Cours SIM 203 – Examen écrit, mardi 11 mai 2021

NOTE: Les matrices et les vecteurs considérés dans tous les exercices sont supposés à valeurs réelles.

Exercice 1. Calculer la décomposition en valeurs singulières (SVD) de la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Exercice 2 (rotations de Givens). Les factorisations de la forme $A = QR$ interviennent (notamment) dans divers algorithmes de résolution de problèmes de moindres carrés ou de valeurs propres; le cours présente leur calcul par la méthode des réflecteurs de Householder, bien adaptée à la mise à zéro de toute une (portions de) colonne d'une matrice A.

Cet exercice aborde une autre technique également employée pour calculer une factorisation QR, appelée méthode des rotations de Givens; celle-ci est notamment utile quand il s'agit de mettre à zéro des termes "ciblés" de A. L'idée de base est la suivante: une fois choisis deux coefficients a, b situés dans une même colonne de $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, on applique une rotation plane au 2-vecteur de composantes a, b de sorte que la deuxième composante du 2-vecteur résultant soit nulle. On étend alors cette transformation de sorte qu'elle agisse sur deux lignes choisies de A et annule le terme de la deuxième ligne dans une colonne de A spécifiée.

(a) On donne deux réels a, b. Montrer qu'il existe deux réels c, s vérifiant $c^2 + s^2 = 1$ tels que

$$\begin{bmatrix} c & -s \\ s & c \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a \\ b \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} r \\ 0 \end{Bmatrix}$$

(la valeur de r dans le vecteur résultat n'étant pas imposée *a priori*). Montrer que c, s peuvent être calculés, pour a, b donnés, au moyen de cinq opérations arithmétiques $(+, -, \times, /)$ et un calcul de racine carrée. Proposer en particulier une méthode de calcul évitant le risque d'*overflow* qu'entraînerait une évaluation de a^2 ou b^2 quand l'un (au moins) de ces nombres est très grand.

(b) Soit $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$. On choisit deux lignes k, ℓ et une colonne p de A. Définir une matrice orthogonale $R(k, \ell, p)$ telle que $R(k, \ell, p)A$ laisse les lignes de A autres que k, ℓ inchangées et introduise un zéro à la position $a_{\ell p}$ de A. Quel est le nombre d'opérations arithmétiques total requis pour le calcul de $R(k, \ell, p)A$. La matrice $R(k, \ell, p)$ est connue sous le nom de matrice de rotation de Givens; interpréter $R(k, \ell, p)$ et expliquer cette appellation.

(c) Soit $H \in \mathbb{R}^{n\times n}$ une matrice carrée de Hessenberg supérieure, c'est-à-dire de la forme

$$H = \begin{bmatrix} \times & \times & \times & \dots & \times \\ \times & \times & & & \times \\ 0 & \times & \times & & \times \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \times & \times \end{bmatrix}$$

(H vérifie donc $h_{ij} = 0$ pour $i - j > 1$). Décrire un algorithme fondé sur les rotations de Givens et réalisant une factorisation $H = QR$ de H, où $Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$ est orthogonale et $R \in \mathbb{R}^{n\times n}$ est triangulaire supérieure.

L'algorithme évoqué en (c) est très utile pour le calcul de valeurs propres d'une matrice A par l'algorithme QR, après une factorisation préalable $A = PHP^{\mathrm{T}}$ de A (P orthogonale, H Hessenberg supérieure).

Exercice 3 (itération d'Arnoldi interrompue). Soit $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ une matrice inversible. Les itérations d'Arnoldi permettent de calculer une matrice orthogonale $Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$ et une matrice de Hessenberg $H \in \mathbb{R}^{n\times n}$ telles que $AQ = QH$ (section 4.5). On rappelle que la k-eme itération ($1 \le k \le n$) consiste à imposer que la k-eme colonne de l'égalité matricielle $AQ = QH$ soit vérifiée (l'égalité complète est donc vérifiée après la n-eme et dernière itération). On s'intéresse à la résolution d'un système linéaire $Ax = b$ pour un second membre $b \in \mathbb{R}^n$ donné, et démarre les itérations d'Arnoldi en posant $q_1 = b/\|b\|_2$. Pour tout entier k, on note $\mathcal{K}_k(A, b)$ le sous-espace de Krylov de dimension k associé à (A, b). Cet exercice porte sur l'examen du cas particulier (non traité dans le cours) suivant:

- l'itération ℓ produit un coefficient sous-diagonal nul dans la ℓ-eme colonne de H: $h_{\ell+1,\ell} = 0$.

On suppose que ce numéro d'itération ℓ est le premier pour lequel cette situation apparaît. Dans tout cet exercice, ℓ désigne ce numéro particulier d'itération.

(a) Montrer que pour tout $k \le \ell$ on a $\mathcal{K}_k(A, b) = \mathrm{span}(q_1, \ldots, q_k)$.

(b) Expliquer pourquoi l'itération ℓ ne permet pas de définir le vecteur $q_{\ell+1}$. Comment peut-on alors procéder pour effectuer l'itération $\ell+1$ et les itérations ultérieures?

(c) Montrer que le sous-espace de Krylov $\mathcal{K}_\ell(A, b)$ est stable par A: $A\mathcal{K}_\ell(A, b) \subseteq \mathcal{K}_\ell(A, b)$.

(d) Montrer que les sous-espaces de Krylov vérifient $\mathcal{K}_\ell(A, b) = \mathcal{K}_{\ell+1}(A, b) = \mathcal{K}_{\ell+2}(A, b) = \ldots$ (stagnation à partir de l'itération ℓ).

(e) Montrer que la solution x de $Ax = b$ vérifie $x \in \mathcal{K}_\ell(A, b)$.

(f) Compte tenu des questions précédentes, quelles sont les conséquences du cas particulier considéré sur l'algorithme GMRES appliqué au système $Ax = b$?

Exercice 4 (preuve du théorème d'Eckart-Young-Mirsky). Soit $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ une matrice arbitraire, avec $m \ge n$. Soit $A = USV^{\mathrm{T}}$ la SVD de A, avec $U = [u_n, \ldots, u_m] \in \mathbb{R}^{m\times m}$, $V = [v_1, \ldots, v_n] \in \mathbb{R}^{n\times n}$, les valeurs singulières de A étant ordonnées de sorte que $\sigma_1 \ge \sigma_2 \ldots \ge \sigma_n \ge 0$ (convention suivie dans le cours).

Pour un entier r tel que $1 \le r < n$, on définit l'ensemble $\mathcal{M}_r \subset \mathbb{R}^{m\times n}$ des matrices $B \in \mathbb{R}^{m\times n}$ de rang r (donc, entre autres caractérisations, l'image de $B \in \mathcal{M}_r$ est un espace de dimension r). L'objet de cet exercice est de prouver le théorème d'Eckart-Young-Mirsky de meilleure approximation de A par une matrice de rang r pour la norme matricielle spectrale, qu'on peut énoncer ainsi:

$$\text{(a)} \quad \min_{B\in\mathcal{M}_r} \|A - B\|_2 = \sigma_{r+1}, \qquad \text{(b)} \quad \widehat{A}_r \in \arg\min_{B\in\mathcal{M}_r} \|A - B\|_2, \tag{EYM}$$

la clause (b) signifiant donc que la SVD tronquée au rang r de A, notée $\widehat{A}_r$ (cf. Définition 6.5), minimise l'erreur en norme spectrale commise en approchant A par une matrice de rang $r < n$ et réalise donc la meilleure approximation de A par une matrice de rang r.

(a) Pourquoi le caractère réel de A implique-t'il que les matrices U, V contenant les vecteurs singuliers sont également réelles?

(b) Montrer que $\|A - \widehat{A}_r\|_2 = \sigma_{r+1}$.

(c) Montrer que toute matrice $B \in \mathcal{M}_r$ peut se mettre sous la forme $B = XY^{\mathrm{T}}$ avec $X \in \mathbb{R}^{m\times r}$ et $Y \in \mathbb{R}^{n\times r}$.

(d) Soit $B \in \mathcal{M}_r$ arbitrairement choisie. Montrer qu'il existe un vecteur non nul $w \in \mathrm{span}(v_1, \ldots, v_{r+1})$ tel que $Y^{\mathrm{T}}w = 0$. Pour un tel w, montrer que $\|(A - B)w\|_2 \ge \sigma_{r+1}\|w\|_2$.

(e) Déduire des étapes précédentes la preuve de (EYM).

Cours SIM 203 – Corrigé de l'examen écrit du mardi 11 mai 2021

Exercice 1. On trouve sans difficulté

$$A^{\mathrm{T}}A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}, \qquad AA^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

En classant les valeurs propres de $A^{\mathrm{T}}A$ et AA^{T} par ordre décroissant de module et avec les notations de la section 3.4 du cours, les éléments propres de ces deux matrices sont

$$\lambda_1 = 4,\ \lambda_2 = 0, \quad v_1 = e_2,\ v_2 = e_1 \quad (\text{pour } A^{\mathrm{T}}A),$$
$$\lambda_1 = 4,\ \lambda_2 = \lambda_3 = 0, \quad u_1 = e_1,\ u_2 = e_2,\ u_3 = e_3 \quad (\text{pour } AA^{\mathrm{T}}),$$

On trouve alors immédiatement la SVD de A:

$$A = USV^{\mathrm{T}}, \qquad U = [u_1, u_2, u_3] = I, \quad S = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad V = [e_2, e_1] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Exercice 2.

(a) Les conditions $c^2 + s^2 = 1$ et $sa + cb = 0$ sont par exemple vérifiées par

$$c = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \quad s = -\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}},$$

et ces formules sont évaluables en cinq opérations artthmétiques et une extraction de racine: a^2, b^2, $z := a^2 + b^2$, $z = \sqrt{z}$, $c = a/z$, $s = -b/z$.

Si a ou b est grand, l'évaluation intermédiaire de $a^2 + b^2$ présente un risque d'*overflow*, qui peut être évité par une normalisation judicieuse. Si $a \leq b$, on procède ainsi:

$$z = -a/b, \quad c = 1/\sqrt{1+z^2}, \quad s = z/\sqrt{1+z^2},$$

le cas $b \leq a$ étant traité de façon similaire. On vérifie aisément que la méthode (préférable) ci-dessus demande le même nombre d'opérations.

(b) On définit $R = R(k, \ell, p) \in \mathbb{R}^{m \times m}$ comme la matrice identité en-dehors des lignes et colonnes k, ℓ, dont les intersections forment une matrice 2×2 de rotation:

$$R(k,\ell,p) = \begin{bmatrix} 1 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & c & \dots & -s & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & s & \dots & c & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

De plus, les coefficients c, s sont calculés comme en (a) pour $a = a_{kp}$ et $b = a_{\ell p}$. Le calcul de $R(k, \ell, p)A$ ne modifie que les lignes k, ℓ de A, et se résume aux évaluations de

$$\begin{bmatrix} c & -s \\ s & c \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_{kj} \\ a_{\ell j} \end{Bmatrix} \qquad 1 \leq j \leq n$$

Chacun de ces produits matrice-vecteur demande 6 opérations arithmétiques (et la deuxième ligne s'annule par construction de $R(k, \ell, p)$ si $j = p$), donc le côût total est $6n - 3$ opérations.

(c) La factorisation QR de la matrice H demande uniquement l'annulation des $n-1$ termes de la première sous-diagonale:

- Multiplier H à gauche par $R(1,2,1)H$ (avec c,s définis judicieusement) introduit un zéro en h_{21}, et demande $6n-3$ opérations. La matrice $R(1,2,1)H$ obtenue est stockée en place (les coefficients initiaux de H étant remplacés par leurs valeurs modifiées par le calcul de $R(1,2,1)H$).
- Multiplier le résultat à gauche par $R(2,3,2)H$ (avec c,s définis judicieusement) introduit un zéro en h_{32}, et demande $6n-9$ opérations (les zéros de la première colonne pouvant être ignorés). On vérifie sans difficulté que les zéros situés dans la première colonne de H sont préservés.
- [...] Multiplier le résultat à gauche par $R(k,k+1,k)H$ défini judicieusement introduit un zéro en $h_{(k+1),k}$, et demande $6n-6k+3$ opérations (les zéros des $k-1$ premières colonnes pouvant être ignorés).
- [...] Finalement, multiplier le résultat à gauche par $R(n-1,n,n-1)H$ introduit un zéro en $h_{n,(n-1)}$, et ne demande que 9 opérations

La suite d'opérations ci-dessus produit une matrice dont tous les termes de la première sous-diagonale sont maintenant nuls, préserve les zéros sous-diagonaux déjà présents dans la matrice initiale H, et conduit à

$$\big[R(n-1,n,n-1)\dots R(2,3,2)\,R(1,2,1)\big]H = R$$

où R est triangulaire supérieure. La matrice $R(n-1,n,n-1)\dots R(2,3,2)\,R(1,2,1)$ est orthogonale, et son inverse est $R(1,2,1)^{\mathrm{T}}\,R(2,3,2)^{\mathrm{T}}\dots R(n-1,n,n-1)^{\mathrm{T}} =: Q$. Avec cette définition de Q, on a $H = QR$, et la factorisation souhaitée est obtenue. Le nombre total d'opérations arithmeriques nécessaire est

$$\sum_{k=1}^{n-1}\big(6n-6k+3\big) = 3(n^2-1)$$

Exercice 3.

(a) Le fait qu'on ait $\mathcal{K}_k(A,b) = \mathrm{span}(q_1,\dots,q_k)$ pour tout $k\le\ell$ se montre par récurrence sur k.

Les itérations d'Arnoldi étant initialisées par le choix $q_1 = b/\|b\|_2$, on a bien $\mathcal{K}_1(A,b) = \mathrm{span}(b) = \mathrm{span}(q_1)$. Supposons que $\mathcal{K}_k(A,b) = \mathrm{span}(q_1,\dots,q_k)$ pour un certain entier k. L'itération k repose sur la vérification de la k-eme colonne de l'égalité matricielle $AQ = QH$, H étant une matrice de Hessenberg, ce qui se traduit (équation (4.15) du cours) par

$$Aq_k = h_{1k}q_1 + h_{2k}q_2 \dots + h_{(k+1),k}q_{k+1}. \tag{A}$$

Pour $k<\ell$, $h_{(k+1),k}\neq 0$ par hypothèse, et on a donc

$$q_{k+1} = \frac{1}{h_{(k+1),k}}Aq_k - \frac{1}{h_{(k+1),k}}\big(h_{1k}q_1 + h_{2k}q_2\dots + h_{kk}q_k\big)$$

Le vecteur entre parenthèses appartient à $\mathcal{K}_k(A,b)$ (hypothèse de récurrence), tandis que $Aq_k \in \mathcal{K}_{k+1}(A,b)$ (par définition de $\mathcal{K}_{k+1}(A,b)$ et puisque $q_k\in\mathcal{K}_k(A,b)$ par hypothèse de récurrence). Puisque les $\mathcal{K}_k(A,b)$ sont des espaces vectoriels emboîtés, l'égalité ci-dessus implique que $q_{k+1}\in\mathcal{K}_{k+1}(A,b)$, puis finalement que $\mathcal{K}_{k+1}(A,b) = \mathrm{span}(q_1,\dots,q_{k+1})$.

(b) Le raisonnement ci-dessus ne fonctionne pas pour $k=\ell$ car $h_{(\ell+1),\ell}=0$ par hypothèse: l'égalité (A) devient

$$Aq_\ell = h_{1\ell}q_1 + h_{2\ell}q_2\dots + h_{\ell\ell}q_\ell. \tag{A$_\ell$}$$

et ne permet plus de définir le prochain vecteur $q_{\ell+1}$. On peut poursuivre en choisissant $q_{\ell+1}$ comme un vecteur arbitraire orthogonal à $(q_1,\dots,q_\ell)$ et normé, et poursuivre en appliquant (A) pour $k=\ell{+}1,\ \ell{+}2,\dots$ tant qu'on ne rencontre pas à nouveau une valeur nulle de $h_{(\ell'+1),\ell'}$ pour une itération $k=\ell'$ ultérieure.

(c) Pour $k = \ell$, (A_ℓ) entraîne que $Aq_\ell \in \mathcal{K}_\ell(A,b)$; d'autre part les vecteurs $Aq_1, \ldots Aq_{\ell-1}$ appartiennent à $A\mathcal{K}_{\ell-1}(A,b) \subset \mathcal{K}_\ell(A,b)$ par définition de $\mathcal{K}_\ell(A,b)$. Par conséquent, tout vecteur $x \in \mathcal{K}_\ell(A,b) = \mathrm{span}(q_1,\ldots,q_\ell)$ vérifie $Ax \in \mathcal{K}_\ell(A,b)$.

(d) Par définition de $\mathcal{K}_{\ell+1}(A,b)$, on a

$$\begin{aligned}\mathcal{K}_{\ell+1}(A,b) &= \mathrm{span}(b, Ab, A^2b, \ldots, A^\ell b)\\ &= \mathrm{span}\big(b, A(b), A(Ab), \ldots, A(A^{\ell-1}b)\big)\\ &= \mathrm{span}(b) + A\mathcal{K}_\ell(A,b).\end{aligned}$$

Comme $\mathrm{span}(b) \subset \mathcal{K}_\ell(A,b)$ et (par la question (c)) $A\mathcal{K}_\ell(A,b) \subset \mathcal{K}_\ell(A,b)$, on en déduit que $\mathcal{K}_{\ell+1}(A,b) \subset \mathcal{K}_\ell(A,b)$. Puisque par ailleurs les sous-espaces de Krylov sont emboîtés ($\mathcal{K}_k(A,b) \subset \mathcal{K}_{k+1}(A,b)$ pour tout entier k), on a l'égalité $\mathcal{K}_\ell(A,b) = \mathcal{K}_{\ell+1}(A,b)$. On peut alors poursuivre ce raisonnement par récurrence pour montrer que $\mathcal{K}_\ell(A,b) = \mathcal{K}_{\ell+1}(A,b) = \mathcal{K}_{\ell+2}(A,b) = \ldots$

(e) On pose $x = Qy$, ce qui revient à développer x sur la base $q_1,\ldots,q_n$: $x = y_1q_1 + \ldots + y_nq_n$. On peut alors appliquer à A la réduction de Hessenberg $AQ = QH$, et le système $Ax = b$ prend la forme

$$Ax = b \quad\Longrightarrow\quad AQy = b \quad\Longrightarrow\quad QHy = b \quad\Longrightarrow\quad Hy = Q^{\mathrm{T}}b = \|b\|_2 q_1, \tag{H}$$

la dernière égalité résultant du choix d'initialisation des itérations d'Arnoldi. Par ailleurs, le fait que $h_{(\ell+1),\ell} = 0$ entraîne que H est triangulaire par blocs:

$$H = \begin{bmatrix} H_{1:\ell,1:\ell} & H_{1:\ell,(\ell+1):n}\\ 0 & H_{(\ell+1):n,(\ell+1):n}\end{bmatrix}.$$

Puisque de plus $b = \|b\|_2 q_1$, le système final (H) se résout par une méthode de remontée par blocs:

$$\begin{bmatrix} H_{1:\ell,1:\ell} & H_{1:\ell,(\ell+1):n}\\ 0 & H_{(\ell+1):n,(\ell+1):n}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix} y_{1:\ell}\\ y_{(\ell+1):n}\end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix}\|b\|_2 q_1\\ 0\end{Bmatrix},$$

qui donne $y_{(\ell+1):n} = 0$ puis $H_{1:\ell,1:\ell}y_{1:\ell} = \|b\|_2 q_1$. La solution x est donc dans $\mathrm{span}(q_1,\ldots,q_\ell) = \mathcal{K}_\ell(A,b)$.

(f) L'itération ℓ de l'algorithme GMRES résout le problème de moindres carrés $\|Ax - b\|_2^2 \to \min$ pour $x \in \mathcal{K}_\ell(A,b)$, et cette itération doit donc trouver la solution du système linéaire dans la situation considérée compte tenu des résultats précédents. GMRES a donc convergé et s'arrête à l'itération ℓ (poursuivre les itérations d'Arnoldi etc. au-delà est donc sans objet dansn ce cadre).

Exercice 4.

(a) Les colonnes de U et V sont les vecteurs propres de AA^{T} et $A^{\mathrm{T}}A$, respectivement. Les matrices AA^{T} et $A^{\mathrm{T}}A$ étant SPD réelles, leurs vecteurs propres sont également réels.

(b) On a

$$A - \widehat{A}_r = \sum_{i=r+1}^{n} \sigma_i u_i v_i^{\mathrm{T}},$$

et cette formule constitue la SVD réduite de $A - \widehat{A}_r$ (les vecteurs manquants de U et V étant associés à la valeur singulière nulle de $A - \widehat{A}_r$). Par conséquent, la plus grande valeur singulière de $A - \widehat{A}_r$ est σ_{r+1}, et donc $\|A - \widehat{A}_r\|_2 = \sigma_{r+1}$ par le théorème 3.4.

(c) Puisque $\mathrm{Dim}(\mathrm{Im}(B)) = r$ pour tout $B \in \mathcal{M}_r$, il existe r vecteurs $x_1, \ldots x_r$ linéairement indépendants et nr coefficients y_{jk} $(1 \le j \le n,\ 1 \le k \le r)$ tels que

$$b_j = \sum_{k=1}^{r} y_{jk} x_k, \quad 1 \le j \le n$$

c'est-à-dire $B = XY^{\mathrm{T}}$ avec $X = [x_1, \ldots, x_r]$ et $Y = [y_{jk}]$.

(d) Posons $w = w_1 v_1 + \ldots + w_{r+1} v_{r+1}$. L'équation $Y^{\mathrm{T}} w = 0$ prend la forme du système matriciel homogène

$$\begin{bmatrix} y_1^{\mathrm{T}} v_1 & \ldots & y_1^{\mathrm{T}} v_{r+1} \\ \vdots & & \vdots \\ y_r^{\mathrm{T}} v_1 & \ldots & y_r^{\mathrm{T}} v_{r+1} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_{r+1} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{Bmatrix}$$

de format $r \times (r+1)$, qui est sous-déterminé et a donc nécessairement une solution w non nulle.

Pour un tel w, on a $(A-B)w = Aw - XY^{\mathrm{T}} w = Aw = \sum_{i=1}^{r+1} \sigma_i w_i u_i$, et donc (les vecteurs v_i étant orthonormaux)

$$\|(A-B)w\|_2^2 = \sum_{i=1}^{r+1} \sigma_i^2 w_i^2 \ge \sigma_{r+1}^2 \sum_{i=1}^{r+1} w_i^2 = \sigma_{r+1}^2 \|w\|_2^2$$

(e) L'inégalité ci-dessus s'écrit $\|(A-B)w\|_2 / \|w\| \ge \sigma_{r+1}$, et entraîne $\|A-B\|_2 \ge \sigma_{r+1}$ pour tout $B \in \mathcal{M}_r$. Par ailleurs $\|A-B\|_2 = \sigma_{r+1}$ pour $B = \widehat{A}_r \in \mathcal{M}_r$ (question (b)). Ces deux éléments combinés prouvent (EYM).