiales}) \quad (4.2)$$

PROBLÈME DIRECT. Le coefficient $k(\mathbf{x}) > 0$ étant connu, trouver la température $\theta(\mathbf{x}, t)$ vérifiant (4.1) et une condition en tout point de S . Par exemple, la valeur φ du flux thermique est imposée, soit :

$$k(\mathbf{x})\frac{\partial \theta}{\partial n} = \varphi(\mathbf{x}, t) \quad (\mathbf{x} \in S, t \geq 0) \quad (4.3)$$

PROBLÈME INVERSE. Le coefficient de conduction $k(\mathbf{x})$ est inconnu. Par ailleurs, le flux thermique est imposé, éq. (4.3), comme pour le problème direct. On considère alors comme donnée supplémentaire la valeur mesurée ξ de la température en surface :

$$\theta(\mathbf{x}, t) = \xi(\mathbf{x}, t) \quad (\mathbf{x} \in S, t \geq 0) \quad (4.4)$$

On suppose également que $k(\mathbf{x}) > 0$ est connu sur la frontière externe S . La formulation pratique la plus simple du problème inverse est la minimisation d'une fonction-coût² exprimant l'écart quadratique entre valeurs calculée et mesurée de la température en surface :

$$\mathcal{J}(k) = J(\theta, k) \quad \text{avec} \quad J(u) = \frac{1}{2} \int_0^T \int_S \{u(\mathbf{x}, t) - \theta(\mathbf{x}, t)\}^2 dS_x dt + \alpha R(k) \quad (4.5)$$

le terme régularisant contenant des informations a priori, par exemple :

$$R(k) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (k(\mathbf{x}) - k_0)^2 dV_x \quad (\text{valeur de référence pour } k)$$

$$R(k) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left(\frac{dk}{dx} \right)^2 dV_x \quad (\text{pénalisation des oscillations de } k)$$

Le *champ calculé* $\theta(\mathbf{x}, t)$ vérifie le système (4.1) (avec une conductivité donnée k) ainsi que la condition (4.3). On cherche k qui minimise la fonctionnelle $\mathcal{J}(a)$.

Cette situation correspond par exemple aux méthodes thermiques de contrôle non-destructif (Balageas et coll. [1]). Le principe de ces dernières est simple : un flux thermique est imposé à l'échantillon via une impulsion laser, et l'évolution temporelle de la température est enregistrée à l'aide d'une caméra infra-rouge. Par exemple, la température à la surface d'un corps homogène soumis à un flux impulsif Q est $\theta(t) \sim C\sqrt{t}$. Une pente $-1/2$ dans le diagramme $(\log t, \log \theta)$ correspond alors à l'absence de défaut, tandis que tout écart à une telle droite révèle une inhomogénéité de conductivité.

²On pourrait, comme en élasticité (section 4.2), définir une fonctionnelle d'écart en relation de comportement ; beaucoup d'autres choix sont possibles.

CHAMP ADJOINT ET ÉQUATION D'OBSERVATION. Le champ de température $\theta(\mathbf{x}, t)$, $\mathbf{x} \in \Omega$ prolongeant la mesure $\xi(\mathbf{x}, t)$, $\mathbf{x} \in S$ (c'est-à-dire solution du problème direct pour une conductivité k solution du problème inverse) est fonction *implicite* de k par l'intermédiaire du problème (4.1-4.3). Il est possible de faire apparaître des relations plus explicites entre l'observable θ et l'inconnue k . Pour ce faire, on introduit un *champ adjoint* v solution, pour une conductivité *donnée* k_0 , de l'équation de la chaleur *rétrograde* avec condition *finale* :

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \operatorname{div}(k_0(\mathbf{x})\nabla v) = 0 \quad (\mathbf{x} \in \Omega) \quad (4.6)$$

$$v(\mathbf{x}, t \geq T) = 0 \quad (\text{condition finale}) \quad (4.7)$$

et flux imposé

$$k_0(\mathbf{x})\frac{\partial v}{\partial n} = \psi(\mathbf{x}, t) \quad (\mathbf{x} \in S, t \leq T) \quad (4.8)$$

Ce champ adjoint est donc défini par un problème direct classique (à l'inversion du temps près) et est calculable par toute méthode classique. On applique alors la formule de la divergence :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \theta \operatorname{div}(k_0 \nabla v) \, dV &= \int_S k_0 \theta \frac{\partial v}{\partial n} \, dS - \int_{\Omega} k_0 \nabla \theta \cdot \nabla v \, dV \\ &= \int_S \theta \psi \, dS - \int_{\Omega} k_0 \nabla \theta \cdot \nabla v \, dV \\ \int_{\Omega} v \operatorname{div}(k_0 \nabla \theta) \, dV &= \int_S k v \frac{\partial \theta}{\partial n} \, dS - \int_{\Omega} k \nabla v \cdot \nabla \theta \, dV \\ &= \int_S v \varphi \, dS - \int_{\Omega} k \nabla \theta \cdot \nabla v \, dV \end{aligned}$$

De plus, puisque θ et v vérifient respectivement (4.1) et (4.6) :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \theta \operatorname{div}(k_0 \nabla v) \, dV &= - \int_{\Omega} \theta \frac{\partial v}{\partial t} \, dV \\ \int_{\Omega} v \operatorname{div}(k_0 \nabla \theta) \, dV &= \int_{\Omega} v \frac{\partial \theta}{\partial t} \, dV \end{aligned}$$

Combinant ces relations, on obtient l'équation

$$\begin{aligned} \int_S \{v\varphi - \theta\psi\} \, dS &= \int_{\Omega} (k - k_0) \nabla \theta \cdot \nabla v \, dV - \int_{\Omega} \left\{ \theta \frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial \theta}{\partial t} \right\} \, dV \\ &= \int_{\Omega} (k - k_0) \nabla \theta \cdot \nabla v \, dV - \int_{\Omega} \frac{\partial v \theta}{\partial t} \, dV \end{aligned} \quad (4.9)$$

Enfin, on remarque que, compte tenu des conditions initiale sur θ et finale sur v , on a :

$$\int_0^T \int_{\Omega} \frac{\partial v \theta}{\partial t} \, dV \, dt = 0$$

de sorte que l'intégration de (4.9) entre $t = 0$ et $t = T$ conduit à l'identité

$$\int_0^T \int_S \{v\varphi - \xi\psi\} \, dS \, dt = \int_0^T \int_{\Omega} (k - k_0) \nabla \theta \cdot \nabla v \, dV \, dt \quad (4.10)$$

On remarque que

- L'intégrale de surface est constituée uniquement de flux donnés φ, ψ , de la température ξ mesurée et du champ adjoint v connu.
- L'intégrale de domaine contient l'écart inconnu de conductivité $\delta k = k - k_0$, le champ adjoint connu v et le champ θ , inconnu à l'intérieur du domaine.

L'idée est maintenant d'exploiter la relation (4.10)

- Pour un écart de conductivité faible, permettant une linéarisation.
- Avec des choix judicieux de la donnée ψ du problème adjoint.

LINÉARISATION. Considérons donc le cas où la conductivité inconnue k diffère peu d'une valeur de référence k_0 :

$$\delta k(\mathbf{x}) = k(\mathbf{x}) - k_0(\mathbf{x}) \quad \text{avec} \quad |\delta k(\mathbf{x})| \ll k_0(\mathbf{x}) \quad (4.11)$$

On peut alors approcher le champ ξ , inconnu à l'intérieur de Ω , par le champ θ_0 , solution de (4.1-4.3) pour la conductivité connue $k \equiv k_0$: θ_0 lui-même est donc connu, solution d'un problème thermique direct classique. On écrit ainsi :

$$\xi(\mathbf{x}, t) = \theta_0(\mathbf{x}, t) + O(|\delta k|) \quad (4.12)$$

L'identité (4.10) devient ainsi

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_{\Omega} \delta k \nabla \theta_0 \cdot \nabla v \, dV \, dt + O(|\delta k|) &= \int_0^T \int_S \{v\varphi - \xi\psi\} \, dS \, dt \\ &= \int_0^T \int_S (\nabla \theta_0 - \xi)\psi \, dS \, dt \end{aligned} \quad (4.13)$$

la dernière égalité étant obtenue à l'aide de la formule de la divergence et compte tenu des équations vérifiées par θ_0 et v . Les champs θ_0, v étant connus, on construit ainsi pour chaque champ v une équation de la forme

$$H(T, v) = \int_{\Omega} \delta k(\mathbf{x}) K(\mathbf{x}; T, v) \, dV_{\mathbf{x}} + O(|\delta k|) \quad (4.14)$$

Cette équation est dite "d'observation" car elle donne un observable $H(v, T)$ à la frontière comme fonction *explicite* de l'écart inconnu δk , ce qui facilite dans certains cas l'analyse et la résolution du problème inverse linéarisé.

EQUATION INTÉGRALE ET CARACTÈRE MAL POSÉ. Le choix particulier

$$\psi = \delta(T - t)\delta(\mathbf{x} - \mathbf{z})$$

de la donnée en flux associée à v (flux ponctuel appliqué en $\mathbf{z} \in S$ fixé et impulsionnel) conduit à

$$H(T, v) \equiv H(T, \mathbf{z}) = \theta_0(\mathbf{z}, T) - \xi(\mathbf{z}, T)$$

et donc à une équation intégrale de Fredholm de première espèce reliant l'écart $u - \theta$ entre températures calculée et mesurée à la frontière au (petit) écart de conductivité δk . Cette constatation est importante car, compte tenu des propriétés générales des équations intégrales de ce type (section 2.1), elle met en évidence le fait que le problème inverse linéarisé, donc sous une forme simplifiée, est mal posé : la solution δk de cette équation intégrale est instable par rapport aux erreurs de mesure sur ξ .

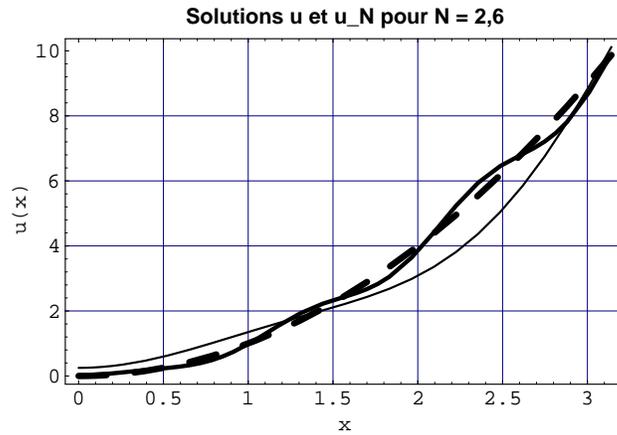


Fig. 4.1: Equation $\operatorname{div}(a\nabla u) = 1$: convergence des solutions u_N (lignes continues $N = 2, 6$) vers la solution u (en tirets).

EXEMPLE UNIDIMENSIONNEL. Un exemple unidimensionnel illustre concrètement le caractère mal posé de l'identification d'une conductivité.

Soit l'équation elliptique :

$$\operatorname{div} a\nabla u = 1$$

sur l'intervalle $[0, \pi]$. Une solution 'non perturbée' est évidemment :

$$a(x) = \frac{1}{2} \quad u(x) = x^2 \quad (4.15)$$

Considérons maintenant la suite des solutions 'perturbées' :

$$\begin{aligned} a_N(x) &= \frac{1}{2 + \cos Nx} \\ u_N(x) &= x^2 + \frac{x}{N} \sin Nx + \frac{1}{N^2} \cos Nx \end{aligned} \quad N \text{ entier } > 0$$

Pour chaque N on peut vérifier que les conditions aux limites de type Neumann coïncident avec celles de la solution non perturbée (4.15) :

$$(au')(0) = (a_N u'_N)(0) = 0 \quad (au')(\pi) = (a_N u'_N)(\pi) = \pi$$

Pour les conditions aux limites de type Dirichlet, on a les convergences suivantes pour $N \rightarrow \infty$:

$$u_N(0) = \frac{1}{N^2} \longrightarrow u(0) = 0 \quad u_N(\pi) = \pi^2 + \frac{1}{N^2} \longrightarrow u_N(\pi) = \pi^2$$

De plus pour chaque $x \in [0, \pi]$ on a (voir fig. 4.1) :

$$u_N(x) \longrightarrow u(x) \quad \text{si } N \longrightarrow \infty \quad (4.16)$$

Mais a_N ne converge pas vers a , ni ponctuellement, ni en moyenne L^2 (voir fig. 4.2).

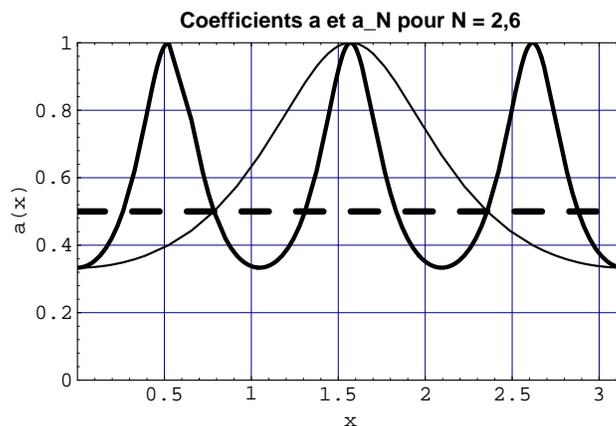


Fig. 4.2: Equation $\text{div}(a\nabla u) = 1$: non-convergence des paramètres a_N (lignes continues $N = 2, 6$) vers le paramètre a (en tirets)

RECONSTRUCTION DE δk : MÉTHODE DE CALDERON. Cette méthode a été proposée [5] pour l'équation de la chaleur stationnaire³. Elle consiste à considérer des flux imposés et adjoints de la forme :

$$\varphi = -i \exp(-i\mathbf{z}\cdot\mathbf{x})(\mathbf{z}\cdot\mathbf{n}) \quad \psi = -i \exp(-i\bar{\mathbf{z}}\cdot\mathbf{x})(\bar{\mathbf{z}}\cdot\mathbf{n}) \quad (4.17)$$

avec

$$\mathbf{z} = \frac{1}{2}(\mathbf{y} + i\mathbf{y}^\perp) \quad \bar{\mathbf{z}} = \frac{1}{2}(\mathbf{y} - i\mathbf{y}^\perp) \quad (4.18)$$

le vecteur $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ ($n = 2, 3$: dimension de l'espace physique) étant arbitrairement choisi et le vecteur \mathbf{y}^\perp vérifiant $\mathbf{y}\cdot\mathbf{y}^\perp = 0$, $|\mathbf{y}| = |\mathbf{y}^\perp|$. Ce choix permet de mettre l'équation d'observation (4.14) sous la forme

$$H(\mathbf{y}) = -\frac{1}{2} |\mathbf{y}|^2 \int_{\Omega} \delta k(\mathbf{x}) \exp(-i\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}) dV_x \quad (4.19)$$

Le second membre de l'équation ci-dessus est la transformée de Fourier spatiale de δk , prolongé à zéro en-dehors de $\partial\Omega$. Le choix (4.17) des flux permet donc d'exprimer la transformée de Fourier du défaut en fonction d'observables. En principe, il suffit donc de calculer δk explicitement comme transformée de Fourier inverse de $H(\mathbf{y})$. En pratique, ce n'est pas si simple car on sait (section 3.1.3) que l'inversion de la transformée de Fourier est également une opération mathématique mal posée, très sensible aux erreurs sur $H(\mathbf{y})$ induites par les incertitudes expérimentales sur θ . On retrouve ici encore le caractère mal posé du problème inverse linéarisé.

COMMENTAIRES. La discussion qui précède est intéressante dans la mesure où, outre l'intérêt propre du problème inverse thermique, les arguments développés sont transposables à d'autres situations, comme la reconstruction de constantes élastiques inconnues.

L'obtention d'équations d'observation a un double mérite :

³Il s'agissait en fait de la reconstruction d'une conductivité électrique en électrostatique, mais les équations sont mathématiquement identiques.

- Etablir une relation explicite entre un observable H et l'écart inconnu δk (il y a en fait autant de relations que de choix possibles du champ adjoint v , lequel est arbitraire).
- Mettre en évidence le caractère mal posé du problème inverse linéarisé.

La résolution effective des équations d'observation est possible, mais, comme toujours avec les équations de première espèce, il importe de compléter le problème par des informations a priori supplémentaires et de le résoudre sous forme régularisée (chapitres 2 et 3).

4.2 Problème de la reconstruction de constantes élastiques

Examinons maintenant l'analogie du problème précédent pour l'élasticité linéaire, c'est-à-dire la reconstruction de modules d'élasticité hétérogènes inconnus à l'aide de mesures de forces et de déplacements à la frontière.

On considère une structure Ω , faite d'un matériau linéairement élastique dont le tenseur de Hooke⁴ \mathbf{C} est de la forme $\mathbf{C}_0 + \delta\mathbf{C}(\mathbf{x})$, \mathbf{x} désignant le point courant de Ω ; on suppose $\delta\mathbf{C}$ nul en tout point de $\partial\Omega$. La partie \mathbf{C}_0 est connue (supposons-la homogène pour simplifier), et on s'intéresse à la détermination de $\delta\mathbf{C}$, inconnu. Pour cela, on suppose connu sur la frontière $\partial\Omega$ le déplacement $\boldsymbol{\xi} = \mathbf{u} |_{\partial\Omega}$ résultant de l'application d'efforts de contact $\boldsymbol{\varphi}$, également connus, sur $\partial\Omega$.

$$\begin{cases} \operatorname{div}((\mathbf{C}_0 + \delta\mathbf{C})\nabla\mathbf{u}) = 0 & \text{dans } \Omega \\ \mathbf{T}^n(\mathbf{u}) \equiv \mathbf{C}_0\nabla\mathbf{u}\cdot\mathbf{n} = \boldsymbol{\varphi} & \text{sur } \partial\Omega \\ \mathbf{u} = \boldsymbol{\xi} & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \quad (4.20)$$

(la notation $\mathbf{T}^n(\mathbf{u})$ désignant le vecteur-contrainte élastiquement associé au déplacement \mathbf{u} pour le tenseur d'élasticité \mathbf{C}_0). Le problème inverse considéré est l'identification de $\delta\mathbf{C}(\mathbf{x})$ à partir des données aux limites surabondantes apparaissant dans (4.20).

L'unicité de la solution $\delta\mathbf{C}$ a été établie pour l'élasticité isotrope en déformations planes [13]; elle a lieu à condition de connaître *tous* les couples $(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\varphi})$ et sous certaines condition de régularité.

EQUATION D'OBSERVATION. Considérons un champ de déplacement adjoint \mathbf{v} , vérifiant

$$\operatorname{div}(\mathbf{C}_0\nabla\mathbf{v}) = 0 \quad \text{dans } \Omega \quad (4.21)$$

et une donnée en force sur $\partial\Omega$:

$$\mathbf{T}^n(\mathbf{v}) = \boldsymbol{\psi} \quad \text{sur } \partial\Omega \quad (4.22)$$

Une intégration par parties au moyen de la formule de la divergence donne alors :

$$\int_{\Omega} (\mathbf{u}\cdot\operatorname{div}[\mathbf{C}_0\nabla\mathbf{v}] - \mathbf{v}\cdot\operatorname{div}[\mathbf{C}_0\nabla\mathbf{u}]) \, dV = \int_{\partial\Omega} (\boldsymbol{\xi}\cdot\boldsymbol{\psi} - \mathbf{v}\cdot\boldsymbol{\varphi}) \, dS + \int_{\Omega} \nabla\mathbf{u} : \delta\mathbf{C} : \nabla\mathbf{v} \, dV$$

⁴Tenseur d'ordre 4 de la loi de comportement élastique linéaire : $\sigma_{ij} = C_{ijkl}\varepsilon_{kl}$. Il vérifie les propriétés de symétrie $C_{ijkl} = C_{klij} = C_{ijlk}$ et comporte donc au maximum 21 coefficients indépendants. En élasticité isotrope, on a $C_{ijkl} = \lambda\delta_{ij}\delta_{kl} + \mu(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk})$, avec les *coefficients de Lamé*..

tandis que, compte tenu de (4.20) et (4.21) :

$$\int_{\Omega} (\mathbf{u} \cdot \text{div} [\mathbf{C}_0 \nabla \mathbf{v}] - \mathbf{v} \cdot \text{div} [\mathbf{C}_0 \nabla \mathbf{u}]) \, dV = 0$$

On obtient donc l'analogue de l'équation (4.10) :

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Omega} (\boldsymbol{\xi} \cdot \boldsymbol{\psi} - \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\varphi}) \, dS &\equiv H(\mathbf{v}) \\ &= - \int_{\Omega} \nabla \mathbf{u} : \delta \mathbf{C} : \nabla \mathbf{v} \, dV \end{aligned} \quad (4.23)$$

équation intégrale sur l'inconnue $\delta \mathbf{C}(\mathbf{x})$, non-linéaire puisque \mathbf{u} dépend de $\delta \mathbf{C}$ d'après (4.20). Le terme $\mathbf{H}(\mathbf{x})$ est ici encore entièrement connu : $(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\varphi})$ sont mesurés et \mathbf{v} est calculé comme solution d'un problème élastique direct avec la donnée en force $\boldsymbol{\psi}$.

Dans le cas d'une faible perturbation $\delta \mathbf{C} \ll \mathbf{C}_0$ des constantes élastiques, on peut prendre $\mathbf{u} = \mathbf{u}_0 + O(\delta \mathbf{C})$, où \mathbf{u}_0 est la solution pour $\mathbf{C} = \mathbf{C}_0$ du problème élastique :

$$\begin{cases} \text{div} (\mathbf{C} \nabla \mathbf{u}_0) = 0 & \text{dans } \Omega \\ \mathbf{C}_0 \nabla \mathbf{u}_0 \cdot \mathbf{n} = \boldsymbol{\varphi} & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \quad (4.24)$$

(laissant de côté l'élimination des déplacements rigidifiants) et (4.23) devient alors :

$$H(\mathbf{v}) = - \int_{\Omega} \nabla \mathbf{u}_0 : \delta \mathbf{C} : \nabla \mathbf{v} \, dV \quad (4.25)$$

Les *équations d'observation* (4.23) et (4.25) ont ici encore la structure d'équations intégrales de Fredholm de première espèce, respectivement non linéaire et linéaire en l'inconnue $\delta \mathbf{C}$. On peut par exemple spécialiser \mathbf{v} à la réponse élastique à une force de contact ponctuelle dans la direction \mathbf{e}_k :

$$\boldsymbol{\psi}(\mathbf{x}) = \delta(\mathbf{y} - \mathbf{x}) \mathbf{e}_k \quad (4.26)$$

Compte tenu des équations vérifiées par \mathbf{u}_0, \mathbf{v} , on a par ailleurs

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Omega} \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\varphi} \, dS - \int_{\partial\Omega} \mathbf{u}_0 \cdot \boldsymbol{\psi} \, dS &= 0 \\ \int_{\partial\Omega} (\boldsymbol{\xi} \cdot \boldsymbol{\psi} - \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\varphi}) \, dS &= \int_{\partial\Omega} (\boldsymbol{\xi} \cdot - \mathbf{u}_0) \cdot \boldsymbol{\psi} \, dS \end{aligned}$$

Il en résulte, pour le champ adjoint défini par (4.26) :

$$H(\mathbf{v}) = H(\mathbf{y}) = \boldsymbol{\xi}(\mathbf{y}) - \mathbf{u}_0(\mathbf{y}) \quad (4.27)$$

L'équation d'observation (4.25) donne la différence entre déplacements calculé et mesuré comme fonction explicite de $\delta \mathbf{C}$.

RECONSTRUCTION DE $\delta \mathbf{C}$. La méthode de Calderon pour reconstruire la conductivité scalaire δk peut être étendue à l'élasticité isotrope (Ikehata [8], Bui [4]).

A cet effet, on introduit des efforts de contact imposé et adjoint de la forme :

$$\boldsymbol{\varphi} = \mathbf{T}^n(\mathbf{u}_0) \quad \boldsymbol{\psi} = \mathbf{T}^n(\mathbf{v}) \quad (4.28)$$

avec

$$\mathbf{u}_0 = \nabla[\exp(-i\mathbf{z}\cdot\mathbf{x})] \quad \mathbf{v} = \nabla[\exp(-i\bar{\mathbf{z}}\cdot\mathbf{x})] \quad (4.29)$$

et \mathbf{z} défini par (4.18), soit :

$$\mathbf{z} = \frac{1}{2}(\mathbf{y} + i\mathbf{y}^\perp) \quad \bar{\mathbf{z}} = \frac{1}{2}(\mathbf{y} - i\mathbf{y}^\perp)$$

Ce choix permet de mettre l'équation d'observation (4.25) sous la forme

$$H(\mathbf{y}) = -\frac{1}{2}|\mathbf{y}|^4 \int_{\Omega} \delta\mu(\mathbf{x}) \exp(-i\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}) dV_x \quad (4.30)$$

Le second membre de l'équation ci-dessus est la transformée de Fourier spatiale de la perturbation $\delta\mu$ du coefficient de Poisson, prolongé à zéro en-dehors de $\partial\Omega$. Le choix (4.28) des efforts permet donc d'exprimer la transformée de Fourier de $\delta\mu$ en fonction de quantités connues (observables ou calculables).

De même, des efforts de contact imposé et adjoint donnés par (4.28) avec

$$\mathbf{u}_0 = (\lambda + 2\mu)\Delta\mathbf{g} - (\lambda + \mu)\nabla\text{div}\mathbf{g} \quad \mathbf{v} = (\lambda + 2\mu)\Delta\mathbf{h} - (\lambda + \mu)\nabla\text{div}\mathbf{h} \quad (4.31)$$

et

$$\mathbf{g} = \frac{1}{|\mathbf{y}|^2}(\mathbf{x}\cdot\mathbf{z}) \exp(-i\bar{\mathbf{z}}\cdot\mathbf{x})\mathbf{z} \quad \mathbf{h} = \frac{1}{|\mathbf{y}|^2}(\mathbf{x}\cdot\bar{\mathbf{z}}) \exp(-i\mathbf{z}\cdot\mathbf{x})\bar{\mathbf{z}}$$

Ce choix permet de mettre l'équation d'observation (4.25) sous la forme (Ikehata [8])

$$H(\mathbf{y}) = -\frac{\mu^2}{4}|\mathbf{y}|^4 \int_{\Omega} \delta\lambda(\mathbf{x}) \exp(-i\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}) dV_x - \frac{\mu^2}{4}|\mathbf{y}|^4 \int_{\Omega} \delta\mu(\mathbf{x}) \exp(-i\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}) dV_x \\ - \frac{(\lambda + \mu)^2}{16}|\mathbf{y}|^4 \int_{\Omega} \delta\mu(\mathbf{x})(\mathbf{z}\cdot\mathbf{x})(\bar{\mathbf{z}}\cdot\mathbf{x}) \exp(-i\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}) dV_x \quad (4.32)$$

Une fois $\delta\mu$ calculé par inversion de la transformée de Fourier (4.30), l'équation ci-dessus donne la transformée de Fourier de $\delta\lambda$.

La reconstruction d'une petite perturbation isotrope des modules d'élasticité à l'aide de forces et déplacements mesurés sur la frontière du corps admet donc en principe une solution unique. Pour mettre en oeuvre cette méthode, il faut mesurer les déplacements $\boldsymbol{\xi}$ sur $\partial\Omega$ correspondant à toutes les forces $\boldsymbol{\varphi} = \mathbf{T}^n(\mathbf{u}_0)$ associées aux champs de déplacements \mathbf{u}_0 définis par (4.29) et (4.31). Soulignons que cette méthode ne peut pas être appliquée sans précautions : le calcul des transformées inverses doit être régularisé afin de stabiliser l'inversion par rapport aux incertitudes sur $H(\mathbf{y})$.

PERTE D'UNICITÉ EN ÉLASTICITÉ ANISOTROPE. Le problème d'identification posé précédemment n'admet pas une solution unique dans le cas général de l'élasticité anisotrope (Constantinescu [6]). La démonstration repose sur l'utilisation d'un changement de variable régulier (un difféomorphisme) qui laisse le domaine Ω globalement invariant et par lequel tout point de la frontière $\partial\Omega$ est invariant.

Soit donc une application $\boldsymbol{\Psi} : \Omega \longrightarrow \Omega$ et égale à l'identité sur la frontière ($\boldsymbol{\Psi}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$, $\mathbf{x} \in \partial\Omega$). Un nouveau tenseur d'élasticité \mathbf{L} est alors construit comme :

$$L_{ijkl}(\boldsymbol{\Psi}(\mathbf{x})) = |\det \nabla\boldsymbol{\Psi}|^{-1} \sum_{n,m} C_{inkm}(\mathbf{x}) \boldsymbol{\Psi}_{n,j}(\mathbf{x}) \boldsymbol{\Psi}_{m,l}(\mathbf{x}) \quad (4.33)$$

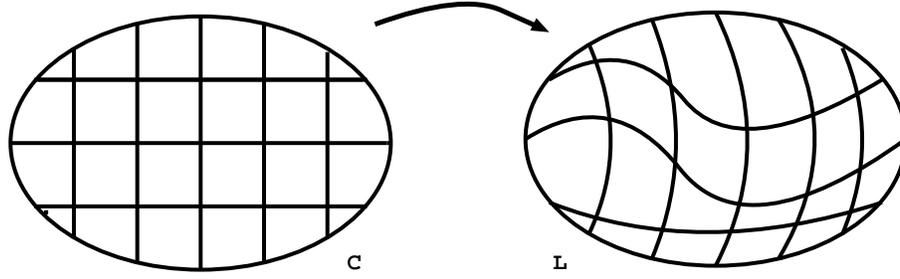


Fig. 4.3: Le difféomorphisme Ψ et les deux corps Ω_C et Ω_L .

On remarque d'abord que le tenseur \mathbf{L} construit au moyen de (4.33) vérifie

$$L_{ijkl} = L_{klij}$$

mais pas nécessairement

$$L_{ijkl} = L_{jikl} = L_{ijlk} \quad (4.34)$$

La construction (4.33) ne respecte donc pas nécessairement toutes les symétries que doit vérifier un tenseur d'élasticité. Par contre, pour un Ψ fixé, il existe des tenseurs \mathbf{C} tels que les relations (4.34) sont vérifiées. En effet, cette dernière implique avec (4.33) que :

$$\sum_{n,m} C_{inkm} \Psi_{n,j} \Psi_{m,l} - \sum_{n,m} C_{jnkm} \Psi_{n,i} \Psi_{m,l} = 0 \quad (4.35)$$

soit 15 équations indépendantes pour 21 coefficients C_{abcd} distincts. On a donc un système linéaire homogène à 15 équations et 21 inconnues, qui admet toujours une solution non nulle en \mathbf{C} . Tout \mathbf{C} ainsi déterminé conduit par (4.33) à un tenseur d'élasticité \mathbf{L} avec les propriétés de symétrie désirées.

Le déplacement élastique \mathbf{u} sur Ω (tenseur d'élasticité \mathbf{C}) créé par l'application d'efforts $\boldsymbol{\varphi}$ sur la frontière $\partial\Omega$ vérifie l'équation variationnelle :

$$\forall \mathbf{v} \quad \int_{\Omega} \nabla_x \mathbf{u} : \mathbf{C} : \nabla_x \mathbf{v} \, dV_x = \int_{\partial\Omega} \boldsymbol{\varphi} \cdot \mathbf{v} \, dS_x \quad (4.36)$$

L'idée est alors de faire

$$\mathbf{y} = \Psi(\mathbf{x})$$

dans (4.36). Compte tenu de (4.33), on obtient tous calculs faits :

$$\forall \mathbf{v} \quad \int_{\Omega} \nabla_y (\mathbf{u} \circ \Psi^{-1}) : \mathbf{L} : \nabla_y (\mathbf{v} \circ \Psi^{-1}) \, dV_y = \int_{\partial\Omega} \boldsymbol{\varphi} \cdot \mathbf{v} \, dS_y \quad (4.37)$$

En d'autres termes, le champ $\mathbf{u} \circ \Psi^{-1}$ est solution d'un équilibre élastique sur Ω pour le tenseur d'élasticité \mathbf{L} et les forces $\boldsymbol{\varphi}$ données sur $\partial\Omega$. De plus, le choix de Ψ entraîne que :

$$(\mathbf{u} \circ \Psi^{-1})(\mathbf{y}) = \mathbf{u}(\mathbf{x}) \quad \mathbf{L} : \nabla_y (\mathbf{u} \circ \Psi^{-1})(\mathbf{y}) = \mathbf{C} : \nabla_x \mathbf{u}(\mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{y} \in \partial\Omega$$

En d'autres termes : la connaissance des couples $\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\varphi}$ de mesures en déplacement et en force sur $\partial\Omega$ ne permet pas de distinguer entre \mathbf{C} et \mathbf{L} . L'identification d'un tenseur d'élasticité anisotrope n'admet donc en général pas de solution unique.

Ce raisonnement, développé par A. Constantinescu [6] dans sa thèse, est lui-même inspiré de Kohn et Vogelius [10], qui ont construit un exemple similaire pour l'identification des coefficients de conductivité en électricité.

4.3 Résolution numérique du problème inverse

Les équations d'observation discutées plus haut permettent d'aborder le problème inverse linéarisé. Sans hypothèse de linéarisation (ce qui est *a priori* préférable), on est amené à rechercher le tenseur d'élasticité $\mathbf{C}(\mathbf{x})$ comme solution d'un problème de minimisation.

D'un point de vue pratique on peut seulement espérer connaître un nombre fini de couples de mesures déplacement-force en un nombre fini de points de mesure sur la frontière du solide. Pour la simplicité de la discussion, on va supposer donnés N couples déplacements-force, $(\boldsymbol{\xi}_i, \boldsymbol{\varphi}_i)_{i=1, N}$ sur toute la frontière $\partial\Omega$.

Le problème pratique peut être formulé de la manière suivante :

Pour N paires déplacement-force $(\boldsymbol{\xi}_i, \boldsymbol{\varphi}_i)_{i=1}^N$ données, on recherche une solution

$$(\mathbf{C}, \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_N, \boldsymbol{\sigma}_1, \dots, \boldsymbol{\sigma}_N)$$

du système d'équations

$$\begin{cases} \boldsymbol{\varepsilon}_i = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{u}_i + \nabla^T \mathbf{u}_i), \\ \boldsymbol{\sigma}_i = \mathbf{C} : \boldsymbol{\varepsilon}_i \\ \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}_i = \mathbf{0} \end{cases} \quad (i = 1, N) \quad (4.38)$$

avec les conditions aux limites

$$\begin{cases} \mathbf{u}_i|_{\partial\Omega} = \boldsymbol{\xi}_i, & i = 1, N \\ \boldsymbol{\sigma}_i \mathbf{n}|_{\partial\Omega} = \boldsymbol{\varphi}_i \end{cases} \quad (i = 1, N) \quad (4.39)$$

MINIMISATION D'ERREURS SUR LES FORCES OU LES DÉPLACEMENTS. Les approches les plus intuitives consistent à minimiser l'écart quadratique sur les déplacements (sorties)

$$\mathcal{J}_u(\mathbf{C}) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \int_{\partial\Omega} |\mathbf{u}_i(\mathbf{x}, \mathbf{C}) - \boldsymbol{\xi}_i(\mathbf{x})|^2 dS + \alpha R(\mathbf{C})$$

($\mathbf{u}_i(\mathbf{x}, \mathbf{C})$ étant solution de (4.38) et (4.39)₂) ou sur les forces (entrées)

$$\mathcal{J}_\sigma(\mathbf{C}) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \int_{\partial\Omega} |\boldsymbol{\sigma}_i(\mathbf{x}, \mathbf{C}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}) - \boldsymbol{\varphi}_i(\mathbf{x})|^2 dS + \alpha R(\mathbf{C})$$

($\boldsymbol{\sigma}_i(\mathbf{x}, \mathbf{C})$ étant solution de (4.38) et (4.39)₁).

On aura généralement recours à des méthodes de minimisation avec gradient, ce dernier pouvant être évalué par la méthode de l'état adjoint (section 5.4).

Nous préférons dans la suite exposer une autre approche, utilisant la notion d'erreur en relation de comportement. Cet exposé s'appuie sur le travail de thèse d'A. Constantinescu [6].

MINIMISATION D'UNE ERREUR EN RELATION DE COMPORTEMENT. L'idée de base consiste à distinguer les aspects statique et cinématique, qui sont des concepts universels, de ce qui ressort de la physique particulière du matériau : l'équation constitutive.

Les équations (4.38) et (4.39) peuvent ainsi être séparés en une partie cinématique (caractérisation des champs de déplacement cinématiquement admissibles) :

$$\boldsymbol{\varepsilon}_i = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{u}_i + \nabla^\sigma \mathbf{u}_i) \quad \mathbf{u}_i|_{\partial\Omega} = \boldsymbol{\xi}_i \quad (i = 1, N)$$

une partie statique (caractérisation des champs de contraintes statiquement admissibles) :

$$\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}_i = \mathbf{0} \quad \boldsymbol{\sigma}_i \mathbf{n}|_{\partial\Omega} = \boldsymbol{\varphi}_i \quad (i = 1, N)$$

et enfin une partie liée à la relation de comportement :

$$\boldsymbol{\sigma}_i = \mathbf{C} : \boldsymbol{\varepsilon}_i \quad (i = 1, N)$$

L'ensemble des champs cinématiquement admissibles pour un déplacement $\boldsymbol{\xi}$ donnée sur $\partial\Omega$ est :

$$CA(\boldsymbol{\xi}) = \{\boldsymbol{\varepsilon} | \exists \mathbf{u}, \boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{u} + \nabla^T \mathbf{u}) \text{ dans } \Omega \text{ et } \mathbf{u}|_{\partial\Omega} = \boldsymbol{\xi} \text{ sur } \partial\Omega\}$$

et l'ensemble des champs statiquement admissibles pour une force $\boldsymbol{\varphi}$ donné sur $\partial\Omega$ est :

$$SA(\boldsymbol{\varphi}) = \{\boldsymbol{\sigma} | \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{0} \text{ dans } \Omega \text{ et } \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n}|_{\partial\Omega} = \boldsymbol{\varphi} \text{ sur } \partial\Omega\}$$

Une *erreur en loi de comportement (ELC)* est alors définie comme :

$$I(\mathbf{C}, \boldsymbol{\varepsilon}_1, \dots, \boldsymbol{\varepsilon}_N, \boldsymbol{\sigma}_1, \dots, \boldsymbol{\sigma}_N) = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\mathbf{C}^{-\frac{1}{2}} : \boldsymbol{\sigma}_i - \mathbf{C}^{\frac{1}{2}} : \boldsymbol{\varepsilon}_i|^2 dx \quad (4.40)$$

Le problème inverse peut alors être formulé comme :

$$\operatorname{Min} I(\mathbf{C}, \boldsymbol{\varepsilon}_1, \dots, \boldsymbol{\varepsilon}_N, \boldsymbol{\sigma}_1, \dots, \boldsymbol{\sigma}_N) \quad \mathbf{C}, \boldsymbol{\varepsilon}_i \in CA(\boldsymbol{\xi}_i), \boldsymbol{\sigma}_i \in SA(\boldsymbol{\varphi}_i) \quad (i = 1, N) \quad (4.41)$$

Ce type de fonctionnelle a été antérieurement introduite, sous la forme équivalente

$$\int_{\Omega} (\boldsymbol{\sigma} - \mathbf{C} : \boldsymbol{\varepsilon}) : \mathbf{C}^{-1} : (\boldsymbol{\sigma} - \mathbf{C} : \boldsymbol{\varepsilon}) dV$$

par Ladevèze et Leguillon [12] pour l'étude des erreurs en éléments finis, une des propriétés de l'ELC étant la localisation spatiale de l'erreur commise en calcul par éléments finis.

Comme illustration de cet aspect, Constantinescu [6] présente le calcul par éléments finis de la torsion d'un cylindre d'aluminium revêtu de cuivre (figure 4.4). La figure 4.5 représente la densité d'ERC :

$$\left| \mathbf{C}^{-\frac{1}{2}} : \boldsymbol{\sigma} - \mathbf{C}^{\frac{1}{2}} : \boldsymbol{\varepsilon} \right|^2$$

Elle met en évidence la bonne localisation de l'inclusion de cuivre par l'ERC. La propriété de localisation a aussi été utilisée par Ladevèze et al. [14] pour le recalage des modèles éléments finis à partir de mesures vibratoires.

Une fonctionnelle similaire avait été antérieurement utilisée en électrostatique pour la détermination de la distribution intérieure de la conductivité électrique à partir des mesures de potentiel et voltage sur la frontière (Kohn, Vogelius [10]).

En fait, il est commode d'utiliser les données (ξ_i, φ_i) à la frontière pour réécrire l'ERC sous la forme

$$I(\mathbf{C}, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_N, \sigma_1, \dots, \sigma_N) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \left\{ \int_{\Omega} \sigma_i : \mathbf{C}^{-1} : \sigma_i + \varepsilon_i : \mathbf{C} : \varepsilon_i \, dV - \int_{\partial\Omega} \xi_i \cdot \varphi_i \, dS \right\} \quad (4.42)$$

De plus, ξ_i et φ_i sont des données, de sorte que l'intégrale de frontière ci-dessus ne varie pas. Il suffit donc de faire porter la minimisation sur

$$J(\mathbf{C}, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_N, \sigma_1, \dots, \sigma_N) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \int_{\Omega} \{ \sigma_i : \mathbf{C}^{-1} : \sigma_i + \varepsilon_i : \mathbf{C} : \varepsilon_i \} \, dV \quad (4.43)$$

On observe que J est la somme des énergies de déformation exprimées en fonction des déformations ou des contraintes, ce qui permet à \mathbf{C} fixé une minimisation simple en σ_i ou ε_i .

L'algorithme proposé par Constantinescu [6] est une minimisation suivant des directions alternées. Elle repose sur le fait que la minimisation de J , est simple dans chacune des directions \mathbf{C} , ε_i , σ_i lorsque les autres variables sont fixées. Une itération de la minimisation comprend les 3 pas suivants :

1. Pour \mathbf{C} fixé, résoudre N problèmes à déplacement imposé :

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(\mathbf{C} : \nabla \mathbf{u}) &= \mathbf{0} & \text{dans } \Omega \\ \mathbf{u}_i &= \xi_i & \text{sur } \partial\Omega \end{aligned} \quad (1 \leq i \leq N) \quad (4.44)$$

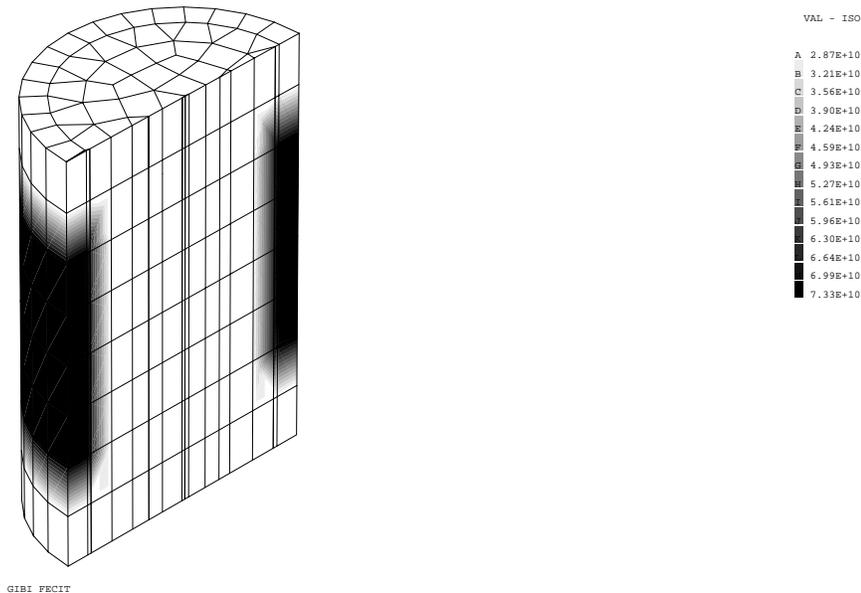


Fig. 4.4: La distribution du module de cisaillement G pour le cylindre en torsion (d'après [6]).

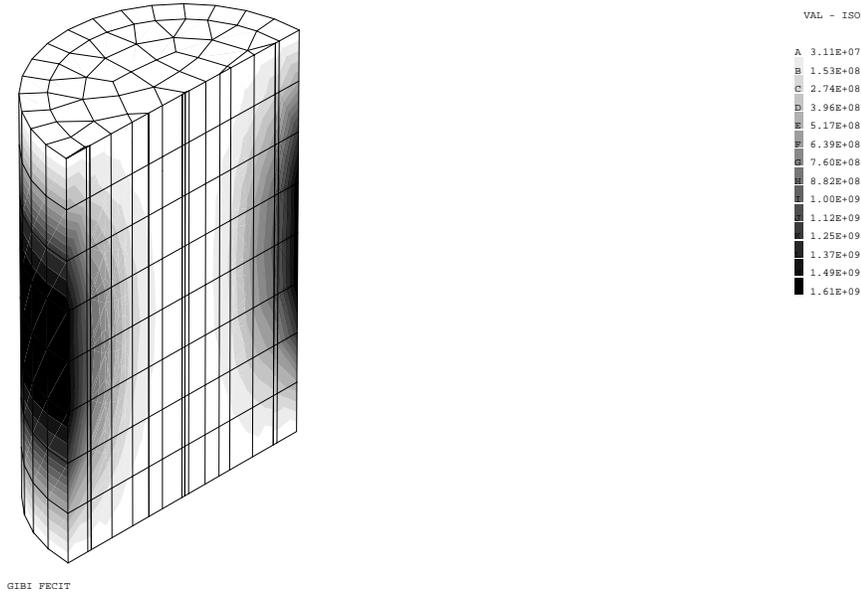


Fig. 4.5: Distribution de l'erreur en loi de comportement pour un cylindre en torsion (d'après [6]).

2. Pour \mathbf{C} fixé, résoudre N problèmes à force imposée :

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(\mathbf{C} : \nabla \mathbf{u}) &= \mathbf{0} & \text{dans } \Omega \\ [\mathbf{C} \nabla \mathbf{u}_i] \cdot \mathbf{n} &= \varphi_i & \text{sur } \partial\Omega \end{aligned} \quad (1 \leq i \leq N) \quad (4.45)$$

3. Pour ε_i déterminé par l'étape 1 et σ_i déterminé par l'étape 2, minimiser par rapport à \mathbf{C} :

$$G(c_k) = I(\mathbf{C}, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_N, \sigma_1, \dots, \sigma_N)$$

L'étape 3 ci-dessus est facilitée par l'utilisation d'une décomposition du tenseur d'élasticité \mathbf{C} sur une base de tenseurs propres. En élasticité isotrope, cela revient à faire apparaître les tenseurs déviateurs de déformation \mathbf{e} et de contrainte \mathbf{s} :

$$\varepsilon = \frac{1}{3}(\operatorname{Tr}\varepsilon)\mathbf{1} + \mathbf{e} \quad \sigma = \frac{1}{3}(\operatorname{Tr}\sigma)\mathbf{1} + \mathbf{s}$$

de sorte que les densités d'énergie de déformation s'écrivent

$$\begin{aligned} \varepsilon : \mathbf{C} : \varepsilon &= \frac{K}{3}(\operatorname{Tr}\varepsilon)^2 + 2\mu \mathbf{e} : \mathbf{e} \\ \sigma : \mathbf{C}^{-1} : \sigma &= \frac{1}{3K}(\operatorname{Tr}\sigma)^2 + \frac{1}{2\mu} \mathbf{s} : \mathbf{s} \end{aligned}$$

où $K = 3\lambda + 2\mu$. La minimisation de J par rapport à $K(\mathbf{x}), \mu(\mathbf{x})$, à $(\varepsilon_i, \sigma_i)$ fixés, est alors explicite :

$$K(\mathbf{x})^2 = \frac{\sum_{i=1}^N (\operatorname{Tr}\sigma_i)^2}{\sum_{i=1}^N (\operatorname{Tr}\varepsilon_i)^2} \quad \text{et} \quad [2\mu(\mathbf{x})]^2 = \frac{\sum_{i=1}^N \mathbf{s}_i : \mathbf{s}_i}{\sum_{i=1}^N \mathbf{e}_i : \mathbf{e}_i} \quad (4.46)$$

Cette méthode a été étendue à l'élasticité anisotrope.

4.4 Exemples numériques

Les exemples numériques reproduits ci-après sont empruntés à la thèse d'A. Constantinescu [6]. Ils reposent sur l'utilisation de la méthode des directions alternées pour minimiser l'erreur en relation de comportement. Ils ont été obtenus dans le contexte de l'élasticité plane, isotrope ou à symétrie cubique.

DESCRIPTION DES TEST NUMÉRIQUES. Il s'agissait d'identifier les distributions suivantes de modules élastiques, sur un domaine Ω carré :

- inclusion marche (A), carrée (B) ou coin (D) (figure 4.6) :

$$M_{reel} = \begin{cases} M_0 & \text{si } \mathbf{x} \in \Delta_1 \\ M_0 + \delta M_1 & \text{si } \mathbf{x} \in \Omega - \Delta_1 \end{cases}$$

- inclusion annulaire (C) (figure 4.6) :

$$M_{reel} = \begin{cases} M_0 & \text{si } \mathbf{x} \in \Delta_1 \\ M_0 + \delta M_1 & \text{si } \mathbf{x} \in \Delta_2 - \Delta_1 \\ M_0 + \delta M_2 & \text{si } \mathbf{x} \in \Omega - \Delta_2 \end{cases}$$

ou M_0 , M_1 , et M_2 sont des valeurs constantes de modules élastiques et Δ_1 et Δ_2 sont deux domaines tels que $\Delta_1 \subset \Delta_2 \subset \Omega$.

Les N paires déplacements - forces $(\xi_i|_{\partial\Omega}, \varphi_i|_{\partial\Omega})_{i=1,N}$, données du problème inverse, sont construites synthétiquement au moyen de calculs par éléments finis à partir de la distribution 'réelle' des modules élastiques. Ces mesures synthétiques ont parfois été affectées d'un bruit blanc d'amplitude a , proportionnel

$$\xi_{bruite} = (1 + ar)\xi \quad \varphi_{bruite} = (1 + ar)\varphi \quad (4.47)$$

ou absolu

$$\xi_{bruite} = \xi + ar \max |\xi| \quad \varphi_{bruite} = \varphi + ar \max |\varphi| \quad (4.48)$$

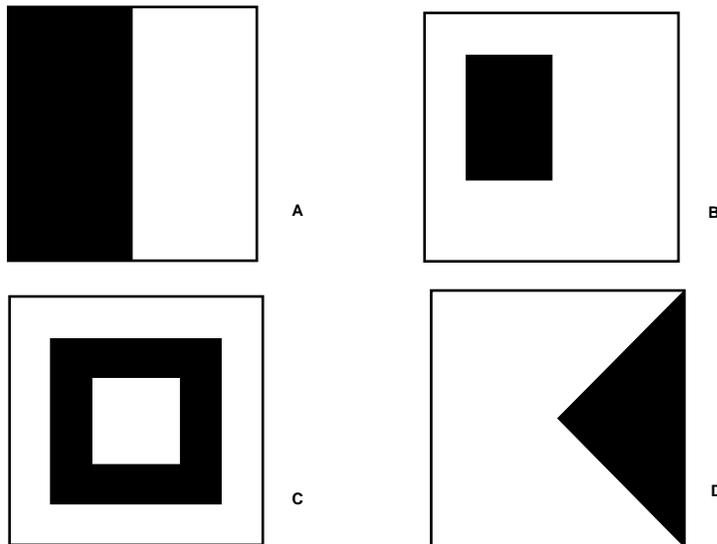


Fig. 4.6: Formes des inclusions marche (A), carré (B), annulaire (C), et coin (D) (d'après [6]).

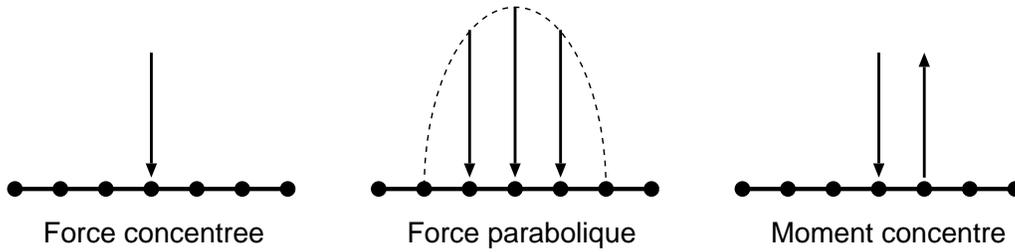


Fig. 4.7: Différents distributions des forces imposées sur la frontière

où a est l'amplitude du bruit et r un nombre aléatoire dans $[-1, 1]$.

Les forces imposées sont soit des distributions paraboliques sur plusieurs nœuds, soit des forces ou des moments concentrés (voir fig. 4.7); seul le point d'application du chargement varie d'une mesure à une autre.

La méthode des directions alternée a été programmée en langage GIBIANE du code CASTEM 2000 (CEA, France) sur des stations de travail HP 720 et HP/Apollo 400. Le domaine Ω carré a été divisé en $n \times n$ éléments carrés (le maillage le plus fin comprend 48×48 éléments).

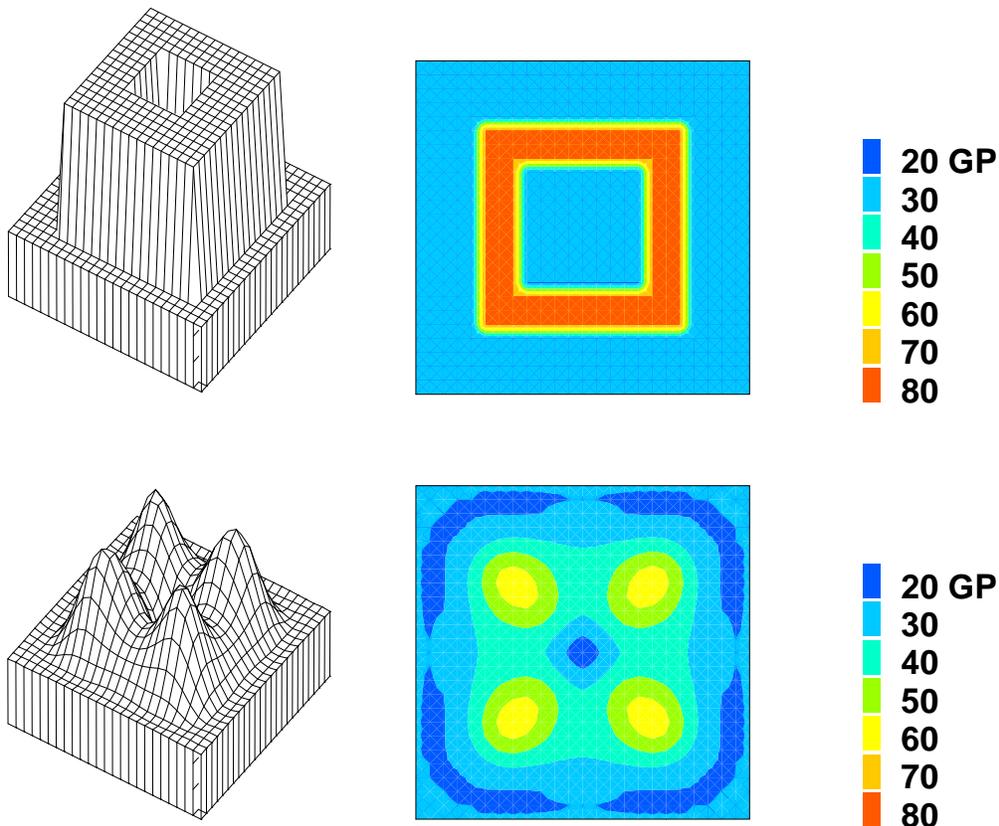


Fig. 4.8: Inclusion (C) : module de cisaillement réel (en haut) et reconstruit (après 32 itérations); bruit 0%, maillage 24×24 [6].

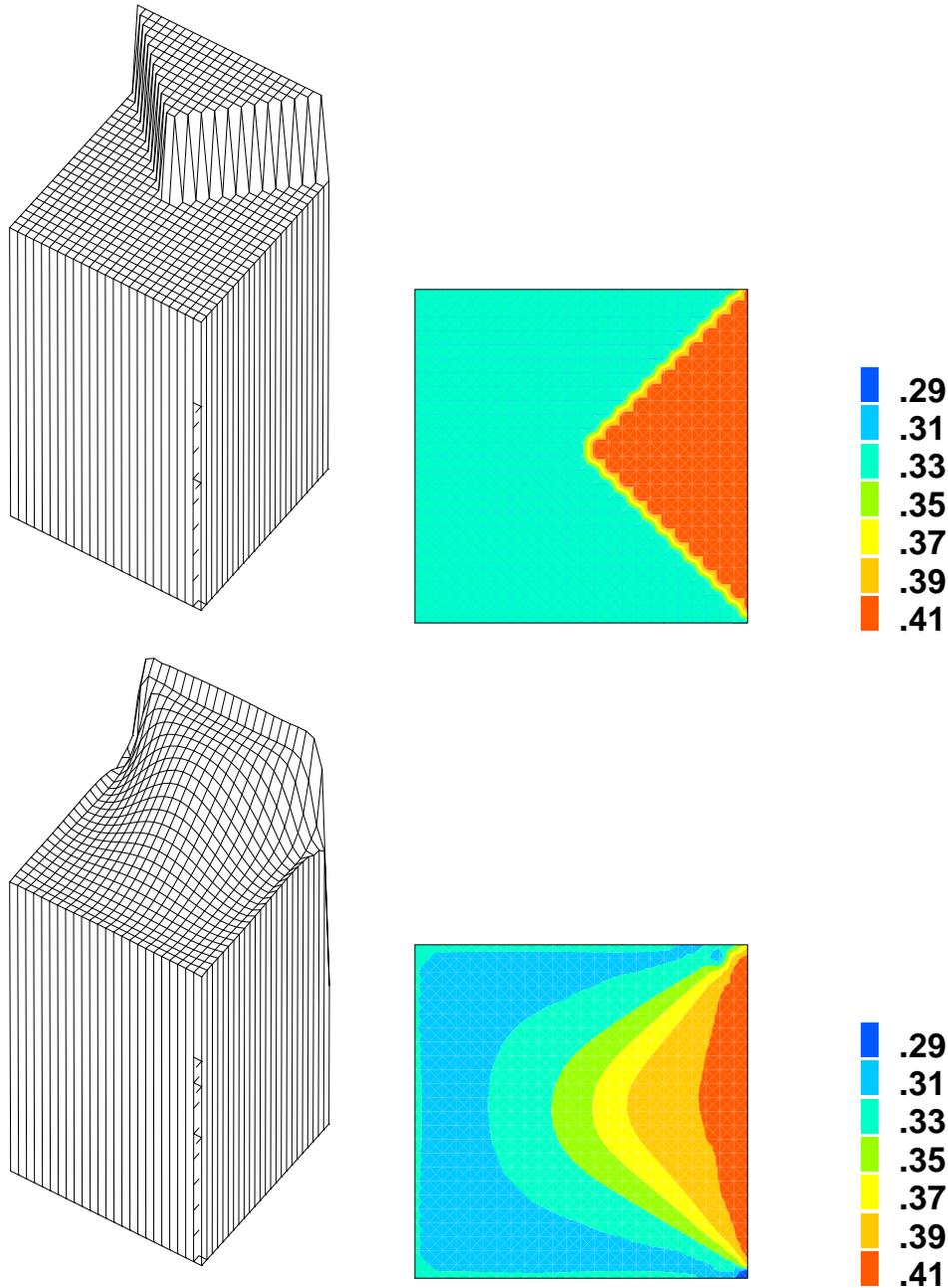


Fig. 4.9: Inclusion (D) : coefficient de Poisson réel (en haut) et reconstruit (après 14 itérations); bruit 0%, maillage 24×24 [6].

RÉSULTATS - ELASTICITÉ À SYMÉTRIE CUBIQUE. L'exemple concerne une inclusion de cuivre (matériau à symétrie cubique) dans une matrice d'aluminium (isotrope), de constantes élastiques respectives :

$$E_{Al} = 66.10^9 Pa \quad \nu_{Al} = 0.32 \quad G_{Al} = 25.10^9 Pa = \frac{E_{Al}}{2(1+\nu_{Al})}$$

$$E_{Cu} = 66.10^9 Pa \quad \nu_{Cu} = 0.42 \quad G_{Cu} = 75.10^9 Pa$$

Inclusion A - forces						
	iteration 5			iteration 17		
bruit	ϵ_E	ϵ_ν	ϵ_G	ϵ_E	ϵ_ν	ϵ_G
0%	0.022	0.040	0.132	0.023	0.035	0.090
1%	0.026	0.040	0.137	0.030	0.039	0.105
5%	0.065	0.048	0.163	0.515	0.473	0.705
10%	0.139	0.078	0.244	0.436	0.823	0.648

Inclusion B - forces						
	iteration 5			iteration 17		
bruit	ϵ_E	ϵ_ν	ϵ_G	ϵ_E	ϵ_ν	ϵ_G
0%	0.007	0.058	0.206	0.009	0.050	0.156
1%	0.01	0.059	0.209	0.021	0.055	0.165
5%	0.051	0.069	0.229	0.376	0.301	0.575
10%	0.123	0.089	0.264	0.85	2.901	0.755

Inclusion C - forces						
	iteration 5			iteration 17		
bruit	ϵ_E	ϵ_ν	ϵ_G	ϵ_E	ϵ_ν	ϵ_G
0%	0.007	0.087	0.345	0.010	0.091	0.318
1%	0.007	0.087	0.345	0.010	0.091	0.318
5%	0.051	0.097	0.368	0.368	0.27	0.510
10%	0.121	0.115	0.403	3.568	2.308	1.313

Inclusion D - forces						
	iteration 5			iteration 17		
bruit	ϵ_E	ϵ_ν	ϵ_G	ϵ_E	ϵ_ν	ϵ_G
0%	0.018	0.042	0.127	0.015	0.031	0.080
1%	0.022	0.043	0.013	0.027	0.034	0.092
5%	0.058	0.053	0.162	1.903	0.930	3.028
10%	0.182	0.501	0.208	0.996	0.888	0.860

Tableau 4.1: Erreur relative en moyenne quadratique commise sur les modules élastiques (inclusions A, B, C et D) et selon le niveau a de bruit des données (d'après [6]).

Le cuivre est un matériau à symétrie cubique tandis que l'aluminium est isotrope.

Le tableau 4.1 montre l'erreur relative en moyenne quadratique

$$\epsilon_M^2 = \frac{\int_{\Omega} (M_{reel} - M_{calcule})^2 dV}{\int_{\Omega} M_{reel}^2 dV}$$

commise sur les modules élastiques, pour les quatre exemples (A,B,C,D) et selon le niveau a de bruit des données.

La reconstruction est également illustrée sur les figures 4.8, 4.9.

COMPARAISON AVEC LE PROBLÈME ÉLECTRIQUE. Kohn et McKenney [9] avaient développé une approche similaire pour l'identification du coefficient de conductivité électrique isotrope. La figure 4.10 reproduit leurs résultats numériques (sur données simulées). On y observe également une dégradation du résultat d'identification au fil des itérations en présence de données bruitées.

4.5 Reconstruction de déformations ou contraintes résiduelles

Certains processus de fabrication (moulage, forgeage, coupe, soudure) impliquent des transformations thermo-mécaniques et métallurgiques complexes. Celles-ci induisent des contraintes résiduelles dans les pièces en service. La détermination des contraintes résiduelles est un problème pratique important et difficile, qui se présente parfois comme un problème inverse.

UN EXEMPLE D'APPROCHE NON DESTRUCTIVE. Gao et Mura [7] se sont intéressés à la situation suivante : un corps Ω , libre de sollicitations extérieures

$$\sigma \cdot n = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega$$

comprend un sous-domaine $D \subset \Omega$ siège de déformations plastiques ε^p résiduelles, résultant par exemple du processus de fabrication. Il est alors possible d'établir une équation

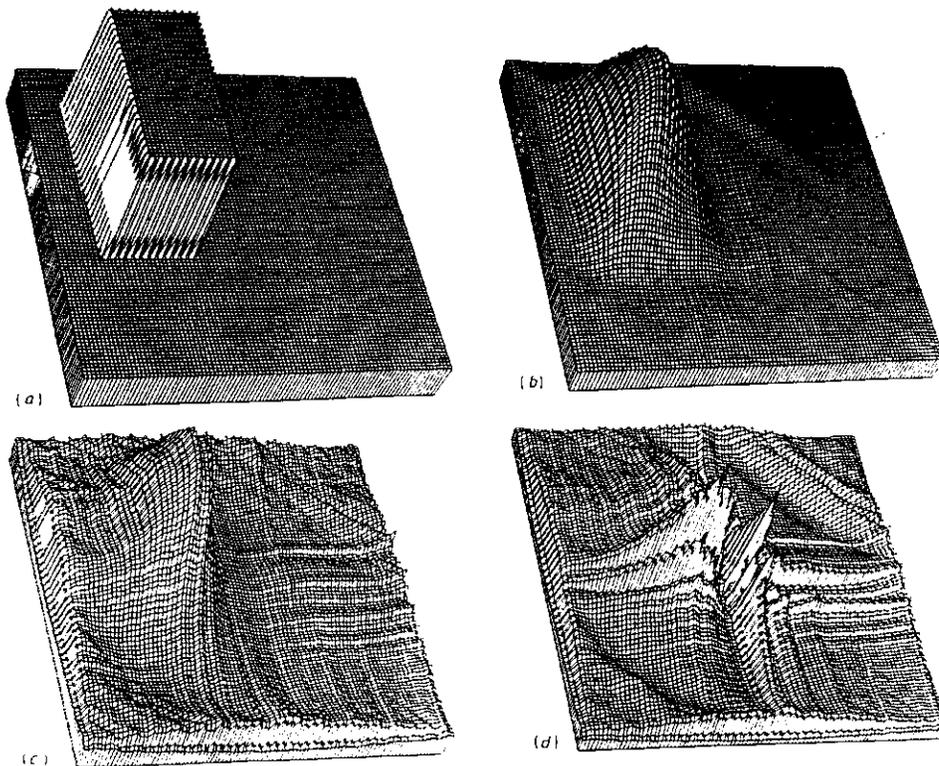


Fig. 4.10: Reconstruction d'un conductivité (d'après Kohn et McKenney) : (a) conductivité réelle, (b) reconstruction sans bruit, (c) reconstruction 3% bruit (11 itérations), (d) reconstruction 3% bruit (50 itérations).

intégrale reliant le déplacement $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ ($\mathbf{x} \in \partial\Omega$) sur la frontière externe à la distribution de déformation plastique :

$$\frac{1}{2}u_k(\mathbf{x}) + (\text{VP}) \int_{\partial\Omega} \Sigma_{ij}^k(\mathbf{x}, \mathbf{y}) n_j(\mathbf{y}) u_i(\mathbf{x}) dS_y = \int_D \Sigma_{ij}^k(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \varepsilon_{ij}^P(\mathbf{y}) dV_y \quad (4.49)$$

la notation $\Sigma_{ij}^k(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ désignant la composante (i, j) du tenseur de contrainte au point \mathbf{y} créé par l'application d'une force ponctuelle unitaire de direction k au point \mathbf{x} (solution fondamentale de l'élasticité). Ce tenseur est singulier comme $|\mathbf{y} - \mathbf{x}|$ au voisinage de \mathbf{x} , et l'intégrale du premier membre ne converge qu'au sens des valeurs principales de Cauchy.

Pour une répartition donnée de ε^p , l'équation (4.49) permet par des méthodes d'éléments de frontière [3] le calcul de \mathbf{u} sur $\partial\Omega$. Ce problème direct est bien posé, car l'équation intégrale est (pour l'inconnue \mathbf{u}) du type Fredholm de seconde espèce, qui a une solution \mathbf{u} unique et stable [11].

Réciproquement, supposant mesurés les déplacements en surface induits par l'apparition de la déformation inconnue ε^p , on peut envisager d'utiliser l'équation intégrale (4.49) pour le calcul de ε^p ; cela définit un problème inverse. Cette fois, l'équation intégrale (d'inconnue ε^p), de la forme

$$\int_D \Sigma_{ij}^k(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \varepsilon_{ij}^P(\mathbf{y}) dV_y = F_k(\mathbf{x}) \quad (\mathbf{x} \in \partial\Omega) \quad (4.50)$$

est du type Fredholm de première espèce, et le problème inverse est donc mal posé (grande sensibilité aux erreurs sur \mathbf{u}). De plus, toute déformation $\delta\varepsilon$ (a) compatible (b) nulle en-dehors de D (c) induisant un déplacement nul sur ∂D crée un déplacement nul en-dehors de D , de sorte que $\varepsilon^p + \delta\varepsilon$ vérifie aussi (4.49). On est donc en présence d'un problème inverse

- dont la solution exacte (pour des données exactes) n'est pas unique
- sensible aux erreurs expérimentales

De plus, le sous-domaine D siège de la déformation plastique est *a priori* inconnu. Il faut donc introduire *a priori* une région V , $D \subseteq V \subset \Omega$ fixée englobant D . Ceci constitue en soi une information *a priori*. D'autre part, il importe de régulariser la résolution de (4.50).

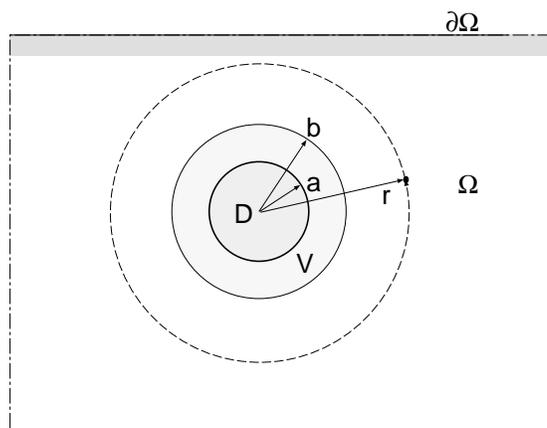


Fig. 4.11: Exemple numérique en déformation plane : principe (d'après [7]).

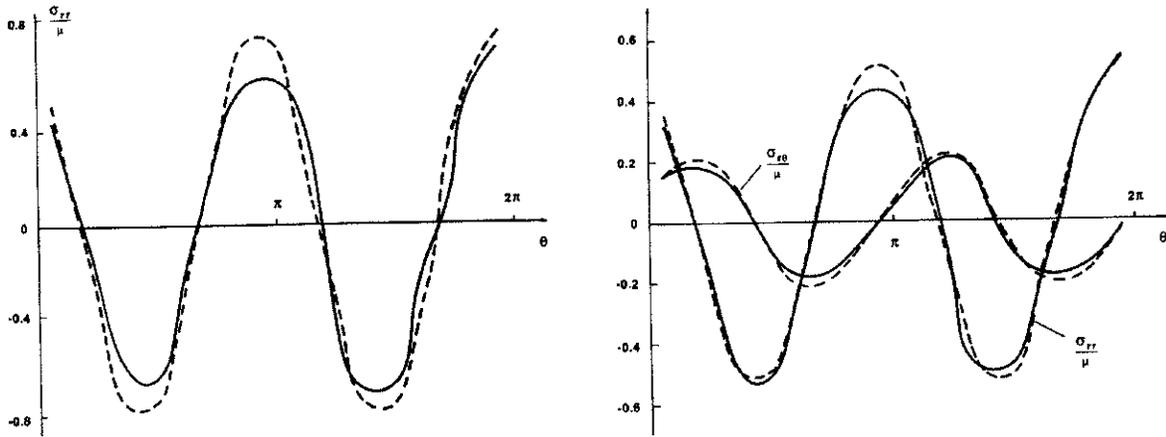


Fig. 4.12: Exemple numérique en déformation plane : solution exacte (trait plein) et reconstruite (pointillé) des contraintes résiduelles sur le cercle de rayon $r = 1, 1b$ (gauche) et $r = 1, 5b$ (droite). (d'après [7]).

Gao et Mura ont proposé de résoudre le problème inverse sous la forme

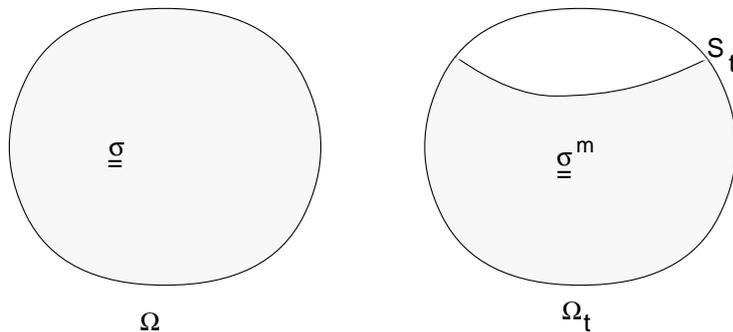
$$\min_{\varepsilon^p} |\varepsilon^p|^2 \quad \left| \int_V \Sigma_{ij}^k(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \varepsilon_{ij}^p(\mathbf{y}) dV_y - F_k(\mathbf{x}) \right|^2 \leq \delta \quad (4.51)$$

Ils présentent un exemple numérique (figures 4.11, 4.12), avec des données en déplacement simulées, qui montre que le champ de contraintes résiduelles est raisonnablement reconstruit en-dehors de V . Par contre, cette méthode ne garantit pas une reconstruction précise dans V en raison de la non-unicité du problème par rapport à ε^p et D .

UNE MODÉLISATION DE L'APPROCHE PAR ENLÈVEMENT DE MATIÈRE. Ballard et Constantinescu [2] proposent une modélisation de la mesure de contraintes résiduelles par enlèvement de matière. Dans leur approche, le corps Ω est siège d'un champ de contraintes résiduelles σ^R auto-équilibré :

$$\sigma^R \cdot \mathbf{n} = \mathbf{0} \quad \text{sur } \partial\Omega$$

Ils considèrent la méthode destructive consistant à enlever de la matière, couche après couche. Cela définit une famille de corps Ω_t , indexée par un temps fictif t ($\Omega_0 = \Omega$). Notons S_t le front d'enlèvement.



Pour chaque Ω_t , la contrainte se redistribue de façon à rester autoéquilibrée.

$$\sigma^m \cdot \mathbf{n} = \mathbf{0} \quad \text{sur } \partial\Omega_t \quad (4.52)$$

Le tenseur des contraintes $\boldsymbol{\sigma}^m$ pour le domaine Ω_t est supposé mesuré sur le front d'enlèvement. Ballard et Constantinescu font l'hypothèse que la variation de contrainte $\Delta\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^m - \boldsymbol{\sigma}^R$ induite par l'enlèvement de matière est élastique. Ils peuvent alors appliquer la théorie des équations intégrales au problème élastique d'inconnue $(\Delta\mathbf{u}, \Delta\boldsymbol{\sigma})$ posé sur Ω_t .

Compte tenu de (4.52), les valeurs de $\Delta\mathbf{u}$ et $\boldsymbol{\sigma}^R \cdot \mathbf{n}$ sur la frontière sont reliées par l'équation intégrale

$$\frac{1}{2}\Delta u_k(\mathbf{x}) + (\text{VP}) \int_{\partial\Omega_t} \Sigma_{ij}^k(\mathbf{x}, \mathbf{y}) n_j(\mathbf{y}) \Delta u_i(\mathbf{x}) dS_y - \int_{\partial\Omega_t} U_i^k(\mathbf{x}, \mathbf{y}) (\sigma_{ij}^R n_j)(\mathbf{y}) dS_y = 0 \quad (4.53)$$

et on a également la relation

$$[\sigma_{ij}^m - \sigma_{ij}^R](\mathbf{x}) = C_{ijkl}(\text{PF}) \int_{\partial\Omega_t} \{U_{k,\ell}^a(\mathbf{x}, \mathbf{y}) (\sigma_{ab}^R n_a)(\mathbf{y}) - \Sigma_{ab,\ell}^k(\mathbf{x}, \mathbf{y}) n_b(\mathbf{y}) \Delta u_a(\mathbf{x})\} dS_y \quad (4.54)$$

Ballard et Constantinescu remarquent alors que, en tout point de S_t , l'équation d'équilibre $\text{div } \boldsymbol{\sigma}^R = \mathbf{0}$ prend la forme

$$\frac{\partial \mathbf{N}}{\partial n} = -\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial r} - \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial s} + \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}^R \cdot \nabla \mathbf{n} + \mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\sigma}^R \cdot \nabla \mathbf{r} + \mathbf{s} \cdot \boldsymbol{\sigma}^R \cdot \nabla \mathbf{s} \quad (4.55)$$

avec (\mathbf{n} étant la normale unitaire au point de S_t considéré et $\mathbf{r}, \mathbf{s}, \mathbf{n}$ étant une base locale orthonormée)

$$\mathbf{N} = \boldsymbol{\sigma}^R \cdot \mathbf{n} \quad \mathbf{R} = \boldsymbol{\sigma}^R \cdot \mathbf{r} \quad \mathbf{S} = \boldsymbol{\sigma}^R \cdot \mathbf{s}$$

Supposant $\boldsymbol{\sigma}^R$ connu sur S_t , le second membre de (4.55) est entièrement connu (il ne contient pas de dérivée normale), de sorte que (4.55) donne la valeur de la dérivée normale de $\boldsymbol{\sigma}^R \cdot \mathbf{n}$. Une fois celle-ci calculée, on peut prédire la valeur de $\boldsymbol{\sigma}^R \cdot \mathbf{n}$ sur le front $S_{t+\Delta t}$. L'équation intégrale (4.53) pour $\Omega_{t+\Delta t}$ permet alors de calculer $\Delta\mathbf{u}$ sur $\partial\Omega_{t+\Delta t}$. Après quoi l'équation intégrale (4.53) donne explicitement le tenseur $\boldsymbol{\sigma}^R$ complet en tout point de $S_{t+\Delta t}$.

Cette approche n'a pas encore vu de développement numérique. D'autre part, le problème d'évolution (4.55) est probablement instable.

Bibliographie

- [1] BALAGEAS, D. L., DEOM, A. A., BOSCHER, D. M. Characterization of non destructive testing of carbon-epoxy composites by a pulsed photothermal method. *Materials Evaluation*, **45**, 461–465 (1987).
- [2] BALLARD, P., CONSTANTINESCU, A. On the inversion of subsurface residual stresses from surface stress measurements. *J. Mech. Phys. Solids*, **42**, 1767–1788 (1994).
- [3] BONNET, M. *Equations intégrales et éléments de frontière*. CNRS Editions / Eyrolles, Paris, France (1995).
- [4] BUI, H. D. Sur quelques problèmes inverses élastiques en mécanique de l'endommagement. In *Deuxième Colloque National de Calcul des Structures*, pp. 26–35. Hermès, France (1995).
- [5] CALDERON, A. P. On an inverse boundary value problem. In *Seminar on Numerical Analysis and its applications to Continuum Physics.*, pp. 65–73. Soc. Brazilian de Matematica, Rio de Janeiro (1980).

- [6] CONSTANTINESCU, A. *Sur l'identification des modules élastiques*. Thèse de Doctorat, Ecole Polytechnique, France (1994).
- [7] GAO, Z., MURA, T. On the inversion of residual stresses from surface measurements. *ASME J. Appl. Mech.*, **56**, 508–513 (1989).
- [8] IKEHATA, M. Inversion formulas for the linearized problem for an inverse boundary value problem in elastic prospection. *SIAM J. Appl. Math.*, **50**, 1635–1644 (1990).
- [9] KOHN, R., MCKENNEY, A. Numerical implementation of a variational method for electric impedance tomography. *Inverse Problems*, **6**, 389–414 (1990).
- [10] KOHN, R., VOGELIUS, M. Relaxation of a variational method for impedance computed tomography. *Comm Pure Appl. Math.*, **40**, 745–777 (1987).
- [11] KUPRADZE, V. D. *Dynamical problems in elasticity*, vol. 3 of *Progress in solids mechanics*. North Holland (1963).
- [12] LADEVÈZE, P., LEGUILLON, D. Error estimates procedures in the finite element method and applications. *SIAM J. Numer. Anal.*, **20**, 485–509 (1983).
- [13] NAKAMURA, G., UHLMANN, G. Uniqueness for identifying Lamé moduli by Dirichlet to Neumann map. In M. Yamaguti, et al. (eds.), *Inverse problems in engineering sciences*. Springer-Verlag (1991). (ICM 90 Satellite Conference Proceedings).
- [14] REYNIER, M. *Sur le contrôle de modélisations éléments finis : recalage à partir d'essais dynamiques*. Thèse de Doctorat, Université Pierre et Marie Curie, Paris, France (1990).

Chapitre 5

Minimisation de la fonction-coût et méthode de l'état adjoint

Sommaire

5.1	Aperçu de quelques méthodes de minimisation	98
5.2	Minimisation d'une fonctionnelle quadratique	100
5.2.1	Utilisation de la factorisation QR	100
5.2.2	Utilisation de la décomposition en valeurs singulières	101
5.2.3	Cas de l'inversion gaussienne linéaire	101
5.3	Méthodes d'évaluation du gradient : discussion	102
5.4	Méthode de l'état adjoint en dimension infinie	104
5.5	Etat adjoint et analyse modale	109
5.6	Linéarisation, équations d'observation	111
5.7	Etat adjoint et problèmes d'évolution non-linéaires	113
5.8	Identification de domaines inconnus par équations intégrales de frontière	116
5.9	Algorithmes évolutionnaires : principe et exemples	120
	Bibliographie	123

Les chapitres précédents ont mis en évidence le fait que la résolution pratique de problèmes inverses passe le plus souvent par la minimisation d'une fonction-coût. Le problème de minimisation incorpore d'une part l'information physique sur le problème considéré (distance entre données mesurées \mathbf{d}^{obs} et calculées $\mathbf{d}(\mathbf{p})$, d'autre part des informations a priori (terme régularisant $R(\mathbf{p})$) :

$$\min_{\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n} \mathcal{J}(\mathbf{p}) \quad \mathcal{J}(\mathbf{p}) = D(\mathbf{d}^{obs}, \mathbf{d}(\mathbf{p})) + R(\mathbf{p}) \quad (5.1)$$

Dans certains cas, des informations a priori sont ajoutées (ou substituées à $R(\mathbf{p})$) au moyen de contraintes d'inégalité, et la minimisation (5.1) est faite sous contraintes.

Rappelons que le problème direct, c'est-à-dire le calcul de la mesure \mathbf{d} prédite par le modèle physique pour une valeur donnée de l'inconnue \mathbf{p} , nécessite habituellement la résolution d'un problème aux limites et/ou d'évolution, qui en lui-même peut se révéler coûteux : \mathbf{d} est fonction de \mathbf{p} par l'intermédiaire des équations de la physique du problème¹ : on parle parfois d'*équation d'état*. Lors de la minimisation de \mathcal{J} , chaque évaluation de \mathcal{J} nécessite un tel calcul direct.

5.1 Aperçu de quelques méthodes de minimisation

Le choix de la méthode de minimisation dépend bien sûr des caractéristiques de la fonction-coût \mathcal{J} choisie et de la nature des contraintes éventuellement présentes.

FONCTIONNELLE \mathcal{J} DIFFÉRENTIABLE, SANS CONTRAINTES. Ce cas de figure correspond notamment au choix, fréquent en pratique, de distances mesure-calcul en norme quadratique :

$$\mathcal{J}(\mathbf{p}) = \frac{1}{2}(\mathbf{d}^{obs} - \mathbf{d}(\mathbf{p}))^T \mathbf{W}^{-1}(\mathbf{d}^{obs} - \mathbf{d}(\mathbf{p})) + R(\mathbf{p})$$

où \mathbf{W} est une matrice (définie positive) de pondération. Cette situation englobe aussi l'inversion « gaussienne » non-linéaire (chapitre 3), \mathbf{W} étant la matrice de covariance \mathbf{C}_D et $R(\mathbf{p}) = \frac{1}{2}(\mathbf{p} - \mathbf{p}^{prior})^T \mathbf{C}_M^{-1}(\mathbf{p} - \mathbf{p}^{prior})$.

Si le terme régularisant $R(\mathbf{p})$ est également différentiable, les méthodes classiques de minimisation faisant appel à l'évaluation du gradient peuvent être utilisées :

- Gradient conjugué,
- Quasi-Newton (actualisation BFGS ou DFP du pseudo-hessien),
- Marquardt-Levenberg

L'erreur en relation de comportement (chapitre 4) entre également dans cette catégorie.

Les algorithmes de minimisation mentionnés déterminent une suite de directions de descente \mathbf{s}_n construite à partir du gradient $\nabla_{\mathbf{p}} \mathcal{J}(\mathbf{p}_n)$ au point courant et procèdent à une minimisation unidimensionnelle, ou *line search*, suivant chacune de ces directions successives :

$$\min_{t \geq 0} \mathcal{J}(\mathbf{p}_n + \mathbf{s}_n t)$$

Chaque type d'algorithme se distingue notamment par le principe mis en œuvre pour construire cette suite [7], [9], [13] :

¹Par exemple, la valeur de la température à la frontière d'un corps thermiquement conducteur dépend de la conductivité, à travers l'équation de la chaleur.

1. Gradient conjugué : direction \mathbf{s}_n « conjuguée » (c'est-à-dire orthogonale au sens du produit scalaire associé à la matrice hessienne \mathbf{H} de \mathcal{J}) avec les directions antérieures :

$$\mathbf{s}_1 = \nabla_p \mathcal{J}(\mathbf{p}_1) \quad \text{et} \quad \mathbf{s}_n \cdot \mathbf{s}_i = 0 \quad (i < n)$$

2. Quasi-Newton (Newton avec pseudo-hessien défini positif actualisé)

$$\mathbf{s}_1 = \mathbf{H}_1^{-1} \nabla_p \mathcal{J}(\mathbf{p}_1) \quad \text{et} \quad \mathbf{H}_{n+1}^{-1} = \mathbf{H}_n^{-1} + \Delta \mathbf{H}_n^{-1}, \quad \mathbf{s}_{n+1} = \mathbf{H}_{n+1}^{-1} \nabla_p \mathcal{J}(\mathbf{p}_n)$$

où l'actualisation $\Delta \mathbf{H}_n^{-1}$ est définie par une formule en fonction de $\mathbf{p}_{n+1} - \mathbf{p}_n$ et $\nabla_p \mathcal{J}(\mathbf{p}_{n+1}) - \nabla_p \mathcal{J}(\mathbf{p}_n)$, dont il existe plusieurs variantes (les plus utilisées étant BFGS et DFP) ;

3. Marquardt-Levenberg (Newton avec hessien \mathbf{H} approché), pour moindres carrés :

$$\mathbf{H} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^p r_k^2(\mathbf{p}) \nabla \nabla J \approx (\nabla r)^T \nabla r$$

L'évaluation du gradient joue clairement un rôle primordial dans ces types d'algorithmes.

La suite de ce chapitre (sauf la section 5.9) se place dans l'hypothèse d'une fonction-coût $\mathcal{J}(\mathbf{p})$ différentiable, pour la minimisation de laquelle on souhaite faire appel à une méthode utilisant son gradient (gradient conjugué, quasi-Newton, Marquardt-Levenberg...). Compte tenu du coût numérique (essentiellement égal à celui d'une résolution directe) d'une évaluation de \mathcal{J} , ingrédient minimal pour toute méthode de minimisation, il est essentiel d'optimiser le coût additionnel entraîné par l'évaluation du gradient de \mathcal{J} .

FONCTIONNELLE NON DIFFÉRENTIABLE. Ce cas de figure correspond par exemple au choix de distances en norme L^1

$$D(\mathbf{d}^{obs}, \mathbf{d}(\mathbf{p})) = \sum_{j=1}^m |\mathbf{d}_i^{obs} - \mathbf{d}_i(\mathbf{p})|$$

ou L^∞ :

$$D(\mathbf{d}^{obs}, \mathbf{d}(\mathbf{p})) = \max_{1 \leq j \leq m} |\mathbf{d}_i^{obs} - \mathbf{d}_i(\mathbf{p})|$$

L'inversion « probabiliste », ou « bayésienne » (Tarantola [17], voir chapitre 3) conduit, dans le cas de densités de probabilité uniformes, à la minimisation d'une norme L^∞ . Il est montré dans la même référence que ces formulations débouchent sur l'utilisation d'algorithmes de programmation linéaire (minimisation de fonctionnelles linéaires avec contraintes linéaires).

MÉTHODES ÉVOLUTIONNAIRES, ALGORITHMES GÉNÉTIQUES. La minimisation de \mathcal{J} peut également reposer sur l'utilisation de tirages aléatoires. Des développements récents ont en particulier conduit aux méthodes *évolutionnaires*, dont un aperçu est présenté en section 5.9.

5.2 Minimisation d'une fonctionnelle quadratique

On a vu (section 3.1) que, si le problème direct est linéaire, une régularisation au sens de Tikhonov ramène fréquemment la résolution d'un problème inverse à celle d'un problème de minimisation de la forme :

$$\min_{\mathbf{p} \in \mathbb{C}^n} \mathcal{J}(\mathbf{p}) \quad \mathcal{J}(\mathbf{p}) = \frac{1}{2} \|\mathbf{G}\mathbf{p} - \mathbf{d}^{obs}\|^2 + \frac{\alpha}{2} \|\mathbf{L}\mathbf{p} - \mathbf{g}\|^2 \quad (5.2)$$

(\mathbf{G} : $(m \times n)$ -matrice de l'opérateur linéaire du modèle physique ; α : paramètre de régularisation ; \mathbf{L} : $(q \times n)$ -matrice ; \mathbf{g} : n -vecteur) ; on suppose en particulier que $m+q \geq n$. La fonctionnelle $\mathcal{J}(\mathbf{p})$ ainsi définie est par construction définie positive, de sorte que sa minimisation équivaut à l'annulation de son gradient, c'est-à-dire au système linéaire :

$$[\mathbf{G}^*\mathbf{G} + \alpha\mathbf{L}^*\mathbf{L}]\mathbf{p} = \mathbf{G}^*\mathbf{d}^{obs} + \alpha\mathbf{L}^*\mathbf{g} \quad (5.3)$$

En principe, la résolution de ce système linéaire passe par le calcul de la matrice $\mathbf{D}_\alpha = \mathbf{G}^*\mathbf{G} + \alpha\mathbf{L}^*\mathbf{L}$ puis (en supposant l'emploi d'un solveur direct) sa factorisation par un algorithme de type Choleski.

En pratique, il n'est absolument pas recommandé de procéder ainsi car $\text{Cond}(\mathbf{D}_\alpha) \approx \text{Cond}(\mathbf{G}^*\mathbf{G})$, pour $\alpha \ll 1$: cette stratégie *élève au carré* le conditionnement déjà grand du problème inverse initial ! Cet obstacle peut être évité par le recours l'une ou l'autre des deux approches décrites ci-après (sections 5.2.1 et 5.2.2), dont l'emploi est donc recommandé. Toutes deux utilisent le fait que le problème (5.2) peut être mis sous la forme :

$$\min_{\mathbf{p} \in \mathbb{C}^n} \frac{1}{2} \|\mathbf{A}\mathbf{p} - \mathbf{b}\|^2 \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{G} \\ \alpha^{1/2}\mathbf{L} \end{bmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{Bmatrix} \mathbf{d}^{obs} \\ \alpha^{1/2}\mathbf{g} \end{Bmatrix} \quad (5.4)$$

5.2.1 Utilisation de la factorisation QR

Il est possible de multiplier à gauche la matrice \mathbf{A} par une matrice \mathbf{Q} carrée ($\mathbf{Q} \in \mathbb{C}^{m+q, m+q}$) et orthogonale ($\mathbf{Q}^*\mathbf{Q} = \mathbf{I}_{m+q}$), de manière à avoir :

$$\mathbf{Q}\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{T} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (5.5)$$

où $\mathbf{0} \in \mathbb{C}^{m+q-n, n}$ ne contient que des zéros et \mathbf{R} est une matrice triangulaire supérieure :

$$\mathbf{R} \in \mathbb{C}^{n, n} \quad T_{ij} = 0 \text{ if } j < i$$

L'identité (5.5) résulte de l'application d'une suite de *transformations de Householder*, dont on ne donnera pas le détail. L'algorithme produisant la décomposition (5.5) figure dans les bibliothèques LINPACK [6] et LAPACK [1], ainsi que dans l'environnement MATLAB (opérateur `qr`).

La décomposition (5.5), reportée dans (5.4), conduit à :

$$\min_{\mathbf{p} \in \mathbb{C}^n} \frac{1}{2} \|\mathbf{R}\mathbf{p} - \mathbf{y}_1\|^2 + \frac{1}{2} \|\mathbf{y}_2\|^2 \quad \text{avec} \quad \mathbf{Q}^*\mathbf{b} = \begin{Bmatrix} \mathbf{y}_1 \\ \mathbf{y}_2 \end{Bmatrix} \begin{array}{l} \} n \text{ lignes} \\ \} m - n \text{ lignes} \end{array} \quad (5.6)$$

et on voit que la solution \mathbf{p}_α du problème de minimisation vérifie

$$\mathbf{R}\mathbf{p}_\alpha = \mathbf{y}_1$$

tandis que le résidu de la minimisation de $\mathcal{J}(\mathbf{p})$ est donné par :

$$\mathcal{J}(\mathbf{p}_\alpha) = \frac{1}{2} \|\mathbf{y}_2\|^2$$

Le fait d'appliquer des transformations orthogonales préserve le conditionnement :

$$\text{Cond}(\mathbf{R}) = \text{Cond}(\mathbf{A}) < \text{Cond}(\mathbf{G})$$

En particulier, on a la propriété désirable :

$$\text{Cond}(\mathbf{R}) = [\text{Cond}(\mathbf{G}^*\mathbf{G} + \alpha\mathbf{L}^*\mathbf{L})]^{1/2}$$

5.2.2 Utilisation de la décomposition en valeurs singulières

La forme (5.4) du problème (5.2) permet de se ramener directement à l'analyse faite en section 2.2. On calcule la décomposition en valeurs singulières de \mathbf{A} :

$$\mathbf{A} = \mathbf{U}\boldsymbol{\lambda}\mathbf{V}^*$$

Le problème est ici de rang maximal n , c'est-à-dire qu'on a :

$$|\lambda_1| \geq \dots \geq |\lambda_n| > 0$$

En reprenant les notations de la section 2.2, on obtient ainsi :

$$\mathbf{p}_\alpha = \sum_{i=1}^n \frac{y_i}{\lambda_i} \mathbf{v}_i \quad (5.7)$$

tout en ayant $|\lambda_1/\lambda_n| < \text{Cond}(\mathbf{G})$ pour $\alpha \ll 1$ bien choisi. Le résidu de la minimisation de $\mathcal{J}(\mathbf{p})$ est donné par :

$$\mathcal{J}(\mathbf{p}_\alpha) = \frac{1}{2} \sum_{i=n+1}^{n+q} |y_i|^2$$

5.2.3 Cas de l'inversion gaussienne linéaire

Dans ce cas, $\mathcal{J}(\mathbf{p})$ est encore de la forme (5.2), avec (voir équation 3.45) :

$$\mathcal{J}(\mathbf{p}) = (\mathbf{G}\mathbf{p} - \mathbf{d}_{obs})^* \mathbf{C}_D^{-1} (\mathbf{G}\mathbf{p} - \mathbf{d}_{obs}) + (\mathbf{p} - \mathbf{p}_{pr})^* \mathbf{C}_M^{-1} (\mathbf{p} - \mathbf{p}_{pr})$$

Les méthodes proposées aux sections 5.2.1 et 5.2.2 sont encore applicables, la reformulation (5.4) étant cette fois obtenue à partir de

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} [\mathbf{C}_D^{-1/2}]^T \mathbf{G} \\ [\mathbf{C}_M^{-1/2}]^T \end{bmatrix} \quad \mathbf{b} = \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{d}_{obs} \\ [\mathbf{C}_M^{-1/2}]^T \mathbf{p}_{pr} \end{array} \right\}$$

les matrices $\mathbf{C}_D^{1/2}$ et $\mathbf{C}_M^{1/2}$ étant obtenues par décomposition de Choleski de \mathbf{C}_D et \mathbf{C}_M :

$$\mathbf{C}_{M,D} = [\mathbf{C}_{M,D}^{1/2}]^T \mathbf{C}_{M,D}^{1/2}$$

cette dernière étant réalisable – et produisant des facteurs $\mathbf{C}_{M,D}^{1/2}$ inversibles – en raison du caractère défini positif d'une matrice de covariance.

5.3 Méthodes d'évaluation du gradient : discussion

Plaçons-nous dans une situation simple et représentative : \mathbf{p} , \mathbf{d} sont des vecteurs à k et n composantes respectivement ; \mathbf{d} est solution d'un système linéaire paramétré par \mathbf{p} :

$$\mathbf{K}(\mathbf{p})\mathbf{d} - \mathbf{f}(\mathbf{p}) = \mathbf{0} \quad (5.8)$$

La matrice \mathbf{K} et le second membre \mathbf{f} dépendent de l'inconnue \mathbf{p} . Par exemple, l'équation matricielle (5.8) représente un problème d'élasticité discrétisé par éléments finis (\mathbf{d} : n -vecteur des déplacements nodaux, \mathbf{K} : matrice de rigidité), et \mathbf{p} est un ensemble de k paramètres décrivant par exemple des caractéristiques élastiques du matériau ou des paramètres géométriques du solide.

EVALUATION DU GRADIENT PAR DIFFÉRENCE FINIE. Schématiquement, on écrit que

$$\mathcal{J}_{,p} \Delta \mathbf{p} \approx \mathcal{J}(\mathbf{p} + \Delta \mathbf{p}) - \mathcal{J}(\mathbf{p})$$

pour des accroissements petits mais finis $\Delta \mathbf{p}$ de \mathbf{p} . L'évaluation du gradient complet $\mathcal{J}_{,p} = \{\mathcal{J}_{,p_1}, \dots, \mathcal{J}_{,p_n}\}$ demande alors $1 + n$ calculs directs (5.8), correspondant à $\Delta \mathbf{p} = \mathbf{0}$ (évaluation de $\mathcal{J}(\mathbf{p})$ au point courant), $\Delta \mathbf{p} = (\Delta p_1, 0, \dots, 0), \dots, (0, \dots, 0, \Delta p_n)$.

Cette approche a l'avantage d'une mise en oeuvre simple, demandant peu de développement additionnel. Elle présente néanmoins deux inconvénients :

- Une évaluation de gradient coûte k calculs directs complets, nécessitant notamment l'assemblage et la factorisation de la matrice de rigidité \mathbf{K} ;
- On se souvient d'autre part que la dérivation numérique est une opération mathématiquement mal posée (chapitre 2) ; la précision du résultat n'est donc pas garantie (en particulier, l'opération est instable quand $\|\Delta \mathbf{p}\| \rightarrow 0$).

Il est donc souhaitable de remplacer la dérivation numérique, coûteuse et potentiellement peu fiable, par d'autres approches reposant sur une dérivation analytique préalable. Ces dernières constituent le thème principal de ce chapitre.

DÉRIVATION DIRECTE. Cette approche repose sur la dérivation par rapport à chaque p_i de l'équation d'état (5.8) :

$$\mathbf{K}(\mathbf{p})\mathbf{d}_{,p_i} = \mathbf{f}_{,p_i}(\mathbf{p}) - \mathbf{K}_{,p_i}(\mathbf{p})\mathbf{d} \quad (5.9)$$

D'autre part, la dérivée de \mathcal{J} s'écrit :

$$\mathcal{J}_{,p_i} = D_{,d} \cdot \mathbf{d}_{,p_i} + R_{,p_i} \quad (5.10)$$

Une fois l'équation d'état dérivée (5.9) résolue par rapport à $\mathbf{d}_{,p_i}$, le report du résultat dans la formule ci-dessus permet d'évaluer la dérivée partielle $\mathcal{J}_{,p_i}$.

L'approche de dérivation directe présente les aspects importants suivants :

- De même que la dérivation numérique, elle repose sur un total de $1+k$ calculs directs. Cependant, la *même* matrice de rigidité \mathbf{K} apparaît dans l'équation d'état (5.8) et l'équation dérivée (5.9). L'assemblage et la factorisation de \mathbf{K} sont donc effectués une seule fois, lors de la résolution de l'équation d'état ; ensuite, chaque équation dérivée ne nécessite que la construction d'un nouveau second membre (fonction de l'état \mathbf{d} , supposé calculé à ce stade) et la résolution d'un système linéaire déjà assemblé et factorisé².

²Un peu comme le traitement de cas de chargement multiples pour une même structure.

- Conséquence immédiate de la remarque précédente : le supplément de calcul entraîné par le calcul du gradient de \mathcal{J} est modeste comparé à la résolution de l'équation d'état seule³.
- Il n'y a pas lieu *a priori* de craindre une instabilité liée à cette méthode de calcul, qui repose sur une utilisation répétée de la matrice de l'équation d'état.

MÉTHODE DE L'ÉTAT ADJOINT. Celle-ci repose aussi sur l'utilisation d'une dérivation analytique, mais adopte le point de vue de la minimisation sous contraintes :

$$\mathcal{L}(\mathbf{p}, \mathbf{d}) = +\tilde{\mathbf{d}}^T (\mathbf{K}(\mathbf{p})\mathbf{d} - \mathbf{f}(\mathbf{p})) \quad (5.11)$$

un multiplicateur de Lagrange (à n composantes) $\tilde{\mathbf{d}}$ étant associé à la *contrainte* du respect de l'équation d'état (5.8) pour tout \mathbf{p} . On calcule alors la variation totale de \mathcal{L} :

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{L}(\mathbf{p}, \mathbf{d}) &= D_{,d}(\mathbf{d}^{obs}, \mathbf{d}) \cdot \delta\mathbf{d} + R_{,p} \cdot \delta\mathbf{p} + \tilde{\mathbf{d}}^T (\mathbf{K}_{,p} \cdot \delta\mathbf{p}\mathbf{d} - \mathbf{f}_{,p} \cdot \delta\mathbf{p} + \mathbf{K}\delta\mathbf{d}) \\ &= \left\{ D_{,d}(\mathbf{d}^{obs}, \mathbf{d}) + \tilde{\mathbf{d}}^T \mathbf{K} \right\} \delta\mathbf{d} + \left\{ R_{,p} + \tilde{\mathbf{d}}^T (\mathbf{K}_{,p}\mathbf{d} - \mathbf{f}_{,p}) \right\} \delta\mathbf{p} \end{aligned} \quad (5.12)$$

(on note que le terme en $\delta\tilde{\mathbf{d}}$ est nul en raison du respect de l'équation d'état).

A ce stade, le multiplicateur $\tilde{\mathbf{d}}$ n'est pas encore fixé. Partant du principe que la variation de \mathcal{L} ne devrait être non nulle qu'en présence de variations de \mathbf{p} , on définit l'*état adjoint* comme la valeur du multiplicateur $\tilde{\mathbf{d}}$ telle que le terme en $\delta\mathbf{d}$ s'annule, c'est-à-dire comme solution de l'*équation adjointe* :

$$\mathbf{K}(\mathbf{p})^T \tilde{\mathbf{d}} = -D_{,d}^T(\mathbf{d}^{obs}, \mathbf{d}(\mathbf{p})) \quad (5.13)$$

Pour ce choix particulier de $\tilde{\mathbf{d}}$, la variation de \mathcal{J} induite par une variation de \mathbf{p} est donc donnée par :

$$\delta\mathcal{J}(\mathbf{p}, \mathbf{d}) = \delta\mathcal{L}(\mathbf{p}, \mathbf{d}) = \left\{ R_{,p} + \tilde{\mathbf{d}}^T (R_{,p} + \mathbf{K}_{,p}\mathbf{d} - \mathbf{f}_{,p}) \right\} \cdot \delta\mathbf{p} \quad (5.14)$$

dans laquelle \mathbf{d} et $\tilde{\mathbf{d}}$ sont les solutions respectives de l'équation d'état (5.8) et de l'équation adjointe (5.13).

L'approche de dérivation à l'aide de l'état adjoint présente les caractéristiques importantes suivantes :

- L'état adjoint défini par (5.13) ne dépend que de l'état courant $\mathbf{d}(\mathbf{p})$.
- Par conséquent, le calcul du gradient complet $\mathcal{J}_{,p}$ repose sur seulement *deux* calculs directs, à savoir la résolution de l'équation d'état (5.8) et de l'équation adjointe (5.13), et ce quel que soit le nombre k de paramètres inconnus.
- De plus, l'équation adjointe fait intervenir la matrice transposée \mathbf{K}^T . Si \mathbf{K} est symétrique (exemple : matrice de rigidité d'un modèle éléments finis), sa factorisation (effectuée pour résoudre l'équation d'état) est directement réutilisable pour le calcul de l'état adjoint, qui ne nécessite donc que l'assemblage d'un nouveau second membre et une résolution de système triangulaire. Même si \mathbf{K} n'est pas symétrique, la factorisation de \mathbf{K} est réutilisée pour la résolution d'un système transposé.

³Plus précisément, la construction de seconds membres et la résolution de systèmes triangulaires ne nécessitent que de l'ordre de n^2 opérations arithmétiques alors que la factorisation de \mathbf{K} en demande de l'ordre de n^3 ; le coût additionnel d'évaluation du gradient tend donc, en valeur relative, vers zéro pour de très grandes valeurs du nombre de degrés de liberté k (en supposant que k n'augmente pas avec $n...$).

5.4 Méthode de l'état adjoint en dimension infinie

La notion d'état adjoint, dont le principe vient d'être présenté pour des situations discrétisées, peut également être défini directement sur le problème continu. Nous allons illustrer cela sur un exemple en statique (reconstruction du tenseur d'élasticité) et un autre en conduction thermique instationnaire (reconstruction du coefficient de conductivité).

PROBLÈME INVERSE EN ÉLASTICITÉ LINÉAIRE STATIQUE. On reprend le problème de la reconstruction du tenseur d'élasticité $\mathbf{C}(\mathbf{x})$ inconnu à partir de données surabondantes en déplacement (chapitre 4). Un solide élastique Ω est soumis (pour fixer les idées) à des forces imposées connues $\boldsymbol{\varphi}$ sur sa frontière $\partial\Omega$. Aux déplacements rigidifiants près, le problème direct ainsi défini est bien posé si $\mathbf{C}(\mathbf{x})$ est connu dans tout Ω . La reconstruction de $\mathbf{C}(\mathbf{x})$ inconnu utilise des données supplémentaires, par exemple la connaissance du déplacement $\boldsymbol{\xi}$ à la frontière ou dans le domaine. On peut éventuellement (c'est préférable!) se donner *plusieurs* couples force-déplacement $(\boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{\xi})_{\partial\Omega}$.

Les méthodes pratiques de reconstruction reposent alors habituellement sur la minimisation d'une fonction-coût \mathcal{J} . Raisonnant pour fixer les idées en termes de forces imposées et déplacements mesurés, la fonctionnelle \mathcal{J} sert à exprimer l'écart entre le déplacement mesuré $\boldsymbol{\xi}$ et le déplacement calculé \mathbf{u} , solution du problème d'élasticité direct :

$$\operatorname{div}[\mathbf{C} : \nabla \mathbf{u}] = \mathbf{0} \quad (\text{dans } \Omega) \quad \mathbf{T}^n(\mathbf{u}) \equiv [\mathbf{C} : \nabla \mathbf{u}] \cdot \mathbf{n} = \boldsymbol{\varphi} \quad (\text{sur } \partial\Omega) \quad (5.15)$$

pour une distribution $\mathbf{C}(\mathbf{x})$ donnée. La fonctionnelle \mathcal{J} la plus classique est celle des moindres carrés :

$$\mathcal{J}(\mathbf{C}) = J(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} \int_{\partial\Omega} |\boldsymbol{\xi} - \mathbf{u}|^2 \, dS \quad (5.16)$$

dans laquelle \mathbf{u} est implicitement fonction de \mathbf{C} à travers le problème direct (5.15). On peut imaginer d'autres possibilités pour \mathcal{J} , dont une forme assez générale est :

$$\mathcal{J}(\mathbf{u}, \mathbf{C}) = \int_{\Omega} j_{\Omega}(\mathbf{u}, \mathbf{C}) \, dV + \int_{\partial\Omega} j_{\partial\Omega}(\mathbf{u}, \mathbf{C}) \, dS \quad (5.17)$$

les fonctions $j_{\Omega}, j_{\partial\Omega}$ étant choisies de manière à ce que (5.17) définisse une distance.

Compte tenu de la dépendance de \mathbf{u} par rapport à \mathbf{C} à travers (5.15), la minimisation de \mathcal{J} par rapport à \mathbf{C} peut donc ici encore être considérée en termes de minimisation sous la contrainte du problème direct. Un lagrangien est ainsi introduit :

$$\mathcal{L}(\mathbf{u}, \mathbf{w}; \mathbf{C}) = \mathcal{J}(\mathbf{u}, \mathbf{C}) + \int_{\Omega} \nabla \mathbf{u} : \mathbf{C} : \nabla \mathbf{w} \, dV - \int_{\partial\Omega} \boldsymbol{\varphi} \cdot \mathbf{w} \, dS \quad (5.18)$$

On a choisi d'y incorporer la contrainte (5.15) sous sa forme faible (formulation variationnelle), où apparaît une fonction-test \mathbf{w} :

$$(\forall \mathbf{w} \in \mathcal{V}) \quad \int_{\Omega} \nabla \mathbf{u} : \mathbf{C} : \nabla \mathbf{w} \, dV - \int_{\partial\Omega} \boldsymbol{\varphi} \cdot \mathbf{w} \, dS = 0 \quad (5.19)$$

On écrit alors la première variation de \mathcal{L} :

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{L} = & \int_{\Omega} \left(\frac{\partial j_{\Omega}}{\partial \mathbf{u}} \cdot \delta \mathbf{u} + \frac{\partial j_{\Omega}}{\partial \mathbf{C}} : \delta \mathbf{C} \right) \, dV + \int_{\partial\Omega} \left(\frac{\partial j_{\partial\Omega}}{\partial \mathbf{u}} \cdot \delta \mathbf{u} + \frac{\partial j_{\partial\Omega}}{\partial \mathbf{C}} : \delta \mathbf{C} \right) \, dS \\ & + \int_{\Omega} \nabla \delta \mathbf{u} : \mathbf{C} : \nabla \mathbf{w} \, dV + \int_{\Omega} \nabla \mathbf{u} : \delta \mathbf{C} : \nabla \mathbf{w} \, dV \quad (5.20) \end{aligned}$$

(le terme en $\delta \mathbf{w}$ étant nul par suite de la contrainte (5.19)). A ce stade, procédant comme pour le cas discret, on exprime que toute variation $\delta \mathcal{L}$ de \mathcal{L} doit en fait résulter d'une variation $\delta \mathbf{C}$ de \mathbf{C} , ce qui revient à imposer la condition :

$$\delta \mathbf{C} = \mathbf{0} \implies \delta \mathcal{L} = 0$$

soit, après explicitation au moyen de (5.20) :

$$(\forall \delta \mathbf{u} \in \mathcal{V}) \quad \int_{\Omega} \frac{\partial j_{\Omega}}{\partial \mathbf{u}} \cdot \delta \mathbf{u} \, dV + \int_{\partial \Omega} \frac{\partial j_{\partial \Omega}}{\partial \mathbf{u}} \cdot \delta \mathbf{u} \, dS + \int_{\Omega} \nabla \delta \mathbf{u} : \mathbf{C} : \nabla \mathbf{w} \, dV = 0 \quad (5.21)$$

Cette condition s'interprète (en raison de la symétrie du tenseur \mathbf{C}) comme un *problème adjoint* d'élasticité dont l'inconnue est le *champ adjoint* \mathbf{w} :

$$\operatorname{div} [\mathbf{C} : \nabla \mathbf{w}] - \frac{\partial j_{\Omega}}{\partial \mathbf{u}}(\mathbf{u}, \mathbf{C}) = \mathbf{0} \quad (\text{dans } \Omega) \quad (5.22)$$

$$[\mathbf{C} : \nabla \mathbf{w}] \cdot \mathbf{n} = -\frac{\partial j_{\partial \Omega}}{\partial \mathbf{u}}(\mathbf{u}, \mathbf{C}) \quad (\text{sur } \partial \Omega) \quad (5.23)$$

Dans le cas usuel de l'écart en moindres carrés (5.16), on a :

$$\frac{\partial j_{\Omega}}{\partial \mathbf{u}} = 0 \quad \frac{\partial j_{\partial \Omega}}{\partial \mathbf{u}} = (\mathbf{u} - \boldsymbol{\xi})$$

et le problème adjoint est donc défini par :

$$\operatorname{div} [\mathbf{C} : \nabla \mathbf{w}] = \mathbf{0} \quad (\text{dans } \Omega) \quad (5.24)$$

$$[\mathbf{C} : \nabla \mathbf{w}] \cdot \mathbf{n} = -(\mathbf{u} - \boldsymbol{\xi}) \quad (\text{sur } \partial \Omega) \quad (5.25)$$

Le champ adjoint résulte ainsi d'efforts de contact $\boldsymbol{\psi} - (\mathbf{u} - \boldsymbol{\xi})$ proportionnels à l'écart entre déplacements calculé et mesuré ; il est donc nul quand $\mathbf{u}|_{\partial \Omega} = \boldsymbol{\xi}|_{\partial \Omega}$, c'est-à-dire quand les valeurs calculées et mesurées coïncident.

Prendre $\mathbf{u} = \mathbf{u}_C$ (solution du problème direct (5.15)) et $\mathbf{w} = \mathbf{w}_C$ (solution du problème adjoint (5.13)) dans (5.20) donne explicitement la variation totale de \mathcal{J} sous l'effet d'une variation $\delta \mathbf{C}$ de \mathbf{C} :

$$\begin{aligned} \delta J &= \delta \mathcal{L}(\mathbf{u}_C, \mathbf{w}_C; \mathbf{C}) \\ &= \int_{\Omega} \frac{\partial j_{\Omega}}{\partial \mathbf{C}} : \delta \mathbf{C} \, dV + \int_{\partial \Omega} \frac{\partial j_{\partial \Omega}}{\partial \mathbf{C}} : \delta \mathbf{C} \, dS + \int_{\Omega} \nabla \mathbf{u} : \delta \mathbf{C} : \nabla \mathbf{w} \, dV \end{aligned} \quad (5.26)$$

Cette formule est très intéressante : elle donne explicitement la dérivée directionnelle de \mathcal{J} dans toute perturbation $\delta \mathbf{C}$ de \mathbf{C} . On retrouve les propriétés déjà mentionnées pour les problèmes en dimension finie :

- Les champs \mathbf{u} et \mathbf{w} sont solutions de problèmes d'élasticité classiques et peuvent être calculés par des méthodes classiques (éléments finis, éléments de frontière,...)
- Une fois le problème direct (5.15) résolu par rapport à \mathbf{u} (étape nécessaire quoi qu'il arrive pour l'évaluation de \mathcal{J} au point \mathbf{C} actuel), le problème adjoint revient à considérer la même structure sous un chargement différent : le calcul de \mathbf{w} ne demande donc que la construction d'un nouveau second membre et la résolution d'un système linéaire dont la matrice de rigidité est déjà factorisée.

- Les champs (\mathbf{u}, \mathbf{w}) ne dépendent pas de $\delta\mathbf{C}$: la formule (5.26) donne la dérivée de \mathcal{J} dans toute perturbation de \mathbf{C} une fois (\mathbf{u}, \mathbf{w}) connus.

Pour l'écart en moindres carrés régularisé

$$\mathcal{J}(\mathbf{u}, \mathbf{C}) = \frac{1}{2} \int_{\partial\Omega} |\boldsymbol{\xi} - \mathbf{u}|^2 dS + \frac{1}{2} \alpha \int_{\Omega} |\mathbf{C} - \mathbf{C}_0|^2 dV$$

on obtient

$$\delta J = \int_{\Omega} \nabla \mathbf{u} : \delta \mathbf{C} : \nabla \mathbf{w} dV + \alpha \int_{\Omega} (\mathbf{C} - \mathbf{C}_0) :: \delta \mathbf{C} dV \quad (5.27)$$

où \mathbf{wC} est la solution de (5.24-5.25).

PROBLÈME INVERSE EN CONDUCTION THERMIQUE INSTATIONNAIRE. On reprend le problème de la reconstruction d'une conductivité isotrope $k(\mathbf{y})$ inhomogène à partir de mesures externes (connaissance simultanée de la température et du flux thermique sur une portion de la frontière).

Supposant la conductivité $k(\mathbf{y})$ connue, la résolution de

$$\begin{aligned} \frac{\partial \theta}{\partial t} - \operatorname{div}(k(\mathbf{x}) \nabla \theta) &= 0 \quad (\mathbf{x} \in \Omega) \\ \theta(\mathbf{x}, t \leq 0) &= 0 \quad (\text{conditions initiales}) \end{aligned} \quad (5.28)$$

avec une valeur imposée φ du flux thermique :

$$k(\mathbf{x}) \frac{\partial \theta}{\partial n} = \varphi(\mathbf{x}, t) \quad (\mathbf{x} \in S, t \geq 0) \quad (5.29)$$

constitue le problème direct.

Le problème inverse considère $k(\mathbf{x})$ comme inconnue. Par ailleurs, le flux thermique est imposé, éq. (4.3), comme pour le problème direct. On considère alors comme donnée supplémentaire la valeur ξ de la température en surface :

$$\theta(\mathbf{x}, t) = \xi(\mathbf{x}, t) \quad (\mathbf{x} \in S, t \geq 0) \quad (5.30)$$

La formulation pratique la plus simple du problème inverse est la minimisation d'une fonction-coût exprimant l'écart quadratique entre valeurs calculée et mesurée de la température en surface :

$$\mathcal{J}(k) = J(\theta, k) = \frac{1}{2} \int_0^T \int_S \{\xi(\mathbf{x}, t) - \theta(\mathbf{x}, t)\}^2 dS_x dt + \alpha R(k) \quad (5.31)$$

le terme régularisant contenant des informations a priori, par exemple :

$$\begin{aligned} R(k) &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} (k(\mathbf{x}) - k_0)^2 dV_x \quad (\text{valeur de référence pour } k) \\ R(k) &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left(\frac{dk}{dx} \right)^2 dV_x \quad (\text{pénalisation des oscillations de } k) \end{aligned}$$

La minimisation de $\mathcal{J}(k)$ par rapport à k est maintenant traitée comme une minimisation de $J(u\theta, k)$ par rapport à θ, k sous la *contrainte* (4.1-4.3). Cette dernière est exprimable par une formulation faible, et on introduit alors un lagrangien :

$$\mathcal{L}(\theta, \psi; k) = J(\theta, k) + \int_0^T \left\{ \int_{\Omega} [\theta_{,t} v + k \nabla \theta \nabla \psi] dV - \int_{\partial\Omega} f \psi dS \right\} dt \quad (5.32)$$

où apparaît un multiplicateur de Lagrange $\psi \in \mathcal{V} = \{\psi \in H^1(\Omega), \psi(\cdot, 0) = 0 \text{ dans } \Omega\}$. On considère alors la variation de \mathcal{L} sous l'effet de perturbations $d\theta, \delta k$:

$$\delta \mathcal{L} = \mathcal{L}_{,\theta} \cdot d\theta + \mathcal{L}_{,k} \cdot \delta k$$

Seul l'effet net de δk étant recherché, le choix du multiplicateur ψ peut être restreint en imposant que $\delta \mathcal{L} = 0$ pour $\delta k = 0$, soit :

$$\mathcal{L}_{,\theta} d\theta = 0 \quad \forall d\theta \in \mathcal{V} \quad (5.33)$$

Cela définit un *état adjoint* $\psi = \psi_k$, qui tous calculs faits est solution de la formulation faible :

$$J_{,\theta} \cdot d\theta + \int_{\Omega} \left\{ (\psi d\theta) |_{t=T} + \int_0^T [-\psi_{,t} d\theta + k \nabla \psi \nabla d\theta] dt \right\} dV = 0 \quad \forall d\theta \in \mathcal{V}$$

dont on voit qu'elle est associée à l'équation de la chaleur *rétrograde* avec condition *finale* :

$$\begin{aligned} -\frac{\partial \psi}{\partial t} - \operatorname{div}(k(\mathbf{x}) \nabla \psi) &= 0 \quad (\mathbf{x} \in \Omega) \\ \psi(\mathbf{x}, t \geq T) &= 0 \quad (\text{conditions finales}) \end{aligned} \quad (5.34)$$

et avec un flux imposé proportionnel à l'écart $\xi - \theta$:

$$k(\mathbf{x}) \frac{\partial \psi}{\partial n}(\mathbf{x}, t) = -J_{,\theta} = (\xi - \theta)(\mathbf{x}, t) \quad (\mathbf{x} \in S, t \leq T) \quad (5.35)$$

Comme résultat de cette démarche, la variation $\delta \mathcal{J}$ induite par δk est donc finalement donnée en fonction de θ_k solution de (4.1-4.3) et ψ_k solution de (5.34-5.35) par l'expression explicite :

$$\delta J = \delta \mathcal{L}(\theta_k, \psi_k; k) = \int_0^T \int_{\Omega} \delta k \nabla \theta_k \nabla \psi_k dV dt + \alpha R_{,k} \cdot \delta k \quad (5.36)$$

Celle-ci a une structure analogue à (5.26) pour l'élasticité. Les commentaires avancés pour (5.26) demeurent.

- Une remarque supplémentaire est toutefois importante : le problème adjoint (5.34-5.35) est *rétrograde*, avec conditions finales, et la formule (5.36) a donc la structure d'un *produit* de convolution temporel. La donnée en flux (5.35) dépend de $\theta_k(\cdot, t)$, ce qui implique (en raison des conditions finales sur ψ) que la résolution du problème adjoint (5.34-5.35) n'est possible qu'une fois la solution $\theta_k(\cdot, t)$ calculée pour l'intervalle temporel $[0, T]$ complet.
- En revanche, les problèmes direct et adjoint partagent le même « opérateur de rigidité », indépendant de t , ce qui allège considérablement les calculs quand un pas de temps constant est utilisé.

Le caractère rétrograde du problème adjoint apparaît toutes les fois qu'un contexte instationnaire est considéré (voir aussi section 5.7).

τ	k_1	k_2	R simulé	R calculé		
				0%bruit	1%bruit	3%bruit
12	1	1	1	1-1	0.84-1.14	0.54-1.49
12	10	1	1	1-1	0.94-1.05	0.83-1.19
12	1	10	1	1-1	0.92-1.06	0.75-1.23
12	1	1	3	3-3	2.46-3.47	1.7-4.9
6	1	1	1	1-1	0.57-1.68	
4	1	1	1	1-1	0.16-6.5	

Tableau 5.1: Reconstruction de la résistance d'interface : exemple unidimensionnel simulé [5]

EXEMPLE : IDENTIFICATION DE LA RÉSISTANCE D'INTERFACE. Dans un travail fait avec H. MAIGRE et M. MANAA [5], une démarche similaire a été appliquée à une situation relativement simple : la quantification de résistances thermiques d'interface R au moyen de mesures de température en surface, pour des géométries unidimensionnelles et en régime transitoire. La résistance R représente la gêne induite sur la conduction thermique à travers une interface S_i , liée à un défaut (délamination, présence de matière parasite, . . .), et est définie comme le coefficient de proportionnalité entre le flux thermique q (continu) et le saut de la température θ à travers S_i :

$$[[u]](\mathbf{y}, t) = -R(\mathbf{y})q(\mathbf{y}, t) \tag{5.37}$$

Supposons le flux thermique imposé sur toute la frontière de l'échantillon (condition à la frontière bien posée pour le problème direct, pour lequel R serait connue). Le problème direct est donc constitué des équations (4.1,4.3) et de la relation ci-dessus (pour une résistance d'interface connue).

L'identification de R utilise alors la mesure $\xi(\mathbf{x}, t)$ de la température sur (une partie de) la frontière externe, et est formulée comme un problème de minimisation :

$$\mathcal{J}(R) = J(\theta, R) = \frac{1}{2} \int_0^T \int_{S_m} [\theta(\mathbf{y}, t; R) - \xi(\mathbf{y}, t)]^2 dSdt + \alpha I(R)$$

la fonctionnelle \mathcal{J} dépendant de R de manière implicite à travers la solution θ du problème direct (4.1,4.3,5.37). On montre alors que le problème adjoint est défini par les équations

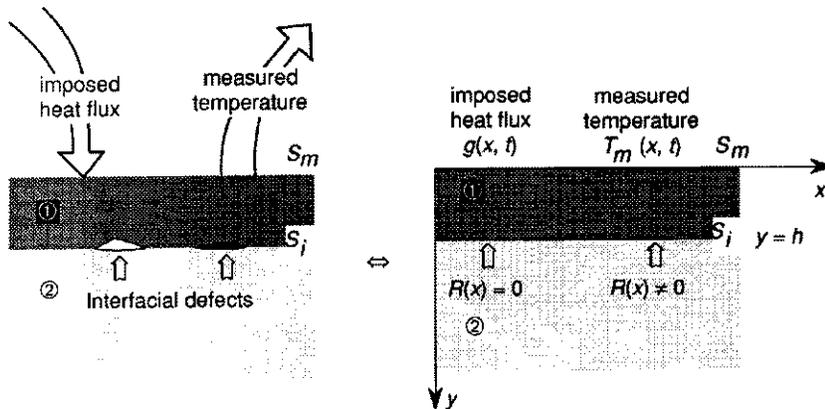


Fig. 5.1: Identification de résistances d'interface : schéma de principe

(5.34,5.35) complétées par

$$\llbracket \psi \rrbracket(\mathbf{y}, t) = -R(\mathbf{y})q(\mathbf{y}, t) \quad (5.38)$$

et que la variation de $\mathcal{J}(R)$ est donnée par

$$\delta J(R) = - \int_0^T \int_{\Omega} \frac{1}{R^2} \llbracket \theta \rrbracket \llbracket \psi \rrbracket \delta R \, dV \, dt + \alpha I_{,R} \delta R \quad (5.39)$$

Le tableau 5.1 montre quelques résultats de simulation dans le cas unidimensionnel (R indépendante de x , fig. 5.1), réalisés avec ou sans bruit simulé sur les données : la fonctionnelle \mathcal{J} a été minimisée, sans terme régularisant ($I(R) = 0$), au moyen d'un algorithme de descente assez « artisanal » qui utilise le gradient, évalué à l'aide de la méthode de l'état adjoint. Les résultats numériques mettent en évidence la grande sensibilité au niveau de bruit sur les données, ce qui ici encore met clairement en évidence la nécessité de régulariser le problème inverse.

Ce travail a été poursuivi par H. MAIGRE et B. BERNAY (stagiaire ENSTA) sur des situations bidimensionnelles en régime stationnaire, l'algorithme étant développé dans le cadre du code d'éléments finis CASTEM 2000.

REMARQUE IMPORTANTE. Il faut souligner que la méthode de l'état adjoint permet, sur le plan numérique, de tirer le maximum d'une formulation donnée mais ne conduit pas à une formulation modifiée du problème inverse ; elle ne rend pas mieux posé un problème mal posé. Par contre, il est parfaitement possible de combiner régularisation de Tikhonov ou inversion stochastique et méthode de l'état adjoint, de façon à appliquer efficacement une méthode de minimisation avec gradient à un problème inverse régularisé.

5.5 Etat adjoint et analyse modale

Certains problèmes inverses se posent dans un contexte d'analyse modale de structures. Par exemple, le recalage paramétrique de modèles éléments finis à partir de valeurs mesurées ϖ^i, Y_j^i de pulsations propres ω^i et de déplacements modaux $X_j^i = X^i(\mathbf{x}_j)$ pour p fréquences et en q points capteurs \mathbf{x}_j conduit à minimiser une fonctionnelle

$$\mathcal{J}(\mathbf{p}) = J(\omega^i, X^i, \mathbf{p})$$

sous la contrainte

$$\mathbf{K}(\mathbf{p})\mathbf{X}^i - (\omega^i)^2 \mathbf{M}(\mathbf{p})\mathbf{X}^i = \mathbf{0}$$

($\mathbf{K}(\mathbf{p}), \mathbf{M}(\mathbf{p})$) : matrices $n \times n$ de raideur et de masse, où n est le nombre de degrés de liberté de la structure discrétisée), le vecteur \mathbf{p} contenant des paramètres liés à la répartition de modules élastiques, masse, épaisseur, section, ... (selon le type de structure considérée). Par exemple, la fonctionnelle \mathcal{J} est une distance en relation de comportement (Reynier [14]). En inversion gaussienne non-linéaire (Ben Abdallah [2]), on aurait :

$$\mathcal{J} = (\mathbf{d}^{obs} - \mathbf{d}(\mathbf{p}))^T [\mathbf{C}_D^{-1}] (\mathbf{d}^{obs} - \mathbf{d}(\mathbf{p})) + (\mathbf{p} - \mathbf{p}^{prior})^T [\mathbf{C}_M^{-1}] (\mathbf{p} - \mathbf{p}^{prior})$$

avec $\mathbf{d}^T = \{\omega^1, \dots, \omega^p, (X_j^1)_{1 \leq j \leq q}, \dots, (X_j^p)_{1 \leq j \leq q}\}$

Le point de vue de la minimisation sous contraintes conduit à former le lagrangien

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\omega^i, X^i, \mathbf{p}) &= J(\omega^i, X^i, \mathbf{p}) \\ &+ \sum_{i=1}^p \mathbf{Y}^{iT} \{ \mathbf{K} \mathbf{X}^i - (\omega^i)^2 \mathbf{M} \mathbf{X}^i \} + \sum_{i=1}^p \alpha^i \{ \mathbf{X}^{iT} \mathbf{K} \mathbf{X}^i - 1 \} \end{aligned} \quad (5.40)$$

(la contrainte de multiplicateur α^i impose la normalisation du mode i). La variation du lagrangien s'écrit, tous calculs faits

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{L}(\omega^i, X^i, \mathbf{p}) &= J_{,p}(\omega^i, X^i, \mathbf{p}) \cdot \delta \mathbf{p} \\ &+ \sum_{i=1}^p (\mathbf{Y}^{iT} \{ \mathbf{K}_{,p} \mathbf{X}^i - (\omega^i)^2 \mathbf{M}_{,p} \mathbf{X}^i \} + \alpha^i \{ \mathbf{X}^{iT} \mathbf{K}_{,p} \mathbf{X}^i - 1 \}) \cdot \delta \mathbf{p} \\ &+ \sum_{i=1}^p (J_{,X^i}(\omega^i, X^i, \mathbf{p}) + \mathbf{Y}^{iT} \{ \mathbf{K} - (\omega^i)^2 \mathbf{M} \} + \alpha^i \{ 2 \mathbf{X}^{iT} \mathbf{K} \}) \cdot \delta \mathbf{X}^i \\ &+ \left(\sum_{i=1}^p J_{,\omega^i}(\omega^i, X^i, \mathbf{p}) - 2 \omega^i \mathbf{Y}^{iT} \mathbf{M} \mathbf{X}^i \right) \cdot \delta \omega^i \end{aligned} \quad (5.41)$$

La démarche habituelle conduit alors, en annulant les termes en $\delta \mathbf{X}$ et $\delta \omega$, à définir p problèmes adjoints d'inconnues (\mathbf{Y}^i, α^i) :

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{K} - (\omega^i)^2 \mathbf{M} & 2 \omega^i \mathbf{M} \mathbf{X}^{iT} \\ 2 \omega^i \mathbf{X}^{iT} \mathbf{M} & \mathbf{0} \end{Bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{Y}^i \\ \alpha^i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -J_{,X^i}(\omega^i, X^i, \mathbf{p}) \\ J_{,\omega^i}(\omega^i, X^i, \mathbf{p}) \end{bmatrix} \quad (5.42)$$

Ce système d'équations est symétrique (on a utilisé

$$\mathbf{K} \mathbf{X}^i = (\omega^i)^2 \mathbf{M} \mathbf{X}^i$$

dans la ligne inférieure du système ci-dessus). Sa résolution est très simple si on dispose d'une base modale calculée complète (c'est-à-dire *tous* les déplacements modaux associés aux matrices \mathbf{K} , \mathbf{M} pour la valeur actuelle de \mathbf{p}) : on trouve

$$\begin{aligned} \mathbf{Y}^i &= \frac{\omega^i}{2} J_{,\omega^i} \mathbf{X}^i + \sum_{k \neq i} \left[1 - \left(\frac{\omega^i}{\omega^k} \right)^2 \right] \mathbf{X}^k \\ \alpha^i &= -\frac{\omega^i}{2} \mathbf{X}^{iT} J_{,X^i} \end{aligned}$$

Cependant, cela est irréaliste pour les modèles à grand nombre de degrés de liberté, pour lesquels le calcul d'une base modale, même tronquée, suffisamment riche est onéreux.

La matrice du problème adjoint (5.42) présente quelques particularités constituant un handicap pour l'emploi de méthodes directes de résolution :

- Elle n'est pas définie positive (son spectre comprend les valeurs propres négatives $1 - (\omega^i/\omega^k)^2$, $k < i$).
- Elle n'est pas bande (en raison de la dernière colonne)

Les méthodes directes pour matrices symétriques indéfinies ([6]) ne permettent pas de tirer parti du caractère creux de la matrice du problème (5.42). Nous avons en revanche fait l'expérience d'un très bon comportement d'une méthode itérative (*generalized minimum*

residual, ou GMRES⁴, avec préconditionnement par la rigidité \mathbf{K} , qui repose (comme d'autres méthodes itératives comme le gradient conjugué) sur l'évaluation répétitive de produits matrice-vecteur et permet donc d'exploiter le caractère creux de la matrice.

5.6 Linéarisation, équations d'observation

La méthode de l'état adjoint permet également l'étude de problèmes inverses linéarisés. Reprenons les deux exemples développés dans la section 5.4.

PROBLÈME INVERSE LINÉARISÉ EN ÉLASTICITÉ LINÉAIRE STATIQUE. Le gradient de toute fonctionnelle $\mathcal{J}(\mathbf{C}) = J(\mathbf{u}, \mathbf{C})$ est donné par (5.26)

$$\delta J = \int_{\Omega} \frac{\partial j_{\Omega}}{\partial \mathbf{C}} : \delta \mathbf{C} \, dV + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial j_{\partial\Omega}}{\partial \mathbf{C}} : \delta \mathbf{C} \, dS + \int_{\Omega} \nabla \mathbf{u} : \delta \mathbf{C} : \nabla \mathbf{w} \, dV$$

en fonction des déplacements direct \mathbf{u} et adjoint \mathbf{w} , ce dernier vérifiant (5.22-5.23), soit :

$$\begin{aligned} \operatorname{div} [\mathbf{C} : \nabla \mathbf{w}] - \frac{\partial j_{\Omega}}{\partial \mathbf{u}}(\mathbf{u}, \mathbf{C}) &= \mathbf{0} \quad (\text{dans } \Omega) \\ [\mathbf{C} : \nabla \mathbf{w}] \cdot \mathbf{n} &= -\frac{\partial j_{\partial\Omega}}{\partial \mathbf{u}}(\mathbf{u}, \mathbf{C}) \quad (\text{sur } \partial\Omega) \end{aligned}$$

Dans le cas général, le champ direct \mathbf{u} dépend du tenseur d'élasticité inconnu \mathbf{C} . Dans le cas particulier

$$\mathbf{C}(\mathbf{x}) = \mathbf{C}_0(\mathbf{x}) + \delta \mathbf{C}(\mathbf{x}) \quad |\delta \mathbf{C}(\mathbf{x})| \ll |\mathbf{C}_0(\mathbf{x})|$$

où \mathbf{C} est une petite perturbation d'une valeur de référence \mathbf{C}_0 , on remarque que

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(\mathbf{x}; \mathbf{C}) &= \mathbf{u}(\mathbf{x}; \mathbf{C}_0) + O(\delta \mathbf{C}(\mathbf{x})) = \mathbf{u}_0(\mathbf{x}) + O(\delta \mathbf{C}(\mathbf{x})) \\ \mathbf{w}(\mathbf{x}; \mathbf{C}) &= \mathbf{w}(\mathbf{x}; \mathbf{C}_0) + O(\delta \mathbf{C}(\mathbf{x})) = \mathbf{w}_0(\mathbf{x}) + O(\delta \mathbf{C}(\mathbf{x})) \end{aligned}$$

ce qui permet d'approcher δJ par

$$\delta J = \int_{\Omega} \frac{\partial j_{\Omega}}{\partial \mathbf{C}} : \delta \mathbf{C} \, dV + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial j_{\partial\Omega}}{\partial \mathbf{C}} : \delta \mathbf{C} \, dS + \int_{\Omega} \nabla \mathbf{u}_0 : \delta \mathbf{C} : \nabla \mathbf{w}_0 \, dV + o(\delta \mathbf{C}(\mathbf{x}))$$

Cette expression, affine en $\delta \mathbf{C}$, présente en outre l'avantage de ne comporter, hormis l'inconnue $\delta \mathbf{C}$, que des grandeurs connues puisque les champs \mathbf{u}_0 et \mathbf{w}_0 sont définis à partir de la référence \mathbf{C}_0 .

Considérons un choix particulier de J :

$$J(\mathbf{u}, \mathbf{C}) = \frac{1}{2} |\mathbf{u}(\mathbf{z}) - \boldsymbol{\xi}(\mathbf{z})|^2 \quad \mathbf{z} \in \partial\Omega \text{ fixé}$$

Le champ adjoint \mathbf{w}_0 est alors défini par

$$\begin{aligned} \operatorname{div} [\mathbf{C}_0 : \nabla \mathbf{w}_0] - \frac{\partial j_{\Omega}}{\partial \mathbf{u}}(\mathbf{u}, \mathbf{C}) &= \mathbf{0} \quad (\text{dans } \Omega) \\ [\mathbf{C}_0 : \nabla \mathbf{w}_0] \cdot \mathbf{n} &= -(\mathbf{u}(\mathbf{z}) - \boldsymbol{\xi}(\mathbf{z})) \delta_{\mathbf{z}} \quad (\text{sur } \partial\Omega) \end{aligned}$$

⁴SLATEC *mathematical library* : Ensemble de programmes FORTRAN en domaine public ; Energy Science and Software Center, PO Box 1020, Oak Ridge, TN 37831, USA ; serveur électronique (procédure ftp netlib.no, login anonymous) ; contient LINPACK [6].

en d'autres termes, \mathbf{w}_0 est la réponse élastique à une force ponctuelle $F = -(\mathbf{u}(\mathbf{z}) - \boldsymbol{\xi}(\mathbf{z}))$ appliquée au point \mathbf{z} fixé de $\partial\Omega$. La variation de ce J particulier est

$$\delta J = -(\mathbf{u}(\mathbf{z}) - \boldsymbol{\xi}(\mathbf{z})) = \int_{\Omega} \nabla \mathbf{u}_0 : \delta \mathbf{C} : \nabla \mathbf{w}_0 \, dV$$

On obtient ainsi une *équation d'observation*, c'est-à-dire une expression *explicite* de l'écart entre déplacements calculé \mathbf{u} et mesuré $\boldsymbol{\xi}$ en un point \mathbf{z} de $\partial\Omega$ en fonction de la petite perturbation inconnue $\delta \mathbf{C}$.

$$(\mathbf{u}(\mathbf{z}) - \boldsymbol{\xi}(\mathbf{z})) = - \int_{\Omega} \nabla \mathbf{u}_0 : \delta \mathbf{C} : \nabla \mathbf{w}_0 \, dV \quad (5.43)$$

Cette opération peut être faite pour tous les points de $\partial\Omega$.

PROBLÈME INVERSE LINÉARISÉ EN CONDUCTION THERMIQUE INSTATIONNAIRE. Une démarche similaire, que nous ne détaillons pas[4], conduit à une expression explicite de l'écart entre températures calculé θ et mesuré ξ en un point \mathbf{z} fixé de $\partial\Omega$ et à un instant $\tau \in [0, T]$ fixé en fonction de la petite perturbation de conductivité δk , inconnue du problème inverse linéarisé.

$$\theta(\mathbf{z}, \tau) - \xi(\mathbf{z}, \tau) = - \int_0^T \int_{\Omega} \delta k \nabla \theta_k \nabla \psi_k \, dV \, dt \quad (5.44)$$

le champ adjoint ψ_0 étant la réponse à un flux de chaleur ponctuel et impulsionnel au point \mathbf{z} et à l'instant τ :

$$\begin{aligned} -\frac{\partial \psi_0}{\partial t} - \operatorname{div}(k_0(\mathbf{x}) \nabla \psi_0) &= 0 \quad (\mathbf{x} \in \Omega) \\ \psi_0(\mathbf{x}, t \geq T) &= 0 \quad (\text{conditions finales}) \\ k_0(\mathbf{x}) \frac{\partial \psi_0}{\partial n}(\mathbf{x}, t) &= (\xi - \theta)(\mathbf{z}, t) \delta_{\mathbf{z}} \delta_{\tau} \quad (\mathbf{x} \in S, t \leq T) \end{aligned}$$

REMARQUES. Les équations d'observation (5.43) et (5.44) ont la structure d'équations intégrales de première espèce (Tricomi [18], Wing [19]). Cette classe d'équations est connue pour être mal posée (chapitre 2) : d'une part la sensibilité de l'inconnue δk aux petites perturbations du second membre est très grande, d'autre part l'existence et l'unicité de la solution ne sont pas garanties. L'obtention de telles équations d'observation par l'intermédiaire de la méthode de l'état adjoint permet donc de mettre en évidence le caractère mal posé du problème inverse linéarisé, qu'on s'attend donc *a fortiori* à retrouver en l'absence de linéarisation.

Cette méthode est applicable à un grand nombre de problèmes. L'équation d'observation obtenue est intéressante à deux titres :

- Elle fournit une relation explicite entre mesure et inconnue pour le problème inverse linéarisé.
- Quand cette relation présente la forme d'une équation intégrale de première espèce, la sensibilité au bruit expérimental est mise en évidence.

Dans ce dernier cas, l'utilisation de l'équation d'observation pour la résolution effective doit être accompagnée d'une régularisation (chapitres 1, 2 et 3).

5.7 Etat adjoint et problèmes d'évolution non-linéaires

Certains problèmes inverses sont posés dans le cadre de problèmes d'évolution non-linéaires (par exemple calcul élastoplastique) : on peut par exemple penser à l'identification de paramètres de comportement ou à l'optimisation de forme. On est alors amené à minimiser une fonctionnelle $\mathcal{J}(\mathbf{p}) = J(\mathbf{d}_N, \mathbf{p})$, où $\mathbf{d}_N = \mathbf{d}_N(\mathbf{p})$ est la réponse de la structure à l'instant final $t = t_N$ (la signification physique de \mathbf{d}_N dépend du contexte considéré; il peut par exemple s'agir des déplacements nodaux). La présentation faite dans cette section reprend Michaleris et coll. [12].

INCRÉMENT DE RÉPONSE. Une discrétisation temporelle $[t_0 = 0, t_1, \dots, t_N = T]$ étant adoptée et un état initial \mathbf{d}_0 étant donné, on suppose que $\mathbf{d}_k(\mathbf{p})$ dépend implicitement de $\mathbf{d}_{k-1}(\mathbf{p})$ par l'intermédiaire d'une relation vectorielle du type

$$\mathbf{R}_k(\mathbf{d}_k, \mathbf{d}_{k-1}, \mathbf{p}) = \mathbf{0} \quad (5.45)$$

où le vecteur \mathbf{R}_k a la même dimension que \mathbf{d}_k . Dans ce cas, $\mathbf{d}_k(\mathbf{p})$ est calculé, connaissant $\mathbf{d}_{k-1}(\mathbf{p})$, au moyen d'une méthode de Newton appliquée au système d'équations non linéaires (5.45). Cette dernière, au pas i , s'écrit :

$$\mathbf{d}_k^i = \mathbf{d}_k^{i-1} - [\mathbf{R}_{k,d_k}(\mathbf{d}_k^{i-1}, \mathbf{d}_{k-1}, \mathbf{p})]^{-1} \mathbf{R}_k(\mathbf{d}_k^{i-1}, \mathbf{d}_{k-1}, \mathbf{p}) \quad (5.46)$$

En particulier, on voit que cette technique amène à former, à convergence, la valeur du gradient $\mathbf{R}_{k,d_k}(\mathbf{d}_k, \mathbf{d}_{k-1}, \mathbf{p})$.

MÉTHODE DE L'ÉTAT ADJOINT. On forme le lagrangien incorporant la vérification de toutes les relations incrémentales (5.45) :

$$\mathcal{L}(\mathbf{p}) = J(\mathbf{d}_N, \mathbf{p}) + \sum_{k=1}^N \tilde{\mathbf{d}}_k^T \mathbf{R}_k(\mathbf{d}_k, \mathbf{d}_{k-1}, \mathbf{p}) \quad (5.47)$$

de sorte que la première variation de \mathcal{L} s'écrit :

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{L} = & \left(J_{,p}(\mathbf{d}_N, \mathbf{p}) + \sum_{k=1}^N \tilde{\mathbf{d}}_k^T \mathbf{R}_{k,m} \right) \cdot \delta \mathbf{p} + \left(J_{,d^N}(\mathbf{d}_N, \mathbf{p}) + \tilde{\mathbf{d}}_N^T \mathbf{R}_{N,d_N} \right) \cdot \delta \mathbf{d}^N \\ & + \sum_{k=1}^{N-1} \left(\tilde{\mathbf{d}}_{k+1}^T \mathbf{R}_{k+1,d_k} + \tilde{\mathbf{d}}_k^T \mathbf{R}_{k,d_k} \right) \cdot \delta \mathbf{d}^k \end{aligned}$$

Le problème adjoint associé est alors

$$\mathbf{R}_{N,d_N}^T \tilde{\mathbf{d}}_N = -J_{,d^N}(\mathbf{d}_N, \mathbf{p}) \quad (5.48)$$

$$\mathbf{R}_{k,d_k}^T \tilde{\mathbf{d}}_k = -\mathbf{R}_{k+1,d_k}^T \tilde{\mathbf{d}}_{k+1} \quad (N-1 \geq k \geq 1) \quad (5.49)$$

Une fois le problème ci-dessus résolu, le gradient de $\mathcal{J}(\mathbf{p})$ est donné par

$$\mathcal{J}_m = J_{,p}(\mathbf{d}_N, \mathbf{p}) + \sum_{k=1}^N \tilde{\mathbf{d}}_k^T \mathbf{R}_{k,m}(\mathbf{d}_k, \mathbf{d}_{k-1}, \mathbf{p}) \quad (5.50)$$

Notons quelques commentaires importants :

- On voit que (5.48,5.48) définit un problème d'évolution *rétrograde* en $\tilde{\mathbf{d}}$: la relation (5.48) donne la *condition finale*, et les $N - 1$ équations (5.49) permettent alors l'intégration rétrograde, $\tilde{\mathbf{d}}_{k-1}$ étant calculé à partir de $\tilde{\mathbf{d}}_k$.
- Le calcul de $\tilde{\mathbf{d}}_{k-1}$ dans (5.49) nécessite d'inverser le gradient \mathbf{R}_{k,d_k} , c'est-à-dire celui qui a été obtenu (et inversé) à convergence lors de la méthode de Newton (5.46). Le calcul de l'état adjoint en est grandement accéléré.
- Compte tenu du caractère rétrograde du problème adjoint, il est nécessaire de stocker *toutes* les matrices \mathbf{R}_{k,d_k} (sous forme factorisée) et *toutes* les matrices \mathbf{R}_{k-1,d_k} , formées au cours du calcul d'évolution direct, *avant* de procéder au calcul de la solution du problème adjoint.

Bien entendu, le cas où \mathcal{J} est définie à partir des réponses \mathbf{d}_k à tous les instants intermédiaires entre également dans ce cadre ; les ajustements nécessaires à la démarche présentée ci-dessus sont laissés au lecteur.

DÉRIVATION DIRECTE DE \mathcal{J} . Les contraintes de stockage liées au caractère rétrograde du problème adjoint suggèrent que la dérivation directe peut être utilisée avantageusement. Celle-ci consiste à écrire

$$\mathcal{J}_{,p} = J_{,p} + J_{,d_N}^T \mathbf{d}_{N,m} \quad (5.51)$$

La dérivée $\mathbf{d}_{N,m}$ de \mathbf{d}_N par rapport à \mathbf{p} est elle-même obtenue en dérivant l'équation (5.45) à convergence :

$$\frac{d}{dm} \mathbf{R}_k(\mathbf{d}_k, \mathbf{d}_{k-1}, \mathbf{p}) = \mathbf{0}$$

soit

$$\mathbf{R}_{k,d_k} \mathbf{d}_{k,m} + \mathbf{R}_{k,d_{k-1}} \mathbf{d}_{k-1,m} = -\mathbf{R}_{k,m}$$

Cela définit un problème d'évolution sur $\mathbf{d}_{,p}$, chaque pas nécessitant la résolution d'un système *linéaire*. La différence avec la méthode de l'état adjoint est que le calcul ci-dessus procède dans le même sens que le problème direct d'évolution. Le calcul de \mathbf{d}_k et $\mathbf{d}_{k,m}$ au pas k peut ainsi être mené en parallèle. Le stockage des opérateurs linéaires \mathbf{R}_{k,d_k} et \mathbf{R}_{k-1,d_k} est donc inutile.

EXEMPLE : PROBLÈME INVERSE POUR LES ESSAIS DYNAMIQUES AVEC LES BARRES D'HOPKINSON. Laurent ROTA, dans son travail de thèse, applique l'approche inverse à l'interprétation quantitative des données expérimentales fournies par les barres d'Hopkinson. Ce dispositif permet de mesurer forces *et* déplacements en fonction du temps aux deux extrémités d'un échantillon, dans des conditions de dynamique rapide. Ces informations sont surabondantes si le comportement du matériau constitutif de l'échantillon est connu.

Dans cette étude, l'état mécanique de l'échantillon dépend du temps et d'une coordonnée d'espace. On cherche à affaiblir les hypothèses simplificatrices (état mécanique uniforme dans l'échantillon) habituellement utilisées pour le dépouillement des mesures, qui consiste en la détermination des paramètres $\{p_i\}$ associés au modèle de comportement postulé. Cette stratégie repose alors sur la minimisation d'une fonctionnelle d'écart mesure-calcul $\mathcal{J}(\{p_i\})$. Celle-ci procède de manière itérative, selon un algorithme classique, et chaque évaluation de \mathcal{J} exige la simulation numérique de la dynamique de l'éprouvette pour un comportement donné, c'est-à-dire un jeu donné de paramètres $\{p_i\}$. Les premiers résultats obtenus par L. ROTA sont encourageants [11]. Les recherches en cours portent

notamment sur la définition des fonctionnelles d'écart entre données mesurées et calculées, dans l'esprit des fonctionnelles d'erreur en loi de comportement développées au LMT, ENS Cachan.

Le problème direct (à paramètres de comportement donnés) est non-linéaire. La méthode de l'état adjoint est utilisée pour le calcul numérique du gradient de la fonctionnelle d'écart, selon le principe présenté dans cette section. Un calcul typique (20 pas d'espace, pas de temps de $100 \mu s$) représente 25 itérations pour l'algorithme de minimisation. Le calcul de $\nabla_p \mathcal{J}$ est environ 6 fois plus long que celui de \mathcal{J} . Les paramètres $\{p_i\}$ étant ici au nombre de quatre (modèle de Sokolowski-Malvern), on peut estimer que la technique de l'état adjoint n'est pas substantiellement plus rapide qu'une technique de dérivation directe par rapport aux paramètres $\{p_i\}$, qui demanderait de résoudre un problème d'évolution associé à une variation de chaque p_i . Toutefois, l'état adjoint ne dépend pas du nombre de paramètres $\{p_i\}$, et devient d'autant plus performante que leur nombre est élevé.

Nous reproduisons en figure 5.2 un exemple numérique (simulation) tiré de [11]. L'expérience (simulée) y dure $80 \mu s$. Ce travail a débouché sur l'identification de paramètres de comportement sur éprouvettes réelles.

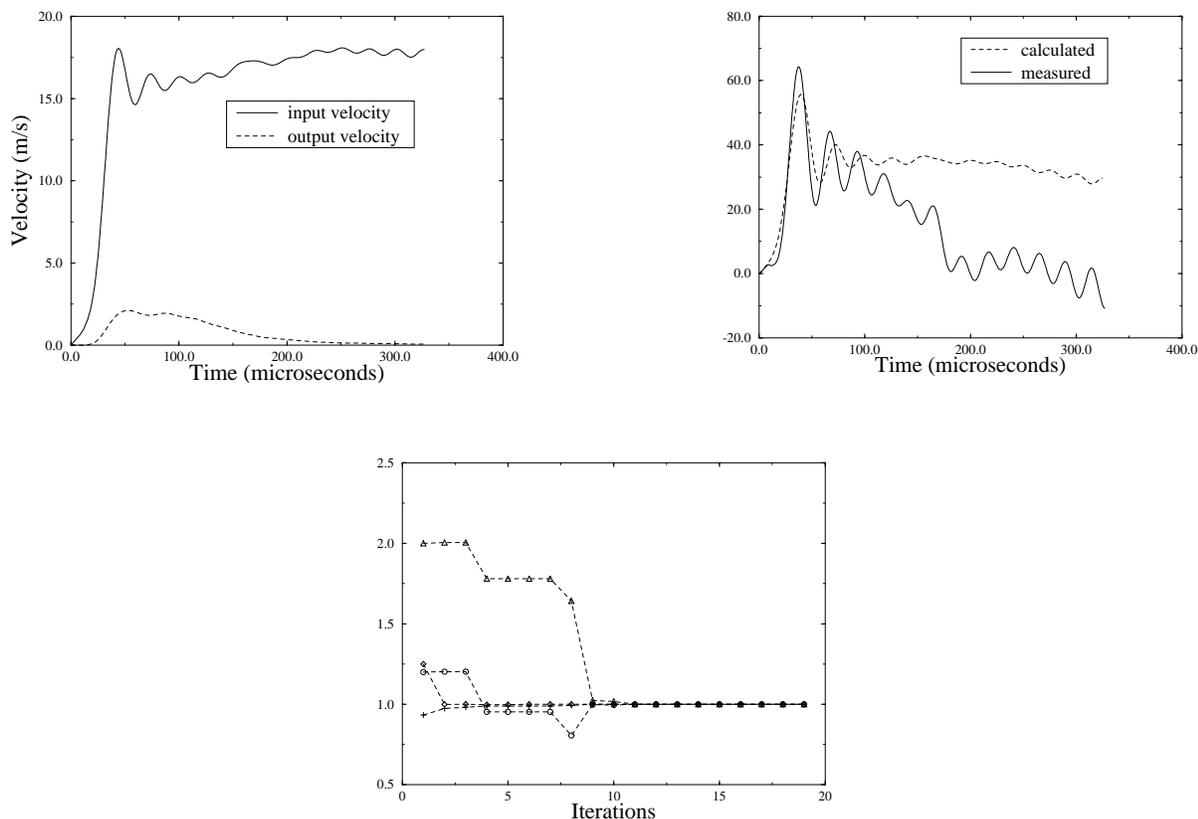


Fig. 5.2: Calcul inverse pour une simulation d'essai aux barres d'Hopkinson : vitesses aux extrémités (en haut à gauche), forces mesurées et calculées aux extrémités (en haut à droite), convergence des paramètres de comportement (en bas), (d'après [11])

5.8 Identification de domaines inconnus par équations intégrales de frontière

Ce travail [3] illustre la mise en oeuvre conjointe de la méthode de l'état adjoint, la dérivation dans une transformation de domaine et l'utilisation des équations intégrales de frontière. On y considère un problème-modèle : l'identification d'un obstacle rigide spatialement borné Ω^- , de frontière Γ , situé dans un milieu acoustique infini $\Omega = \mathcal{R}^3 - \Omega^-$. Une onde de pression incidente $p^I(\mathbf{y}) \exp(-i\omega t)$, donnée et telle que $(\Delta + k^2)p^I = 0$, induit l'apparition d'une onde p diffractée par l'obstacle, solution du problème direct :

$$\begin{cases} (\Delta + k^2)p = 0 & \text{dans } \Omega \\ p_{,n} + p^I_{,n} = 0 & \text{sur } \Gamma \\ p = O(r), p_{,r} + ikp = O(r) & r = |\mathbf{y}| \rightarrow +\infty \end{cases} \quad (5.52)$$

La solution p de (5.52) dépend de Γ : $p = p_\Gamma$.

Problème inverse. On cherche à identifier la forme, inconnue, de Ω^- (donc de Γ), à partir de données supplémentaires sous la forme de valeurs connues \hat{p} de p sur une *surface de mesure* C extérieure à Γ et en minimisant une distance \mathcal{J} :

$$\mathcal{J}(\Gamma) = J(p) \quad \text{avec} \quad J(p) = \frac{1}{2} \int_C |p - \hat{p}|^2 dS \quad (5.53)$$

ETAT ADJOINT. Ici encore une fonctionnelle augmentée est introduite :

$$\mathcal{L}(p, w; \Gamma) = J(p) + \mathcal{A}(p, w; \Gamma) \quad (5.54)$$

dans laquelle la contrainte $\mathcal{A}(p, w; \Gamma)$, associée au champ de multiplicateurs w , est la formulation faible du problème direct (5.52) :

$$\mathcal{A}(p, w; \Gamma) \equiv \int_{\Omega_e} (\nabla p \cdot \nabla \bar{w} - k^2 p \bar{w}) dV_y + \int_\Gamma \bar{w} p^I_{,n} dS_y = 0 \quad (\forall w, (5.52_3 \text{ et } w \in H^1_{loc}(\Omega)))$$

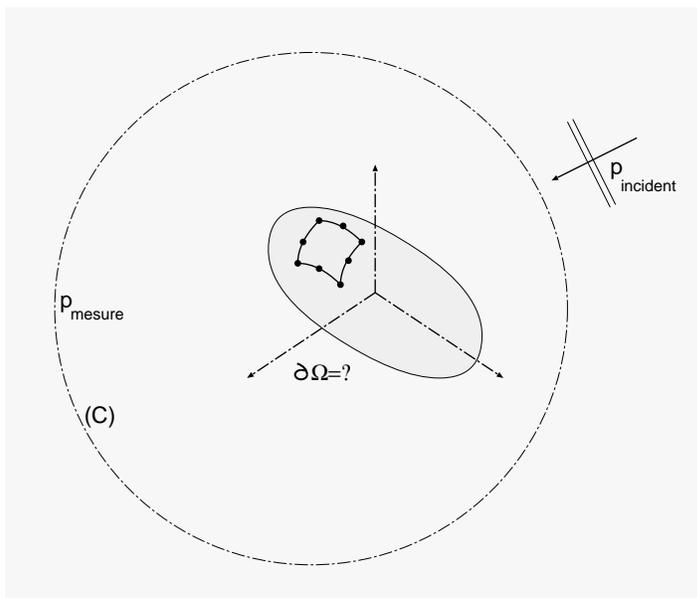


Fig. 5.3: Détection d'un obstacle au moyen d'ondes acoustiques : schéma de principe.

On dérive cette fonctionnelle dans une transformation de domaine (évolution de Γ), en appliquant des formules de type eulérien. L'état adjoint w_Γ est alors défini par la condition $\mathcal{L}_{,p} p_{,\tau} = 0, \forall p_{,\tau} \in H_{loc}^1(\Omega)$, et est solution du problème :

$$\begin{cases} (\Delta + k^2)w = -(\overline{p_\Gamma - \hat{p}})\delta_C & \text{dans } \Omega \\ w_{,n} = 0 & \text{sur } \Gamma \\ w = O(r), w_{,r} + ikw = O(r) & r = |\mathbf{y}| \rightarrow +\infty \end{cases} \quad (5.55)$$

On remarque, ici encore, que l'état adjoint est associé à une source proportionnelle à l'écart entre grandeur mesurée et calculée ; il est donc en particulier nul quand ces dernières coïncident. D'autre part, l'intervention du complexe conjugué de $p_\Gamma - \hat{p}$ au second membre de (5.55)₁ reflète, dans le cadre de la dynamique stationnaire considéré ici, le caractère rétrograde de l'état adjoint, mis en évidence de manière plus générale en section 5.7.

Equations intégrales directe et adjointe. Les problèmes direct (5.52) et adjoint (5.55) sont respectivement gouvernés par les équations intégrales régularisées :

$$\begin{aligned} p(\mathbf{x}) + \int_\Gamma p(\mathbf{y})[G_{,n}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - G_{,n}^0(\mathbf{x}, \mathbf{y})] dS_y + \int_\Gamma [p(\mathbf{y}) - p(\mathbf{x})]G_{,n}^0(\mathbf{x}, \mathbf{y}) dS_y \\ = - \int_\Gamma p_{,n}^I(\mathbf{y})G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) dS_y \end{aligned} \quad (5.56)$$

$$\begin{aligned} w(\mathbf{x}) + \int_\Gamma w(\mathbf{y})[G_{,n}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - G_{,n}^0(\mathbf{x}, \mathbf{y})] dS_y + \int_\Gamma [w(\mathbf{y}) - w(\mathbf{x})]G_{,n}^0(\mathbf{x}, \mathbf{y}) dS_y \\ = \int_C |\overline{p_\Gamma - \hat{p}}|(\mathbf{y})G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) dC_y \end{aligned} \quad (5.57)$$

où $G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = e^{ikr}/(4\pi r)$ et $G^0(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 1/(4\pi r)$ désignent les solutions élémentaires dynamique et statique et $r = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$. On remarque immédiatement que le même opérateur intégral gouverne les deux équations intégrales. Une fois l'assemblage et la factorisation de ce dernier effectués lors de la résolution du problème direct et l'évaluation de $\mathcal{J}(\Gamma)$, le calcul de l'état adjoint ne nécessite que l'assemblage du second membre de (5.57) et la résolution d'un système d'équations triangulaire.

DÉRIVÉE DE $\mathcal{J}(\Gamma)$ PAR RAPPORT AU DOMAINE. Nous avons ainsi pu établir que la dérivée matérielle de $\mathcal{J}(\Gamma)$ est donnée par :

$$\dot{\mathcal{J}} = \dot{\mathcal{L}}(p_\Gamma, w_\Gamma; \Gamma) = \int_\Gamma [\nabla_S \bar{w}_\Gamma \cdot \nabla_S (p_\Gamma + p^I) - k^2 \bar{w}_\Gamma (p_\Gamma + p^I)] \cdot \theta dS$$

Cette formule donne, d'une manière explicite et élégante, le gradient de $\mathcal{J}(\Gamma)$ par rapport à Γ comme une forme linéaire (*dérivée par rapport au domaine*, Simon [16]) en θ , vitesse normale d'évolution de Γ dont le noyau $\mathcal{J}_{,\Gamma}$ est construit en termes des états direct et adjoint. Nous avons traité dans [3] l'extension de cette démarche aux cas d'obstacles pénétrables en acoustique et de cavités en élastodynamique.

APPLICATION NUMÉRIQUE. Elle a été faite pour la recherche d'un obstacle rigide de forme « n -ellipsoïdale » (n est un exposant : $n = 1, 2, +\infty$ donnant respectivement un

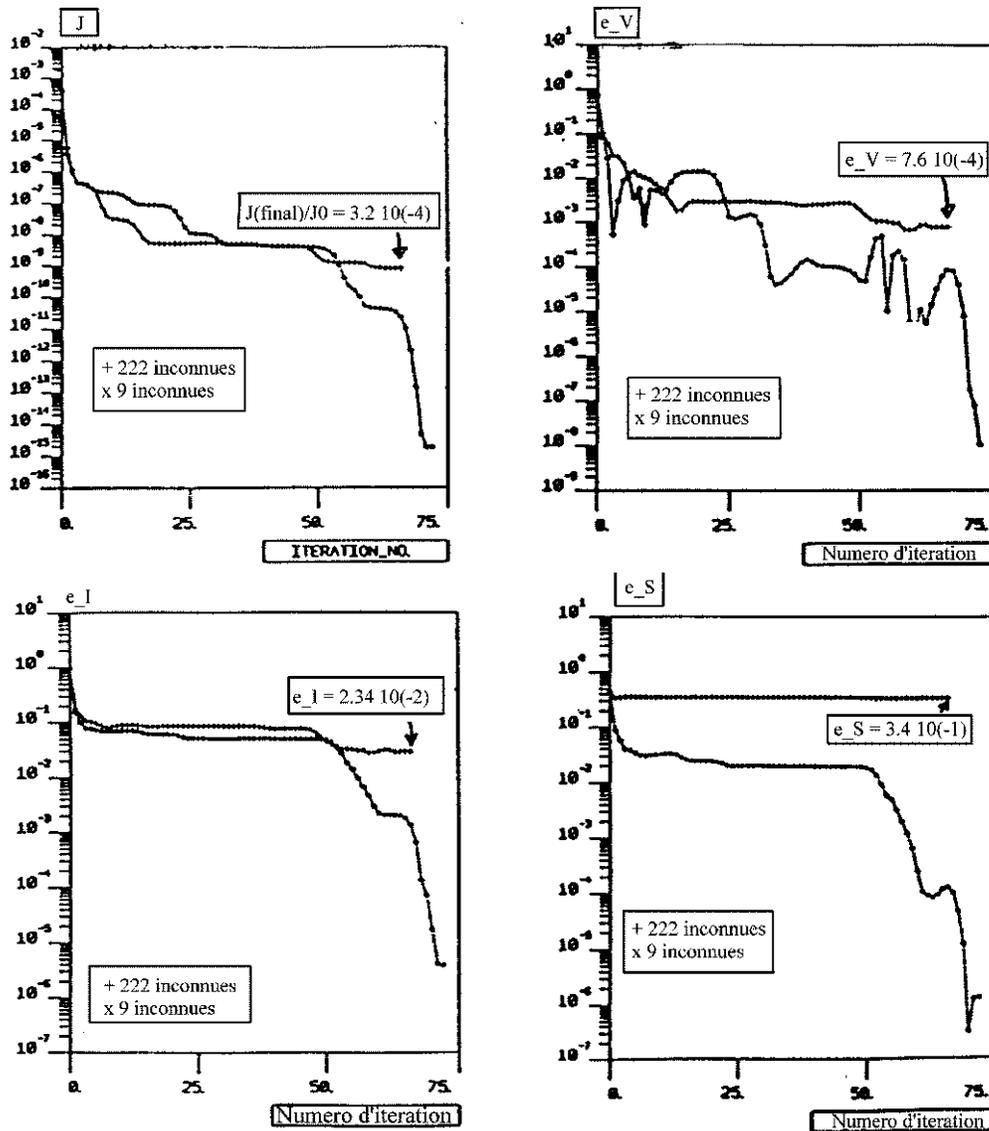


Fig. 5.4: Détection d'un obstacle au moyen d'ondes acoustiques : comparaison entre 9 et 222 inconnues.

octaèdre, un ellipsoïde et un parallépipède), définie par 10 paramètres (3 coordonnées du centre de gravité géométrique, 3 axes principaux, 3 angles d'Euler et l'exposant n).

La surface courante Γ , sur laquelle porte la minimisation de $\mathcal{J}(\Gamma)$, est discrétisée ainsi que les valeurs de p par éléments finis de frontière : 24 quadrilatères courbes à 8 noeuds, dans l'exemple traité. Elle est décrite par un nombre fini N de paramètres, qui sont les inconnues de la minimisation. Deux possibilités ont été traitées :

- Les noeuds du maillage sont pilotés par les valeurs des paramètres géométriques d'un n -ellipsoïde ($N = 10$).
- Les coordonnées des noeuds du maillage ($N = 222$ dans notre exemple) : l'information a priori sur la forme inconnue est alors beaucoup moins forte que dans le cas précédent.

La minimisation de \mathcal{J} utilise la méthode BFGS avec *line search* imparfait (Fletcher [7]).

La figure 5.4 présente les valeurs de \mathcal{J} et des erreurs relatives e_V, e_S, e_I commises sur

le volume, l'aire et l'inertie géométrique (prise par rapport à une origine et des axes fixés) de Ω^- , en fonction du numéro d'itération de l'algorithme de minimisation. On remarque que le cas à 9 inconnues (l'exposant n était absent de la recherche pour cet exemple) fournit d'excellents résultats, probablement parce que le problème inverse, que l'on sait mal posé en toute généralité, devient ici bien posé en raison de la restriction très forte des formes possibles. Avec 222 inconnues, le centre d'inertie, le volume et l'inertie géométrique (représentative de l'orientation dans l'espace) de l'obstacle inconnu sont convenablement retrouvés. Une aire trop importante de 30% environ est trouvée, symptôme d'oscillations de la surface reconstruite par EFF. Les résultats de la figure 5.4 ont été obtenus avec une surface initiale assez proche de celle recherchée, ce qui montre qu'en pratique l'utilisation des coordonnées nodales comme paramètres géométriques gouvernant l'évolution de Γ est une mauvaise solution. En revanche, d'excellents résultats continuent d'être obtenus, avec 10 inconnues, en prenant des surfaces initiales relativement éloignées de la solution [3]. Dans le cas où la solution était un parallépipède ($n = +\infty$), la valeur trouvée pour n était de l'ordre de 1000 (donc infinie en pratique); il a été constaté que les deux derniers tiers des itérations étaient presque totalement utilisés à la recherche de n seul.

La méthode BFGS [7], [13] avec « line-search » imparfait [7] a été retenue après essais avec gradient conjugué et BFGS avec « line-search » parfait, car elle est apparue comme la plus efficace (nombre d'évaluations de fonction-coût et gradient nécessaires), et parfois la meilleure du point de vue du résultat atteint à convergence. Elle est d'autre part sensible à l'initialisation du « line-search » (qui doit utiliser des valeurs pertinentes du point de vue dimensionnel) et à une bonne programmation de la formule BFGS elle-même (erreurs d'arrondi possibles dans la réactualisation du pseudo-hessien).

COMMENTAIRES ET PERSPECTIVES. Cette démarche est applicable à des situations plus générales faisant intervenir des milieux linéaires et homogènes : domaine d'étude borné, autres contextes tels que l'élasticité ou la thermique, régime transitoire... Elle permet d'utiliser une méthode de minimisation avec gradient dans des conditions optimales pour ce qui est de la rapidité et de la précision du calcul du gradient et donc a un intérêt clair du point de vue numérique. En revanche, elle n'apporte pas d'éclairage particulier sur certaines questions plus fondamentales telles que l'existence ou l'unicité de la solution au problème inverse pour les données en notre possession.

Les très bons résultats numériques que nous avons obtenus pour des exemples à faible nombre de paramètres géométriques valident l'efficacité des composants de la méthode d'inversion, et notamment celle du calcul numérique du gradient de \mathcal{J} (celui-ci demande un supplément de temps calcul d'environ 30% du temps nécessaire à une évaluation de \mathcal{J} seule⁵). L'emploi couplé d'éléments de frontière et de l'état adjoint est très efficace sur le plan numérique. La détérioration des résultats qui apparaît avec l'augmentation du nombre de paramètres géométriques, qui était attendue, souligne clairement la nécessité d'introduire une régularisation pour traiter ce type de problème inverse, conduisant à minimiser une fonction-coût augmentée $\mathcal{J}(\Gamma) + \alpha P(\Gamma)$ ($0 < \alpha \ll 1$). On peut par exemple proposer de pénaliser les courbures élevées et les sauts de normale sur les frontières d'éléments, avec :

$$P(\Gamma) = \frac{1}{2} \int_{\Gamma} (\operatorname{div}_S \mathbf{n})^2 dS + \beta \int_L (1 - \mathbf{n}^+ \cdot \mathbf{n}^-) ds$$

⁵Comparer le rapport 0,3 : 1 constaté ici au rapport 6 : 1 relevé pour la méthode de l'état adjoint en régime temporel (page 115).

D'autre part, à notre connaissance, trouver des représentations paramétrées permettant de décrire des formes tridimensionnelles (surfaces fermées) aussi générales que possible à l'aide d'un nombre de paramètres géométriques aussi réduit que possible est un problème largement ouvert.

5.9 Algorithmes évolutionnaires : principe et exemples

Les méthodes exposées jusqu'ici sont liées à la mise en oeuvre efficace des algorithmes de minimisation utilisant le gradient de la fonction-coût : gradient conjugué, quasi-Newton, Marquardt-Levenberg, ... Ces derniers, bien maîtrisés et d'utilisation classique, sont « aveugles », par nature : partant d'une valeur initiale de l'inconnue à identifier, ils fournissent un résultat unique : minimum global ou local (l'utilisateur ignorant généralement laquelle de ces deux possibilités est atteinte, sauf dans des cas particuliers où la fonction-coût est convexe), assorti éventuellement d'informations locales complémentaires, comme le hessien ou un opérateur de covariance tangent au point atteint.

Une autre voie, plus récemment explorée, consiste à utiliser des méthodes d'*optimisation stochastique*, et notamment des *algorithmes génétiques*. Nous en présentons succinctement le principe, renvoyant le lecteur à des traités tels que Fogel [8], Goldberg [10]. Le problème générique est la maximisation d'une fonction scalaire F définie sur un sous-ensemble $E \subset \mathbb{R}^n$ (l'introduction d'un tel ensemble permet la représentation de *contraintes* d'égalité ou d'inégalité) :

$$\max F(\mathbf{x}) \quad \mathbf{x} \in E$$

Dans le principe, ces méthodes reposent sur les étapes suivantes :

1. Une *population* initiale \mathcal{P}^0 , c'est-à-dire un N -uplet $(\mathbf{x}_1^0, \dots, \mathbf{x}_N^0)$ d'*individus* (points de E) est tirée au hasard.
2. On calcule les *performances*

$$F_1 = F(\mathbf{x}_1^0), \dots, F_N = F(\mathbf{x}_N^0)$$

3. Les individus *performants* (c'est-à-dire ceux qui produisent les valeurs F_i les plus élevées de la population \mathcal{P}^0) sont éventuellement repérés et reproduits.
4. Une nouvelle population \mathcal{P}^1 est créée par altération de la population \mathcal{P}^0 (ou éventuellement d'une sous-population performante sélectionnée). L'altération consiste à procéder à des *mutations* d'individus :

$$\mathbf{x}_i^0 \longrightarrow \mathbf{x}_i^1$$

ou encore des *croisements* :

$$(\mathbf{x}_i^0, \mathbf{x}_j^0) \longrightarrow (\mathbf{x}_i^1, \mathbf{x}_j^1)$$

Ces opérations consistent à ajouter une variable aléatoire à l'individu (mutation), à modifier aléatoirement un bit tiré au hasard dans la représentation d'un individu (mutation), à échanger aléatoirement un bit entre deux *parents* (croisement). Elles comportent toujours une part d'aléa. Les algorithmes de mutation ou de croisement doivent de préférence être adaptés au problème particulier considéré, et sont influencés par la performance des individus concernés.

5. On revient à l'étape 2, et continue le processus de création de nouvelles populations jusqu'à convergence.

Sans aller très profondément dans les détails, il importe de mentionner quelques points saillants :

- Ces méthodes n'utilisent *a priori* que des évaluations de fonction-objectif (pas de gradient).
- Elles sont *très gourmandes* en temps de calcul, en raison du nombre très élevé de calculs de performance $F(\mathbf{x})$ nécessaire. En particulier, il est commun d'observer un facteur 10 ou plus pour la résolution de problèmes d'optimisation pouvant relever d'un traitement plus classique (programmation quadratique).
- En revanche, elles peuvent fournir des résultats multiples : la population \mathcal{P}^{conv} est susceptible de comporter plusieurs individus \mathbf{x}_i^{conv} dont la performance est jugée satisfaisante : $F(\mathbf{x}_i^{conv}) \geq F_{seuil}$. Cet aspect est susceptible de revêtir une certaine importance pratique pour les problèmes inverses, où on souhaiterait idéalement procéder à une exploration de l'espace E des solutions *a priori* possibles plutôt que se contenter de l'estimation unique fournie par une méthode de gradient classique.
- Les algorithmes génétiques sont adaptés à des situations du type optimisation combinatoire (N inconnues, chacune pouvant prendre P valeurs distinctes). Le coût de l'analyse exhaustive P^N diverge avec N ou P . Par exemple, l'identification de modules élastiques pouvant en tout point du domaine d'étude Ω prendre l'une ou l'autre de deux valeurs connues (bimatériau à répartition spatiale inconnue) peut relever de cette catégorie (N cellules pour une discrétisation spatiale, $P = 2$).

En résumé, l'intérêt potentiel des méthodes de type génétique est de pouvoir traiter (certes au prix de temps de calcul importants) des problèmes dont la résolution numérique par des méthodes plus classiques est difficile ou impossible.

On peut également imaginer des méthodes mixtes :

- Démarrage de l'optimisation par algorithme génétique, jusqu'à obtenir une population \mathcal{P}^k , ne contenant pas nécessairement l'optimum.
- Utilisation des N_k individus les plus performants de \mathcal{P}^k comme autant de conditions initiales pour une méthode de minimisation classique. Ces N_k conditions initiales conduisent alors à N_k minima locaux, éventuellement distincts, qui permettent d'obtenir une solution multiple. Le choix final parmi les solutions performantes est alors laissé au jugement de l'utilisateur.

UN EXEMPLE UTILISANT L'APPROCHE GÉNÉTIQUE. Cet exemple (Jouve et Schoenauer [15]) reprend le problème de l'identification de modules élastiques (chapitre 4) distribués. On cherche à déterminer la répartition spatiale (inconnue) de deux matériaux linéairement élastiques (modules élastiques de valeurs connues) dans un solide Ω , à partir de valeurs connues du déplacement (données surabondantes), les forces étant imposées sur la frontière $\partial\Omega$.

La répartition inconnue est représentée de manière discrétisée à l'aide de *cellules de Voronoï*. La donnée de N sites (points géométriques du domaine Ω) détermine entièrement un pavage de Ω par cellules de Voronoï. Les inconnues du problème inverse sont en définitive N sites $\mathbf{x}_i \in \Omega$ et le numéro $c_i = 1, 2$ du matériau occupant le site i (la présence de ce numéro confère un aspect partiellement combinatoire au problème inverse discrétisé).

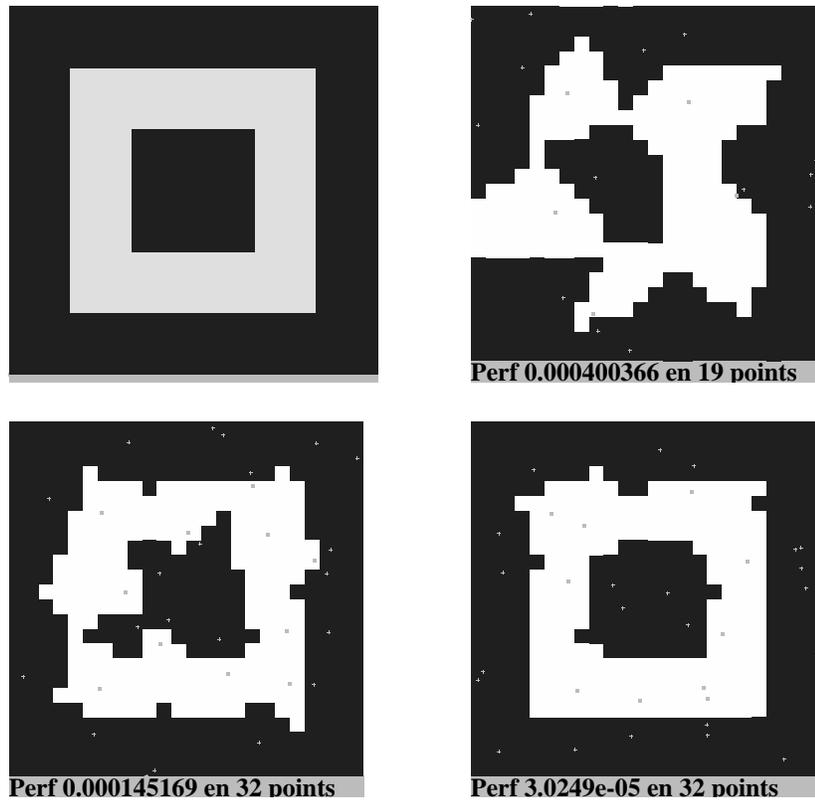


Fig. 5.5: Problème inverse en élasticité et algorithme génétique : carrés concentriques.

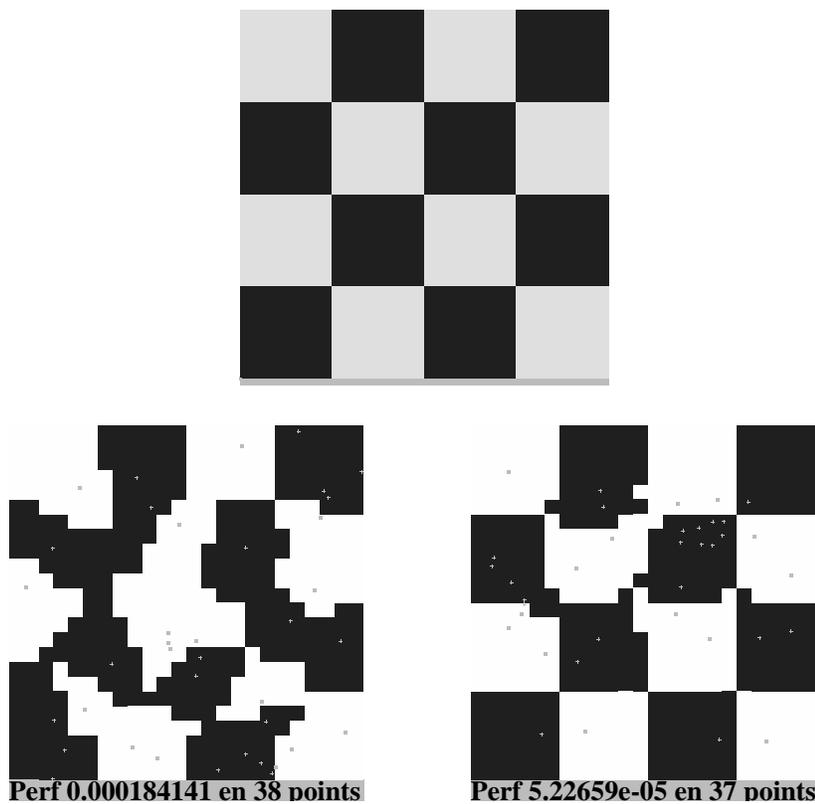


Fig. 5.6: Problème inverse en élasticité et algorithme génétique : damier.

Bibliographie

- [1] ANDERSON, E., BAI, Z., BISCHOF, C., BLACKFORD, S., DEMMEL, J., DONGARRA, J., DU CROZ, J., GREENBAUM, A., HAMMARLING, S., MCKENNEY, A., SORENSEN, D. LAPACK users'guide, third edition. SIAM, Philadelphia (1999).
- [2] BEN ABDALLAH, J. *Inversion gaussienne appliquée à la correction paramétrique de modèles structuraux*. Thèse de Doctorat, Ecole Polytechnique, Paris, France (1995).
- [3] BONNET, M. BIE and material differentiation applied to the formulation of obstacle inverse problems. *Engng. Anal. with Bound. Elem.*, **15**, 121–136 (1995).
- [4] BONNET, M., BUI, H. D., MAIGRE, H., PLANCHARD, J. Identification of heat conduction coefficient : application to nondestructive testing. In H. D. Bui M. Tanaka (ed.), *IUTAM symposium on inverse problems in engineering mechanics*, pp. 475–488. Springer-Verlag (1993).
- [5] BONNET, M., MAIGRE, H., MANAA, M. Numerical reconstruction of interfacial defects and interface thermal resistances using thermal measurements. In D. Bala-geas (ed.), *Quantitative Infrared Thermography (QIRT 92)*, pp. 266–271. Editions Européennes Thermique et Industrie (1992). Congrès QIRT 92, 7-9 juillet 1992, Paris).
- [6] DONGARRA, J. J., BUNCH, J. R., MOLER, C. B., STEWART, G. B. LINPACK users'guide. SIAM, Philadelphia (1979).
- [7] FLETCHER, R. *Practical Methods of Optimization*. John Wiley and sons (1987).
- [8] FOGEL, D. B. *Evolutionary computation : towards a new philosophy of machine intelligence*. IEEE Press (1995).
- [9] GILL, P. E., MURRAY, W., WRIGHT, M. H. *Practical optimization*. Academic Press (1981).
- [10] GOLDBERG, D. E. *Genetic algorithms in search, optimization and machine learning*. Addison Wesley (1989).
- [11] LEFEBVRE, J. P. An inverse approach for identification of dynamic constitutive laws. In M. Tanaka H. D. Bui, et al. (eds.), *Inverse problems in engineering mechanics*, pp. 157–164. A. A. Balkema, Rotterdam (1994).
- [12] MICHALERIS, P., TORTORELLI, D. A., VIDAL, C. A. Tangent operators and design sensitivity formulations for transient non-linear coupled problems with applications to elastoplasticity. *Int. J. Num. Meth. in Eng.*, **37**, 2471–2499 (1994).
- [13] PRESS, W. H., FLANNERY, B. P., TEUKOLSKY, S. A., VETTERLING, W. T. *Numerical recipes : the art of scientific computing (second edition)*. Cambridge press (1992).
- [14] REYNIER, M. *Sur le contrôle de modélisations éléments finis : recalage à partir d'essais dynamiques*. Thèse de Doctorat, Université Pierre et Marie Curie, Paris, France (1990).
- [15] SCHOENAUER, M., JOUVE, F., KALLEL, L. Identification of mechanical inclusions. In Z. Michalewicz D. Dasgupta (ed.), *Evolutionary computation in engineering.*, pp. 477–494. Springer-Verlag (1997).
- [16] SIMON, J. Second variations for domain optimization problems. In F. Kappel, K. Kunisch, W. Schappacher (eds.), *Control theory of distributed parameter systems and applications.*, vol. 91 of *International Series of Numerical Mathematics*, pp. 361–378. Birkhäuser Verlag, Basel (1989).

- [17] TARANTOLA, A. *Inverse problem theory*. Elsevier (1987).
- [18] TRICOMI, F. G. *Integral equations*. Interscience Publishers, New York (1957).
- [19] WING, G. M. *A primer on integral equations of the first kind*. SIAM Publications, Philadelphia, USA (1991).

Bibliographie générale

Ouvrages

- [1] AMMARI, H., KANG, H. *Reconstruction of small inhomogeneities from boundary measurements*. Lecture Notes in Mathematics 1846. Springer-Verlag (2004).
- [2] BECK, J. V., ARNOLD, K. J. *Parameter estimation in engineering and science*. John Wiley and Sons (1977).
- [3] BUI, H. D. *Introduction aux problèmes inverses en mécanique des matériaux*. Eyrolles, Paris (1993).
- [4] CAKONI, F., COLTON, D. *Qualitative methods in inverse scattering theory*. Springer-Verlag (2006).
- [5] COLTON, D., KRESS, R. *Integral Equation Method in Scattering Theory*. John Wiley and sons (1983).
- [6] COLTON, D., KRESS, R. *Inverse acoustic and electromagnetic scattering theory*. Springer-Verlag (1998).
- [7] COURANT, R., HILBERT, D. *Methods of mathematical physics (2 volumes)*. Interscience (1953).
- [8] ENGL, H. W., HANKE, M., NEUBAUER, A. *Regularization of inverse problems*. Kluwer, Dordrecht (1996).
- [9] GROETSCH, C. W. *Generalized inverses of linear operators (representation and approximation)*. Marcel Dekker (1977).
- [10] HENSEL, E. *Inverse theory and applications for engineers*. Prentice Hall (1991).
- [11] HERMAN, G. T. *Image reconstruction from projections (the fundamentals of computerized tomography)*. Academic Press (1980).
- [12] ISAKOV, V. *Inverse problems for partial differential equations*. Springer-Verlag (1998).
- [13] KIRSCH, A. *An introduction to the mathematical theory of inverse problems*. Springer (1996).
- [14] KUPRADZE, V. D. *Dynamical problems in elasticity*, vol. 3 of *Progress in solids mechanics*. North Holland (1963).
- [15] KUPRADZE, V. D. (ed.). *Three-dimensional problems of the mathematical theory of elasticity and thermoelasticity*. North Holland (1979).
- [16] LATTES, R., LIONS, J. L. *Méthode de quasi-réversibilité et applications*. Dunod (Paris) (1967).
- [17] LAVRENTIEV, M. M. *Some improperly posed problems of mathematical physics*. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg (1967).
- [18] MENKE, W. *Geophysical data analysis : discrete inverse theory*. Academic Press (1984).
- [19] MIKHLIN, S. G. *Multi-dimensional singular integrals and singular integral equations*. Pergamon Press (1965).
- [20] PIKE, R., SABATIER, P. C. (eds.). *Scattering and Inverse Scattering in Pure and Applied Science*, vol. 1 & 2. Academic Press (2002).
- [21] SCHWARZ, L. *Analyse*. Hermann (1981).
- [22] TARANTOLA, A. *Inverse problem theory*. Elsevier (1987).
- [23] TARANTOLA, A. *Inverse problem theory and methods for model parameter estimation*. SIAM (2005).
- [24] TIKHONOV, A. N., ARSENIN, V. Y. *Solutions to ill-posed problems*. Winston-Wiley, New York (1977).
- [25] TIKHONOV, A. N., GONCHARSKI, A. V., STEPANOV, V. V., YAGODA, A. G. *Nu-*

merical methods for the solution of ill-posed problems. Kluwer Academic Publishers (1995).

- [26] TRICOMI, F. G. *Integral equations*. Interscience Publishers, New York (1957).
- [27] VOGEL, C. R. *Computational methods for inverse problems*. SIAM Publications, Philadelphia, USA (2002).
- [28] WING, G. M. *A primer on integral equations of the first kind*. SIAM Publications, Philadelphia, USA (1991).

Méthodes d'optimisation, analyse numérique

- [1] BERTSEKAS, D. P. (ed.). *Nonlinear programming*. Athena Scientific, Belmont, MA, USA (1995).
- [2] BONNANS, F., GILBERT, J. C., LEMARÉCHAL, C., SAGASTIZABAL, C. *Optimisation numérique – aspects théoriques et pratiques*. Mathématiques et applications, Springer-Verlag (1997).
- [3] DENNIS, J. E. (JR), SCHNABEL, R. B. *Numerical methods for unconstrained optimization and nonlinear equations*. Classics in applied mathematics, SIAM, Philadelphia, USA (1999).
- [4] FIACCO, A. V., MCCORMICK, G. P.. *Nonlinear programming – sequential unconstrained minimization techniques*. Classics in applied mathematics, SIAM, Philadelphia, USA (1990).
- [5] FLETCHER, R. *Practical Methods of Optimization*. John Wiley and sons (1987).
- [6] FOGEL, D. B. *Evolutionary computation : towards a new philosophy of machine intelligence*. IEEE Press (1995).
- [7] GILL, P. E., MURRAY, W., WRIGHT, M. H. *Practical optimization*. Academic Press (1981).
- [8] GOLDBERG, D. E. *Genetic algorithms in search, optimization and machine learning*. Addison Wesley (1989).
- [9] STOER, J., BULIRSCH, R. *Introduction to numerical analysis*. Springer-Verlag (1980).
- [10] based on domain integral equations for three-dimensional electric and magnetic objects. *J. Comp. Phys.*, **195**, 236–262 (2004).
- [2] ADAVANI, S. S., BIROS, G. Multigrid solvers for inverse problems with parabolic PDE constraints. *SIAM J. Sci. Comput.*, **31**, 369–387 (2008).
- [3] ALESSANDRINI, G., BILOTTA, A., FORMICA, G., MORASSI, A., ROSSET, E., TURCO, E. Evaluating the volume of a hidden inclusion in an elastic body. *J. Comp. Appl. Math.*, **198**, 288–306 (2007).
- [4] ALLERS, A., SANTOSA, F. Stability and resolution analysis of a linearized problem in electrical impedance tomography. *Inverse Problems*, **7**, 515–533 (1991).
- [5] ALVES, C. J. S., HA DUONG, T. On inverse scattering by screens. *Inverse Problems*, **13**, 1161–1176 (1997).
- [6] ALVES, C. J. S., HA DUONG, T. Inverse scattering for elastic plane cracks. *Inverse Problems*, **15**, 91–97 (1999).
- [7] AMATO, U., HUGUES, W. Maximum entropy regularization of Fredholm integral equations of the first kind. *Inverse Problems*, **7**, 793–808 (1991).
- [8] ANDRIEUX, S. The thin shell approach for some 3D engineering inverse problems. In H. D. Bui M. Tanaka (ed.), *Inverse problems in engineering mechanics*, pp. 539–546. Springer-Verlag (1993).
- [9] ANDRIEUX, S. Fonctionnelles d'écart à la réciprocité généralisé et identification de fissures par des mesures surabondantes à la surface. **320**, 1553–1559 (1995).
- [10] ANDRIEUX, S., BEN ABDA, A. Identification of planar cracks by complete overdetermined data : inversion formulae. *Inverse Problems*, **12**, 553–563 (1996).
- [11] ANGELL, T. S., KLEINMAN, R. E., KOK, B., ROACH, G. F. A Constructive Method for Identification of an Impenetrable Scatterer. *Wave Motion*, **11**, 185–200 (1989).

Articles

- [1] ABUBAKAR, A., VAN DEN BERG, P. M. Iterative forward and inverse algorithms

- [12] AUDEBERT, S. Characterization of the damping effect of a vibrating system. In H. D. Bui M. Tanaka (ed.), *Inverse problems in engineering mechanics*, pp. 327–336. Springer-Verlag (1993).
- [13] AUDOLY, C. Sur l'utilisation de l'holographie acoustique pour les antennes d'émission. Rapport n. 061208, DCN Toulon (1989).
- [14] BACKUS, G., GILBERT, F. Uniqueness in the inversion of inaccurate gross data. *Phil. Trans. Roy. Soc. London*, **266**, 123–192 (1970).
- [15] BALAGEAS, D. L., DEOM, A. A., BOSCHER, D. M. Characterization of non destructive testing of carbon-epoxy composites by a pulsed photothermal method. *Materials Evaluation*, **45**, 461–465 (1987).
- [16] BAMBERGER, A., CHAVENT, G., LAILLY, P. An optimal control solution of the inverse problem of reflection seismics. In Glowinski R., Lions J. L. (eds.), *Computing methods in applied sciences and engineering*. North Holland (1980).
- [17] BAMBERGER, Y. Formes, vibrations et essais non destructifs. In *Aspects théoriques et numériques de la dynamique des structures*, Coll. DER/EDF. Eyrolles, Paris (1988).
- [18] BANKS, H. T., KOJIMA, F. Boundary shape identification problems in two-dimensional domains related to thermal testing of materials. *Quart. Appl. Math.*, **47**, 273–293 (1989).
- [19] BARBONE, E., GOKHALE, N. H. Elastic modulus imaging : on the uniqueness and nonuniqueness of the elastography inverse problem in two dimensions. *Inverse Problems*, **20**, 203–296 (2004).
- [20] BARCILON, V. Inverse problem for vibrating beam. *J. Appl. Math. Phys.*, **27**, 346–358 (1976).
- [21] BARCILON, V. On the multiplicity of solutions of the inverse problem for a vibrating beam. *SIAM J. Appl. Math.*, **37**, 605–613 (1979).
- [22] BARCILON, V. Inverse problem for the vibrating beam in the free-clamped configuration. *Phil. Trans. Roy. Soc. London*, **A 304**, 211–251 (1982).
- [23] BEN AMEUR, H., BURGER, M., HACKL, B. Level set methods for geometric inverse problems in elasticity. *Inverse Problems*, **20**, 673–696 (2004).
- [24] BEN-HAÏM, Y. Identification of certain polynomial nonlinear structures by adaptive selectively-sensitive excitation. *ASME J. Vibr. Acoust.*, **115**, 246–255 (1993).
- [25] BIROS, G., GHATTAS, O. Parallel Lagrange-Newton-Krylov-Schur methods for PDE-constrained optimization. Part I : the Krylov-Schur solver. *SIAM J. Sci. Comput.*, **27**, 687–713 (2005).
- [26] BIROS, G., GHATTAS, O. Parallel Lagrange-Newton-Krylov-Schur methods for PDE-constrained optimization. Part II : the Lagrange-Newton solver and its application to optimal control of steady flows. *SIAM J. Sci. Comput.*, **27**, 714–739 (2005).
- [27] BONNET, M. Equations intégrales régularisées pour l'élastodynamique stationnaire. In *Congrès National d'Analyse Numérique* (1986).
- [28] BONNET, M. Identification et contrôle par équations intégrales de frontière et variation de domaine. In R. Ohayon J. M. Fouet, P. Ladevèze (ed.), *Calcul des structures et intelligence artificielle*, vol. 4. Pluralis (1991).
- [29] BONNET, M. A numerical investigation for a source inverse problem in linear acoustics. *J. Acoust.*, **4**, 307–334 (1991).
- [30] BONNET, M. BIE and material differentiation applied to the formulation of obstacle inverse problems. *Engng. Anal. with Bound. Elem.*, **15**, 121–136 (1995).
- [31] BONNET, M. Regularized BIE formulations for first- and second-order shape sensitivity of elastic fields. *Computers and Structures*, **56**, 799–811 (1995).
- [32] BONNET, M., BEN ABDALLAH, J. Structural parameter identification using nonlinear Gaussian inversion. In M. Tanaka H. D. Bui, et al. (eds.), *Inverse problems in engineering mechanics*, pp.

- 235–242. A. A. Balkema, Rotterdam (1994). (International Symposium on Inverse Problems, Clamart, 2-4 nov. 1994).
- [33] BONNET, M., BEN ABDALLAH, J. Inversion gaussienne non-linéaire appliquée l'identification paramétrique des structures. In *Deuxième Colloque National de Calcul des Structures*, pp. 473–478. Hermès (1995).
- [34] BONNET, M., BUI, H. D. On some inverse problems for determining volumic defects by electric current using BIE approaches : an overview. In *Proceedings of the 6th National Japanese Conf. on Boundary Elements Methods, Tokyo, Japan*, pp. 179–198 (1989).
- [35] BONNET, M., BUI, H. D., MAIGRE, H., PLANCHARD, J. Identification of heat conduction coefficient : application to nondestructive testing. In H. D. Bui M. Tanaka (ed.), *IUTAM symposium on inverse problems in engineering mechanics*, pp. 475–488. Springer-Verlag (1993).
- [36] BONNET, M., CONSTANTINESCU, A. Quelques remarques sur l'identification de modules élastiques à l'aide de mesures sur la frontière. In *Actes du 11^e Congrès Français de Mécanique* (1993).
- [37] BONNET, M., MAIGRE, H., MANAA, M. Numerical reconstruction of interfacial defects and interface thermal resistances using thermal measurements. In D. Balageas (ed.), *Quantitative Infrared Thermography (QIRT 92)*, pp. 266–271. Editions Européennes Thermique et Industrie (1992). Congrès QIRT 92, 7-9 juillet 1992, Paris).
- [38] BORGIOTTI, G. V., SARKISSIAN, A., WILLIAMS, E. G., SCHUETZ, L. Conformal generalized near-field acoustic holography for axisymmetric geometries. *J. Acoust. Soc. Am.*, **84**, 385–391 (1988).
- [39] BOUCHOUVEV, I., ISAKOV, V. Uniqueness, stability and numerical methods for the inverse problem that arises in financial markets. *Inverse Problems*, **15**, R95–R116 (1999).
- [40] BUI, H. D. Sur quelques problèmes inverses élastiques en mécanique de l'endommagement. In *Deuxième Colloque National de Calcul des Structures*, pp. 26–35. Hermès, France (1995).
- [41] BUI, H. D., CONSTANTINESCU, A., MAIGRE, H. Numerical identification of linear cracks in 2D elastodynamics using the instantaneous reciprocity gap. *Inverse Problems*, **20**, 993–1001 (2004).
- [42] BUI, H. D., MAIGRE, H. Facteur d'intensité dynamique des contraintes tiré des grandeurs mécaniques globales. *C.R. Acad. Sci. Paris, série II*, **306**, 1213–1216 (1988).
- [43] BUI, H. D., MAIGRE, H., RITTEL, D. A new approach to the experimental determination of the dynamic stressintensity factor. *Int. J. Solids Struct.*, **29**, 2881–2895 (1992).
- [44] CAILLETAUD, G., PILVIN, PH. Identification, problèmes inverses : un concept modulaire. In *Colloque National en Calcul des Structures*. Hermes, Paris (1993).
- [45] CALDERON, A. P. On an inverse boundary value problem. In *Seminar on Numerical Analysis and its applications to Continuum Physics.*, pp. 65–73. Soc. Brasilien de Matematica, Rio de Janeiro (1980).
- [46] CHAVENT, G., JAFFRÉ, J., JAN-JÉGOU, S. Estimation of relative permeabilities in three-phase flows in porous media. *Inverse Problems*, **15**, 33–3 (1999).
- [47] CHICONE, C., GERLACH, J. Identifiability of distributed parameters. In H. W. Eng, C. W. Groetsch (eds.), *Inverse and ill-posed problems.*, pp. 513–521. Academic Press (1987).
- [48] CHUNG, E. T., CHAN, T. F., TAI, X.-C. Electrical impedance tomography using level set representation and total variational regularization. *J. Comp. Phys.*, **205**, 357–372 (2005).
- [49] CIELO, P., MALDAGUE, X., DEOM, A. A., LEWAK, R. Thermographic non-destructive evaluation of industrial materials and structures. *Materials Evaluation*, **45**, 452–460 (1987).

- [50] COLTON, D. The inverse scattering problem for time-harmonic acoustic waves. *SIAM Review*, **26**, 323–350 (1984).
- [51] COLTON, D., HADDAR, H., PIANA, M. The linear sampling method in inverse electromagnetic scattering theory. *Inverse Problems*, **19**, S105–S137 (2003).
- [52] COLTON, D., KIRSCH, A. A simple method for solving inverse scattering problems in the resonance region. *Inverse Problems*, **12**, 383–393 (1996).
- [53] COLTON, D., MONK, P. A novel method for solving the inverse scattering problem for time-harmonic acoustic waves in the resonance region. *SIAM J. Appl. Math.*, **45**, 1039–1053 (1985).
- [54] COLTON, D., MONK, P. A novel method for solving the inverse scattering problem for time-harmonic acoustic waves in the resonance region II. *SIAM J. Appl. Math.*, **46**, 506–523 (1986).
- [55] COLTON, D., MONK, P. Projection theorems for far-field patterns and the inverse scattering problem. In I. H. W. Eng, C. W. Groetsch (eds.), *Inverse and ill-posed problems.*, pp. 261–277. Academic Press (1987).
- [56] COLTON, D., MONK, P. The inverse scattering problem for time-harmonic acoustic waves in an inhomogeneous medium. *Quart. J. Mech. Appl. Math.*, **41**, 97–125 (1988).
- [57] COLTON, D., MONK, P. The inverse scattering problem for time-harmonic acoustic waves in an inhomogeneous medium : numerical experiments. *IMA J. Appl. Math.*, **42**, 77–95 (1989).
- [58] CONNOLLY, T. J., WALL, D. J. N. On an inverse problem, with boundary measurements, for the steady state diffusion equation. *Inverse Problems*, **4**, 995–1012 (1988).
- [59] COTE, PH., LAGABRIELLE, R. La tomographie sismique comme méthode de reconnaissance détaillée du sous-sol. *Rev. Franç. Géotech.*, **36**, 47–53 (1986).
- [60] DE HOOP, A. T., STAM, H. J. Time-domain reciprocity theorems for elastodynamic wave fields with relaxation and their application to inverse problems. *Wave Motion*, **10**, 479–489 (1988).
- [61] DERAEMAERKER, A., LADEVÈZE, P., LECONTE, PH. Reduced bases for model updating in structural dynamics based on constitutive relation error. *Comp. Meth. in Appl. Mech. Enngng.*, **191**, 2427–2444 (2002).
- [62] DING, Y., PLANCHARD, J. Méthode d’optimisation non linéaire pour résoudre le problème inverse des ondes acoustiques en régime harmonique diffractées par une surfac rigide en 2D. Note interne hi-70/6586, EDF/DER (1989).
- [63] DOBSON, D. C. Estimates on resolution and stabilization for the linearized inverse conductivity problem. *Inverse Problems*, **8**, 71–81 (1992).
- [64] DOMINGUEZ, N., GIBIAT, V., ESQUERRÉ, Y. Time domain topological gradient and time reversal analogy : an inverse method for ultrasonic target detection. *Wave Motion*, **42**, 31–52 (2005).
- [65] DOUGLAS, J. Approximation of physically unstable problems. Ecole d’été d’analyse numérique, CEA/EDF (1965).
- [66] ELLER, M. Identification of cracks in three-dimensional bodies by many boundary measurements. *Inverse Problems*, **12**, 395–408 (1996).
- [67] ENGL, H. W. Discrepancy principles for Tikhonov regularization of ill-posed problems leading to optimal convergence rates. *J. Optim. Th. & Appl.*, **52**, 209–215 (1987).
- [68] ENGL, H. W., ANDERSSSEN, R. S. The role of linear functionals in improving convergence rates for parameter identification via Tikhonov regularization. In M. Yamaguti, et al. (eds.), *Inverse problems in engineering sciences*. Springer-Verlag (1991). (ICM 90 Satellite Conference Proceedings).
- [69] ENGL, H. W., GREVER, W. Using the L-curve for determining optimal regularization parameters. *Numerische Mathematik*, **69**, 25–31 (1994).
- [70] ENGL, H. W., NEUBAUER, A. Optimal parameter choice for ordinary and

- iterated Tikhonov regularization. In I. H. W. Eng, C. W. Groetsch (eds.), *Inverse and ill-posed problems*. Academic Press (1987).
- [71] EPANOMERITAKIS, I., AKCELIK, V., GHATTAS, O., BIELAK, J. A Newton-CG method for large-scale three-dimensional elastic full-waveform seismic inversion. *Inverse Problems*, **24**, 034015 (2008).
- [72] FARHAT, C., TEZAU, R., DJELLOULI, R. On the solution of three-dimensional inverse obstacle acoustic scattering problems by a regularized Newton method. *Inverse Problems*, **18**, 1229–1246 (2002).
- [73] FAUQUET, PH., SOURYI, A., JOLY-BLANCHARD, G., YVON, J. P. Determination of local void fraction in a two phase flow by gamma densitometry. In M. Tanaka H. D. Bui, et al. (eds.), *Inverse problems in engineering mechanics*, pp. 363–370. A. A. Balkema, Rotterdam (1994). (International Symposium on Inverse Problems, Clamart, 2-4 nov. 1994).
- [74] FEHRENBACH, J., MASMOUDI, M., SOUCHON, P., TROMPETTE, P. Detection of small inclusions by elastography. *Inverse Problems*, **22**, 1055–1069 (2006).
- [75] FEIJÓO, G. R. A new method in inverse scattering based on the topological derivative. *Inverse Problems*, **20**, 1819–1840 (2004).
- [76] FEIJÓO, G. R., OBERAI, A., PINSKY, P. M. An application of shape optimization in the solution of inverse acoustic scattering problems. *Inverse Problems*, **20**, 199–228 (2004).
- [77] FRIEDMAN, A., VOGELIUS, M. Determining cracks by boundary measurements. *Indiana University Mathematics Journal*, **38** (1989).
- [78] GAO, Z., MURA, T. On the inversion of residual stresses from surface measurements. *ASME J. Appl. Mech.*, **56**, 508–513 (1989).
- [79] GEYMONAT, G., PAGANO, S. Identification of mechanical properties by displacement field measurement : a variational approach. *Meccanica*, **38**, 535–545 (2003).
- [80] GISSER, D. G., ISAACSON, D., NEWELL, J. C. Electric current computed tomography and eigenvalues. *SIAM J. Appl. Math.*, **50**, 1623–1634 (1990).
- [81] GRÉDIAC, M., TOUSSAINT, E., PIERRON, F. Special virtual fields for the direct determination of material parameters with the virtual fields method. 1- Principle and definition. *Int. J. Solids Struct.*, **39**, 2691–2705 (2002).
- [82] GROETSCH, C. W. Some integral equations of the first kind in mechanics and regularization of ill-posed linear operator equations. In M. Yamaguti, et al. (eds.), *Inverse problems in engineering sciences*. Springer-Verlag (1991). (ICM 90 Satellite Conference Proceedings).
- [83] GUDDATI, M., HEYDARI, A. H. Subsurface imaging via fully coupled elastic wavefield inversion. *Inverse Problems*, **23**, 73–98 (2007).
- [84] HANSEN, P. C. Analysis of discrete ill-posed problems by means of the L-curve. *SIAM Review*, **34**, 561–580 (1992).
- [85] HETTLICH, F., RUNDELL, W. Iterative methods for the reconstruction of an inverse potential problem. *Inverse Problems*, **12**, 251–266 (1996).
- [86] HOHAGE, T. Fast numerical solution of the electromagnetic medium scattering problem and applications to the inverse problem. *J. Comp. Phys.*, **214**, 224–238 (2006).
- [87] IDEMEN, M., AKDUMAN, I. Some geometrical inverse problems connected with two-dimensional static fields. *SIAM J. Appl. Math.*, **48**, 703–718 (1988).
- [88] IKEHATA, M. Inversion formulas for the linearized problem for an inverse boundary value problem in elastic prospection. *SIAM J. Appl. Math.*, **50**, 1635–1644 (1990).
- [89] ISAACSON, D., ISAACSON, E. L. Comment on Calderon’s paper : “on an inverse boundary value problem”. *Math. Comp.*, **52**, 553–559 (1989).
- [90] KANG, H., KIM, E., LEE, J.-Y.. Identification of elastic inclusions and elastic

- moment tensors by boundary measurements. *Inverse Problems*, **19**, 703–724 (2003).
- [91] KANG, H., SEO, J. K., SHEEN, D. Numerical identification of discontinuous conductivity coefficients. *Inverse Problems*, **13**, 113–123 (1997).
- [92] KASSAB, A., MOSLEHY, F. A., DARYAPURKAR, A. B. Nondestructive evaluation of cavities by an inverse elastostatics boundary element method. *Engng. Anal. with Bound. Elem.*, **13**, 45–55 (1994).
- [93] KIM, H., SEO, J. K. Unique determination of a collection of a finite number of cracks from two boundary measurements. *SIAM J. Numer. Anal.*, **27**, 1336–1340 (1996).
- [94] KIRSCH, A. Surface gradients and continuity properties for some integral operators in classical scattering theory. *Math. Meth. in Appl. Sc.*, **11**, 789–804 (1989).
- [95] KIRSCH, A. The domain derivative and two applications in inverse scattering theory. *Inverse Problems*, **9**, 81–96 (1993).
- [96] KIRSCH, A., KRESS, R. A numerical method for an inverse scattering problem. In H. W. Eng, C. W. Groetsch (eds.), *Inverse and ill-posed problems.*, pp. 279–289. Academic Press (1987).
- [97] KITAGAWA, T., HOSODA, Y. New approaches to the optimal regularization. In H. D. Bui M. Tanaka (ed.), *Inverse problems in engineering mechanics*, pp. 21–26. Springer-Verlag (1993).
- [98] KITAHARA, M., NAKAHATA, K., HIROSE, S. Elastodynamic inversion for shape reconstruction and type classification of flaws. *Wave Motion*, **36**, 443–455 (2002).
- [99] KLIBANOV, M., SANTOSA, F. A computational quasi-reversibility method for Cauchy problems for Laplace’s equation. *SIAM J. Appl. Math.*, **51**, 1653–1675 (1991).
- [100] KOHN, R., MCKENNEY, A. Numerical implementation of a variational method for electric impedance tomography. *Inverse Problems*, **6**, 389–414 (1990).
- [101] KOHN, R., VOGELIUS, M. Determining conductivity by boundary measurements. *Comm Pure Appl. Math.*, **37**, 289–298 (1984).
- [102] KOYA, T., YEIH, W., MURA, T. An inverse problem in elasticity with partially overprescribed boundary conditions, part I : numerical details. *ASME J. Appl. Mech.*, **60**, 601–606 (1993).
- [103] KRESS, R. Inverse elastic scattering from a crack. *Inverse Problems*, **12**, 667–684 (1996).
- [104] KRESS, R., ZINN, A. Three dimensional reconstructions from near-field data in obstacle scattering. In M. Yamaguti, et al. (eds.), *Inverse problems in engineering sciences*. Springer-Verlag (1991). (ICM 90 Satellite Conference Proceedings).
- [105] LADEVÈZE, P., CHOUAKI, A. Application of *a posteriori* error estimation for structural model updating. *Inverse Problems*, **15**, 49–58 (1999).
- [106] LADEVEZE, P., REYNIER, M., NEDJAR, D. Parametric correction of finite element models using modal tests. In H. D. Bui M. Tanaka (ed.), *Inverse problems in engineering mechanics*, pp. 91–100. Springer-Verlag (1993).
- [107] LANGENBERG, K. J. Introduction to the special issue on inverse problems. *Wave Motion*, **11**, 99–112 (1989).
- [108] LEFEBVRE, J. P. An inverse approach for identification of dynamic constitutive laws. In M. Tanaka H. D. Bui, et al. (eds.), *Inverse problems in engineering mechanics*, pp. 157–164. A. A. Balkema, Rotterdam (1994).
- [109] LEFEBVRE, J. P. Progress in linear inverse scattering imaging : NDE applications of ultrasonic reflection tomography. In M. Tanaka H. D. Bui, et al. (eds.), *Inverse problems in engineering mechanics*, pp. 371–375. A. A. Balkema, Rotterdam (1994). (International Symposium on Inverse Problems, Clamart, 2-4 nov. 1994).
- [110] LEONARD, K. R., MALYARENKO, E. V., HINDERS, M. K. Ultrasonic Lamb wave tomography. *Inverse Problems*, **18**, 1795–1808 (2002).

- [111] LINK, M. Requirements for the structure of analytical models used for parameter identification. In H. D. Bui M. Tanaka (ed.), *Inverse problems in engineering mechanics*, pp. 133–146. Springer-Verlag (1993).
- [112] LUIKKONEN, J. Uniqueness of electromagnetic inversion by local surface measurements. *Inverse Problems*, **15**, 265–280 (1999).
- [113] LUND, J., VOGEL, C. R. A fully-Galerkin approach for the numerical solution of an inverse problem in a parabolic partial differential equation. *Inverse Problems*, **6**, 205–217 (1990).
- [114] LUZZATO, E. L'inversion dans des espaces de dimension infinie. Note interne, EDF/DER (19??).
- [115] LUZZATO, E. Méthodes de reconstruction des structures en vibration : problèmes monodimensionnels. Note interne hp-62/90. 056, EDF/DER (1990).
- [116] LUZZATO, E., LECOINTRE, C. Some simple and effective methods for sound source identification with geometrical acoustic models. *J. Sound Vibr.*, **105**, 473–490 (1986).
- [117] MANIATTY, A. M., ZABARAS, N. J. Investigation of regularization parameters and error estimating in inverse elasticity problems. *Int. J. Num. Meth. in Eng.*, **37**, 1039–1052 (1994).
- [118] MARCHUK, G. I. Numerical methods for some inverse problems. In *Methods of numerical mathematics*, chap. 7, pp. 312–351. Springer-Verlag (1982).
- [119] MARKLEIN, R., MAYER, K., HANNEMANN, R., KRYLOW, T., BALASUBRAMANIAN, K., LANGENBERG, K. J., SCHMITZ, V. Linear and nonlinear inversion algorithms applied in nondestructive evaluation. *Inverse Problems*, **18**, 1733–1759 (2002).
- [120] MCLAUGHLIN, J. R. Analytical methods for recovering coefficients in differential equations from spectral data. *SIAM Review*, **28**, 53–72 (1986).
- [121] MORASSI, A., ROSSET, E. Stable determination of cavities in elastic bodies. *Inverse Problems*, **20**, 453–480 (2004).
- [122] MOTTERSHEAD, J. E., FRISWELL, M. I. Model updating in structural dynamics : a review. *J. Sound Vibr.*, **167**, 347–375 (1993).
- [123] NASHED, Z. Approximate regularized solutions to improperly posed linear integral and operator equations. In A. Dold, B. Eckmann (eds.), *Constructive and computational methods for differential and integral equations*. Springer-Verlag (1974).
- [124] NASHED, Z. On the perturbation theory for generalized inverse operators in Banach spaces. In Z. Nashed (ed.), *Functional analysis and applications*, pp. 180–195. Springer-Verlag (1979).
- [125] NASHED, Z. A new approach to classification and regularization of ill-posed operator equations. In I. H. W. Eng, C. W. Groetsch (eds.), *Inverse and ill-posed problems.*, pp. 53–75. Academic Press (1987).
- [126] NATKE, H. G. On regularization methods within system identification. In H. D. Bui M. Tanaka (ed.), *Inverse problems in engineering mechanics*, pp. 3–20. Springer-Verlag (1993).
- [127] NEUBAUER, A. An a posteriori parameter choice for Tikhonov regularization in Hilbert scales leading to optimal convergence rates. *SIAM J. Numer. Anal.*, **25**, – (1988).
- [128] NGUYEN, H-M., ALLIX, O., FEISSEL, P. A robust identification strategy for rate-dependent models in dynamics. *Inverse Problems*, **24**, 065006 (2008).
- [129] NINTCHEU FATA, S., GUZINA, B. B. A linear sampling method for near-field inverse problems in elastodynamics. *Inverse Problems*, **20**, 713–736 (2004).
- [130] NISHIMURA, N., KOBAYASHI, S. A boundary integral equation method for an inverse problem related to crack detection. *Int. J. Num. Meth. in Eng.*, **32**, 1371–1387 (1991).
- [131] RICHARD, V., BAYER, R., CUER, M. An attempt to formulate well-posed questions in gravity : application of linear inverse techniques to mining exploration. *Geophysics*, **49**, 1781–1793 (1984).

- [132] ROBERTSON, R. L. Boundary identifiability of residual stress via the Dirichlet to Neumann map. *Inverse Problems*, **13**, 1107–1119 (1997).
- [133] ROHAL-ILKIV, B., ORSZAGHOVA, Z., HRUZ, T. A stepwise technique for inverse problem in optimal boundary control of thermal systems. In M. Raymond N. Zabaras, K. A. Woodbury (ed.), *Inverse Problems in Engineering : theory and practice*, pp. 147–154. ASME publications, New York, USA (1993). (proceedings, Palm Coast, Florida, USA, 14-18 June 1993).
- [134] SABATIER, P. C. Problèmes inverses et applications. Ecole d'été d'analyse numérique, CEA/INRIA/EDF (1985).
- [135] SABATIER, P. C. A few geometrical features of inverse and ill-posed problems. In H. W. Eng, C. W. Groetsch (eds.), *Inverse and ill-posed problems..* Academic Press (1987).
- [136] SACKS, P. E. The inverse problem for a weakly inhomogeneous two-dimensional acoustic medium. *SIAM J. Appl. Math.*, **48**, – (1988).
- [137] SACKS, P. E. A velocity inversion problem involving an unknown source. *SIAM J. Appl. Math.*, **50**, 931–941 (1990).
- [138] SCHERZER, O., ENGL, H. W., KUNISCH, K. aaaa. *SIAM J. Numer. Anal.*, **30**, 1796–1838 (1993).
- [139] SCHMERR, L. W., SONG, S. J., SEDOV, A. Ultrasonic flaw sizing inverse problems. *Inverse Problems*, **18**, 1775–1793 (2002).
- [140] SCHOCK, E. On the asymptotic order of accuracy of Tikhonov regularisation. *J. Optim. Th. & Appl.*, **44**, 95–104 (1984).
- [141] SCOTTI, T., WIRGIN, A. Location and shape reconstruction of a soft body by means of canonical solutions and measured scattered fields. *Inverse Problems*, **11**, 1097–1111 (1995).
- [142] SCOTTI, T., WIRGIN, A. Shape reconstruction using diffracted waves and canonical solutions. *Inverse Problems*, **11**, 1097–1111 (1995).
- [143] SCOTTI, T., WIRGIN, A. Shape reconstruction of an impenetrable scattering body via the Rayleigh hypothesis. *Inverse Problems*, **12**, 1027–1055 (1996).
- [144] SNIEDER, R. Global inversion using normal modes and long-period surface waves. In H. M. Iyer, K. Hirahara (eds.), *Seismic tomography.*, pp. 23–63. Prentice-Hall, London (1993).
- [145] TEMPLE, J. A. G. European developments in theoretical modelling of NDE for pipework. *Int. J. Pres. Ves. & Piping*, **28**, 227–267 (1987).
- [146] VOGEL, C. R. An overview of numerical methods for nonlinear ill-posed problems. In H. W. Eng, C. W. Groetsch (eds.), *Inverse and ill-posed problems.*, pp. 231–245. Academic Press (1987).
- [147] VOGEL, C. R. Non-convergence of the L-curve regularization parameter selection method. *Inverse Problems*, **12**, 535–547 (1996).
- [148] WALL, D. J. N. Uniqueness theorems for the inverse problem of elastodynamic boundary scattering. *IMA J. Appl. Math.*, **44**, 221–241 (1990).
- [149] WIRGIN, A., SCOTTI, T. Wide-band approximation of the sound field scattered by an impenetrable body of arbitrary shape. *J. Sound Vibr.*, **194**, 537–572 (1994).
- [150] YEIH, W., KOYA, T., MURA, T. An inverse problem in elasticity with partially overprescribed boundary conditions, part I : theoretical approach. *ASME J. Appl. Mech.*, **60**, 595–600 (1993).
- [151] ZACHAROPOULOS, A. D., ARRIDGE, S. R., DORN, O., KOLEHMAINEN, V., SIKORA, J. Three dimensional reconstruction of shape and piecewise constant region values for Optical Tomography using spherical harmonic parameterisation and a Boundary Element Method. *Inverse Problems*, **22**, 1509–1532 (2006).
- [152] ZIMMERMANN, D. C., KAOUK, M. Structural damage detection using a minimum rank update theory. *ASME J. Vibr. Acoust.*, **116**, 222–231 (1994).

- [153] ZORGATI, R., DUCHENE, B., LESSELIER, D., PONS, F. Eddy currents testing of anomalies in conductive materials, part I : qualitative imaging via diffraction tomography techniques. *IEEE Trans. on Magn.*, **27**, 4416–4437 (1991).
- [154] ZORGATI, R., DUCHENE, B., LESSELIER, D., PONS, F. Eddy currents testing of anomalies in conductive materials, part II : quantitative imaging via deterministic and stochastic inversion techniques. *IEEE Trans. on Magn.*, **28**, 1850–1862 (1991).

Actes de manifestations scientifiques et ouvrages collectifs

- [1] BUI, H. D., BONNET, M. (eds.). *Unknown or variable domains, inverse problems.*, Engng. Anal. with Bound. Elem. **15**(2), 12 articles (1995).
- [2] BUI, H. D., TANAKA, M., BONNET, M., LUZZATO, E., MAIGRE, H., REYNIER, M. (eds.). *Inverse problems in engineering mechanics*. Balkema, Rotterdam (1994). Proceedings of the Second International Symposium on Inverse Problems in Engineering Mechanics, Clamart, France, 2–4 nov. 1994.
- [3] DELAUNAY, D., RAYNAUD, M., WOODBURY, K., BECK, J. V. (eds.). *Inverse Problems in Engineering : theory and practice*. ASME publications, New York, USA (1996). (proceedings, Le Croisic, France, June 9-14, 1996).
- [4] ENGL, H. W., GROETSCH, C. W. (eds.). *Inverse and ill-posed problems..* Academic Press (1987).
- [5] REYNIER, M., BONNET, M., STOLZ, CL. (eds.). *Problèmes inverses en Mécanique des solides : méthodes de résolution, applications*. Journée scientifique CSMA, Ecole Polytechnique (octobre 1992).
- [6] TANAKA, M., BUI, H. D. (eds.). *Inverse problems in engineering mechanics*. Springer-Verlag (1993). Proceedings of the IUTAM International Symposium on Inverse Problems in Engineering Mechanics, Tokyo, Japan, May 11-15, 1992.
- [7] YAMAGUTI, M., ET AL. (eds.). *Inverse problems in engineering sciences..* Springer-Verlag (1991). (ICM 90 Satellite Conference Proceedings).
- [8] ZABARAS, N., WOODBURY, K. A., RAYNAUD, M. (eds.). *Inverse Problems in Engineering : theory and practice*. ASME publications, New York, USA (1993). (proceedings, Palm Coast, Florida, June 14-18, 1993).

Thèses

- [1] ANDRIAMBOLOLONA, H. *Optimisation des essais et recalage de modèles structuraux*. Thèse de Doctorat, Université de Besançon, France (1990).
- [2] BEN ABDA, A. *Sur quelques problèmes inverses géométriques via des équations de conduction elliptiques : étude théorique et numérique*. Thèse de Doctorat, ENIT, Tunis, Tunisie (1993).
- [3] BEN ABDALLAH, J. *Inversion gaussienne appliquée à la correction paramétrique de modèles structuraux*. Thèse de Doctorat, Ecole Polytechnique, Paris, France (1995).
- [4] BOURGEOIS, L. *Contrôle optimal et problèmes inverses en plasticité*. Thèse de Doctorat, Ecole Polytechnique (1998).
- [5] CARFANTAN, H. *Approche bayésienne pour un problème inverse non linéaire en imagerie à ondes diffractées*. Thèse de Doctorat, Université Paris XI Orsay, France (1996).
- [6] CONSTANTINESCU, A. *Sur l'identification des modules élastiques*. Thèse de Doctorat, Ecole Polytechnique, France (1994).
- [7] CUER, M. *Des questions bien posées dans des problèmes inverses de gravimétrie et géomagnétisme : une nouvelle application de la programmation linéaire*. Thèse de Doctorat, USTL Montpellier, France (1984).
- [8] LITMAN, A. *Deux méthodes d'inversion pour la caractérisation électromagnétique ou acoustique d'objets enfouis : transformée de Fourier-Laplace inverse et déformation d'ensembles de niveaux*. Thèse de Doctorat, Université Paris XI Orsay, France (1997).
- [9] MAILLET, D. *Apport des méthodes analytiques à l'identification de paramètres*

- et à la conduction inverse en thermique.* Thèse de Doctorat, INPL (Nancy), France (1991).
- [10] MARTIN, TH. *Inversion bayésienne du problème non-linéaire de tomographie d'impédance électrique modélisé par une méthode d'éléments finis.* Thèse de Doctorat, Université Paris XI Orsay, France (1997).
- [11] NEDJAR, D. *Correction paramétrique de modélisations par éléments finis à partir de résultats d'essais vibratoires.* Thèse de Doctorat, Université Pierre et Marie Curie, Paris, France (1992).
- [12] REYNIER, M. *Sur le contrôle de modélisations éléments finis : recalage à partir d'essais dynamiques.* Thèse de Doctorat, Université Pierre et Marie Curie, Paris, France (1990).
- [13] ZHANG, Q. *Identification modale et paramétrique de structures mécaniques auto-adjointes et non auto-adjointes.* Thèse de Doctorat, Université de Franche-Comté, France (1987).