Géométrie Discrète & Morphologie Mathématique

ENSTA 2$^{\text{ème}}$ année

Antoine MANZANERA – ENSTA/U2IS

Présentation et objectifs du cours

La *Géométrie Discrète* est une discipline encore plus ancienne que l'analyse d'images, dont l'objectif est la formalisation rigoureuse dans un espace discret des notions communes en géométrie euclidienne (droites, cercles, distance, topologie,…)

La *Morphologie Mathématique* est une approche non linéaire permettant d'aborder toute la chaîne d'analyse des images (modélisation, filtrage, segmentation, extraction de caractéristiques,…) en se fondant sur un bagage théorique très réduit issu des ensembles partiellement ordonnés.

L'objectif de ce cours est de permettre à tout étudiant scientifique de modéliser une image et de concevoir un algorithme d'analyse appliqué à une extraction automatique d'information à partir de données images.

Le cours s'accompagne *d'exercices* pour se *familiariser* avec les manipulations algébriques ou géométriques, et pour *développer* certains aspects du cours.

Des *travaux pratiques* permettront enfin, d'une part *d'expérimenter* les outils étudiés en cours, et d'autre part, de s'immerger profondément dans les aspects algorithmiques, en *programmant* soi-même certaines fonctions de traitement d'images.

MI206 GDMM : Table des Matières

MI206 GDMM : Chapitre 1

INTRODUCTION ET PREMIERS OPERATEURS

I Introduction : *approche morphologique du TI*

II Opérateurs de base : *Dilatation et Erosion*

(a) Opérations ensemblistes

(b) Opérations fonctionnelles

(c) Premiers opérateurs composés

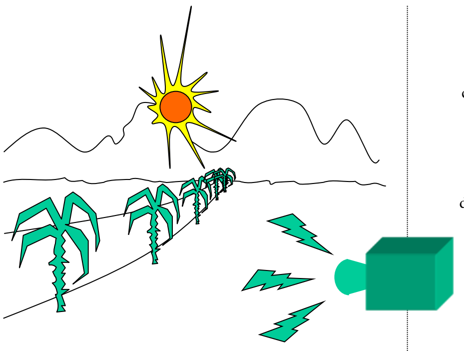
III Filtres de base : *Ouverture et Fermeture*

(a) Définition et propriétés

(b) Seconds opérateurs composés

III Opérateurs géodésiques : *Reconstruction*

Les problématiques du traitement d'images



ACQUISITION

transformation de l'énergie lumineuse en énergie électrique

CODAGE

transformation d'une grandeur analogique en une grandeur numérique

COMPRESSION → *transmission, stockage*

changement de représentation de l'image numérique dans le but de réduire la quantité de mémoire nécessaire

AMELIORATION → *visualisation*

diminution des effets du bruit d'acquisition, numérisation ou compression pour rendu visuel ou analyse

SEGMENTATION

partition de l'image numérique en fonction d'un certain prédicat : luminance, texture, couleur, mouvement...

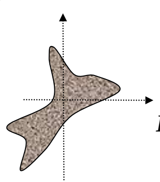
EXTRACTION DE CARACTERISTIQUES

calcul d'une ou plusieurs grandeurs scalaires : dénombrement, détection d'événements...

vision artificielle

SCENE REELLE ***IMAGE NUMERIQUE***

L'approche morphologique du traitement d'images



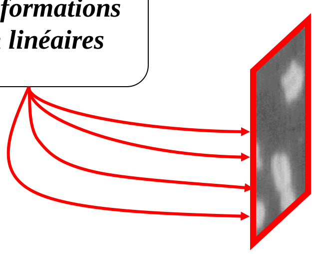
Objet de référence

=

Elément structurant

Le principe de base de l'analyse morphologique est d'extraire de la connaissance de l'image à partir des réponses fournies à différents tests (transformations).

Transformations non linéaires

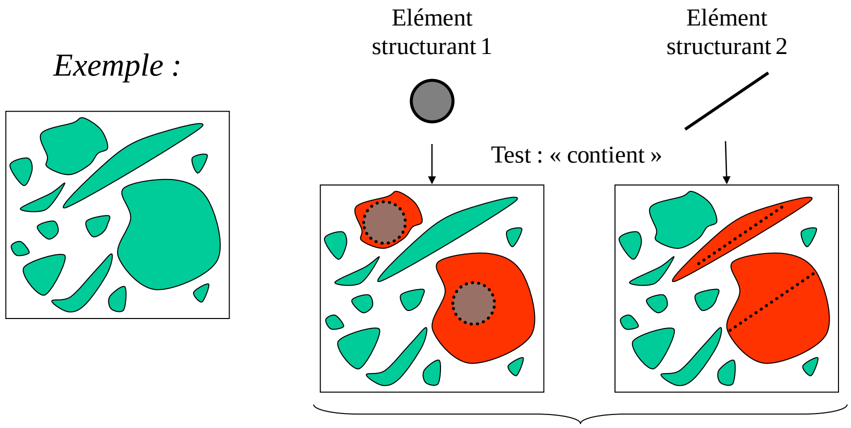


Critères de :

- ✓ ***taille***
- ✓ ***forme***
- ✓ ***orientation***
- ✓ ***connexité***
- ✓ ***.../...***

L’approche morphologique du traitement d’images

Exemple :



Taille, forme, orientation,…

Analyse quantitative, spatiale,…

Traitement d’images linéaire : structure fondamentale

Dans le cas du traitement d’images linéaire, la structure fondamentale est celle d’***espace vectoriel***.

structure de base

ESPACE VECTORIEL — E espace vectoriel sur K

opérateurs de base

Ce sont ceux qui préservent la structure et commutent avec les lois de base :

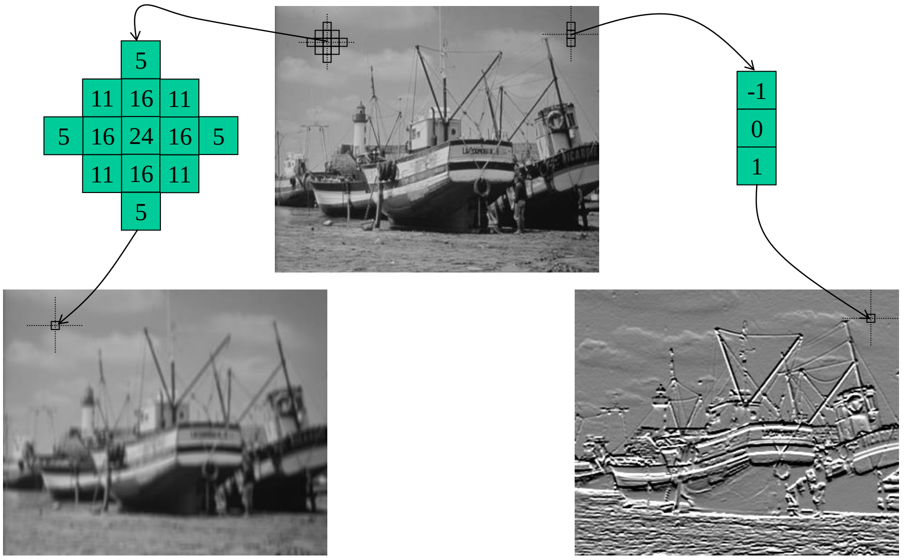
$$\boxed{\forall \lambda \in K, \forall (x,y) \in E^2 : f(\lambda x) = \lambda f(x) \text{ et } f(x+y) = f(x) + f(y)}$$

isomorphismes d’espace vectoriel

↓

Applications linéaires ⟶ ***CONVOLUTIONS***

Traitement linéaire : convolutions



Filtre passe-bas

Gradient vertical

Morphologie mathématique : structure fondamentale

Dans le cas de la morphologie mathématique, la structure fondamentale est celle de ***treillis complet***.

structure de base

TREILLIS COMPLET

(1) Ensemble ordonné $(E,\leq)$

$$\leq \begin{cases} \textbf{\textit{REFLEXIVE}} & x \leq x \\ \textbf{\textit{ANTI-SYMETRIQUE}} & x \leq y \text{ et } y \leq x \Rightarrow x = y \\ \textbf{\textit{TRANSITIVE}} & x \leq y \text{ et } y \leq z \Rightarrow x \leq z \end{cases}$$

(2) Toute partie P de E admet :
- une borne sup
- une borne inf

Sup : plus petit des majorants $\vee P$

Inf : plus grand des minorants $\wedge P$

Morphologie mathématique : opérateurs de base

opérateurs de base

Ceux qui préservent la structure...

$$\boxed{x \le y \Rightarrow \Phi(x) \le \Phi(y)}$$ CROISSANCE

...et commutent avec les lois de base :

sup ⟶ $\Phi\left(\vee\{x_i\}\right) = \vee\{\Phi(x_i)\}$ ⟶ ***DILATATION***

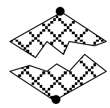
inf ⟶ $\Psi\left(\wedge\{x_i\}\right) = \wedge\{\Psi(x_i)\}$ ⟶ ***EROSION***

Exemples de treillis complets

Treillis des formules booléennes

- ***éléments :*** formules booléennes *f,g,h*
- ***relation d'ordre :*** implication $f \to g$
- ***sup :*** OU logique
- ***inf :*** ET logique
- ***éléments extrêmes :***

VRAI

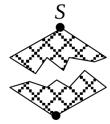


FAUX

Treillis ensembliste

- ***éléments :*** les parties d'un ensemble *S*
- ***relation d'ordre :*** inclusion $\subset$
- ***sup :*** Union $\cup$
- ***inf :*** Intersection $\cap$
- ***éléments extrêmes :***

S



$\varnothing$

Treillis des nombres

- ***éléments :*** nombres réels (ou nombres entiers)
- ***relation d'ordre :*** $\le$ (ordre total)
- ***sup :*** max
- ***inf :*** min
- ***éléments extrêmes :*** $+\infty$, $-\infty$

Exemples de treillis complets

Treillis des fonctions

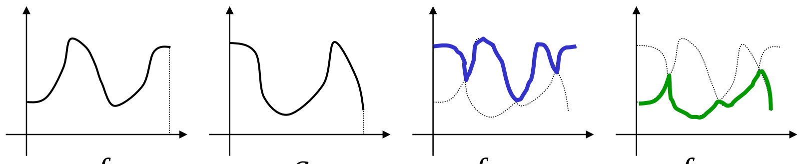
• ***éléments :*** les fonctions réelles ou numériques : $f : S \to \mathbf{R}$ ou $S \to \mathbf{Z}$

• ***relation d'ordre :*** $f \leq g \Leftrightarrow \forall x \in S,\ f(x) \leq g(x)$

• ***sup :*** $\vee \{f_i\}$

• ***inf :*** $\wedge \{f_i\}$

définies par : $\begin{cases} (\vee \{f_i\})(x) = \vee\{f_i(x)\} \\ (\wedge \{f_i\})(x) = \wedge\{f_i(x)\} \end{cases}$



f $\quad$ g $\quad$ $f \vee g$ $\quad$ $f \wedge g$

Le principe de dualité

Dans un treillis, les lois *Sup* et *Inf* jouent des rôles symétriques.

On appelle ***involution*** l'opérateur $\overline{\cdot} : E \to E$

qui permet d'échanger leur rôle :

$\wedge \overline{P} = \overline{\vee P}$ et $\vee \overline{P} = \overline{\wedge P}$

On dit que deux opérateurs Φ et Φ* sont ***duaux*** pour l'involution $\overline{\cdot}$

si : $\boxed{\Phi(\overline{x}) = \overline{\Phi^*(x)}}$

Exemples d'involutions

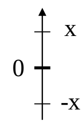
Treillis des formules booléennes

NON logique :

g	¬g
0	1
1	0

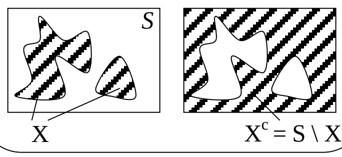
Treillis des nombres

opposé :



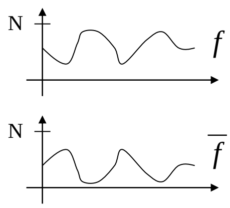
Treillis ensembliste

Complémentaire :



Treillis des fonctions dans [0,N]

$\overline{f} = N - f$:



Propriétés des opérateurs : quelques définitions

$$\Phi : E \to E$$

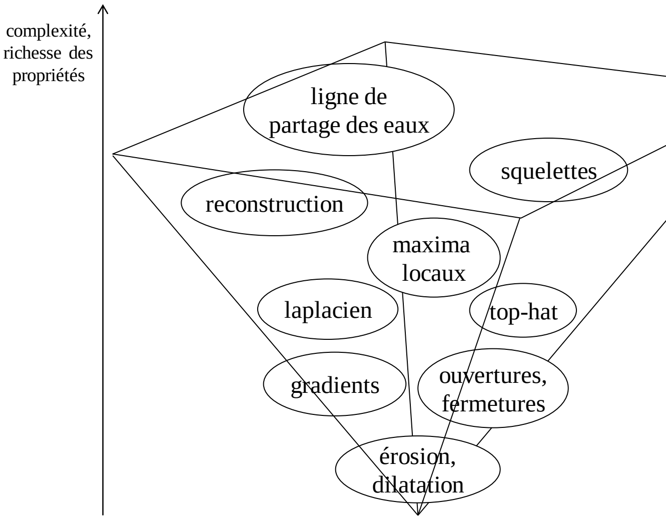
$x \le y \Rightarrow \Phi(x) \le \Phi(y)$ ***Croissance***

$x \le \Phi(x)$ ***Extensivité***

$\Phi(x) \le x$ ***Anti-extensivité***

$\Phi(\Phi(x)) = \Phi(x)$ ***Idempotence***

Construction des opérateurs de la morphologie mathématique



Construction de nouveaux opérateurs :

- par composition

$$\boxed{\Gamma(x) = \Phi\big(\Psi(x)\big)}$$

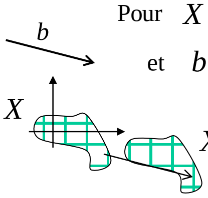
- par différence

$$\boxed{\Lambda(x) = \Phi(x) - \Psi(x)}$$

Opérations de Minkowski dans R^{n}

Définitions préliminaires

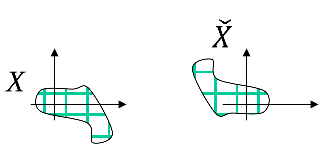
On se place ici dans E : l'ensemble des parties de $\mathbf{R}^{\mathrm{n}}$



Pour $X \subset \mathbf{R}^n$

et $b \in \mathbf{R}^n$ on note $\boxed{X_b = \{x + b; x \in X\}}$

le ***translaté*** de X par b.



et on note $\boxed{\check{X} = \{-x; x \in X\}}$

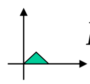
le ***transposé*** de X.

Rq: si X est symétrique alors $\check{X} = X$

L'addition de Minkowski

L 'addition de Minkowski de *X* et *B* est définie par :

$$X \oplus B = \bigcup_{b \in B} X_b$$



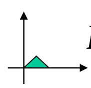
B élément structurant

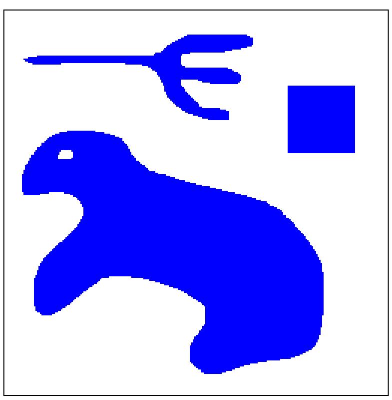
Rq : $X \oplus B = B \oplus X$

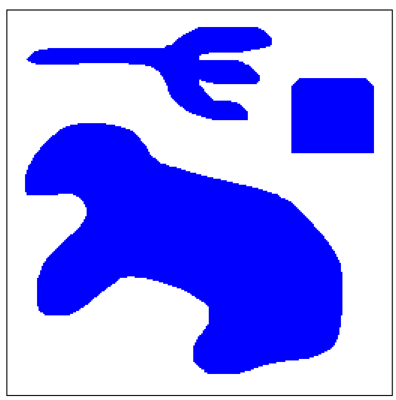
C'est le lieu géométrique des points de B_x lorsque *x* parcours *X*

X $X \oplus B$

L'addition de Minkowski



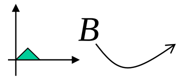




X $X \oplus B$

La dilatation morphologique

La dilatation morphologique de X par B est définie par : $\boxed{\delta_B(X) = X \oplus \check{B}}$



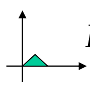
$$\delta_B(X) = X \oplus \check{B} = \bigcup_{b \in \check{B}} X_b$$
$$= \{z / \exists x \in X, \exists b \in B : z = x - b\}$$
$$= \{z / \exists x \in X, \exists b \in B : z + b = x\}$$
$$= \{z / B_z \cap X \neq \emptyset\}$$

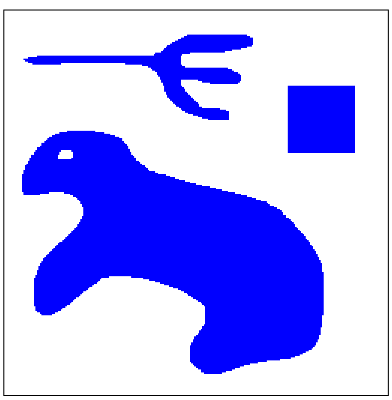
$$\boxed{\delta_B(X) = \{z / B_z \cap X \neq \emptyset\}}$$

C'est le lieu géométrique des points z tels que B_z intersecte X

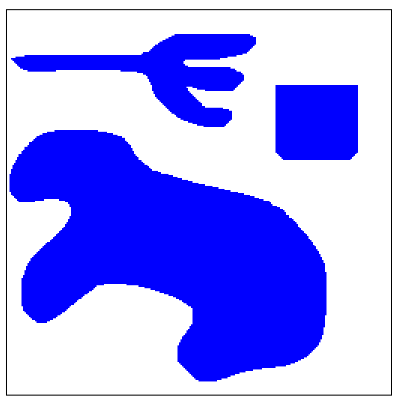
X $\quad$ $\delta_B(X)$

La dilatation morphologique





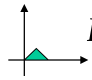
X



$\delta_B(X)$

L'érosion morphologique

L'érosion morphologique de X par B est définie par le principe de dualité : $\varepsilon_B(\overline{X}) = \overline{\delta_B(X)}$



B élément structurant

$$\varepsilon_B(X) = \overline{\delta_B(\overline{X})} = \overline{\overline{X} \oplus \check{B}} = \overline{\bigcup_{b\in\check{B}} \overline{X_b}} = \bigcap_{b\in\check{B}} X_b$$

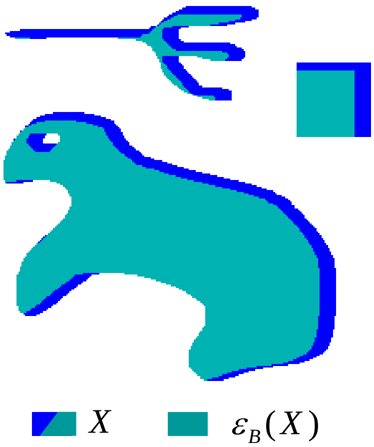
$$= X \ominus \check{B}$$

Soustraction de Minkowski

$$\varepsilon_B(X) = \bigcap_{b\in\check{B}} X_b = \{z/\forall b\in B, \exists x\in X : z+b=x\}$$

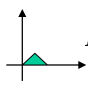
$$= \{z/B_z \subset X\}$$

$$\boxed{\varepsilon_B(X) = \{z/B_z \subset X\}}$$

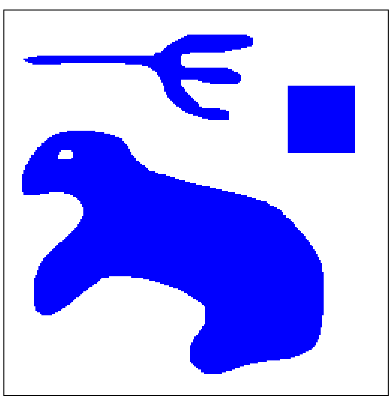


C'est le lieu géométrique des points z tels que B_z est inclus dans X

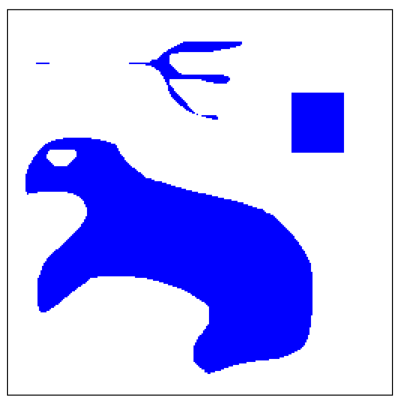
L'érosion morphologique



B



X



$\varepsilon_B(X)$

Propriétés algébriques des opérateurs de base

CROISSANCE

La dilatation et l'érosion sont des opérateurs ***croissants***

$$X \subset Y \Rightarrow \delta_B(X) \subset \delta_B(Y)$$
$$X \subset Y \Rightarrow \varepsilon_B(X) \subset \varepsilon_B(Y)$$

L'érosion est ***décroissante*** par rapport à l'élément structurant : $B \subset B' \Rightarrow \varepsilon_B(X) \supset \varepsilon_{B'}(X)$

EXTENSIVITE

Si l'élément structurant B contient l'origine :

- La dilatation est ***extensive*** $X \subset \delta_B(X)$
- L'érosion est ***anti-extensive*** $\varepsilon_B(X) \subset X$

- La dilatation commute avec le ***Sup*** $\delta_B(X \cup Y) = \delta_B(X) \cup \delta_B(Y)$
- L'érosion commute avec le ***Inf*** $\varepsilon_B(X \cap Y) = \varepsilon_B(X) \cap \varepsilon_B(Y)$

On a les égalités :

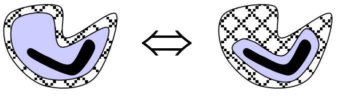
$$\delta_{B \cup B'}(X) = \delta_B(X) \cup \delta_{B'}(X)$$
$$\varepsilon_{B \cup B'}(X) = \varepsilon_B(X) \cap \varepsilon_{B'}(X)$$

Mais seulement les inclusions :

$$\delta_B(X \cap Y) \subset \delta_B(X) \cap \delta_B(Y)$$
$$\varepsilon_B(X \cup Y) \supset \varepsilon_B(X) \cup \varepsilon_B(Y)$$
$$\delta_{B \cap B'}(X) \subset \delta_B(X) \cap \delta_{B'}(X)$$
$$\varepsilon_{B \cap B'}(X) \supset \varepsilon_B(X) \cup \varepsilon_{B'}(X)$$

Propriétés algébriques des opérateurs de base

PROPRIETE D'ADJONCTION



$$\boxed{X \subset \varepsilon_B(Y) \Leftrightarrow \delta_{\check{B}}(X) \subset Y}$$

CAS DEGENERES

élément structurant vide

$$\varepsilon_\varnothing(X) = \mathbf{R}^n$$
$$\delta_\varnothing(X) = \varnothing$$

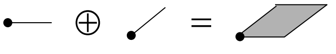
ASSOCIATIVITE DE LA DILATATION

$$\delta_{B'}(\delta_B(X)) = \delta_{\delta_{B'}(B)}(X)$$
$$\varepsilon_{B'}(\varepsilon_B(X)) = \varepsilon_{\delta_{B'}(B)}(X)$$

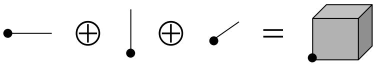
Application : *Polyèdres de Steiner* dans $\mathbf{R}^n$:

ex:

dans $\mathbf{R}^2$:



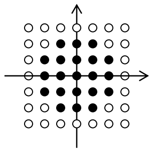
dans $\mathbf{R}^3$:



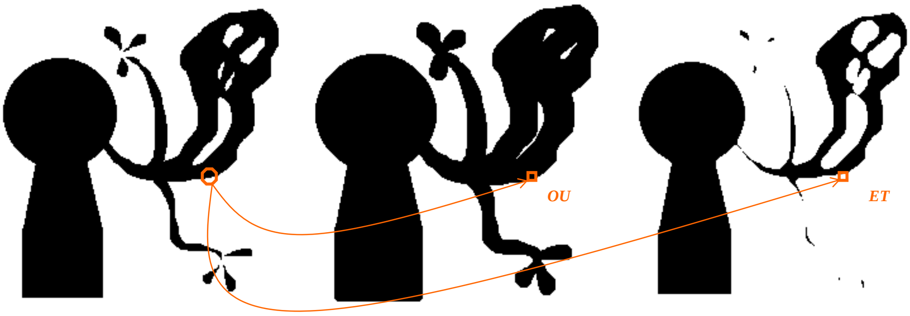
Décomposition des éléments structurants convexes en sommes de segments

Application aux images binaires

Le treillis est l'ensemble des parties de $\mathbf{Z}^2$

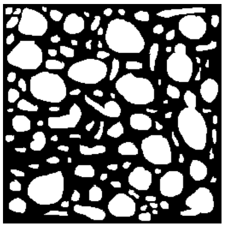


B

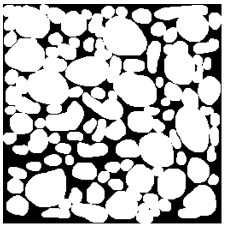


X $\quad\quad\quad$ $\delta_B(X)$ $\quad\quad\quad$ $\varepsilon_B(X)$

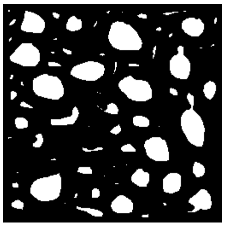
Conclusions sur les opérateurs de base



Originale



Dilatée



Erodée

• *La dilatation fait disparaître les petits trous et les petits détroits, et fait grossir les objets.*

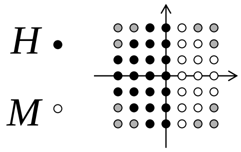
• *L'érosion fait disparaître les petits objets et les petits isthmes, et amincit les objets restants.*

Dilatation et érosion sont des opérations *non réversibles*.

Dilatation et érosion sont des opérations *duales, pas inverses* !

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\textit{dilatation}"] \arrow[d, leftrightarrow, "\textit{complémentation}"'] & \delta_B(X) \arrow[d, leftrightarrow] \\ X^c \arrow[r] & \varepsilon_B(X^c) \end{tikzcd}$$

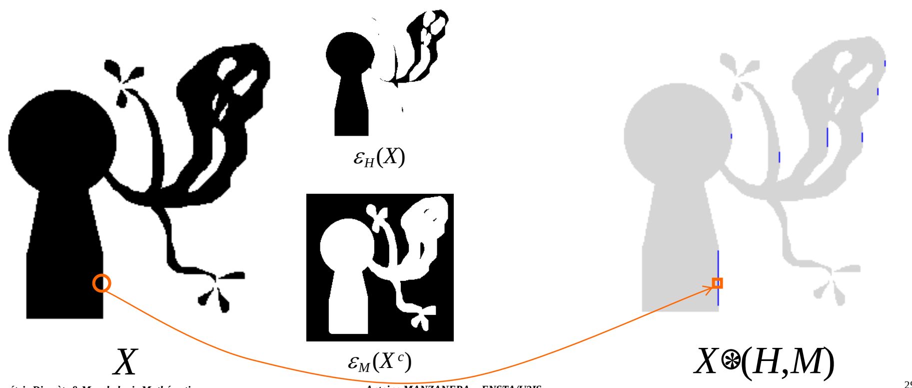
Transformées en tout-ou-rien



Les transformées en tout-ou-rien (*Hit-or-Miss Transform*) unifient et généralisent érosions et dilatations.

$$X \circledast (H,M) = \varepsilon_H(X) \cap \varepsilon_M(X^c)$$

Application : Recherche de configurations



Du cadre ensembliste au cadre fonctionnel

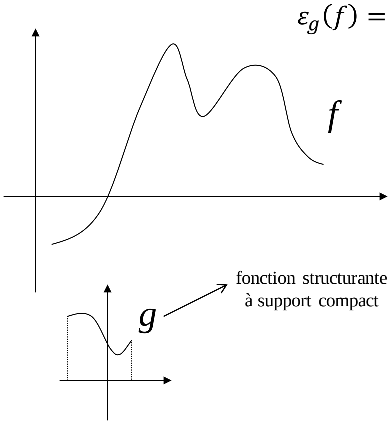
On se place à présent dans le cadre des fonctions : $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$

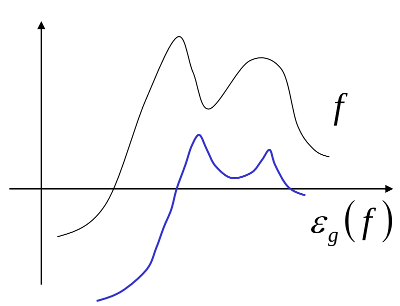
La dilatation et l'érosion fonctionnelles sont respectivement définies par :

$$\delta_g(f) = f \oplus \breve{g}$$
$$\varepsilon_g(f) = f \ominus \breve{g}$$

$$\boxed{\delta_g(f)(x) = \sup_{y \in \mathbf{R}^n} \{ f(y) + g(y-x) \}}$$

$$\boxed{\varepsilon_g(f)(x) = \inf_{y \in \mathbf{R}^n} \{ f(y) - g(y-x) \}}$$

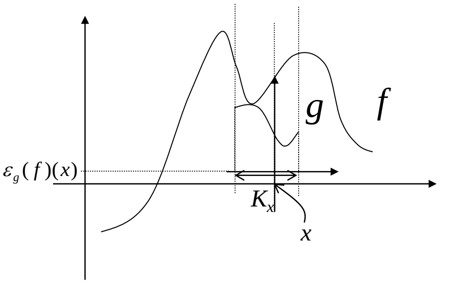




Du cadre ensembliste au cadre fonctionnel

Soit K le support de g

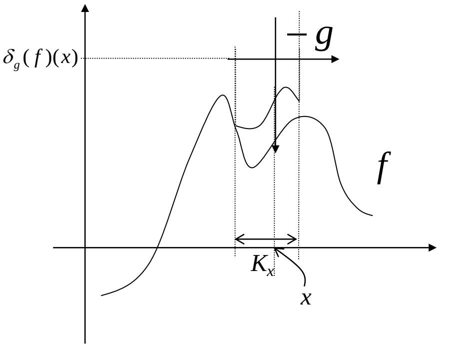
$$\varepsilon_g(f)(x) = \inf_{y \in \mathbf{R}^n} \{f(y) - g(y-x)\}$$
$$= \inf_{y-x \in K} \{f(y) - g(y-x)\}$$
$$= \inf_{y \in K_x} \{f(y) - g(y-x)\}$$



Du cadre ensembliste au cadre fonctionnel

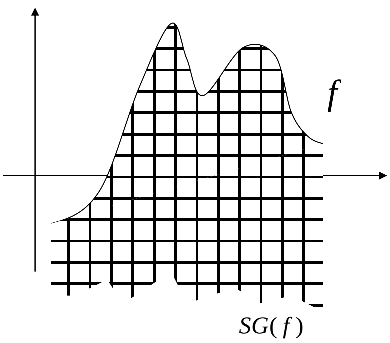
Soit K le support de g

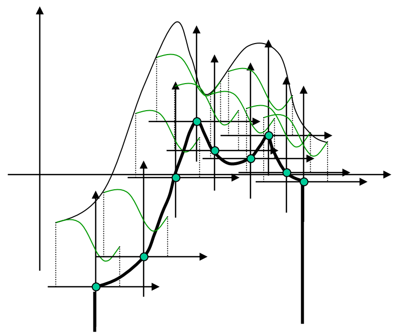
$$\delta_g(f)(x) = \sup_{y \in \mathbf{R}^n} \{f(y) + g(y-x)\}$$
$$= \sup_{y-x \in K} \{f(y) + g(y-x)\}$$
$$= \sup_{y \in K_x} \{f(y) + g(y-x)\}$$

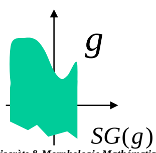


Du cadre ensembliste au cadre fonctionnel

A toute fonction *f* on associe son ***sous-graphe*** : $SG(f) = \{(x,t) \in \mathbf{R}^n \times \overline{\mathbf{R}} \,/\, t \leq f(x)\}$





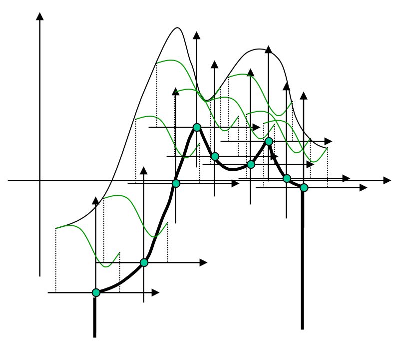


Du cadre ensembliste au cadre fonctionnel

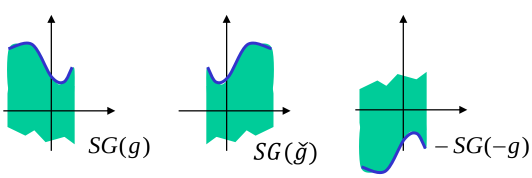
Interprétation ensembliste :

$$\boxed{\begin{aligned} SG(\varepsilon_g(f)) &= \boldsymbol{\varepsilon}_{SG(g)}(SG(f)) \\ SG(\delta_g(f)) &= \boldsymbol{\delta}_{-SG(-g)}(SG(f)) \end{aligned}}$$

fonctionnel ensembliste

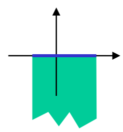


⚠ $-g \neq \breve{g}$



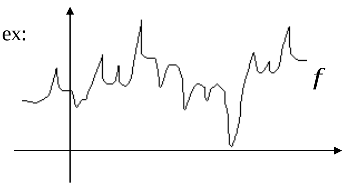
Cas des éléments structurants plans

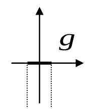
Élément structurant plan = fonction structurante nulle sur un support compact K



L'expression algébrique des opérateurs de base devient :

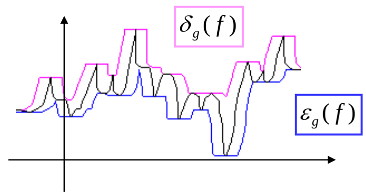
ex:





$$\varepsilon_g(f)(x) = \inf_{\substack{y \in \mathbf{R}^n \\ y-x \in K}} \{f(y)\} = \inf_{y \in K_x} \{f(y)\}$$

$$\delta_g(f)(x) = \sup_{y \in K_x} \{f(y)\}$$



Propriétés des opérateurs de base dans le cadre fonctionnel

Identiques au cas ensembliste, en remplaçant :

$$\subset \;\rightarrow\; \leq \qquad \cup \;\rightarrow\; \vee \qquad \cap \;\rightarrow\; \wedge$$

$$f \leq f' \Rightarrow \delta_g(f) \leq \delta_g(f')$$
$$f \leq f' \Rightarrow \varepsilon_g(f) \leq \varepsilon_g(f')$$
$$g \leq g' \Rightarrow \varepsilon_g(f) \geq \varepsilon_{g'}(f)$$

Si $O \in \mathrm{Supp}(g)$:

$$f \leq \delta_g(f)$$
$$\varepsilon_g(f) \leq f$$

$$\delta_g(f \vee f') = \delta_g(f) \vee \delta_g(f')$$
$$\varepsilon_g(f \wedge f') = \varepsilon_g(f) \wedge \varepsilon_g(f')$$

$$\delta_{g \vee g'}(f) = \delta_g(f) \vee \delta_{g'}(f)$$
$$\varepsilon_{g \vee g'}(f) = \varepsilon_g(f) \wedge \varepsilon_{g'}(f)$$

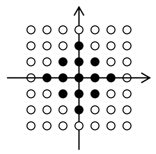
$$\delta_g(f \wedge f') \leq \delta_g(f) \wedge \delta_g(f')$$
$$\varepsilon_g(f \vee f') \geq \varepsilon_g(f) \vee \varepsilon_g(f')$$
$$\delta_{g \wedge g'}(f) \leq \delta_g(f) \wedge \delta_{g'}(f)$$
$$\varepsilon_{g \wedge g'}(f) \geq \varepsilon_g(f) \vee \varepsilon_{g'}(f)$$

$$f \leq \varepsilon_g(f') \Leftrightarrow \delta_{\breve{g}}(f) \leq f'$$

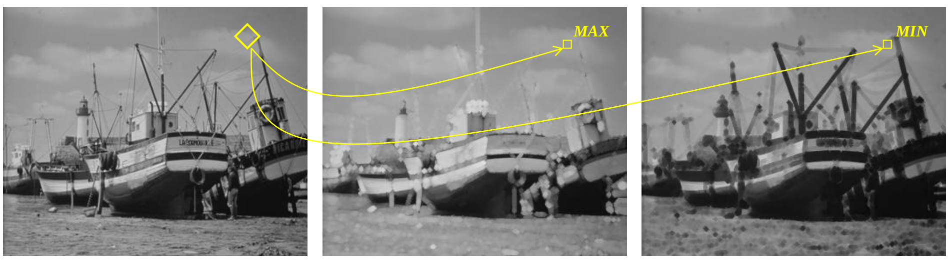
$$\delta_{g'}\left(\delta_g(f)\right) = \delta_{\delta_{g'}(g)}(f)$$
$$\varepsilon_{g'}\left(\varepsilon_g(f)\right) = \varepsilon_{\delta_{g'}(g)}(f)$$

Application aux images numériques

Le treillis est l'ensemble des fonctions de $\mathbf{Z}^2$ dans $\mathbf{Z}$



élément structurant plan $\cong$ ensemble



X $\qquad \delta_B(X)$ $\qquad \varepsilon_B(X)$

Premiers opérateurs par différence

Opérateur par différence : $\Lambda(x) = \Phi(x) - \Psi(x)$

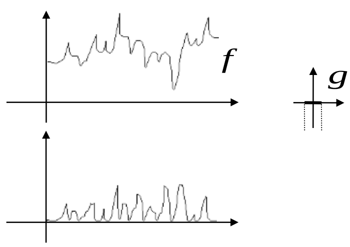
Cas ensembliste: $\boxed{\Lambda(X) = \Phi(X) \setminus \Psi(X)}$

Cas fonctionnel: $\boxed{\Lambda(f) = \Phi(f) - \Psi(f)}$

Gradient intérieur

$\boxed{g_y^-(x)}$

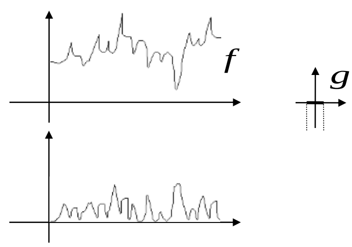
$\Phi(x) = x \qquad \Psi(x) = \varepsilon_y(x)$



Gradient extérieur

$\boxed{g_y^+(x)}$

$\Phi(x) = \delta_y(x) \qquad \Psi(x) = x$

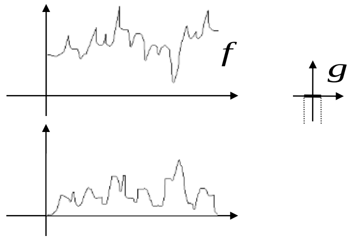


Premiers opérateurs par différence

Gradient morphologique
(symétrisée)

$$\boxed{g_y^m(x)}$$

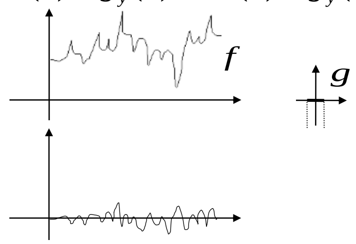
$$\Phi(x) = \delta_y(x) \qquad \Psi(x) = \varepsilon_y(x)$$



Laplacien morphologique

$$\boxed{\lambda_y(x)}$$

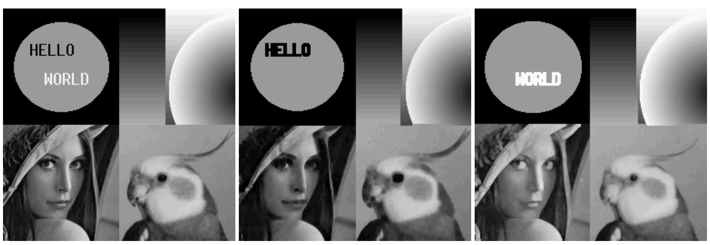
$$\Phi(x) = g_y^+(x) \qquad \Psi(x) = g_y^-(x)$$



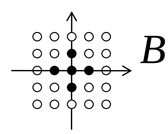
Rq : dans le cas de fonctions de $\mathbf{R}^2$ dans $\mathbf{R}$, en prenant pour élément structurant une boule euclidienne centrée sur l'origine, le gradient morphologique et le laplacien morphologique tendent respectivement vers le module du gradient et le laplacien euclidiens lorsqu'ils sont définis, quand le rayon de la boule tend vers zéro :

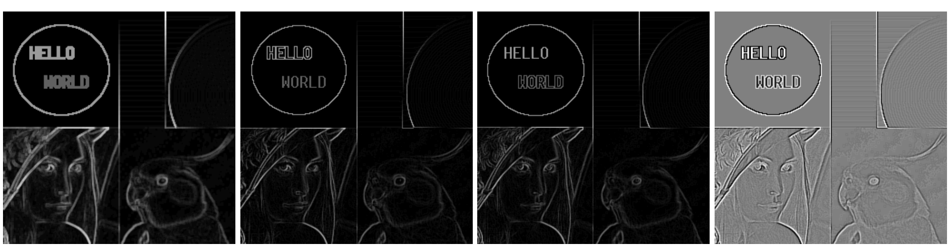
$$\|\nabla I\| = \sqrt{\left(\frac{\partial I}{\partial x}(u,v)\right)^2 + \left(\frac{\partial I}{\partial y}(u,v)\right)^2} \qquad \Delta I = \frac{\partial^2 I}{\partial x^2}(u,v) + \frac{\partial^2 I}{\partial y^2}(u,v)$$

Gradients et laplacien : images numériques



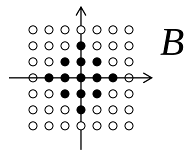
X $\qquad \varepsilon_B(X)$ $\qquad \delta_B(X)$



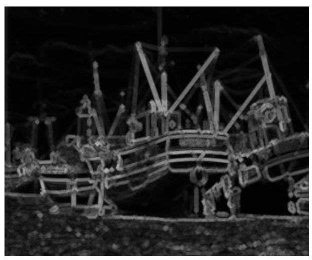


$g_B^m(X) = \delta_B(X) - \varepsilon_B(X)$ $\qquad g_B^-(X) = X - \varepsilon_B(X)$ $\qquad g_B^+(X) = \delta_B(X) - X$ $\qquad \lambda_B(X) = g_B^+(x) - g_B^-(x)$

Gradients et laplacien : images numériques



X



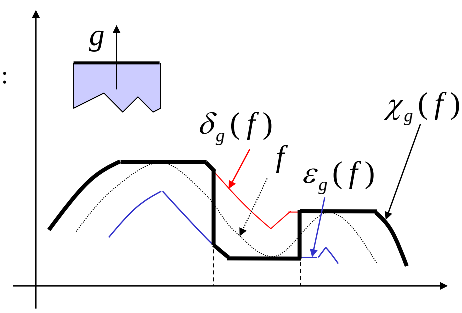
$g_B^m(X)$

$\lambda_B(X)$

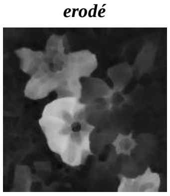
Augmentation de contraste morphologique

Le filtre rehausseur de contraste est défini par :

$$\begin{cases} \chi_g(f) = \delta_g(f) \text{ si } (\delta_g(f)-f)<(f-\varepsilon_g(f)) \\ \chi_g(f) = \varepsilon_g(f) \text{ si } (\delta_g(f)-f)>(f-\varepsilon_g(f)) \end{cases}$$



erodé



$\varepsilon_g(f)$

dilaté

$\delta_g(f)$

image originale

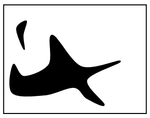
f

image rehaussée

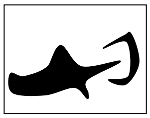
$\chi_g(f)$

Ouvertures et fermetures morphologiques

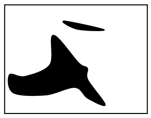
Problème Min/Max : étant donné $Y \in E$, $B \in E$,
trouver le plus petit $X \in E$ tel que : $Y = \varepsilon_B(X)$



X_1

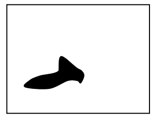


X_2



X_3

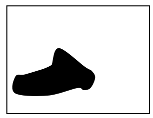
B



$$Y = \varepsilon_B(X_1) = \varepsilon_B(X_2) = \varepsilon_B(X_3)$$

REPONSE : C'est le dilaté de Y par le transposé de B:

$$\delta_{\breve{B}}(Y) = Y \oplus B$$



On note : $\boxed{\gamma_B(X) = \delta_{\breve{B}}(\varepsilon_B(X)) = \left(X \ominus \breve{B}\right) \oplus B}$

l'ouverture morphologique de X par B.

et son dual : $\boxed{\varphi_B(X) = \varepsilon_{\breve{B}}(\delta_B(X)) = \left(X \oplus \breve{B}\right) \ominus B}$

la fermeture morphologique de X par B.

Propriétés algébriques des ouvertures et fermetures

CROISSANCE

$$x \le y \Rightarrow \begin{cases} \gamma_B(x) \le \gamma_B(y) \\ \varphi_B(x) \le \varphi_B(y) \end{cases}$$

IDEMPOTENCE

$$\gamma_B(\gamma_B(x)) = \gamma_B(x)$$
$$\varphi_B(\varphi_B(x)) = \varphi_B(x)$$

<u>*dém:*</u> $\delta_{\breve{B}}(\varepsilon_B(x)) \le x \le \varepsilon_{\breve{B}}(\delta_B(x))$

donc $\underbrace{\delta_{\breve{B}}\varepsilon_B \le id_E}_{\Downarrow} \le \varepsilon_{\breve{B}}\delta_B$

et $\delta_B\varepsilon_{\breve{B}} \le \underbrace{id_E \le \varepsilon_B\delta_{\breve{B}}}_{\Downarrow}$

$\varepsilon_B\delta_{\breve{B}}\varepsilon_B \le \varepsilon_B$

$\varepsilon_B \le \varepsilon_B\delta_{\breve{B}}\varepsilon_B$

donc $\varepsilon_B = \varepsilon_B\delta_{\breve{B}}\varepsilon_B$

et donc $\delta_{\breve{B}}\varepsilon_B = \delta_{\breve{B}}\varepsilon_B\delta_{\breve{B}}\varepsilon_B$

EXTENSIVITE

L'ouverture est anti-extensive : $\gamma_B(x) \le x$

La fermeture est extensive : $x \le \varphi_B(x)$

<u>*dém:*</u> Dans la propriété d'adjonction :

$x \le \varepsilon_B(y) \Leftrightarrow \delta_{\breve{B}}(x) \le y$

$x = \varepsilon_B(y)$ donne $\delta_{\breve{B}}(\varepsilon_B(y)) \le y$

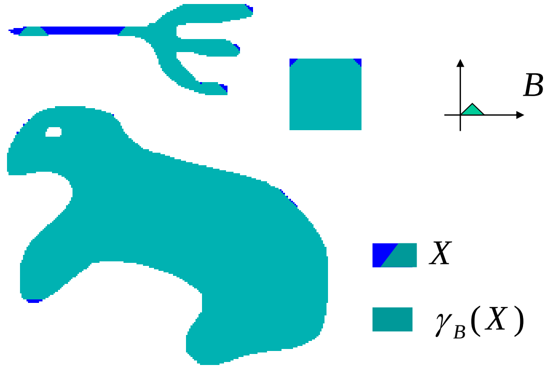
et $y = \delta_B(x)$ donne $x \le \varepsilon_{\breve{B}}(\delta_B(x))$

PROPRIETE MIN/MAX

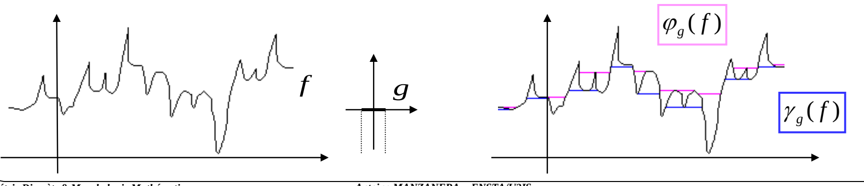
Soient x, x', et y tels que : $\begin{cases} y = \varepsilon_B(x) = \varepsilon_B(x') \\ \text{et} \\ x = \delta_{\breve{B}}(y) \end{cases}$

alors $x = \delta_{\breve{B}}(y) = \delta_{\breve{B}}(\varepsilon_B(x))$
$= \delta_{\breve{B}}(\varepsilon_B(x')) = \gamma_B(x') \le x'$

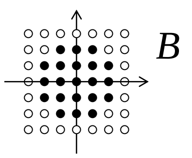
Ouvertures et fermetures : ensembles et fonctions



C'est le lieu géométrique des points de B_z tels que B_z est inclus dans X



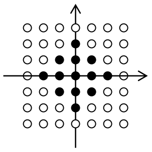
Ouvertures et fermetures : images binaires



- l'ouverture élimine les petites composantes, et ouvre les petits isthmes.
- la fermeture bouche les petites trous, et ferme les petits détroits.

X $\qquad\qquad$ $\gamma_B(X)$ $\qquad\qquad$ $\varphi_B(X)$

Ouvertures et fermetures : images numériques



B

$\varepsilon_B(X)$

$\delta_B(X)$

X

$\gamma_B(X)$

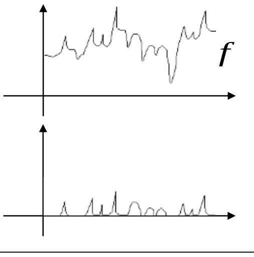
$\varphi_B(X)$

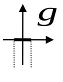
Opérateurs obtenus par différence d'ouvertures et fermetures

Opérateur par différence : $\Lambda(x) = \Phi(x) - \Psi(x)$

Top-hat

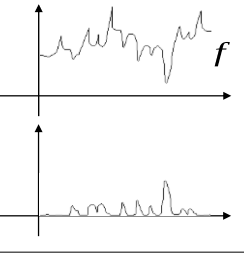
$\Phi(x) = x \qquad \Psi(x) = \gamma_y(x)$

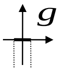




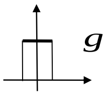
Top-hat conjugué

$\Phi(x) = \varphi_y(x) \qquad \Psi(x) = x$

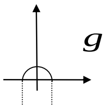




Top-hat

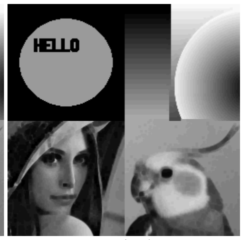


Rolling ball



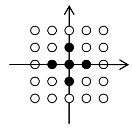
Top Hat : images numériques

X



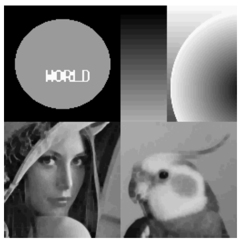
$\varepsilon_B(X)$

$\delta_B(X)$

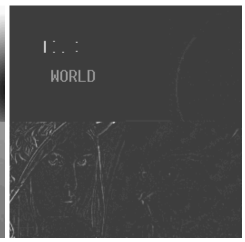


B

$\gamma_B(X)$



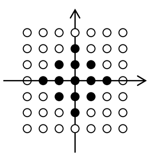
$\varphi_B(X)$



$\tau_B(X) = X - \gamma_B(X)$

$\tilde{\tau}_B(X) = \varphi_B(X) - X$

Top Hat : images numériques



B

$\gamma_B(X)$

$\varphi_B(X)$

X

$\tau_B(X)$

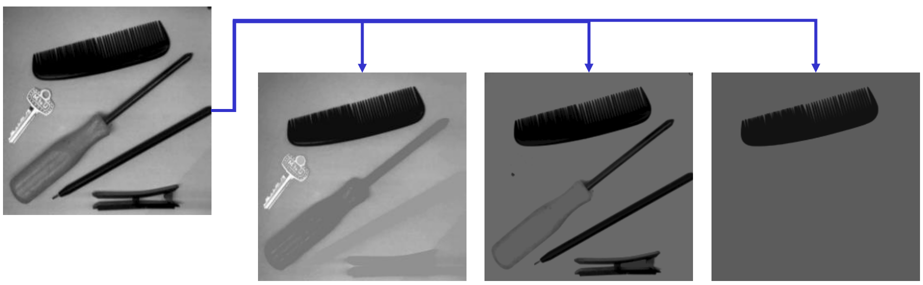
$\tilde{\tau}_B(X)$

Introduction aux opérations géodésiques

Objectif sous-jacent : l'analyse individuelle des « objets » d'une image.

En l'absence de données de plus haut niveau sémantique, l'objet dans une image est associé à une particule, correspondant en général à une composante connexe.

L'analyse individuelle des objets nécessite donc l'utilisation d'opérateurs (filtres) connexes, c'est-à-dire qui préserve les objets (une composante connexe est soit préservée, soit intégralement éliminée).



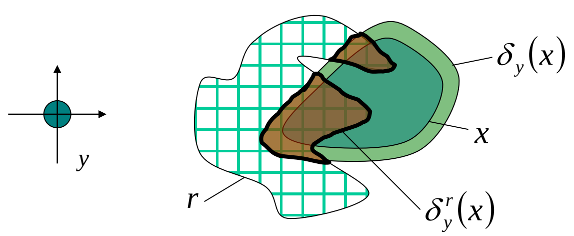
Opérations géodésiques

Les opérations géodésiques sont celles qui sont conditionnées par un élément de référence *r* du treillis. Elles sont définies à partir des opérations géodésiques de base :

la ***dilatation géodésique*** et la ***reconstruction géodésique***.

Dans les opérations géodésiques, l'élément structurant représente le "voisinage élémentaire" de l'origine ; et définit donc la topologie sous-jacente.

La dilatation géodésique dans *r* : $\boxed{\delta_y^r(x) = \delta_y(x) \wedge r}$



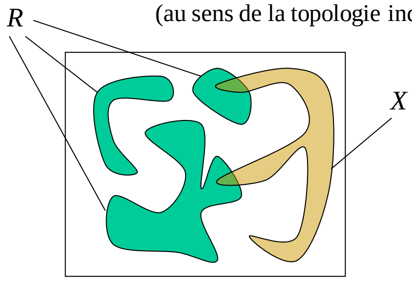
La reconstruction géodésique

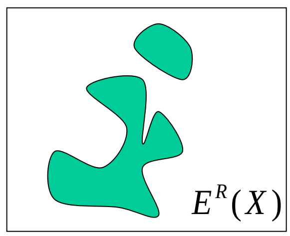
posons $\begin{cases} (\delta^R_{B_1})^0(X) = X \\ (\delta^R_{B_1})^n(X) = \delta^R_{B_1}\left((\delta^R_{B_1})^{n-1}(X)\right) & \text{pour} \quad n > 0 \end{cases}$

La reconstruction géodésique de X dans R est définie par :

$$\boxed{E^R_{B_1}(X) = \sup_{n \geq 0}\left\{(\delta^R_{B_1})^n(X)\right\}}$$

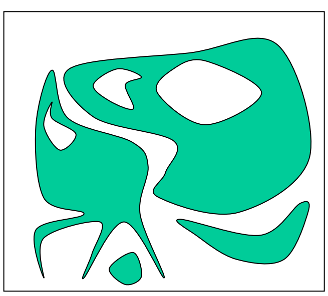
Dans le cadre ensembliste, c'est l'ensemble des composantes connexes (au sens de la topologie induite par B_1) de R qui intersectent X :



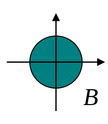


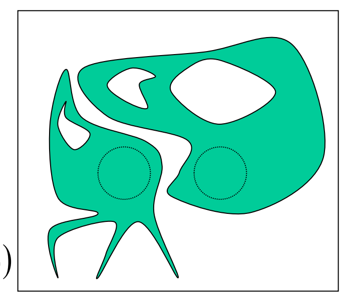
Ouvertures et fermetures par reconstruction

L'ouverture par reconstruction élimine les composantes connexes qui n'appartiennent pas à l'ouvert sans modifier les autres :



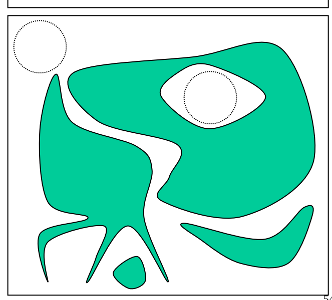
X





ouverture par reconstruction

$E^X(\gamma_B(X))$



La fermeture par reconstruction est définie par dualité :

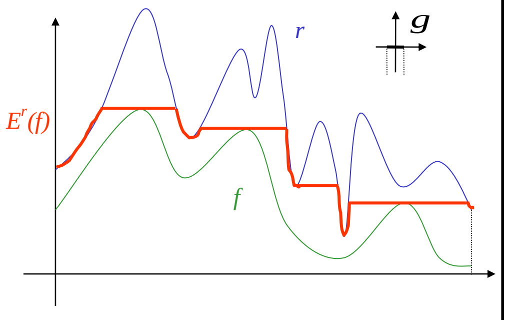
fermeture par reconstruction

$\left(E^{X^c}\left((\varphi_B(X))^c\right)\right)^c$

Reconstruction fonctionnelle

La dilatation géodésique de *f* dans *r* :

$$\delta_g^r(f) = \delta_g(f) \wedge r$$



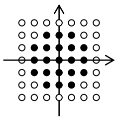
La reconstruction géodésique de *f* dans *r* :

$$E_g^r(f) = \sup_{n \geq 0} \left\{ (\delta_g^r)^n(f) \right\}$$

Ouvertures et fermetures par reconstruction

Par extension, les ouvertures et fermetures par reconstruction éliminent les petites structures en préservant les contours des images numériques :

élément structurant de l'ouverture morphologique :



original

ouverture par reconstruction

fermeture par reconstruction

Premiers Opérateurs – Conclusion

A RETENIR POUR CE COURS :

• Principes de base : Notion de treillis complet – Erosion et Dilatation algébriques – Liens avec les opérateurs de Minkowski, Passage des treillis ensemblistes aux treillis fonctionnels.

• Opérateurs résiduels : Gradients et Laplacien, définition et liens avec les opérateurs différentiels. Opérateurs de sélection : exemple du contraste.

• Ouverture et Fermeture : Définitions, Propriétés géométriques. Opérateurs Top-Hat : à distinguer des gradients.

• Dilatation et reconstruction géodésiques : définitions.

Chapitre 2 : Géométrie discrète & Aspects algorithmiques

• Introduction à la géométrie discrète

• Topologies et distances discrètes

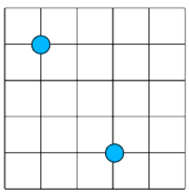
• Transformées en distances discrètes

• Calcul des opérateurs de base

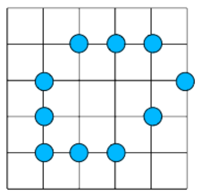
• Files d'attente et opérateurs géodésiques

Le modèle discret

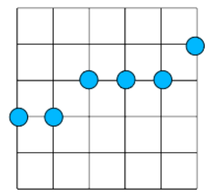
La géométrie discrète est une discipline encore plus ancienne que le traitement d'images.
A l'opposé de certains modèles comme le modèle différentiel qui extrait la géométrie locale à partir du calcul différentiel en considérant l'image comme une fonction continue, le modèle discret intègre l'espace échantillonné comme cadre mathématique, et s'efforce de donner un cadre formel aux structures géométriques discrètes : définition, propriétés, théorèmes,…



Quelle est la distance entre les 2 points ?



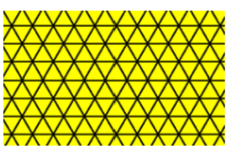
Qu'est-ce qu'un trou ?



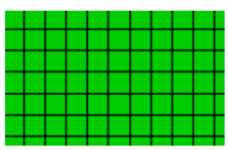
Qu'est-ce qu'une droite ?

Pavages du plan

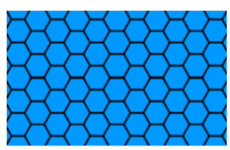
Un pavage du plan est une partition du plan en cellules élémentaires (pixels).
Il n'existe que 3 pavages réguliers du plan :



triangulaire

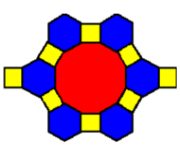


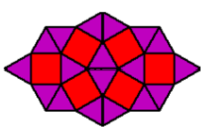
carré

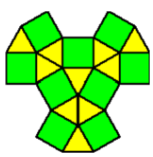


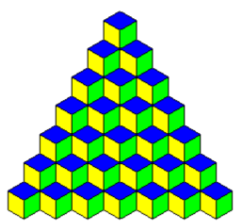
hexagonal

... mais de nombreux pavages irréguliers :



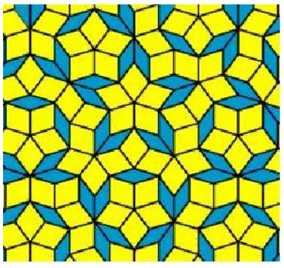




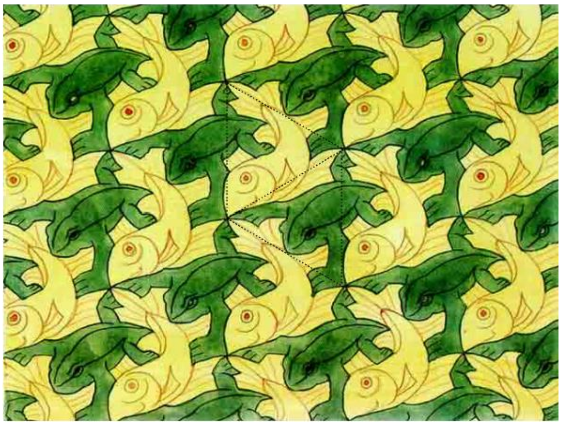


Pavages du plan

D'autres pavages irréguliers du plan...



Pavage apériodique de Penrose



Pavage périodique d'Escher

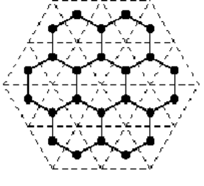
Pavages et Maillages

A tout pavage du plan on peut associer un *graphe* où les *sommets* (noeuds) représentent les cellules élémentaires, et où les *arêtes* représentent la relation d'*adjacence* entre les cellules (2 cellules sont adjacentes si elles ont un côté en commun). Un tel graphe est un *maillage* du plan.

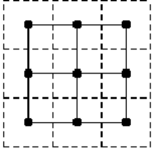
Les pavages et les maillages réguliers sont *duaux* :

Questions :

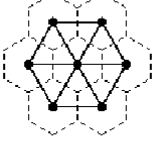
- représentation dans Z^2 ?
- combien de directions ?
- récursivité ?



Pavage triangulaire ↕ Maillage hexagonal



Pavage carré ↕ Maillage carré



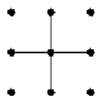
Pavage hexagonal ↕ Maillage triangulaire

Maillage, Adjacence, Composantes Connexes

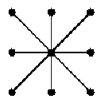
Les relations topologiques dans les images discrètes sont définies à partir de la relation d'adjacence induite par le graphe du maillage (*X*,*S*), où *X* représente l'ensemble des *sommets*, et *S* l'ensemble des *arêtes* : $X \subset \mathbb{Z}^2 ; S \subset X^2$

Définition : soit $(x,y) \in X^2$on dira que *x* et *y* sont *adjacents*, noté $x \approx y$ si et seulement si :

$$x = y \text{ ou } (x,y) \in S$$

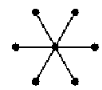


maille carrée 4-connexe



maille carrée 8-connexe

Propriété 1 : La relation $x \approx y$ est réflexive et symétrique, c'est donc une relation de pré-équivalence.



maille triang. 6-connexe

Propriété 2 : La clôture transitive de la relation $x \approx y$ est donc une relation d'équivalence dite de connexité (« il existe un chemin connexe entre *x* et *y*) :

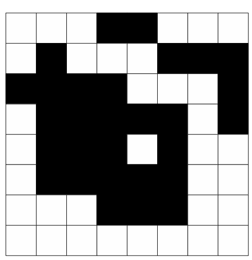
$$x \sim y \Leftrightarrow \exists(x_1, \ldots, x_n) \in X^n \quad / \quad x \approx x_1, \ldots, x_i \approx x_{i+1}, \ldots, x_n \approx y$$

Définition : Les classes d'équivalence de la relation $x \sim y$ sont appelées les *composantes connexes*.

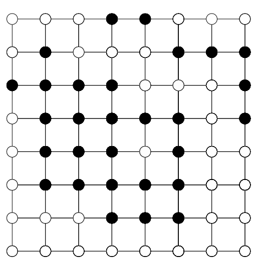
Images discrètes dans la maille carrée

- Le *plan discret* est représenté par $\mathbf{Z}^2$.
- Une *image discrète binaire* est un sous-ensemble de $\mathbf{Z}^2$.
- Une *image discrète en niveau de gris* est une fonction de $\mathbf{Z}^2$ dans **N**.

$X \subset \mathbf{Z}^2$

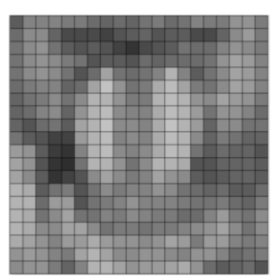


Une image binaire (représentation « pavage »)



Une image binaire (représentation « maillage »)

$I : \mathbf{Z}^2 \rightarrow \mathbf{N}$

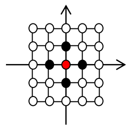


Une image en niveaux de gris

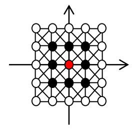
Topologies dans la maille carrée

Dans la maille carrée, on peut définir 2 types de *relations d'adjacence*, donc de topologie :

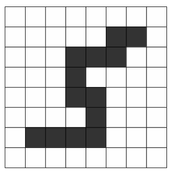
4-connexité :



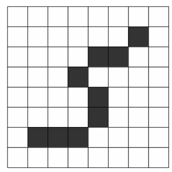
8-connexité :



Par clôture transitive, on définit la *relation de connexion*, qui est une relation d'équivalence :



Un chemin 4-connexe

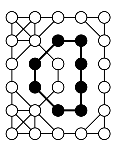


Un chemin 8-connexe

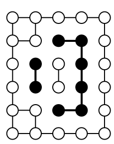
Les classes d'équivalence de la relation de connexion sont les *composantes connexes*.

Théorème de Jordan en maille carrée

Dans la maille carrée, la notion de *trou* dans un objet X, qui doit correspondre à une composante connexe finie de X^c, n'est pas bien définie :



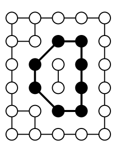
8-connexité



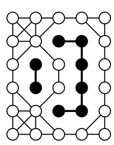
4-connexité

Ce problème est lié à la validité du *théorème de Jordan*, selon lequel une courbe simple fermée sépare le plan en 2 composantes connexes, dont une bornée.

...sauf si l'on considère des topologies différentes pour X et pour X^c :



(8,4)-connexité



(4,8)-connexité

Exemple :

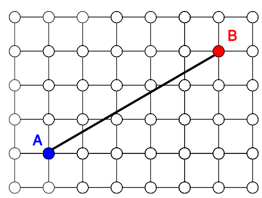
combien l'image ci-contre compte-t-elle de composantes connexes ? Combien de trous ?

(1) Pour la (8,4)-connexité

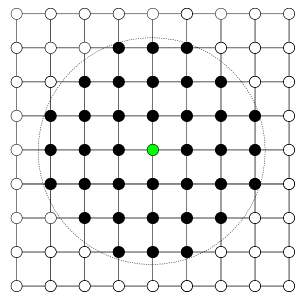
(2) Pour la (4,8)-connexité

Distances dans la maille carrée

La distance euclidienne dans la maille carrée se calcule facilement pour 2 points donnés, mais est difficile à manipuler d'un point de vue algorithmique pour calculer la carte de distance à un ensemble donné (transformée en distance).



$$d_E(A,B) = \sqrt{5^2 + 3^2} = \sqrt{34}$$

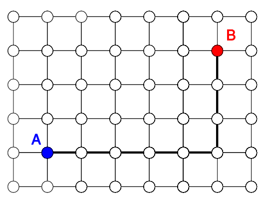


$$B^{d_E}_{\sqrt{10}}(C) = \left\{z \in \mathbf{Z}^2 ; d_E(z,c) \leq \sqrt{10}\right\}$$

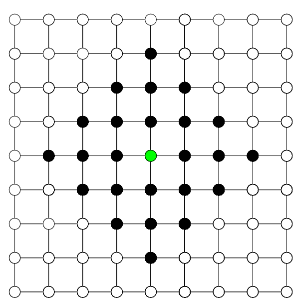
Distances dans la maille carrée

Les distances discrètes plus faciles à manipuler d'un point de vue algorithmique sont celles qui sont induites par la topologie : étant donnée une relation d'adjacence la distance entre A et B est alors définie comme le nombre minimum d'arêtes que compte un chemin qui relie A à B. Par exemple la distance d_4, ou distance de la 4-connexité :

$$\boxed{d_4(A,B) = \left|x_A - x_B\right| + \left|y_A - y_B\right|}$$



$$d_4(A,B) = 5 + 3 = 8$$

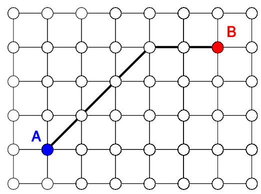


$$B^{d_4}_3(C) = \left\{z \in \mathbf{Z}^2 ; d_4(z,c) \leq 3\right\}$$

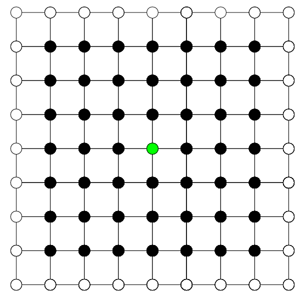
Distances dans la maille carrée

De la même façon, la distance d_8, ou distance de la 8-connexité :

$$\boxed{d_8(A,B) = \max\left(|x_A - x_B|, |y_A - y_B|\right)}$$



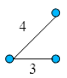
$d_8(A,B) = \max(5,3) = 5$



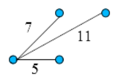
$B_3^{d_8}(C) = \left\{z \in \mathbf{Z}^2 ; d_8(z,c) \le 3\right\}$

Distances dans la maille carrée

On peut aussi pondérer différemment les arêtes du maillage 8-connexe, voire utiliser des maillages plus complexes (i.e. des voisinages plus grands) :



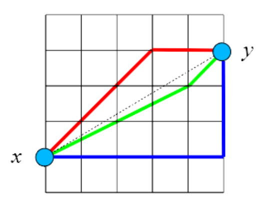
distance du chamfrein (3,4)



distance du chamfrein (5,7,11)

Questions :

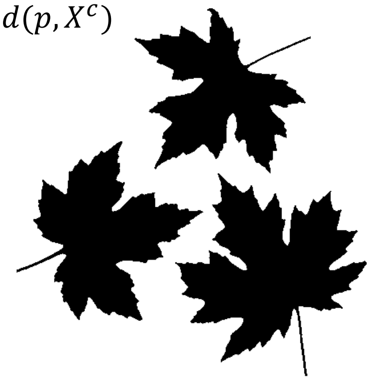
calculer les distances $d_4(x,y)$, $d_8(x,y)$, $d_{ch(3,4)}(x,y)$, $d_{ch(5,7,11)}(x,y)$ entre les 2 points x et y ci-contre :



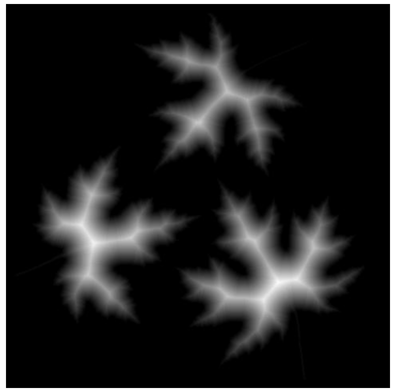
Transformée en distance

La transformée en distance d'une image binaire X est une fonction qui associe à chaque pixel de X sa distance au complémentaire X^c. Cette fonction est très utile en analyse d'images, par exemple pour le calcul des opérateurs morphologiques :

$$F_X^d : \mathbb{Z}^2 \longrightarrow \mathbb{N}$$
$$p \longmapsto d(p, X^c)$$



X



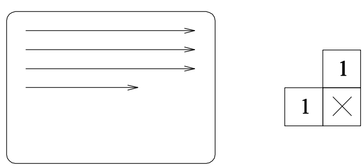
$F_X^{d_E}$

Transformée en distance : Algorithmes

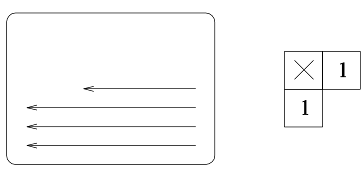
Pour les distances d_4 et d_8, la transformée en distance d'une image binaire X se calcule facilement par un algorithme récursif, basé sur 2 balayages d'image : 1 direct, 1 rétrograde :

```
% Balayage direct
for i = 1:w
  for j = 1:h
    if (i,j)∉X F(i,j)=0;
    else F(i,j) = min(F(i-1,j)+1,F(i,j-1)+1);
  end
end
% Balayage rétrograde
for i = w:-1:1
  for j = h:-1:1
    F(i,j) = min(F(i,j),F(i+1,j)+1,F(i,j+1)+1);
  end
end
```

Algorithme de calcul de la transformée en distance d_4



Balayage direct et son masque de calcul



Balayage rétrograde et son masque de calcul

Transformée en distance : Algorithmes

Illustration du calcul de la transformée en distance d_4 en 2 balayages, sur un exemple :

0	0	0	0	0	0	0	0
0	∞	∞	∞	∞	∞	∞	0
0	∞	∞	∞	∞	∞	∞	0
0	∞	∞	0	0	∞	∞	0
0	∞	∞	∞	∞	∞	∞	0
0	∞	∞	∞	∞	∞	∞	0
0	0	0	0	0	0	0	0

Etat « initial »

0	0	0	0	0	0	0	0
0	1	1	1	1	1	1	0
0	1	2	2	2	2	2	0
0	1	2	0	0	1	2	0
0	1	2	1	1	2	3	0
0	1	2	2	2	3	4	0
0	0	0	0	0	0	0	0

Après le premier balayage

0	0	0	0	0	0	0	0
0	1	1	1	1	1	1	0
0	1	2	1	1	2	1	0
0	1	1	0	0	1	1	0
0	1	2	1	1	2	1	0
0	1	1	1	1	1	1	0
0	0	0	0	0	0	0	0

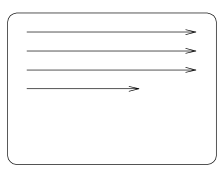
Après les 2 balayages

Transformée en distance : Algorithmes

La transformée en distance d_8 se calcule de façon similaire :

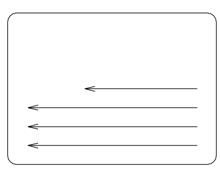
```
% Balayage direct
for i = 1:w
  for j = 1:h
    if (i,j)∉X F(i,j)=0;
    else F(i,j) = min(F(i-1,j-1),F(i-1,j),
                      F(i-1,j+1),F(i,j-1))+1;
  end
end
% Balayage rétrograde
for i = w:-1:1
  for j = h:-1:1
    F(i,j) = min(F(i,j),F(i+1,j+1)+1,F(i+1,j)+1,
                      F(i+1,j-1)+1,F(i,j+1)+1);
  end
end
```

Algorithme de calcul de la transformée en distance d_8



1	1	1
1	×	

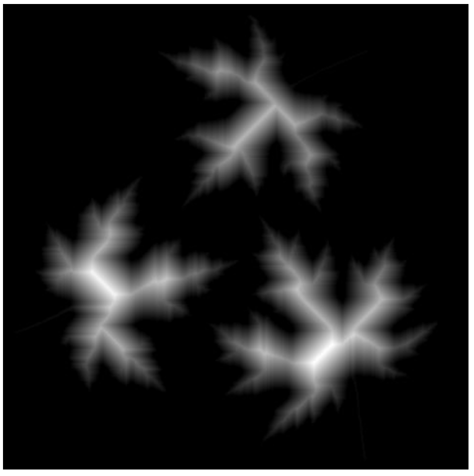
Balayage direct et son masque de calcul



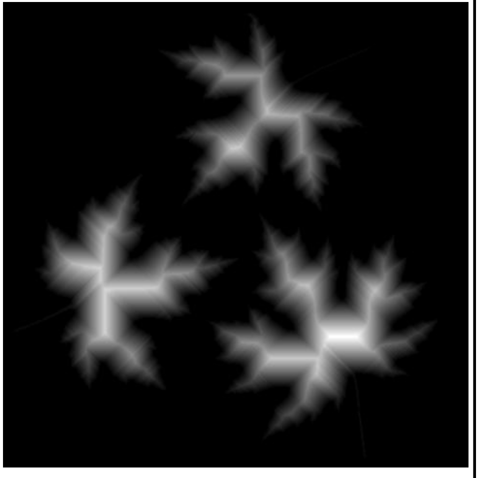
	×	1
1	1	1

Balayage rétrograde et son masque de calcul

Comparaison distances d_4 et d_8



Transformée en distance d_4



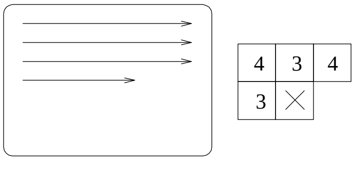
Transformée en distance d_8

Transformée en distance : Algorithmes

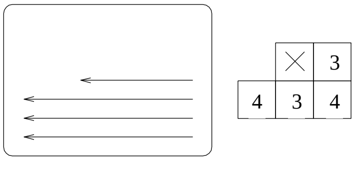
Les transformées en distance de chanfrein se calculent aussi de façon similaire. Par exemple, pour $d_{3\text{-}4}$ (noter la normalisation) :

```
% Balayage direct
for i = 1:w
  for j = 1:h
    if (i,j)∉X F(i,j)=0;
    else F(i,j) = min(F(i-1,j-1)+4,F(i-1,j)+3,
                      F(i-1,j+1)+4,F(i,j-1)+3);
  end
end
% Balayage rétrograde
for i = w:-1:1
  for j = h:-1:1
    F(i,j) = min(F(i,j),F(i+1,j+1)+4,F(i+1,j)+3,
                      F(i+1,j-1)+4,F(i,j+1)+3)/3;
  end
end
```

Algorithme de calcul de la transformée en distance de chanfrein $d_{3\text{-}4}$

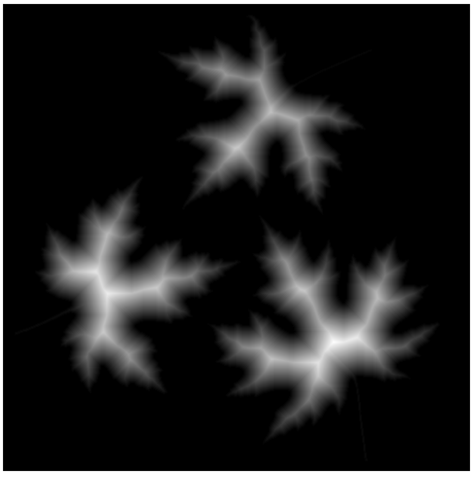


Balayage direct et son masque de calcul

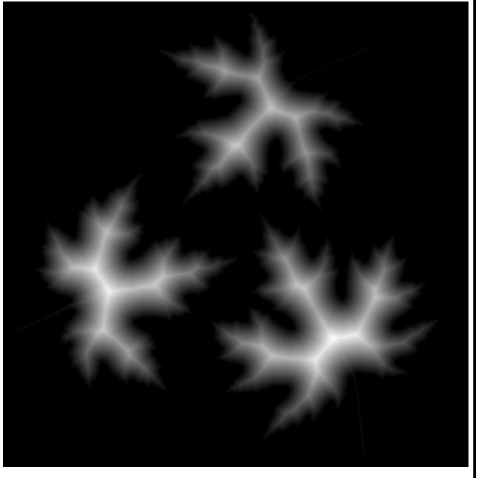


Balayage rétrograde et son masque de calcul

Comparaison distances $d_{3\text{-}4}$ et $d_{5\text{-}7\text{-}11}$



Transformée en distance $d_{3\text{-}4}$

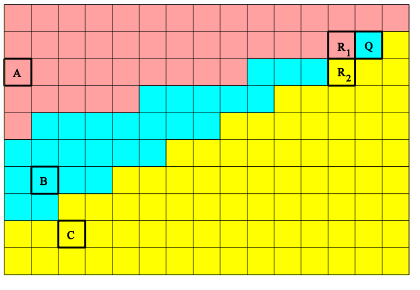


Transformée en distance $d_{5\text{-}7\text{-}11}$

Distance euclidienne : algorithmes

On ne peut pas calculer de transformée en distance euclidienne *exacte* en utilisant un algorithme similaire, car la valeur de la transformée en distance en un point ne peut pas toujours être décidée en fonction de la valeur de la transformée en distance de ses 8 plus proches voisins :

Sur la figure ci-contre, le pixel Q est plus proches de B que de A ou de C. Mais tous ses 8 plus proches voisins sont soit plus proches de A, soit plus proches de C, que de B



Distance euclidienne : algorithmes

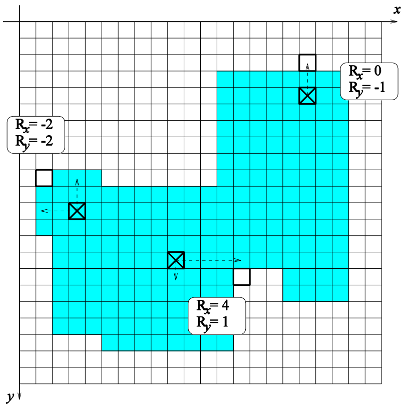
Néanmoins, on peut calculer une très bonne approximation de la transformée en distance euclidienne sur la maille carrée, grâce à l'algorithme de Danielsson-Leymarie (DL). Cet algorithme consiste à calculer récursivement les coordonnées relatives des pixels les plus proches du complémentaire :

L'algorithme consiste à calculer, pour chaque pixel p de X, les coordonnées ($R_x(p)$,$R_y(p)$) tels que le point de X^c le plus proche de p a pour coordonnées :

$$(x_p + R_x(p), y_p + R_y(p))$$

La valeur de la transformée en distance au point p est donc :

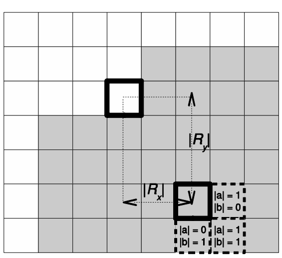
$$F_X^E(p) = \sqrt{(R_x(p))^2 + (R_y(p))^2}$$



Distance euclidienne : algorithmes

Le carré de la distance euclidienne est calculé par sommation marginale : quand un nombre n augmente de 1, son carré augmente de $2n$+1 :

$$(|R_x| + |a|)^2 + (|R_y| + |b|)^2 = R_x^{\ 2} + R_y^{\ 2} + 2|R_x a| + 2|R_y b| + a^2 + b^2$$



et donc :

$$F_X^E(x+a, y+b)^2 = F_X^E(x,y)^2 + 2|R_x a| + 2|R_y b| + a^2 + b^2$$

Notations pour l'algorithme :

$V^- = \{(-1,-1),(0,-1),(+1,-1),(-1,0)\}$ le voisinage causal

$V^+ = \{(+1,+1),(0,+1),(-1,+1),(+1,0),(0,0)\}$ le voisinage anticausal

Enfin, on note : $DF^{(a,b)}(x,y) = 2|aR_x(x+a, y+b)| + 2|bR_y(x+a,y+b)| + a^2 + b^2$

l'augmentation marginale du carré de la transformée en distance, lorsqu'on passe du point (x+a,y+b) au point (x,y).

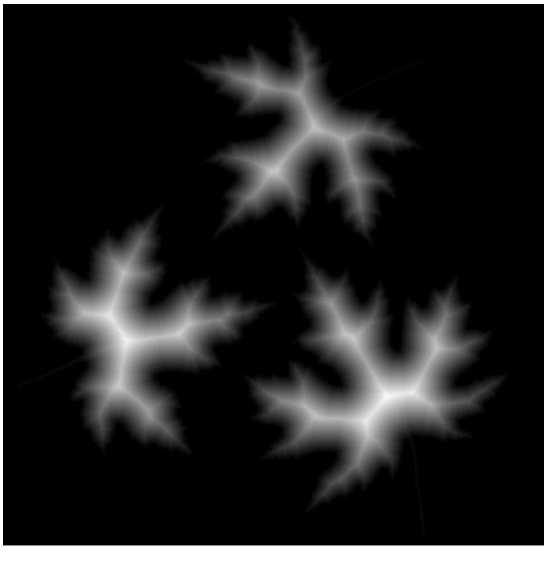
Algorithme de Danielsson-Leymarie

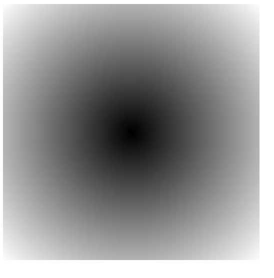
```
for i = 1:w   % Initialisation
  for j = 1:h
    if (i,j)∉X {F(i,j)=0;Rx(i,j)=0;Ry(i,j)=0;}
    else {F(i,j)=∞;Rx(i,j)=0;Ry(i,j)=0;}
  end
end
for i = 1:w   % Balayage direct
  for j = 1:h
    (1) (a,b) = Arg Min { F(i+u,j+v)+DF^(u,v)(i,j);(u,v) ∈V- };
    (2) Rx(i,j)=Rx(i+a,j+b)+a ; Ry(i,j)=Ry(i+a,j+b)+b;
    (3) F(i,j) = F(i+a,j+b)+DF^(a,b)(i,j);
  end
end
for i = w:-1:1  % Balayage rétrograde
  for j = h:-1:1
    (1) (a,b) = Arg Min { F(i+u,j+v)+DF^(u,v)(i,j);(u,v) ∈V+ };
    (2) Rx(i,j)=Rx(i+a,j+b)+a ; Ry(i,j)=Ry(i+a,j+b)+b;
    (3) F(i,j) = F(i+a,j+b)+DF^(a,b)(i,j);
end
end
```

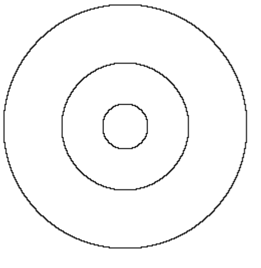
Algorithme de calcul de la transformée en distance quasi-euclidienne par l'algorithme DL en 2 passes

L'algorithme DL a une complexité constante par pixel. L'algorithme ci-contre, en 2 passes, nécessite 8 décalages (multiplication par 2), 12 sommes et 6 comparaisons par pixel. En réalité, l'algorithme en 2 passes produit des erreurs qui peuvent être corrigées par des balayages supplémentaires (utilisant des masques plus petits). L'algorithme DL complet a donc une complexité de : 8 décalages, 14 sommes et 8 comparaisons par pixel.

Algorithme de DL : résultats

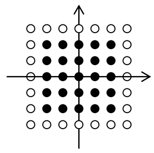






Implantation des opérateurs de base

Ex : élément structurant carré de coté *c*.



B

Méthode triviale :

```
DILATE (Image_IN X, Image_OUT Y,Elt_struct B) {
Pour tout pixel p ∈X {
  Y(p) = 0;
  Pour tout b ∈B {
     Y(p) = Y(p) OU X(p-b);
     }
   }
}
```

X

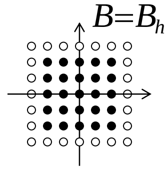
$\delta_B(X)$

Complexité du calcul par pixel : c^2

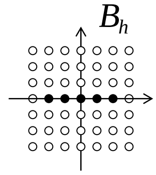
Implantation des opérateurs de base

Elément structurant carré de coté *c*.

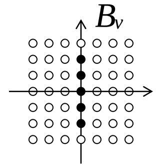
$B = B_h \oplus B_v$



B_h

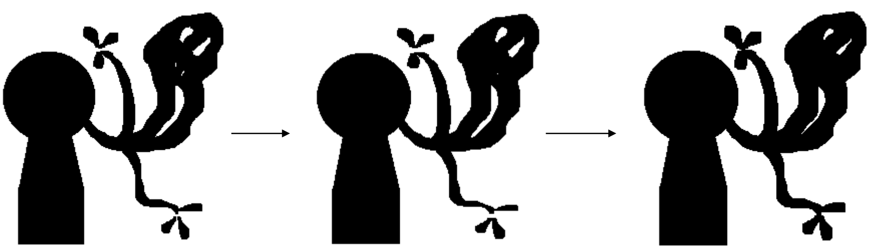


B_v



(décomposition des polyèdres de Steiner)

Complexité du calcul par pixel : *2c*



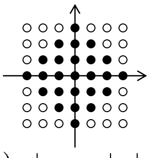
X $\qquad \delta_{B_h}(X) \qquad \delta_{B_v}(\delta_{B_h}(X)) = \delta_{\delta_{B_v}(B_h)}(X) = \delta_B(X)$

Erosions binaires et distances discrètes

Pour les ensembles (images binaires), dans le cas où l'élément structurant est une boule d'une distance discrète, on calculera l'érodé *par seuillage de la transformée en distance* :

ex :

distance de la 4-connexité



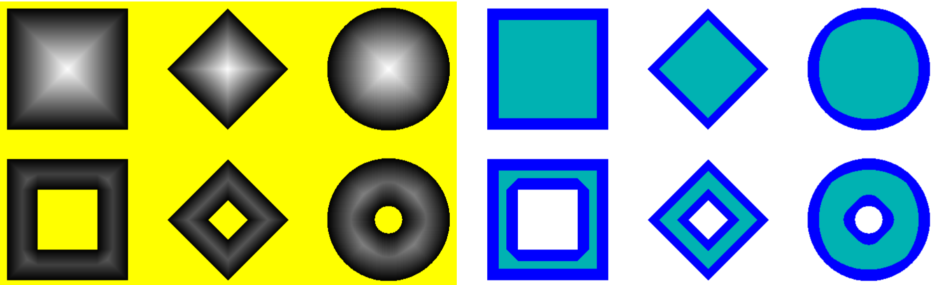
$d_4(a,b) = |x_a - x_b| + |y_a - y_b|$

en effet : $p \in \varepsilon_{B_\lambda}(X) \Leftrightarrow F_X^d(p) \geq \lambda$

transformée en distance d de l'ensemble X :

$F_X^d : \mathbb{Z}^2 \longrightarrow \mathbb{N}$

$p \longmapsto d(p, X^c)$

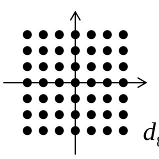


Transformée en distance d_4 — Erosion par une boule de d_4

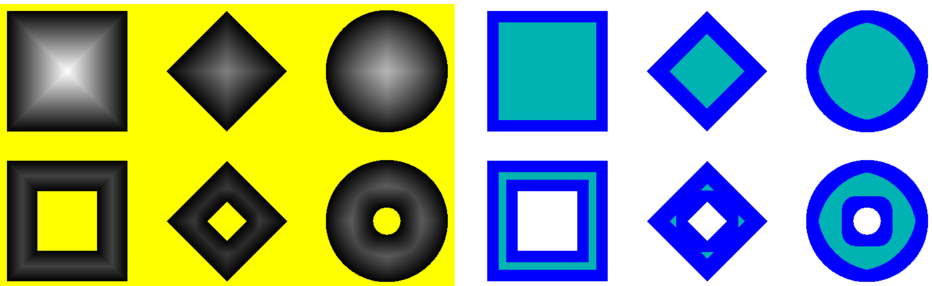
Erosions binaires et distances discrètes

ex :

distance de la 8-connexité



$d_8(a,b) = max(|x_a - x_b|, |y_a - y_b|)$

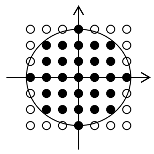


Transformée en distance d_8 — Erosion par une boule de d_8

Erosions binaires et distances discrètes

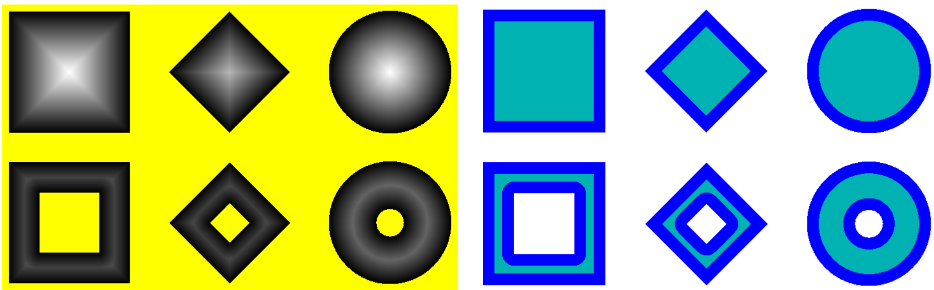
ex :

distance euclidienne



$$d_e(a,b) = \sqrt{(x_a - x_b)^2 + (y_a - y_b)^2}$$

Grâce aux techniques de calcul récursif de la transformée en distance, la complexité du calcul par pixel devient constante : *(O(1))*



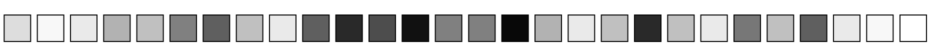
Transformée en distance *quasi-euclidienne* — Erosion par une boule *quasi-euclidienne*

Implantation des opérateurs en niveaux de gris

L'implantation de l'érosion par calcul de la fonction distance n'est valable que pour les opérateurs ensemblistes. Existe-t-il des algorithmes pour le calcul de l'érosion en niveaux de gris, dont la complexité soit indépendante de la taille de l'élément structurant ?

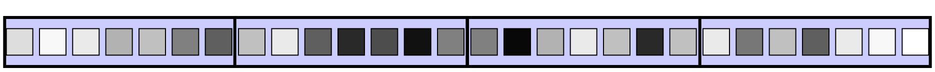
OUI ! Dans le cas d'élément structurant 1D (segment), nous détaillons ci-dessous l'algorithme de Van Herk :

Soit X une image 1D à valeurs numériques :



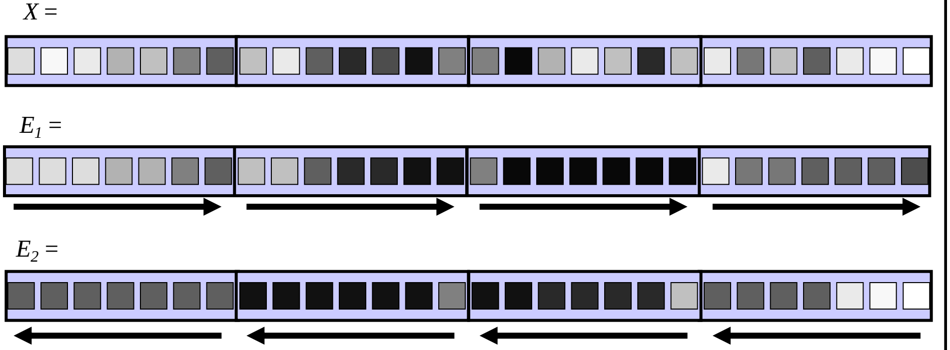
Soit B un segment de taille K ($K = 2p + 1$). Supposons qu'on souhaite calculer l'érosion de X par B.

On « partitionne » X en segment de taille K :



L'algorithme de Van Herk comprend 3 phases :

Van Herk / extrema récursifs par blocs



Phase (1) :

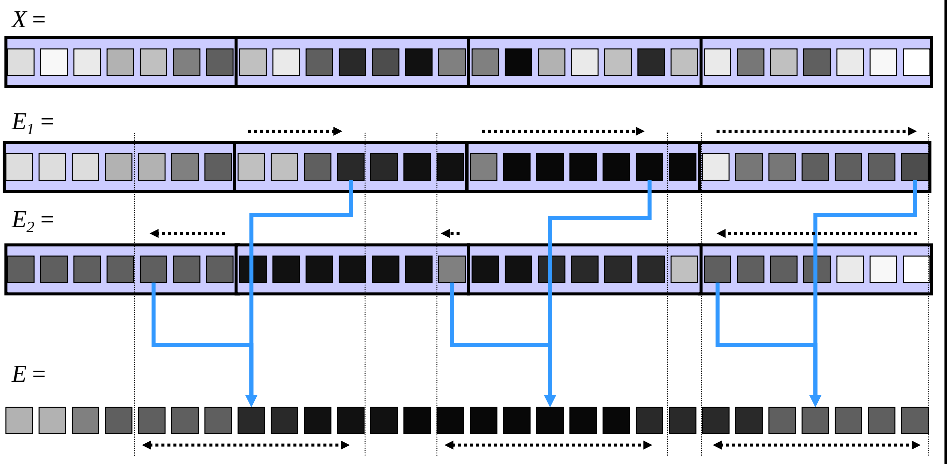
```
for (i = 0; i < W ; i++)
  if (i % K == 0)
    E1[i] = X[i];
  else
    E1[i] = min(E1[i-1],X[i]);
```

Phase (2) :

```
for (i = W-1; i >= 0 ; i--)
  if (i % K == 0)
    E2[i] = X[i];
  else
    E2[i] = min(E2[i+1],X[i]);
```

Rq : les calculs de E_1 et de E_2 sont indépendants et peuvent être réalisés en parallèle.

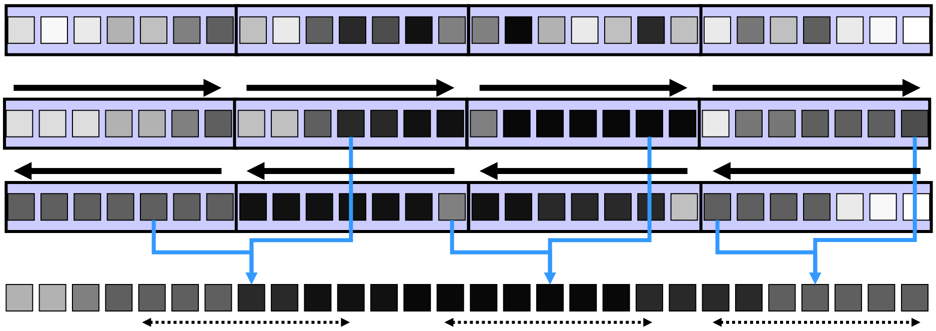
Van Herk / Calcul érosion/dilatation



Phase (3) :

```
for (i = 0; i < W ; i++)
    E[i] = min(E1[i+K/2],E2[i-K/2]);
```

Van Herk / Conclusion



- ❑ Complexité : 3 min/max quelque soit la longueur de l'élément structurant.
- ❑ Adapté à un calcul séquentiel, mais compatible avec un parallélisme de données.
- ❑ Adaptable à des éléments structurants rectilignes de n'importe quelle orientation.

[Van Herk 92]

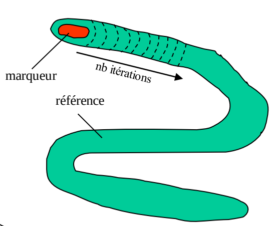
Reconstruction : algorithmique

RECONSTRUCTION NAÏVE

Sur une architecture séquentielle, l'implantation « naïve » de la reconstruction, *i.e.* basée sur la définition :

$$\begin{cases} \delta_g^r(f) = \delta_g(f) \wedge r \\ E_g^r(f) = \sup_{n \geq 0} \{(\delta_g^r)^n(f)\} \end{cases}$$

conduit à un coût de calcul tout à fait prohibitif, puisque le nombre d'itérations de dilatation géodésique peut être égal au diamètre géodésique des plus grandes composantes connexes :

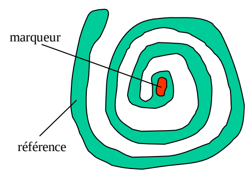


RECONSTRUCTION SEQUENTIELLE

Une implantation sensiblement plus efficace consiste à « propager » le marqueur au cours d'un balayage séquentiel, direct puis rétrograde :

```
RECONSTRUIT (Marqueur M, Référence R) {
  Répéter jusqu'à stabilité {
    // Balayage direct
    Pour j de 0 à h {
      Pour i de 0 à w {
        M(i,j) = MIN(R(i,j),MAX(M(i-1,j),M(i,j-1),M(i,j));
      }
    }
    // Balayage rétrograde
    Pour j de h à 0 {
      Pour i de w à 0 {
        M(i,j) = MIN(R(i,j),MAX(M(i+1,j),M(i,j+1),M(i,j));
      }
    }
  }
```

Néanmoins, le nombre d'itérations de double balayage peut parfois être important dans le cas de composantes connexes enroulées, par exemple :

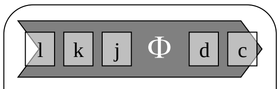


Algorithmique des files d'attente

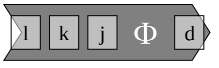
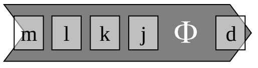
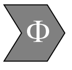
La file d'attente (FIFO) est une structure de donnée particulièrement utile dans les algorithmes morphologiques à base de reconstruction géodésique. Son intérêt est multiple :

• On restreint les calculs aux pixels susceptibles de changer : on examine les pixels qui sont dans la file d'attente, et pas tous les pixels de l'image.

• La terminaison d'un algorithme de relaxation est rendue visible par le fait que la file d'attente est vide. On n'a donc plus besoin de garder une trace explicite des changements pour détecter la convergence.



***Φ* est la file d'attente.**
***c* est la valeur de l'élément de tête.**
***l* celle de l'élément de queue.**

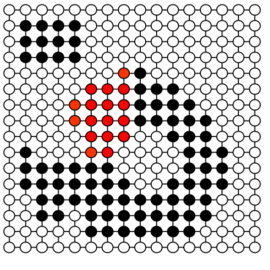
x = pop(Φ)		La fonction **POP(Φ)** supprime l'élément de tête et renvoie sa valeur, soit **x = c**.
push(Φ,y)		La procédure **PUSH(y,Φ)** ajoute en queue de **Φ** un nouvel élément de valeur **y**, soit **m = y**.
empty(Φ) == TRUE		La fonction **empty(Φ)** est une fonction booléenne qui renvoie **1** si et seulement si **Φ** est vide.

La structure de donnée* File d'attente *et ses fonctions associées.

Reconstruction binaire à base de files d'attente

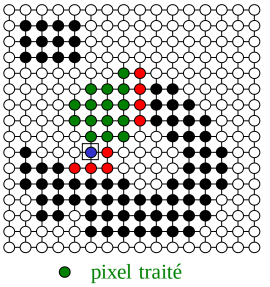
La reconstruction par file d'attente consiste à initialiser la FIFO avec le marqueur, puis pour chaque élément de la FIFO extrait, rajouter ses voisins dans l'image, ainsi jusqu'à convergence (FIFO vide). Le nombre d'opération est proportionnel au nombre de pixels « ajoutés » au marqueur…

Initialisation



● Image
● Marqueur
○ Complémentaire

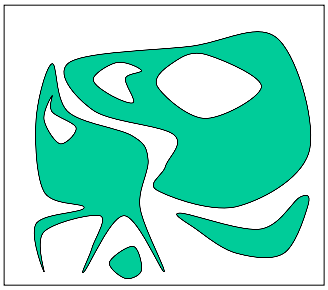
Parcours



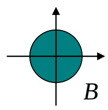
● pixel traité
● pixel à traiter
● pixel en cours

Ouvertures et fermetures par reconstruction

L'ouverture par reconstruction élimine les composantes connexes qui n'appartiennent pas à l'ouvert sans modifier les autres :

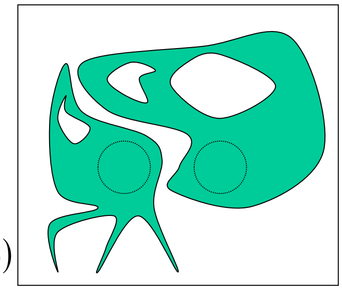


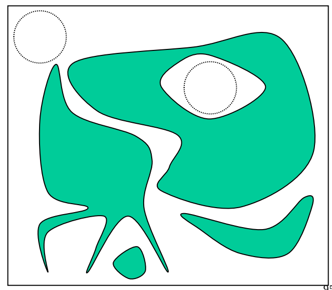
X



ouverture par reconstruction

$$E^X(\gamma_B(X))$$





La fermeture par reconstruction est définie par dualité :

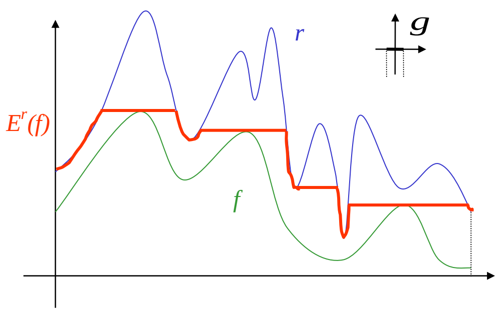
fermeture par reconstruction

$$\left(E^{X^c}\left((\varphi_B(X))^c\right)\right)^c$$

Reconstruction fonctionnelle

La dilatation géodésique de f dans r :

$$\delta_g^r(f) = \delta_g(f) \wedge r$$



La reconstruction géodésique de f dans r :

$$E_g^r(f) = \sup_{n \geq 0} \left\{ (\delta_g^r)^n(f) \right\}$$

Extrema régionaux

La notion d'extremum régional joue un rôle important pour les image numériques, en particulier dans le calcul des opérateurs géodésiques. Il s'agit de « plateaux », au bord desquels on ne peut que descendre (pour les maxima régionaux), ou monter (pour les minima régionaux) strictement.

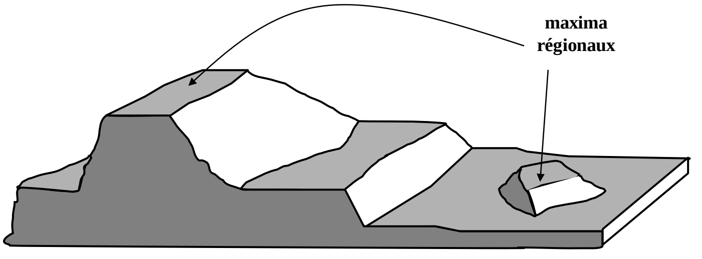
Soit f une fonction numérique.

$$f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{N}$$

$$SG_i(f) = \{x \in \mathbf{R}^n / f(x) \geq i\}$$

$$\boxed{\max_f = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \{SG_i(f) \setminus (E^{SG_i(f)}(SG_{i+1}(f)))\}}$$

Un point x appartient à un maximum régional du graphe de f lorsqu'on ne peut pas atteindre un point y tel que $f(y)>f(x)$ sans redescendre strictement :

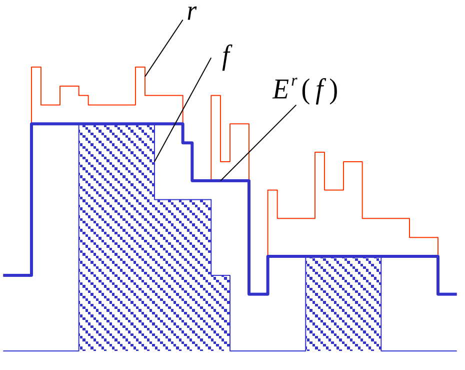


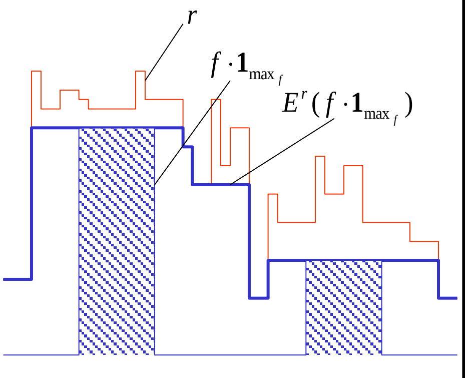
Reconstruction numérique à base de FIFO

Dans le cas de la reconstruction numérique (fonctionnelle), l'utilisation des FIFO est moins immédiate car il faut déterminer le domaine de stabilité (ensemble des points fixes) de la fonction marqueur f, au bord duquel la propagation va être initialisée. Ce domaine de stabilité est en fait l'ensemble des *maxima régionaux* de f. On utilise alors la propriété suivante :

La reconstruction de f est la même que la reconstruction de la restriction de f à ses maxima régionaux :

$$\boxed{E^r(f) = E^r(f \cdot \mathbf{1}_{\max_f})}$$

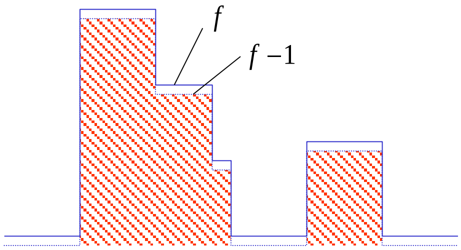




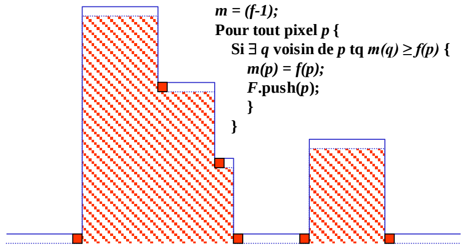
Reconstruction numérique à base de FIFO

(1) La première étape consiste donc à calculer les maxima régionaux de f :

Pour cela, on reconstruit f-1 sous f :

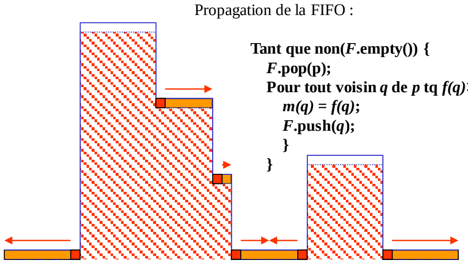


Initialisation de la FIFO :



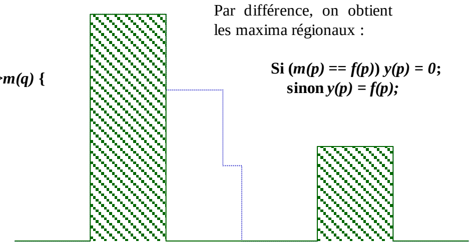
m = (f-1);
Pour tout pixel p {
Si $\exists$ q voisin de p tq $m(q) \geq f(p)$ {
$m(p) = f(p)$;
F.push(p);
}
}

Propagation de la FIFO :



Tant que non(F.empty()) {
F.pop(p);
Pour tout voisin q de p tq $f(q)>m(q)$ {
$m(q) = f(q)$;
F.push(q);
}
}

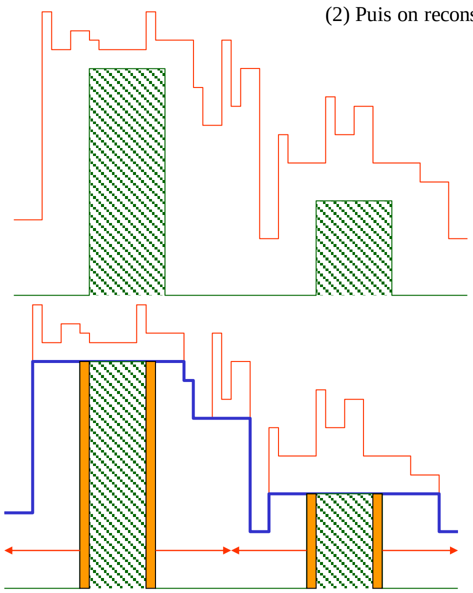
Par différence, on obtient les maxima régionaux :



Si ($m(p) == f(p)$) $y(p) = 0$;
sinon $y(p) = f(p)$;

Reconstruction numérique à base de FIFO

(2) Puis on reconstruit $\max_f$ sous r :



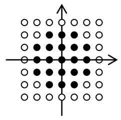
// Initialisation FIFO
$m = max_f$;
Pour tout pixel p tq
($m(p) \neq 0$) et ($\exists$ q voisin de p tq $m(q) = 0$) {
F.push(p);
}
// Propagation FIFO
Tant que non(F.empty()) {
F.pop(p);
Pour tout voisin q de p tq $m(p)>m(q)$ {
$m(q) = MIN(f(q),m(p))$;
F.push(q);
}
}

Le coût de calcul de la reconstruction numérique par FIFO est donc obtenue par un nombre constant de parcours d'images : 2 balayages complets pour les initialisations de FIFO, et 2 parcours de FIFO où les points ne sont examinés qu'une fois en général (2 ou 3 dans des cas extrêmes où 2 ou plusieurs maxima régionaux sont très proches).

Ouvertures et fermetures par reconstruction

Les ouvertures et fermetures par reconstruction éliminent les petites structures en préservant les contours des images numériques :

élément structurant de l'ouverture morphologique :



original

ouverture par reconstruction

fermeture par reconstruction

Transformées en distance et FIFO

Les files d'attente peuvent également être utilisées pour calculer la transformée en distance de manière efficace par propagation du contour. L'algorithme correspond alors à une application à la maille carrée de l'algorithme de Dijkstra. Tous les algorithmes récursifs présentés précédemment s'adaptent facilement à ce cadre. Par exemple, pour la distance d_4 :

```
% Initialisation FIFO
for i = 1:w
  for j = 1:h
    if (i,j)∈X
      if ∃(i',j'),d4((i,j),(i',j'))==1)&(i',j')∉X : {F(i,j) = 1; Q.push(i,j);}
      else : F(i,j) = ∞ ; endif
    endif
  endfor
endfor
% Parcours de la FIFO et étiquetage
while ~(Q.empty)
  Q.pop(i,j);
  forall (i',j'), (i',j')∈X,d4((i,j),(i',j'))==1) and F(i',j')==∞ : {F(i',j') = F(i,j)+1 ; Q.push(i',j');}
  endfor
endwhile
```

Algorithme de calcul de la transformée en distance d_4 par l'algorithme de Dijkstra avec FIFO.

Géométrie algorithmique – Conclusion

A RETENIR POUR CE COURS :

• Concepts de base : Distances et Topologies discrètes – Paradoxe de Jordan – Définition algébrique de la composante connexe.

• Algorithmes de transformées en distance : Intérêt, principe, complexité.

• Calculs rapides des opérateurs d'érosion et dilatation dans le cas binaire : principe, restrictions.

• Calcul rapide des opérateurs en niveau de gris : cas 1d (Algorithme de Van Herk)

• Calcul rapide des opérateurs de reconstruction : principe des files d'attente – Algorithme de reconstruction binaire – Notion de maximum régional – Algorithme de reconstruction numérique.

Chapitre 3 : Filtrage morphologique – opérateurs connexes

• Filtres morphologiques.

• Ouvertures et fermetures algébriques.

• Analyse granulométrique.

• Filtres alternés séquentiels.

• Pyramides et espaces d'échelles morphologiques.

• Opérateurs connexes et applications de la géodésie

• Filtres connexes et F.A.S par reconstruction

• Invariance par changement de contraste et EDP

L'approche morphologique du filtrage

En traitement linéaire des images, filtrer, c'est *éliminer* certaines *composantes fréquentielles* des images.

Filtrage = Convolution

En morphologie mathématique, filtrer, c'est *simplifier* l'image en supprimant certaines structures géométriques (en général implicitement définies par un ou plusieurs éléments structurants).

Le filtre morphologique simplifie l'image en préservant la structure, mais il perd en général de l'information (→ Croissance).

Le filtre morphologique est stable et possède une classe d'invariance connue (→ Idempotence).

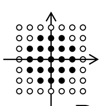
Rappel : ouvertures et fermetures morphologiques

l'ouverture morphologique de X par B.

$$\boxed{\gamma_B(X) = \delta_{\check{B}}(\varepsilon_B(X)) = \left(X \ominus \check{B}\right) \oplus B}$$

la fermeture morphologique de X par B.

$$\boxed{\varphi_B(X) = \varepsilon_{\check{B}}(\delta_B(X)) = \left(X \oplus \check{B}\right) \ominus B}$$



B

X

$\gamma_B(X)$

$\varphi_B(X)$

CROISSANCE

$$x \leq y \Rightarrow \begin{cases} \gamma_B(x) \leq \gamma_B(y) \\ \varphi_B(x) \leq \varphi_B(y) \end{cases}$$

IDEMPOTENCE

$$\gamma_B\left(\gamma_B(x)\right) = \gamma_B(x)$$
$$\varphi_B\left(\varphi_B(x)\right) = \varphi_B(x)$$

EXTENSIVITE

L'ouverture est anti-extensive : $\gamma_B(x) \leq x$

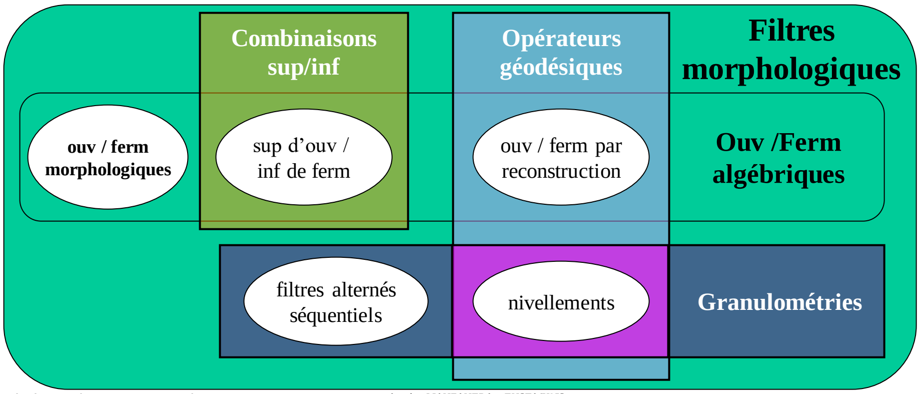
La fermeture est extensive : $x \leq \varphi_B(x)$

Filtres morphologiques

Un *filtre morphologique* est un opérateur ψ *croissant* et *idempotent* :

$$x \leq y \Rightarrow \psi(x) \leq \psi(y) \qquad \psi(\psi(x)) = \psi(x)$$

On peut construire différentes familles de filtres morphologiques à partir des filtres de base, l'ouverture et la fermeture morphologiques :



Ouvertures et fermetures algébriques

Les ouvertures et fermetures algébriques généralisent les ouvertures et fermetures morphologiques.

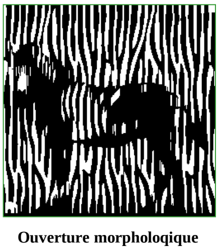
- Une ouverture algébrique est un filtre morphologique anti-extensif.
- Une fermeture algébrique est un filtre morphologique extensif.

PROPRIETE

- Un sup d'ouvertures morphologiques est une ouverture algébrique
- Un inf de fermetures morphologiques est une fermeture algébrique

ex :

Image originale



Ouverture morphologique par un segment vertical

Ouverture morphologique par un segment horizontal

Ouverture algébrique par union des deux ensembles

Granulométries

L'analyse granulométrique est l'étude de la taille des objets fondée sur le principe du *tamisage* : sélection des objets par un ensemble de tamis de différentes tailles.

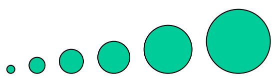
Formellement, une granulométrie peut être définie par une famille d'ouvertures :

$$(\gamma_\lambda)_{\lambda \geq 0} \qquad \text{telle que :}$$

$$0 \leq \lambda \leq \lambda' \Rightarrow \gamma_\lambda \gamma_{\lambda'} = \gamma_{\lambda'} \gamma_\lambda = \gamma_{\lambda'}$$

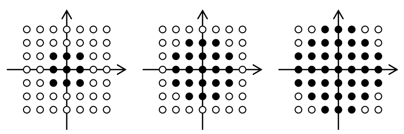
ex1 : $(\gamma_\lambda)_{\lambda \in \mathbf{R}^+}$

Ouvertures par des boules euclidiennes de rayon λ



ex2 : $(\gamma_\lambda)_{\lambda \in \mathbf{N}}$

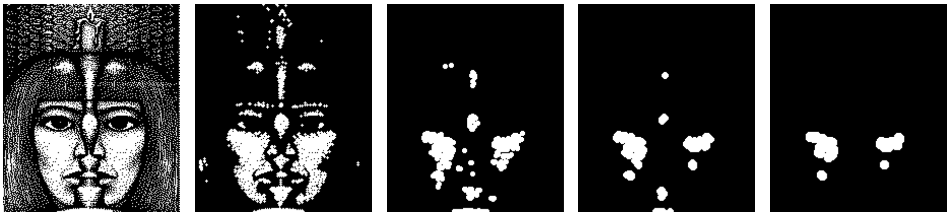
Ouvertures par une suite croissante de boules discrètes



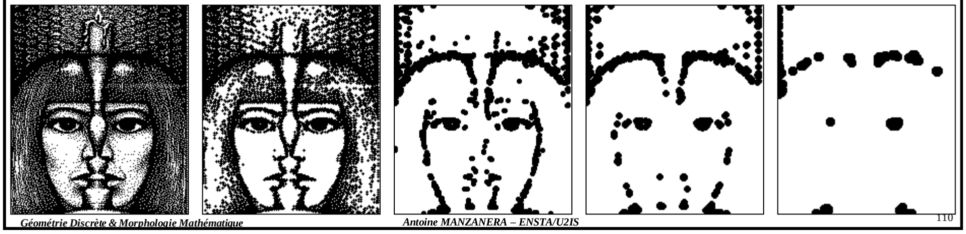
Granulométrie et anti-granulométrie

La famille des opérateurs duaux (fermetures de taille croissante) est une anti-granulométrie :

granulométrie



anti-granulométrie

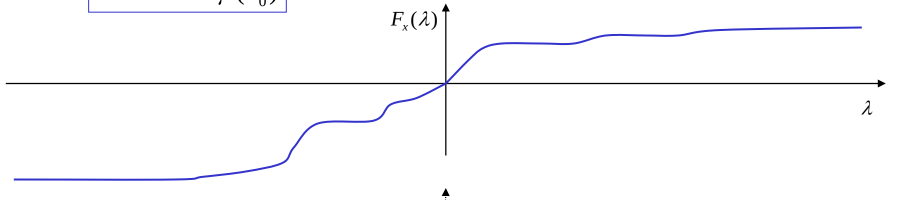


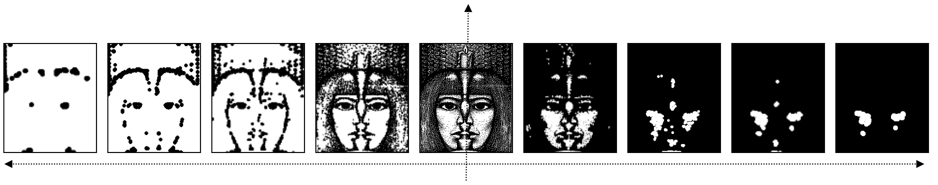
Fonction de distribution granulométrique

Soit μ une mesure bornée sur un treillis E (aire, intégrale…)

Pour $x \in E$, on note x_λ (resp. $x_{-\lambda}$) l'image de x par l'opérateur de granulométrie (resp.d'anti-granulométrie) d'indice λ.

On note $\boxed{F_x(\lambda) = 1 - \dfrac{\mu(x_\lambda)}{\mu(x_0)}}$ la fonction de distribution sur x de la granulométrie $(\gamma_\lambda)_\lambda$

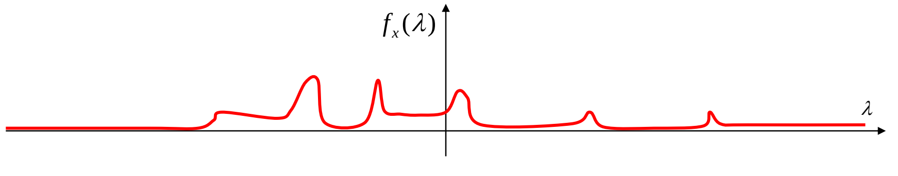


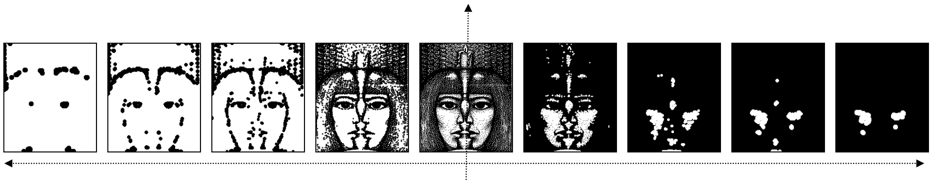


Spectre granulométrique

Le spectre granulométrique est la dérivée de la fonction de distribution granulométrique :

$$\boxed{f_x(\lambda) = F'_x(\lambda)}$$





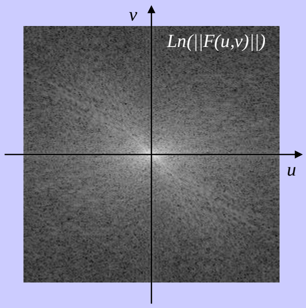
L'analyse granulométrique

Etude quantitative des images par la mesure de la contribution de chaque composante à l'image globale :

Traitement linéaire :

Transformée de Fourier

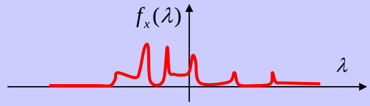
Composantes = sinusoïdes complexes



Morphologie mathématique :

Analyse granulométrique

Composantes = famille de boules



Historiquement : une des premières application de la morphologie mathématique était l'étude quantitative des sols poreux par analyse granulométrique de coupes microscopiques.

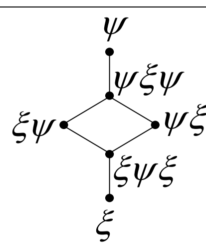
Construction des filtres alternés

L'ensemble des filtres sur un treillis complet E forme un treillis $\Im$

Théorème Soient $\xi, \psi \in \Im$ tels que $\xi \leq \psi$

- L'ensemble ci-contre est un sous-treillis de $\Im$:
- De plus, on a l'équivalence :

$$\psi\xi \leq \xi\psi \Leftrightarrow \psi\xi\psi = \xi\psi \Leftrightarrow \xi\psi\xi = \psi\xi$$



Matheron 1988

dem : (1) filtres (idempotence) : $\xi\psi = \xi\xi\xi\psi \leq \xi\psi\xi\psi \leq \xi\psi\psi\psi = \xi\psi$

$\xi\psi\xi = \xi\xi\xi\xi\psi\xi \leq \xi\psi\xi\xi\psi\xi \leq \xi\psi\psi\psi\psi\xi = \xi\psi\xi$

(2) ordres : $\xi = \xi\xi\xi \leq \xi\psi\xi \leq \begin{matrix} \psi\psi\xi = \psi\xi = \psi\xi\xi \\ \xi\psi\psi = \xi\psi = \xi\xi\psi \end{matrix} \leq \psi\xi\psi \leq \psi\psi\psi = \psi$

(3) plus petit majorant :

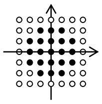
soit ζ un filtre tel que $\zeta \geq \xi\psi$ et $\zeta \geq \psi\xi$ alors $\zeta = \zeta\zeta \geq \psi\xi\xi\psi = \psi\xi\psi$

(4) équivalence : $\xi\psi = \psi\xi\psi \Rightarrow \xi\psi \geq \psi\xi\xi = \psi\xi$

et $\psi\xi \leq \xi\psi \Rightarrow \psi\xi\psi \leq \xi\psi\psi = \xi\psi = \xi\xi\psi \leq \psi\xi\psi$

Exemple de filtres alternés

On prend : $\xi = \gamma$ (ouverture morphologique) $\psi = \varphi$ (fermeture morphologique)



élément structurant

I γ φ

$\varphi\gamma\varphi$ $\varphi\gamma$ $\gamma\varphi$ $\gamma\varphi\gamma$

Filtres alternés séquentiels

Soit $(\gamma_\lambda)_{\lambda \geq 0}$ une granulométrie, et $(\gamma_\lambda^* = \varphi_\lambda)_{\lambda \geq 0}$

l'anti-granulométrie associée

Alors les opérateurs suivants :

$$\boxed{\Theta_\lambda = \varphi_\lambda \gamma_\lambda \ldots \varphi_2 \gamma_2 \varphi_1 \gamma_1}$$

$$\boxed{\Xi_\lambda = \gamma_\lambda \varphi_\lambda \ldots \gamma_2 \varphi_2 \gamma_1 \varphi_1}$$

sont des filtres, dits *filtres alternés séquentiels* associés à la granulométrie $(\gamma_\lambda)_{\lambda \geq 0}$

Propriétés d'absorption :

$$\lambda \leq \lambda' \Rightarrow \begin{cases} \Theta_{\lambda'} \Theta_\lambda = \Theta_{\lambda'} & \text{mais} \quad \Theta_\lambda \Theta_{\lambda'} \leq \Theta_{\lambda'} \\ \Xi_{\lambda'} \Xi_\lambda = \Xi_{\lambda'} & \text{mais} \quad \Xi_\lambda \Xi_{\lambda'} \leq \Xi_{\lambda'} \end{cases}$$

Serra 1988

Filtres alternés séquentiels : démonstration des propriétés

Filtre morphologique (idempotence) :

$$\lambda \leq \lambda' \Rightarrow \gamma_{\lambda'} \leq \gamma_{\lambda} \leq \varphi_{\lambda} \leq \varphi_{\lambda'} \quad (*)$$

$$(*) \Rightarrow \varphi_{\lambda}\gamma_{\lambda} \geq \gamma_{\lambda}\gamma_{\lambda} = \gamma_{\lambda} \geq \gamma_{\lambda'} \quad \Rightarrow \quad \varphi_{\lambda'}\gamma_{\lambda'}\varphi_{\lambda}\gamma_{\lambda} \geq \varphi_{\lambda'}\gamma_{\lambda'}\gamma_{\lambda'} = \varphi_{\lambda'}\gamma_{\lambda'}$$

et $$(*) \Rightarrow \varphi_{\lambda}\gamma_{\lambda} \leq \varphi_{\lambda}\varphi_{\lambda} = \varphi_{\lambda} \leq \varphi_{\lambda'} \quad \Rightarrow \quad \varphi_{\lambda}\gamma_{\lambda}\varphi_{\lambda'}\gamma_{\lambda'} \leq \varphi_{\lambda'}\varphi_{\lambda'}\gamma_{\lambda'} = \varphi_{\lambda'}\gamma_{\lambda'}$$

donc $$\lambda \leq \lambda' \quad \Rightarrow \quad \varphi_{\lambda}\gamma_{\lambda}\varphi_{\lambda'}\gamma_{\lambda'} \leq \varphi_{\lambda'}\gamma_{\lambda'} \leq \varphi_{\lambda'}\gamma_{\lambda'}\varphi_{\lambda}\gamma_{\lambda}$$

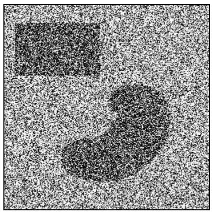
d'où $$\varphi_{\lambda}\gamma_{\lambda}...\varphi_{2}\gamma_{2}\varphi_{1}\gamma_{1}\varphi_{\lambda}\gamma_{\lambda}...\varphi_{2}\gamma_{2}\varphi_{1}\gamma_{1} \geq \varphi_{\lambda}\gamma_{\lambda}\varphi_{\lambda}\gamma_{\lambda}...\varphi_{2}\gamma_{2}\varphi_{1}\gamma_{1} = \varphi_{\lambda}\gamma_{\lambda}...\varphi_{2}\gamma_{2}\varphi_{1}\gamma_{1}$$

et $$\varphi_{\lambda}\gamma_{\lambda}...\varphi_{2}\gamma_{2}\varphi_{1}\gamma_{1}\varphi_{\lambda}\gamma_{\lambda}...\varphi_{2}\gamma_{2}\varphi_{1}\gamma_{1} \leq \varphi_{\lambda}\gamma_{\lambda}\varphi_{\lambda}\gamma_{\lambda}...\varphi_{2}\gamma_{2}\varphi_{1}\gamma_{1} = \varphi_{\lambda}\gamma_{\lambda}...\varphi_{2}\gamma_{2}\varphi_{1}\gamma_{1}$$

Propriétés d'absorption :

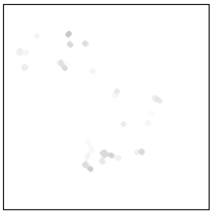
$$\begin{aligned}
\Theta_{\lambda'}\Theta_{\lambda} &= \left(\varphi_{\lambda'}\gamma_{\lambda'}...\varphi_{\lambda+1}\gamma_{\lambda+1}\right)\left(\varphi_{\lambda}\gamma_{\lambda}...\varphi_{2}\gamma_{2}\varphi_{1}\gamma_{1}\right)\left(\varphi_{\lambda}\gamma_{\lambda}...\varphi_{2}\gamma_{2}\varphi_{1}\gamma_{1}\right) \\
&= \left(\varphi_{\lambda'}\gamma_{\lambda'}...\varphi_{\lambda+1}\gamma_{\lambda+1}\right)\left(\varphi_{\lambda}\gamma_{\lambda}...\varphi_{2}\gamma_{2}\varphi_{1}\gamma_{1}\right) = \Theta_{\lambda'} \\
\Theta_{\lambda}\Theta_{\lambda'} &= \left(\varphi_{\lambda}\gamma_{\lambda}...\varphi_{2}\gamma_{2}\varphi_{1}\gamma_{1}\right)\left(\varphi_{\lambda'}\gamma_{\lambda'}...\varphi_{\lambda+1}\gamma_{\lambda+1}\right)\left(\varphi_{\lambda}\gamma_{\lambda}...\varphi_{2}\gamma_{2}\varphi_{1}\gamma_{1}\right) \\
&\leq \Theta_{\lambda'}
\end{aligned}$$

Application à la réduction du bruit

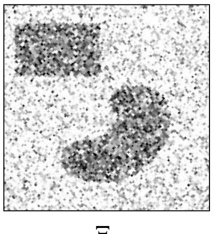


Original

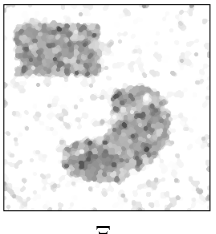
Les filtres alternés séquentiels conduisent à une bonne réduction du bruit grâce à une élimination progressive des pics et des creux de faible surface.



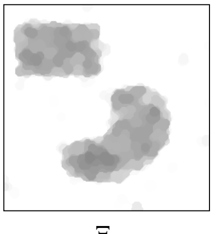
Application directe du filtre alterné $\gamma_4\,\phi_4$



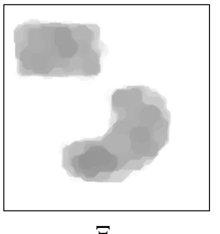
Ξ_1



Ξ_2

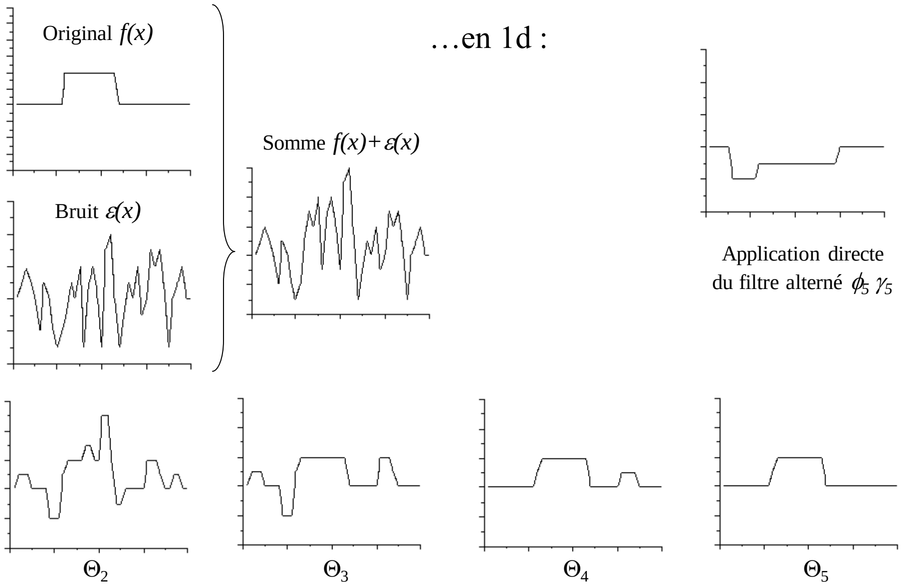


Ξ_5



Ξ_8

Application à la réduction du bruit



Espace d'échelle morphologique

Une granulométrie induit un *espace d'échelle* (scale-space), qui fournit une représentation des images à différents niveaux de détail.

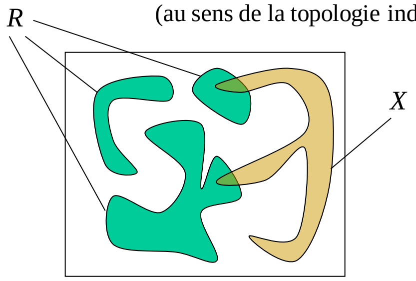
Retour à la reconstruction géodésique

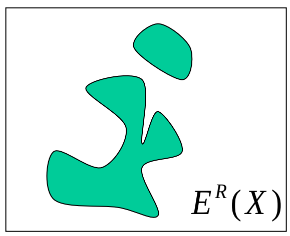
posons
$$\begin{cases} (\delta_{B_1}^R)^0(X) = X \\ (\delta_{B_1}^R)^n(X) = \delta_{B_1}^R\left((\delta_{B_1}^R)^{n-1}(X)\right) \quad \text{pour} \quad n > 0 \end{cases}$$

La reconstruction géodésique de X dans R est définie par :

$$\boxed{E_{B_1}^R(X) = \sup_{n \geq 0}\left\{(\delta_{B_1}^R)^n(X)\right\}}$$

Dans le cadre ensembliste, c'est l'ensemble des composantes connexes (au sens de la topologie induite par B_1) de R qui intersectent X :



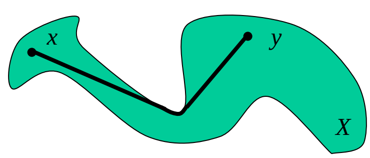


Mesures géodésiques

$(x, y) \in X^2$

La distance géodésique entre x et y dans X :

$$d_X(x,y) = min\left\{n \geq 0; x \in (\delta_{B_1}^X)^n(\{y\})\right\}$$

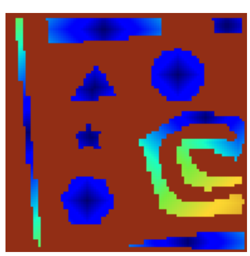


C'est la longueur du (ou des) plus court(s) chemin(s) **dans *X*** entre x et y.

Soit X une composante connexe.

La fonction de propagation de X :

$$\Pi_X : X \longrightarrow \mathbb{N}$$
$$x \longmapsto \max_{y \in X} d_X(x,y)$$



Soit X une composante connexe.

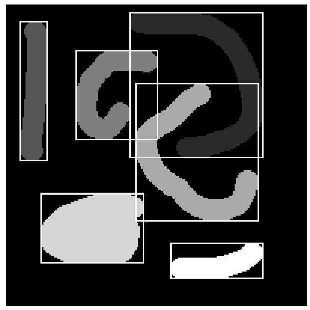
Le diamètre géodésique de X :

$$\Delta_X = \max_{x \in X} \Pi_X(x) = \max_{(x,y) \in X^2} d_X(x,y)$$

Etiquetage des composantes connexes

La première application de la reconstruction géodésique est l'analyse individuelle de particules, qui consiste à extraire les composantes connexes l'une après l'autre par reconstruction du premier pixel rencontré lors d'un balayage video :

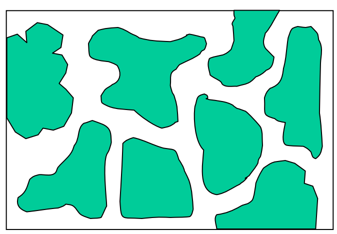
Image binaire



Etiquetage des composantes connexes

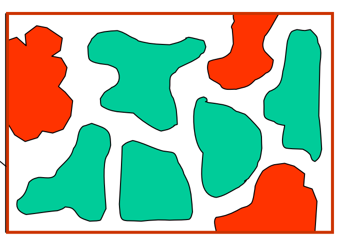
Suppression des objets touchant le bord de l'image

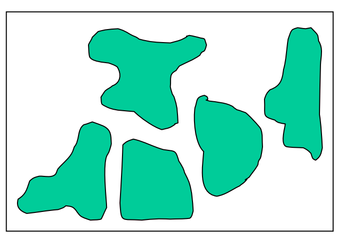
La suppression des objets touchant le bord de l'image binaire X s'obtient par différence avec la reconstruction du bord dans X :



X

Y

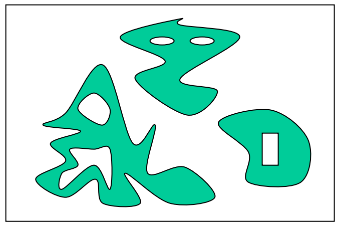




$X \setminus E^X(Y)$

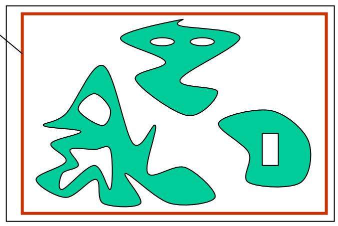
Bouchage de trous

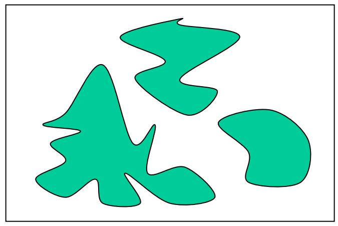
Le bouchage de trous dans l'image binaire (bidimensionnelle !) X s'obtient par complément de la reconstruction dans X^c d'un ensemble qui n'intersecte pas X :



X

Y





$(E^{X^c}(Y))^c$

Seuillage par hystérésis

I

I_h

I_b

$E^{I_b}(I_h)$

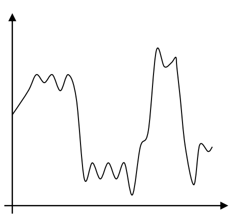
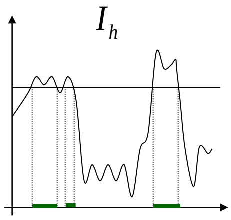
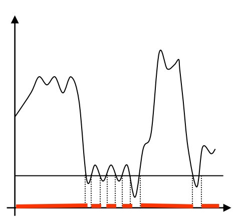


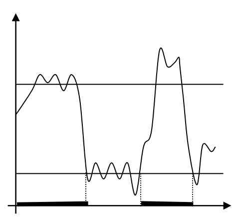
Image en niveaux de gris



Seuil haut



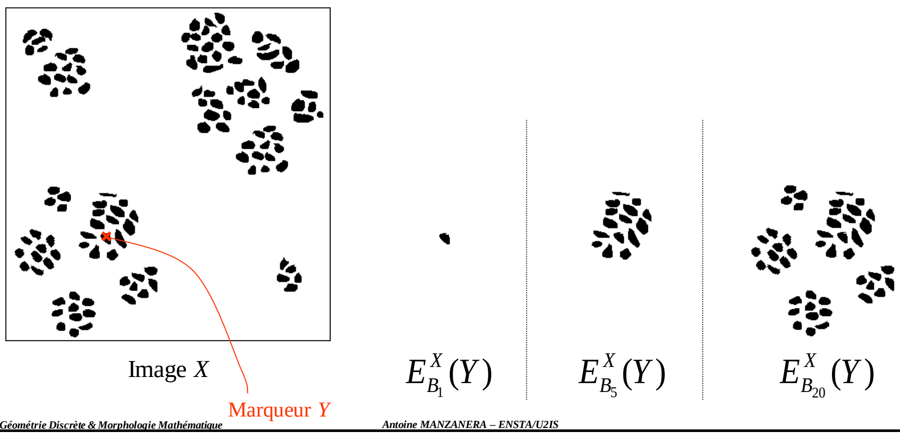
Seuil bas



Seuil par hystérésis

Connexions généralisées

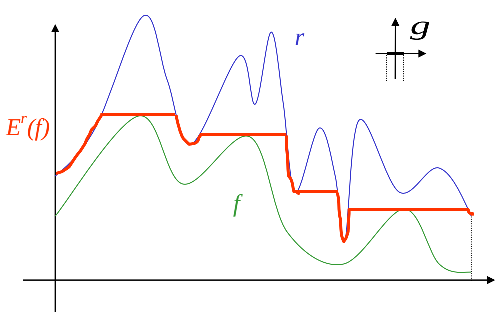
En faisant varier la taille des éléments structurants utilisés dans les reconstructions, on obtient une hiérarchie de voisinages, et donc une topologie à divers degrés de détails :



Reconstruction fonctionnelle

La dilatation géodésique de f dans r :

$$\delta_g^r(f) = \delta_g(f) \wedge r$$



La reconstruction géodésique de f dans r :

$$E_g^r(f) = \sup_{n \geq 0} \left\{ (\delta_g^r)^n(f) \right\}$$

Extrema régionaux

La notion d'extremum régional joue un rôle important pour les image numériques, en particulier dans le calcul des opérateurs géodésiques. Il s'agit de « plateaux », au bord desquels on ne peut que descendre (pour les maxima régionaux), ou monter (pour les minima régionaux) strictement.

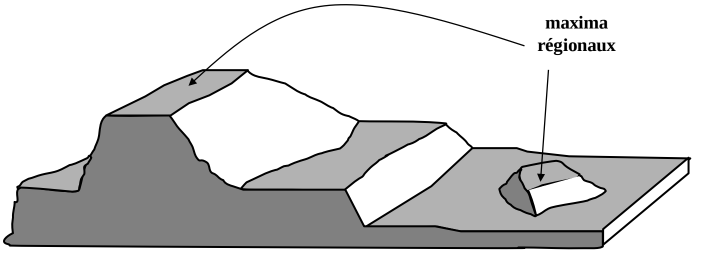
Soit f une fonction numérique.

$$f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{N}$$

$$SG_i(f) = \{x \in \mathbf{R}^n \,/\, f(x) \geq i\}$$

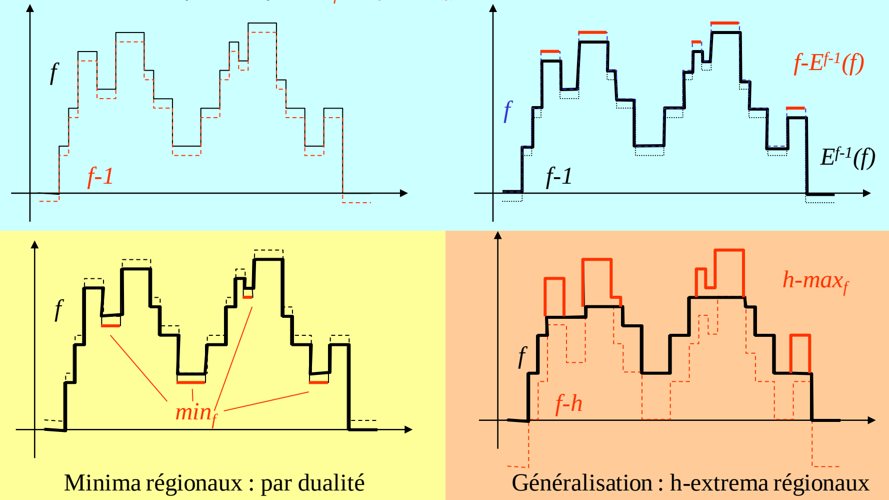
$$\boxed{\max_f = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \{SG_i(f) \setminus (E^{SG_i(f)}(SG_{i+1}(f)))\}}$$

Un point x appartient à un maximum régional du graphe de f lorsqu'on ne peut pas atteindre un point y tel que $f(y)>f(x)$ sans redescendre strictement :



Calcul des maxima régionaux

Les maxima régionaux d'une fonction numérique f peuvent se calculer à partir de la reconstruction de f-1 sous f : $max_f = f - E^{f-1}(f)$



Minima régionaux : par dualité

Généralisation : h-extrema régionaux

Erodés ultimes

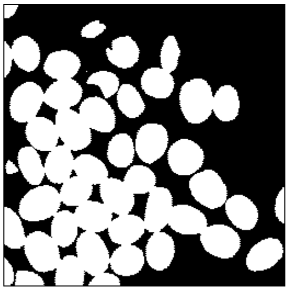
Les maxima régionaux de la transformée en distance correspondent aux composantes connexes qui disparaissent lors d'érosions successives.

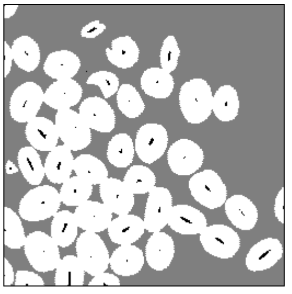
F_X^d la transformée en distance d de l'ensemble X.

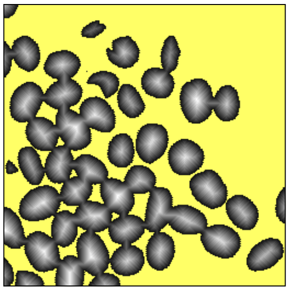
$$SG_i(F_X^d) = \{x \in \mathbf{R}^n \,/\, F_X^d(x) \geq i\}$$
$$= \{x \in \mathbf{R}^n \,/\, d(x, X^c) \geq i\}$$
$$= \varepsilon_{B_i}(X)$$

$$\boxed{\max_{F_X^d} = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} \left\{ SG_i(F_X^d) \setminus \left(E^{SG_i(F_X^d)}(SG_{i+1}(F_X^d)) \right) \right\} = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} \left\{ \varepsilon_{B_i}(X) \setminus \left(E^{\varepsilon_{B_i}(X)}(\varepsilon_{B_{i+1}}(X)) \right) \right\}}$$

Application : singularisation de particules se recouvrant partiellement :


original


érodés ultimes (en noir)


transformée en distance

Ouvertures et fermetures par reconstruction

La reconstruction géodésique est un filtre morphologique :

$$x \leq y \Rightarrow E^r(x) \leq E^r(y) \qquad E^r\left(E^r(x)\right) = E^r(x)$$

Si ξ (resp. ψ) est un opérateur anti-extensif (resp. extensif)

alors l'opérateur : $E^x\left(\xi(x)\right)$ (resp. $\left(E^{x^c}\left(\left(\psi(x)\right)^c\right)\right)^c$)

est une ouverture (resp. fermeture) algébrique.

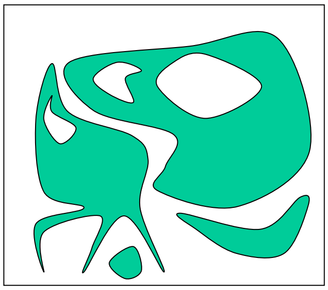
Cas particulier important : $\xi = \gamma$ (ouverture) et $\psi = \phi$ (fermeture) :

ouverture par reconstruction : $\boxed{E^x\left(\gamma(x)\right)}$

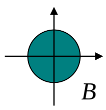
fermeture par reconstruction : $\boxed{\left(E^{x^c}\left(\left(\varphi(x)\right)^c\right)\right)^c}$

Ouvertures et fermetures par reconstruction

L'ouverture par reconstruction élimine les composantes connexes qui n'appartiennent pas à l'ouvert sans modifier les autres :



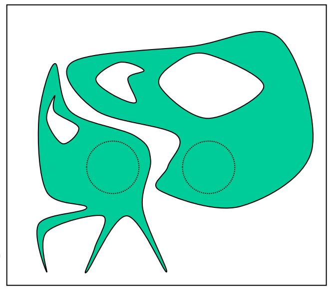
X



B

ouverture par reconstruction

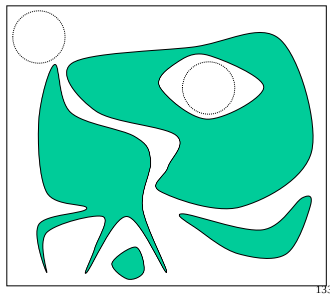
$E^X\left(\gamma_B(X)\right)$



La fermeture par reconstruction est définie par dualité :

fermeture par reconstruction

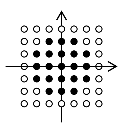
$\left(E^{X^c}\left(\left(\varphi_B(X)\right)^c\right)\right)^c$

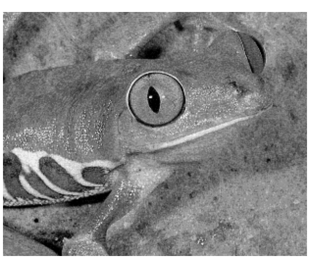


Ouvertures et fermetures par reconstruction

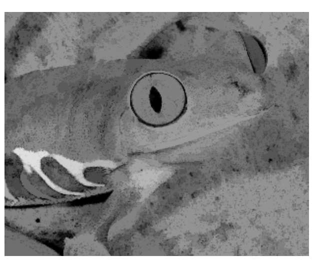
Par extension, les ouvertures et fermetures par reconstruction éliminent les petites structures en préservant les contours des images numériques :

élément structurant de l'ouverture morphologique :

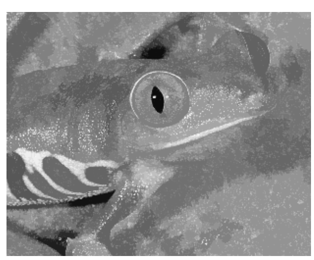




original



ouverture par reconstruction



fermeture par reconstruction

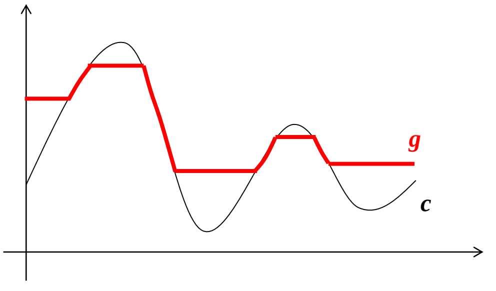
Nivellements – Définitions

Soit (V, E) un graphe avec $E \subset \wp_2(V)$.

$c : V \longrightarrow \mathbb{N}$
$g : V \longrightarrow \mathbb{N}$

g est un ***nivellement*** de c pour $(V, E) \Leftrightarrow \forall \{u, v\} \in E, g(u) < g(v) \Rightarrow \begin{cases} g(u) \geq c(u) \\ et \\ g(v) \leq c(v) \end{cases}$

Remarque : Il y a de nombreuses exemples de nivellement d'images : seuillage, saturation, clamping,…

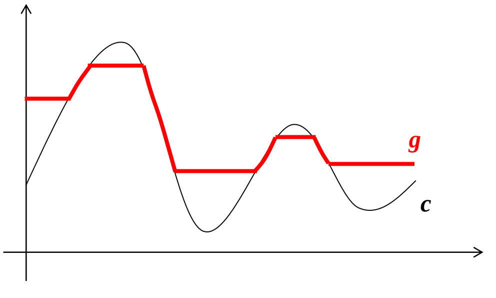


[Meyer 98]

Nivellements – Définitions

(Conséquences)

1. $g \leq c$ est un ***nivellement inférieur*** de $c \Leftrightarrow \forall \{u, v\} \in E, g(u) < g(v) \Rightarrow g(u) = c(u)$
2. $g \geq c$ est un ***nivellement supérieur*** de $c \Leftrightarrow \forall \{u, v\} \in E, g(u) < g(v) \Rightarrow g(v) = c(v)$

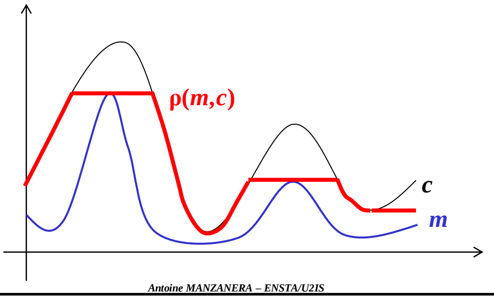


Nivellements et reconstructions

Propriété :

m : $V \longrightarrow \mathbb{N}$
c : $V \longrightarrow \mathbb{N}, m \leq c$

La ***reconstruction*** de m dans c est *le plus petit nivellement* (inférieur) ρ de c tel que :
$m \leq \rho \leq c$



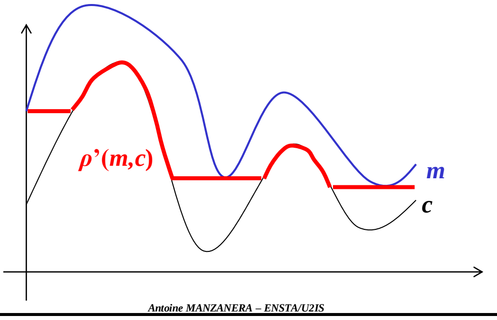
Nivellements et reconstructions

Définition :

Si $m \leq c$, on peut de même définir la ***reconstruction duale*** de m dans c comme *le plus grand nivellement* (supérieur) ρ' de c tel que : $c \leq \rho' \leq m$

Propriété (dualité): Si g est à valeur dans $[0, M]$, soit $\tilde{g} = M - g$ (involution de g).

Si m et c sont à valeur dans $[0, M]$, alors $\rho'(m, c) = \widetilde{\rho(\tilde{m}, \tilde{c})}$



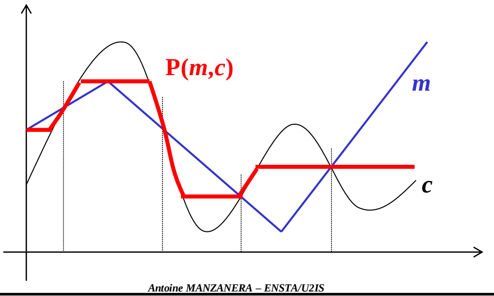
Nivellements et reconstructions

Définition : m : $V \longrightarrow \mathbb{N}, c : V \longrightarrow \mathbb{N}$

La ***reconstruction mixte*** de *m* dans *c* est définie par :

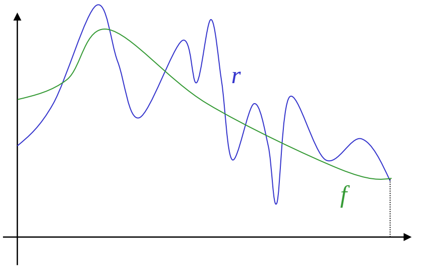
$$P(m,c) = \rho(m_\leq, c_\leq) \vee \rho'(m_\geq, c_\geq)$$

avec $m_\leq = m.1_{\{m\leq c\}}$, $c_\leq = c.1_{\{m\leq c\}}$, $m_\geq = m.1_{\{m\geq c\}}$, $c_\geq = c.1_{\{m\geq c\}}$



Nivellements : reconstruction mixte

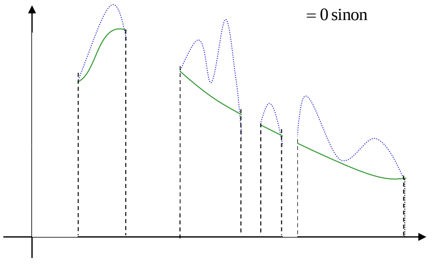
Cas où la fonction marqueur *f* et la fonction de référence *r* ne sont pas ordonnées



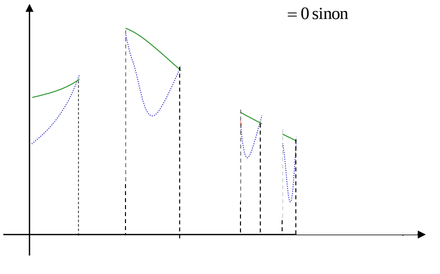
On décompose *f* en deux fonctions :

$$f = f_- + f_+$$
$$= f_- \vee f_+$$

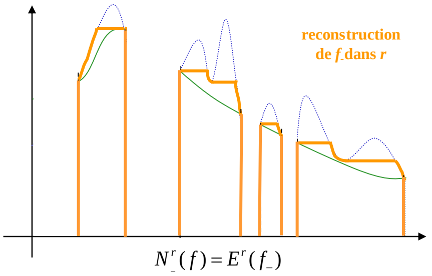
$f_-(x) = f(x)$ si $f(x) \leq r(x)$
$= 0$ sinon

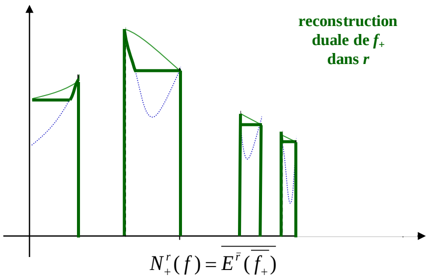


$f_+(x) = f(x)$ si $f(x) > r(x)$
$= 0$ sinon

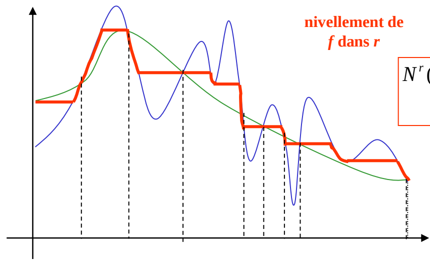


Nivellements : reconstruction mixte





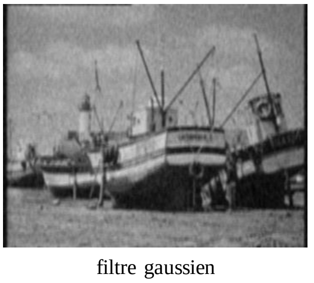
Les *nivellements* définissent des *opérateurs connexes*, qui simplifient l'image par *sélection* des ensembles de niveaux ou de leurs complémentaires :



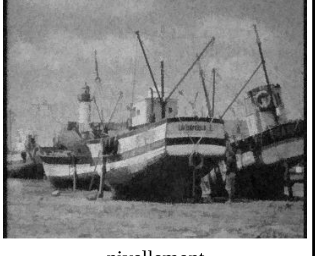
$$\boxed{\begin{aligned} N^r(f) &= N^r_+(f) + N^r_+(f) \\ &= N^r_+(f) \vee N^r_+(f) \end{aligned}}$$

Exemples de reconstructions mixtes

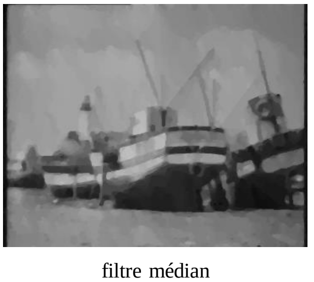
original



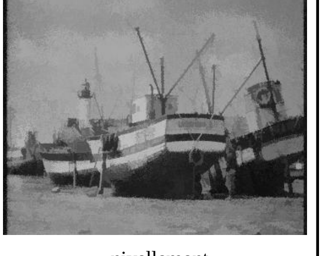
filtre gaussien



nivellement



filtre médian



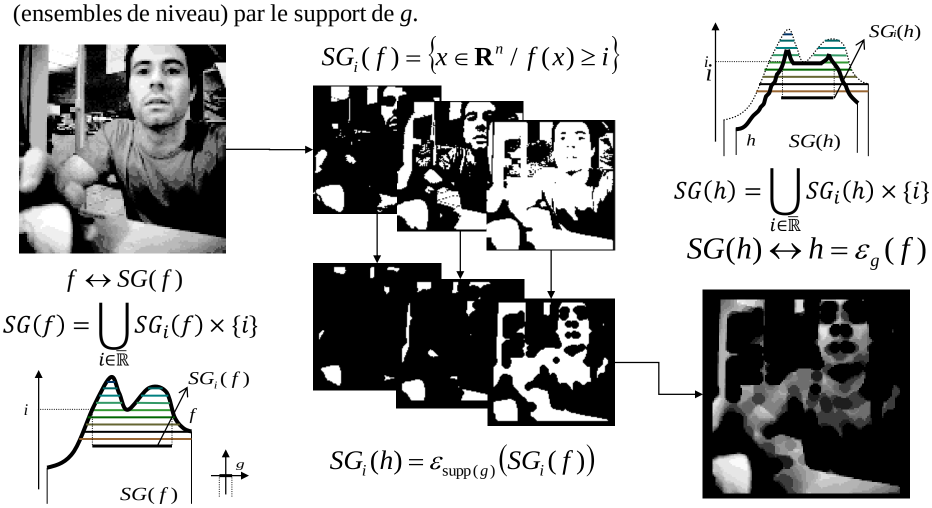
nivellement

Nouvel espace d'échelles morphologique

Une granulométrie induit un espace d'échelle via les *filtres alternés séquentiels par reconstruction* (i.e. nivellement des filtres alternés séquentiels) :

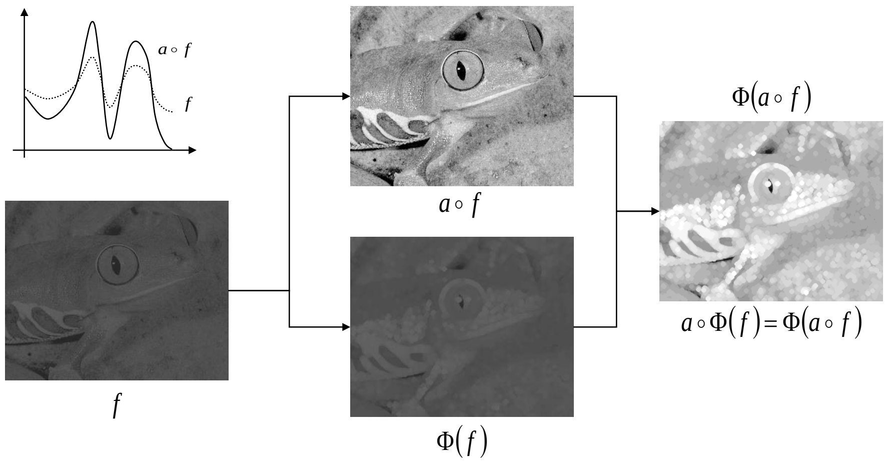
Opérations sur les ensembles de niveau

Par définition, la dilatation (resp. l'érosion) fonctionnelle par un élément structurant plan g peut être calculée à partir des dilatations (resp. érosions) des sections du sous-graphe (ensembles de niveau) par le support de g.



Invariance par changement de contraste

Une conséquence de la propriété précédente est *l'invariance par changement de contraste* : les opérateurs morphologiques *commutent* avec les *anamorphoses*, c'est-à-dire les transformations croissantes des niveaux de gris :



Morphologie mathématique et EDP

Une transformation invariante par contraste (i.e. une transformation morphologique) doit respecter les relations d'inclusion (= ordre) des ensembles de niveau. On montre que cela correspond à un déplacement de lignes de niveau (*i.e*. frontière des ensembles de niveau) dans la direction de leur courbure, et proportionnellement au module du gradient. Exprimé en termes d'équations aux dérivées partielles (EDP), cela se traduit par une équation de la forme :

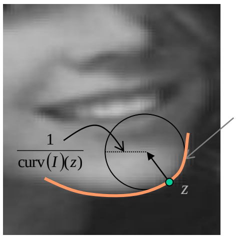
$$\boxed{\frac{\partial I}{\partial t} = \|\nabla I\| \mathrm{G}(\mathrm{curv}(I), t)}$$

où l'on note $\begin{cases} I_x = \dfrac{\partial I}{\partial x} & I_{xx} = \dfrac{\partial^2 I}{\partial x^2} \\ I_y = \dfrac{\partial I}{\partial y} & I_{yy} = \dfrac{\partial^2 I}{\partial y^2} \end{cases} \quad I_{xy} = \dfrac{\partial^2 I}{\partial x \partial y}$

Avec : $\mathrm{curv}(I) = \mathrm{div}\left(\dfrac{\nabla I}{\|\nabla I\|}\right) = \dfrac{I_{xx} I_y^2 - 2 I_{xy} I_x I_y + I_{yy} I_x^2}{\left(I_x^2 + I_y^2\right)^{3/2}}$

et avec *G(x,y)* continue et croissante par rapport à *x*.

Dilatation : *G(x,y) = 1;* $\boxed{\dfrac{\partial I}{\partial t} = \|\nabla I\|}$ *Erosion* : *G(x,y) = -1;* $\boxed{\dfrac{\partial I}{\partial t} = -\|\nabla I\|}$



La courbure de *I* au point *z* est égale à l'inverse du rayon du cercle osculateur à la courbe isophote en *z*, c'est-à-dire à la courbe de niveau :

$I^{I(z)} = \{(x,y) \,/\, I(x,y) = I(z)\}$

courbe isophote de valeur *I(z)*

L'intérêt du formalisme EDP est de fournir un cadre rigoureux aux transformations utilisant des éléments structurants infinitésimaux, mais également de généraliser les filtres (espaces d'échelles) morphologiques.

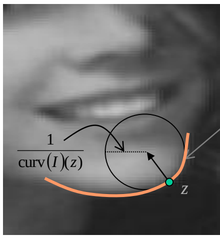
[Alvarez et al 92]

Espace d'échelle, EDP et filtrage morphologique

Le filtrage morphologique peut être exprimé dans le formalisme des Equations aux Dérivées Partielles (EDP). Ici la simplification progressive de l'image se traduit par un phénomène de diffusion. Le respect du principe d'invariance par changement de contraste implique la contrainte suivante sur la forme de l'équation :

$$\boxed{\frac{\partial I}{\partial t} = \|\nabla I\| \mathrm{G}(\mathrm{curv}(I), t)}$$

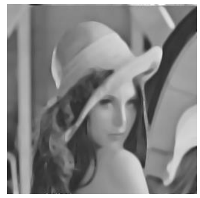
avec *G(x,y)* continue et croissante par rapport à *x*.



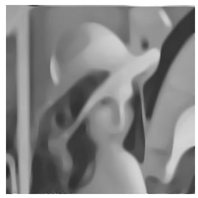
courbe isophote de valeur *I(z)*

L'une des équations de diffusion invariante par changement de contraste la plus simple dans le formalisme EDP est la diffusion par courbure moyenne : (*G(x,y) = x*)

t = 0



t = 5



t = 20

t = 100

$$\boxed{\frac{\partial I}{\partial t} = \|\nabla I\| \mathrm{curv}(I)}$$

diffusion par courbure moyenne

Filtres morphologiques – Conclusion

A RETENIR POUR CE COURS :

• Concepts de base : Définition d'un filtre morphologique, Principes de construction des différentes familles de filtres morphologiques.

• Ouvertures et Fermetures algébriques.

• Granulométries et analyse quantitative.

• Filtres alternées : limitation des filtres alternées duaux, filtres alternées séquentiels, applications.

• Filtres connexes et autres applications de la reconstruction géodésique.

• Liens entre morphologie et Equations aux Dérivées Partielles : Intérêt et Principe d'unification.

Chapitre 4 : Squelettes et Lignes de Partage des Eaux

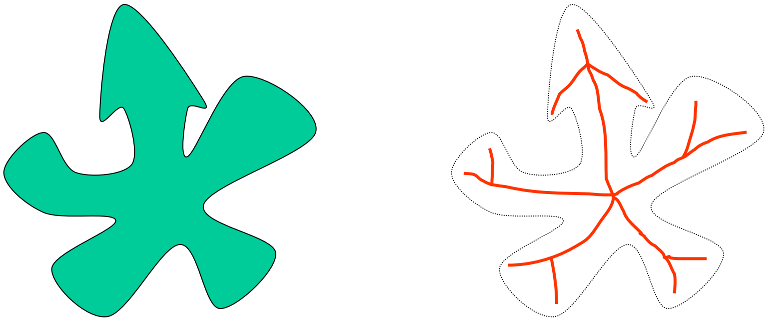
(1) Squelettes : introduction.
(2) Squelette morphologique.
(3) Squelettes par amincissement.
(4) Squelette multi-échelle par fonction de choc géodésique
(5) Ligne de Partage des Eaux, principe et applications

Chapitre 4 : Squelettes et Lignes de Partage des Eaux

(1) Squelettes : introduction.
(2) Squelette morphologique.
(3) Squelettes par amincissement.
(4) Squelette multi-échelle par fonction de choc géodésique
(5) Ligne de Partage des Eaux, principe et applications

Squelettes : motivations

L'objectif de la squelettisation est de représenter un ensemble avec un minimum d'information, sous une forme qui soit à la fois simple à extraire et commode à manipuler.

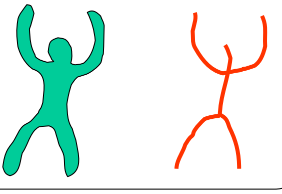


Remarque : Ce cours aborde essentiellement le cas des ensembles bidimensionnels (images binaires 2D), mais la plupart des notions s'appliquent également aux dimensions supérieures.

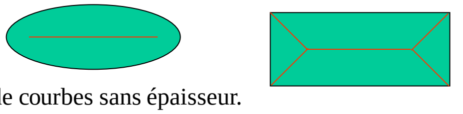
Squelettes : propriétés recherchées (1)

Préservation de la géométrie

Le squelette doit rendre compte des propriétés géométriques de la forme : ramifications, parties allongées...



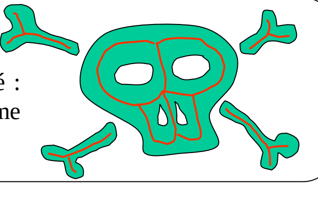
Epaisseur nulle



Le squelette doit être constitué de courbes sans épaisseur.

Préservation de la topologie

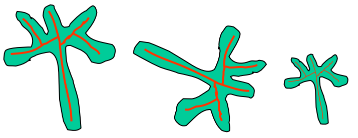
Le squelette doit conserver les relations de connexité : même nombre de composantes connexes, même nombre de trous par composante connexe.



Squelettes : propriétés recherchées (2)

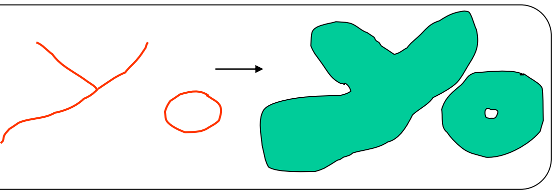
Invariance aux transformations affines

Le squelette doit commuter avec la translation, la rotation et l'homothétie



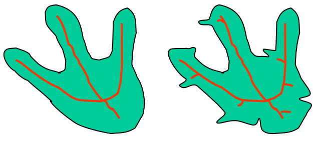
Réversibilité

Le squelette doit permettre de retrouver la forme originale



Continuité

Une petite modification de la forme originale doit induire une petite modification du squelette



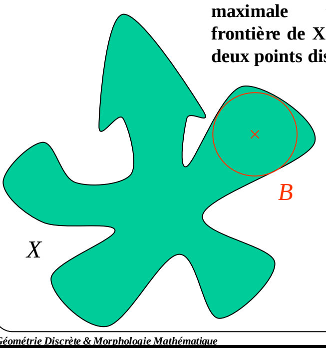
Squelette morphologique

Le squelette morphologique est fondée sur la notion d'*axe médian* *(Blum 67)*. Il utilise la notion de *boule maximale* :

Une boule B est dite maximale dans X si :

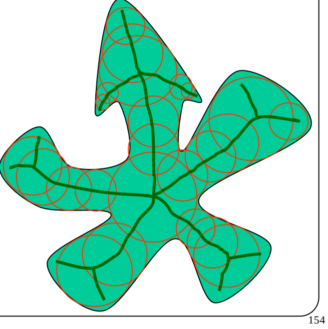
$$B \subset B' \subset X \Rightarrow B' = B$$

Propriété : une boule maximale touche la frontière de X en au moins deux points distincts



Le squelette morphologique (euclidien) est la réunion des centres de boules (euclidiennes) maximales :

$$S(X) = \bigcup_{\rho \geq 0} \{x \in \mathbb{R}^2 ; B(x, \rho) \text{est maximale dans } X\}$$



Propriétés du squelette morphologique (1)

De par sa définition, le squelette morphologique euclidien respecte la géométrie de la forme originale, et il est invariant par homothétie. Il possède de plus les propriétés suivantes :

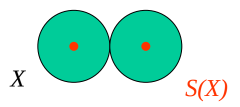
- Il est sans épaisseur (d'intérieur vide).

- Il est anti-extensif et idempotent :

$$S(X) \subset X \qquad\qquad S(S(X)) = S(X)$$

- Si *X est ouvert*, alors *X* et *S(X)* ont la même topologie.

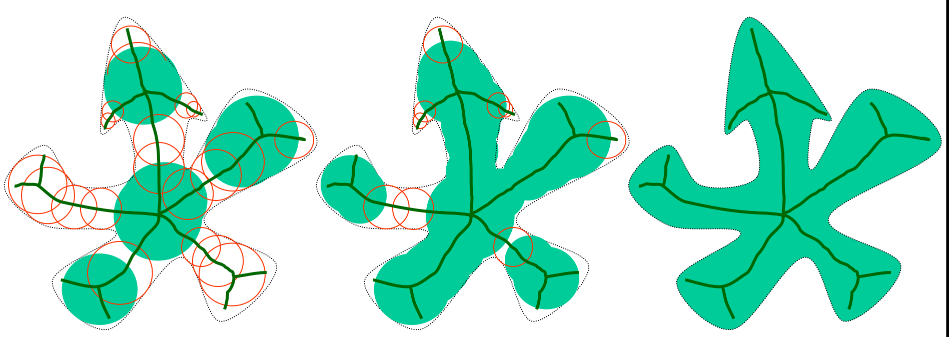
Contre-exemple :



Propriétés du squelette morphologique (2)

***Réversibilité* :**

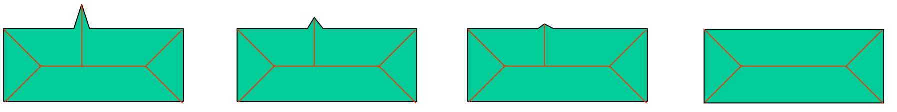
La donnée de la transformée en distance euclidienne de *X* sur *S(X)* permet de reconstruire exactement *X* :

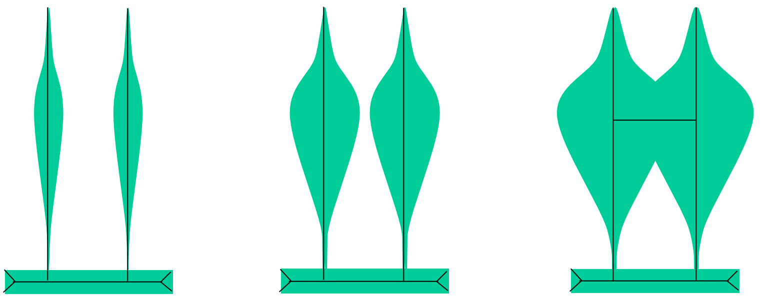


Propriétés du squelette morphologique (3)

***Non-continuité* :**

Le squelette morphologique euclidien n'est pas une transformation continue :



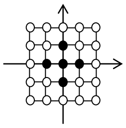


Chapitre 4 : Squelettes et Lignes de Partage des Eaux

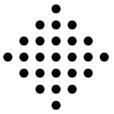
Squelette morphologique : passage au discret

Dans le cas discret, les boules maximales sont les boules d'une distance discrète donnée

Exemples :

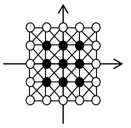


voisinage élémentaire de l'origine

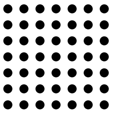


boule de rayon 3

Distance d_4



voisinage élémentaire de l'origine



boule de rayon 3

Distance d_8

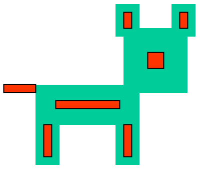
PROPRIÉTÉ

Un point x est centre d'une boule maximale de rayon r dans X si et seulement si il appartient à l'érodé de X par une boule de taille r, mais pas à l'ouvert de cet érodé par la boule élémentaire :

$$S_r(X) = \left\{ x \in \mathbf{Z}^2 ; B(x,r) \text{ est maximale dans } X \right\}$$
$$= \varepsilon_{B(0,r)}(X) \setminus \gamma_{B(0,1)}\left(\varepsilon_{B(0,r)}(X)\right)$$

Squelette morphologique : passage au discret

Par conséquent, le squelette morphologique est égal à l'union des résidus d'ouverture des érodés successifs de la forme originale :

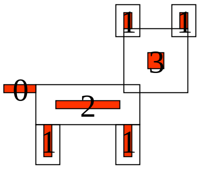


$$S(X) = \bigcup_{r \in \mathbb{N}} S_r(X)$$
$$= \bigcup_{r \in \mathbb{N}} \varepsilon_{B(0,r)}(X) \setminus \gamma_{B(0,1)}(\varepsilon_{B(0,r)}(X))$$

Lantuéjoul 78

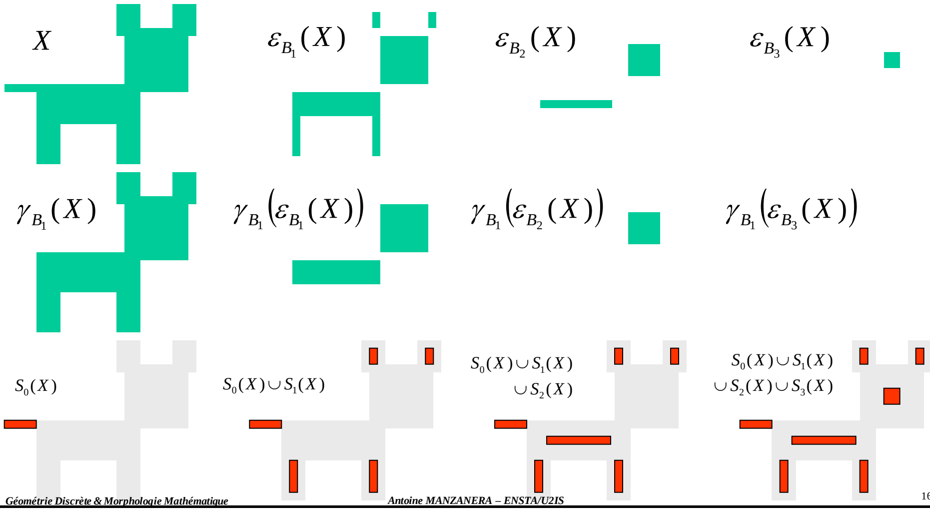
Formule d'inversion du squelette morphologique :

$$X = \bigcup_{r \in \mathbb{N}} \delta_{B(0,r)}(S_r(X))$$



Squelette morphologique : passage au discret

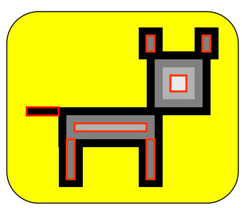
La formule de Lantuéjoul fournit un moyen explicite de calculer le squelette morphologique :



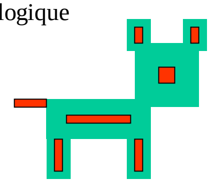
Squelette morphologique : passage au discret

Comme l'ensemble des résidus d'ouverture coïncide avec l'ensemble des maxima locaux de la transformée en distance, le squelette morphologique discret est égal aux maxima locaux de la transformée en distance :

$$S(X) = \left\{x \in X ; \forall y, \delta(x,y) = 1 \Rightarrow \delta(y, X^c) \leq \delta(x, X^c)\right\}$$



⚠ Contrairement au cas continu, le squelette morphologique ne préserve pas la topologie de la forme originale :



Les algorithmes de squelettisation connexe traitent donc le problème de préservation de la topologie directement dans le cadre discret.

Squelette morphologique : Propriété

Les 3 propriétés suivantes sont équivalentes :

(1) x est un résidu d'ouverture de X

$\exists n \in \mathbb{N} \;/\; x \in (X \ominus B_n) \text{ et } x \notin \gamma_{B_1}(X \ominus B_n)$

(2) x est un maximum local de la fonction distance dans X

$\forall y\, \delta(x,y)=1 : \delta(y,X^c) \leq \delta(x,X^c)$

(3) x est centre d'une boule maximum dans X

$\exists n \in \mathbb{N} \;/\; B(x,n) \subset B(y,m) \subset X \Rightarrow (y,m)=(x,n)$

Squelette morphologique : Propriété

$(1) \Leftrightarrow (2)$

x est un résidu d'ouverture de X

$\Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N} \;/\; x \in (X \ominus B_n) \text{ et } x \notin \gamma_{B_1}(X \ominus B_n)$

$\Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N} \;/\; x \in (X \ominus B_n) \text{ et } x \notin [(X \ominus B_n) \ominus B_1] \oplus B_1$

$\Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N} \;/\; x \in (X \ominus B_n) \text{ et } x \notin [(X \ominus B_{n+1}) \oplus B_1]$

$\Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N} \;/\; x \in (X \ominus B_n) \text{ et } \forall y, \delta(x,y)=1 : y \notin (X \ominus B_{n+1})$

$\Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N} \;/\; \delta(x,X^c) \geq n \text{ et } \forall y, \delta(x,y)=1 : \delta(y,X^c) < n+1$

soit *x* est un maximum local de la fonction distance dans X

Squelette morphologique : Propriété

$(3) \Rightarrow (2)$

x est un centre de boule maximum dans X

alors $\delta(x, X^c) = n$

Supposons $\exists y, \delta(x,y)=1 \;\; et \;\; \delta(y, X^c) > n$

Mais dans ce cas $\exists p, B(x,n) \subset B(y,p) \subset X$

ce qui contredit l'hypothèse

donc x est un maximum local de la fonction distance dans X

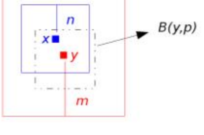
Squelette morphologique : Propriété

$(2) \Rightarrow (3)$

Soit x un maximum local de la fonction distance dans X

Soit $B(x,n)$ la plus grosse boule de centre x contenue dans X

Supposons $\exists (y,m) \;/\; (y,m) \neq (x,n) \;\; et \;\; B(x,n) \subset B(y,m) \subset X$ nota : $m < n$



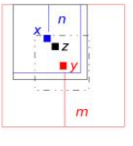
Considérons alors : $B(y,p) = B(y,m) \ominus B_n$

$x \in B(y,p)$ puisque $B(x,n) \subset B(y,m)$

mais : $x \notin (B(y,p) \ominus B_1)$

car sinon : $B(x, n+1) \subset B(y,m) \subset X$

...or $B(x,n)$ est la plus grosse boule de centre x contenue dans X



Par conséquent : $\exists z, \delta(x,z)=1 \;/\; z \in (B(y,p) \ominus B_1)$

Mais alors : $B(z, n+1) \subset B(y,m) \subset X$

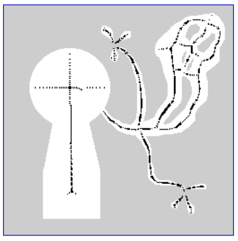
et donc $\delta(z, X^c) = n+1$

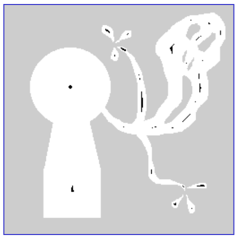
ce qui contredit l'hypothèse.

donc x est un centre de boule maximum dans X

Squelette morphologique / Erodés ultimes

REMARQUE : Noter les parallèles entre le squelette morphologique et les érodés ultimes :





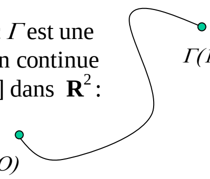
Squelette morphologique	↔	Erodés ultimes
II		II
Maxima locaux de la transformée en distance	↔	*Maxima régionaux* de la transformée en distance
II		II
Résidus d'*ouverture*	↔	Résidus d'*ouverture par reconstruction*

Chapitre 4 : Squelettes et Lignes de Partage des Eaux

Homotopie : cas continu

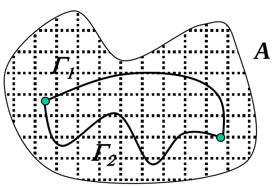
La préservation de la topologie est liée à la notion d'*homotopie*, originalement définie pour des arcs dans une partie du plan $\mathbf{R}^2$

Un arc Γ est une fonction continue de [0,1] dans $\mathbf{R}^2$:

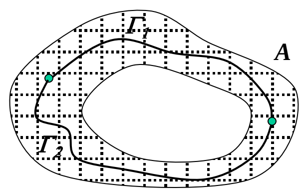


Soit A une partie de $\mathbf{R}^2$. Deux arcs Γ_1 et Γ_1 de mêmes extrémités sont **homotopes** dans A s'il existe une fonction Θ *bicontinue* de [0,1]x[0,1] dans A telle que :

$$\forall t \in [0,1] : \Theta(t,0) = \Gamma_1(t) \quad \forall u \in [0,1] : \Theta(0,u) = \Gamma_1(0) = \Gamma_2(0)$$
$$\Theta(t,1) = \Gamma_2(t) \qquad \Theta(t,u) = \Gamma_2(1) = \Gamma_2(1)$$



Γ_1 et Γ_2 sont homotopes dans A.



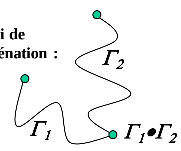
Γ_1 et Γ_2 ne sont pas homotopes dans A.

Homotopie : cas continu

• L'homotopie est une relation d'équivalence.

• Si A est un ouvert de $\mathbf{R}^2$, l'ensemble des classes d'homotopie, muni de la loi de concaténation, est un groupe dit *groupe fondamental* de A.

loi de concaténation :



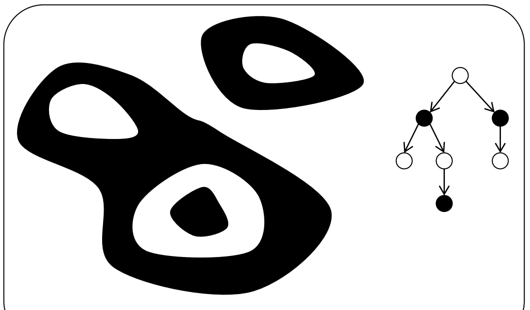
• Le groupe fondamental caractérise la topologie de l'ensemble, et on dira que deux ouverts sont *homotopes* si leurs groupes fondamentaux sont isomorphes.

• Etant donnée une fonction F de $\mathbf{R}^2$ dans $\mathbf{R}^2$, on dira que F *préserve la topologie* si et seulement si pour tout ouvert A, A et $F(A)$ sont homotopes.

Homotopie et arbre de connexité

On peut représenter le groupe fondamental d'un ouvert borné du plan par un arbre orienté dit arbre de connexité

• Chaque nœud noir représente une composante connexe de l'ouvert, chaque nœud blanc représente une composante connexe du complémentaire.

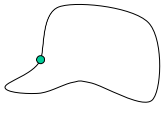


Un ensemble et son arbre de connexité

• Les successeurs de chaque nœud blanc (resp. nœud noir) correspondent aux composantes connexes de l'ouvert (resp. du complémentaire) que la composante représentée par le nœud *entoure*.

La définition de la relation "entoure" est liée au *théorème de Jordan*...

Théorème de Jordan dans R^2

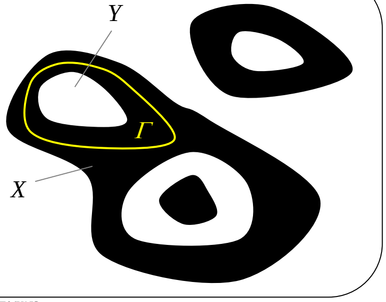


Déf : Une courbe de Jordan est une *courbe simple fermée* (arc Γ injectif sur [0,1[et tel que $\Gamma(0) = \Gamma(1)$)

Théorème de Jordan : Une courbe de Jordan sépare le plan en deux parties : l'*intérieur* et l'*extérieur* de la courbe.

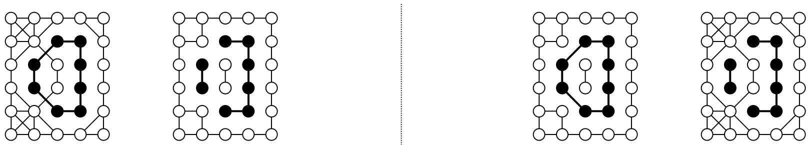
Relation d'entourage :

On dit qu'une composante X de l'ouvert (resp. du complémentaire) entoure une composante Y du complémentaire (resp. de l'ouvert) s'il existe une courbe de Jordan Γ incluse dans X telle que Y est inclus dans l'intérieur de Γ:



Théorème de Jordan en maille carrée

Le théorème de Jordan n'est pas valide dans la maille carrée...



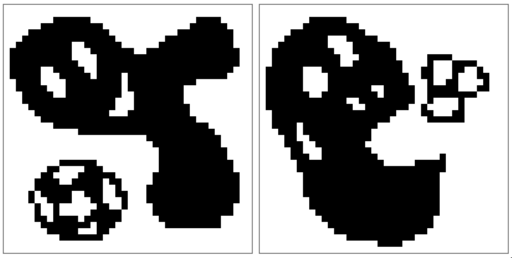
8-connexité 4-connexité (8,4)-connexité (4,8)-connexité

...sauf si l'on considère des topologies différentes pour l'objet et pour le complémentaire.

(K = 8 ou 4 ; On note $\tilde{K} = 12 - K$)

Propriété d'homotopie en maille carrée :

A et B sont K-homotopes si et seulement si : il existe une bijection entre l'ensemble des composantes K-connexes de A et celles de B, et une bijection entre les composantes $\tilde{K}$-connexes de A^c et celles de B^c, qui préservent la relation d'entourage



Homotopie discrète et simplicité

Lorsqu'il y a une relation d'inclusion entre les deux ensembles, l'homotopie s'exprime plus simplement :

Soit $A \subset B$. Alors A est homotope à B si les 2 conditions suivantes sont vérifiées :

• Toute K-*cc* de B contient exactement une K-*cc* de A.

• Toute $\tilde{K}$-*cc* de A^c contient exactement une $\tilde{K}$-*cc* de B^c.

Stefanelli & Rosenfeld 1971

Ensembles simples :

Soit $A \subset X$. A est dit *K-simple* dans X si et seulement si $X \setminus A$ est homotope à X.

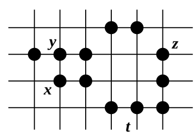
Points simples :

Soit $x \in X$. x est un point *K-simple* de X si $\{x\}$ est un ensemble K-simple dans X.

exemples :

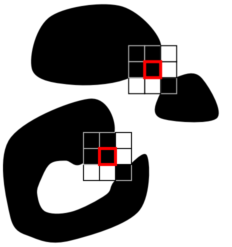
• x et y sont 8-simples

• x et z sont 4-simples



Caractérisation analytique des points simples

La simplicité d'un point peut être déterminée en examinant ses 8 voisins :



Théorème :

Soit $x \in X$. x est un point *K-simple* de X si et seulement si :

(1) x a au moins un $\tilde{K}$-voisin dans X^c.

(2) x est K-voisin d'une seule K-cc dans son voisinage strict.

Nombres de connexité :

somme arithmétique

$x_j = 1$ si $x_j \in X$

$x_j = 0$ si $x_j \notin X$

addition modulo 8

$$N_{c_8}^X(x) = \sum_{i=0}^{3} (x_{2i+1} \vee x_{2i+2}) \wedge \neg x_{2i}$$

$$N_{c_4}^X(x) = \sum_{i=0}^{3} x_{2i} \wedge \neg (x_{2i+1} \wedge x_{2i+2})$$

Yokoï 1973

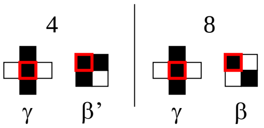
Propriété :

x est K-simple dans $X \Leftrightarrow N_{c_K}^X(x) = 1$

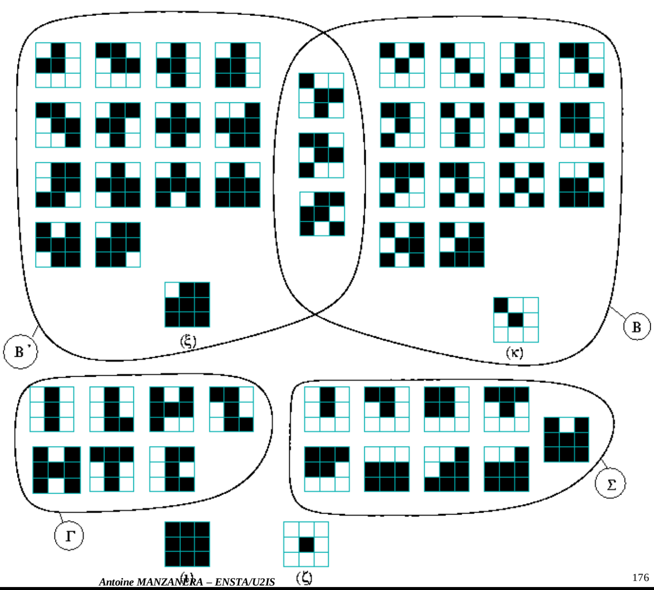
Notation des 8 voisins :

x_3	x_2	x_1
x_4	x	x_0
x_5	x_6	x_7

Caractérisation géométrique des points simples



Ce classement montre une caractérisation géométrique des points simples : Un point qui n'est ni un point intérieur (configuration ι), ni un point isolé (configuration ζ), est 8-simple (resp. 4-simple) s'il ne contient pas dans son 8-voisinage l'une des sous-configurations γ ou β (resp. γ ou β'). La réciproque est également vraie, sauf pour la configuration κ (resp. ξ).



Classification des configurations de 8-voisinage en fonction de sous-configurations communes

Squelettisation : séquentiel *vs* parallèle

Si l'on retire des points de squelette (simples et non terminaux) de manière séquentielle, on préserve la connexité : on obtient donc un squelette en 1 seule itération... mais toutes les propriétés métriques du squelette disparaissent ! Les algorithmes d'amincissement séquentiels « simulent » donc le parallélisme pour retirer indépendamment les points, en travaillant sur une image d'entrée I_{IN}, et une image de sortie I_{OUT}, la mise à jour $I_{IN} = I_{OUT}$ ne se faisant qu'à la fin de chaque balayage.

Par conséquent, il est indispensable de pouvoir retirer un grand nombre de points « simultanément ».

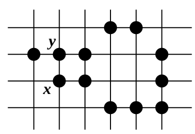
↓

ENSEMBLES SIMPLES

Points simples et ensembles simples

⚠ Une réunion de points simples ne forment pas un ensemble simple en géneral :

ex : *x* et *y* sont tous deux 8-simples, mais la destruction de la paire *{x,y}* déconnecte l'objet en deux composantes 8-connexes



Se pose alors la question de la validité des algorithmes de squelettisation *parallèles*. Le résultat suivant répond à ce problème :

Théorème de Ronse (1988) :

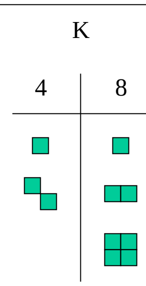
Soit A un opérateur de P($\mathbf{Z}^2$) dans P($\mathbf{Z}^2$) tel que pour tout X, A(X) $\subset$ X.
Si pour tout X, les 3 conditions suivantes sont vérifiées :

• Tout x $\in$ X\A(X) est K-simple.

• Toute paire {x,y} $\subset$ X\A(X) de points (12-K)-adjacents est K-simple.

• Si K=8, alors aucune K-cc de X contenue dans un carré 2x2 n'appartient à X\A(X).

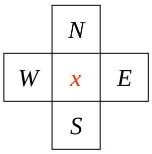
Alors l'opérateur A préserve la K-topologie



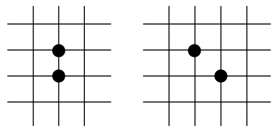
Points simples et ensembles simples

Pour assurer l'homotopie dans le cas d'une destruction simultanée de points simples, il faut donc en général examiner un voisinage plus large. On peut également utiliser la propriété suivante, qui est une simple conséquence du théorème de Ronse :

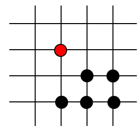
Le retrait simultané de points simples d'une image X ne modifie pas la topologie de X si on ne retire que les points qui ont un voisin *Nord* (resp. *Est*, *Sud*, et *Ouest*) dans X^c,sauf pour les composantes connexes de deux pixels.



dénomination cardinale des 4-voisins



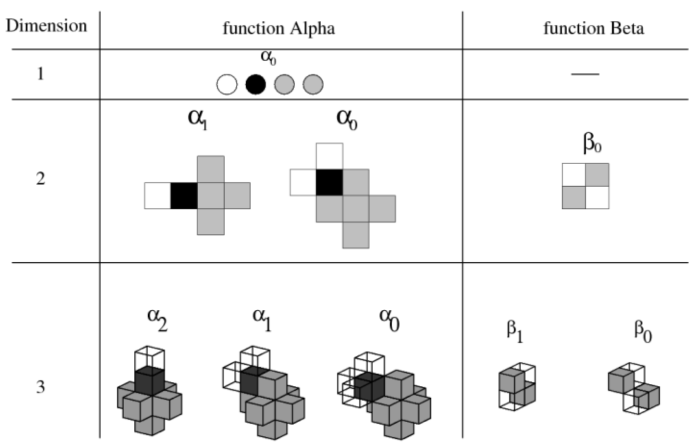
cas des composantes de deux pixels



Pixel terminal : un seul voisin dans l'image

Ou encore : le retrait simultané de points simples *et non terminaux* d'une image X ne modifie pas la topologie de X si on ne retire que les points qui ont un voisin *Nord* (resp. *Est*, *Sud*, et *Ouest*) dans X^c.

Squelettes MB multi-dimensionnels



[Manzanera & Bernard 1999]

Le squelette MB est un squelette par amincissement valide en n-dimension.

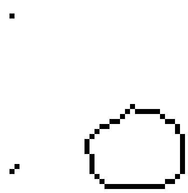
Il consiste à retirer itérativement des points du contour correspondant à l'une des configurations α_i, mais pas à l'une des configurations β_j.

Il est entièrement parallèle (pas de sous-itérations).

Noyau homotopique

En retirant les points simples de la frontière dans une direction cardinale donnée, puis en réitérant le procédé en alternant les directions *Nord*, *Est*, *Ouest* et *Sud*, et ce, jusqu'à convergence, on obtient "le plus petit" (au sens du procédé de destruction des points) ensemble homotope à l'original, dit *noyau homotopique* :

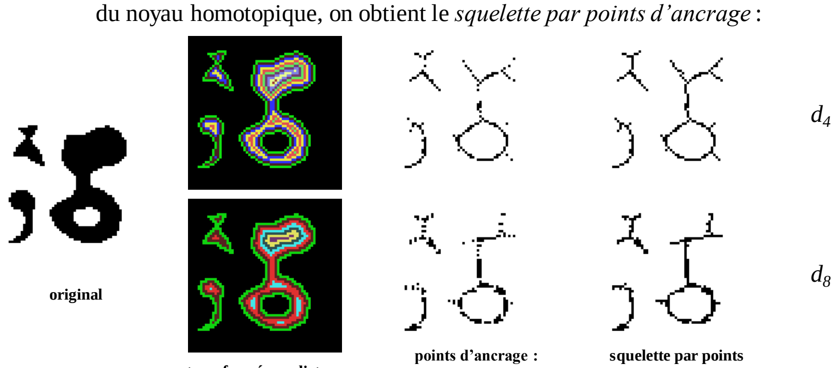
Original



Noyau homotopique

Squelettes par points d'ancrage

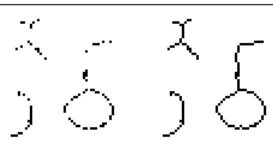
En imposant la présence d'un ensemble de référence par un OU logique à chaque itération du noyau homotopique, on obtient le *squelette par points d'ancrage* :



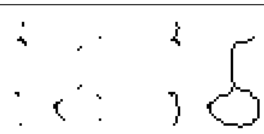
original **transformée en distance** **points d'ancrage : centres des boules max** **squelette par points d'ancrage**

d'autres exemples...

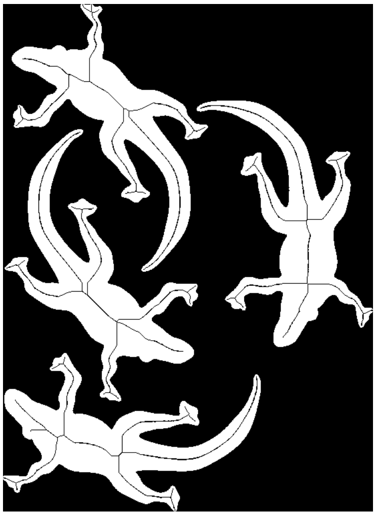
Intersection des max locaux pour d_4 et d_8 :



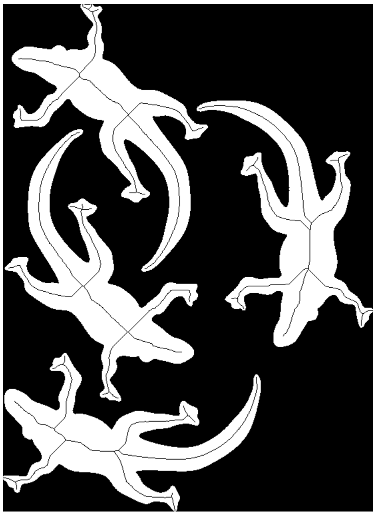
érodés ultimes (squelette minimal) :



Métrique et parallélisme



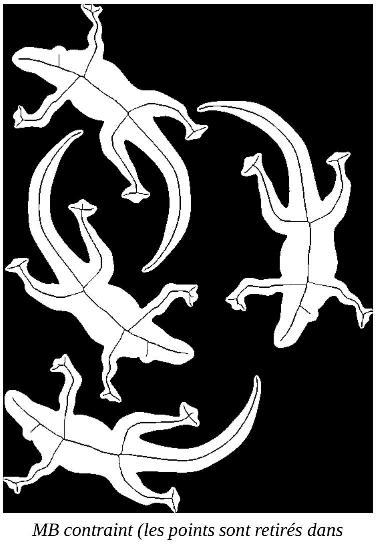
MB fully parallel (géométrie induite par la distance d_4)



MB directionnel (géométrie induite par la distance d_8)

Contrainte par la fonction distance

Fonction distance (chamfrein 5-7-11)



MB contraint (les points sont retirés dans l'ordre induit par la fonction distance)

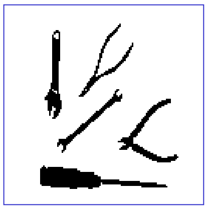
Squelette par zones d'influence

Soit X un ensemble composé des différentes composantes connexes X_i : $X = \bigcup_i X_i$

La *zone d'influence* d'une composante connexe de X est l'ensemble des points du plan plus proche de cette composante que de toute autre composante de X :

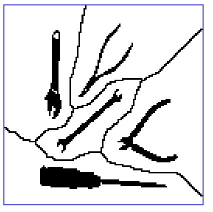
$$IZ(X_i) = \{x \in \mathbf{R}^2 ; \forall j \neq i, d(x, X_i) < d(x, X_j)\}$$

Le *squelette par zone d'influence* (SKIZ) de X est la frontière de l'ensemble des zones d'influence :



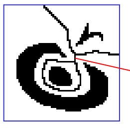
original

$$SKIZ(X) = \left[\bigcup_i IZ(X_i)\right]^c$$



SKIZ + original

En discret, le SKIZ peut se calculer à partir du noyau homotopique dual, qui en constitue déjà une bonne approximation :



cette partie de la courbe n'appartient pas au SKIZ

Chapitre 4 : Squelettes et Lignes de Partage des Eaux

Squelettes euclidiens multi-échelles

Nous présentons dans cette partie l'une des techniques les plus élégantes et les plus efficaces de squelettisation : le squelette euclidien multi-échelles.

Son principe de calcul repose sur les 4 étapes suivantes :

1- Associer une *étiquette unique* à chaque pixel du contour

2- *Propager* les valeurs des étiquettes aux pixels les plus proches

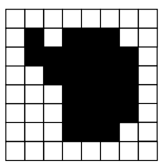
3- Calculer une *fonction de choc locale* selon la différence des valeurs des étiquettes entre pixels adjacents

4- Le squelette est obtenu par *seuillage* de la fonction de choc.

Une propriété remarquable est que, grâce au calcul récursif de la transformée en distance, chacune de ces étapes a un *coût de calcul constant*.

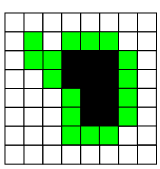
Etiquetage de contours

Soit *X* une image binaire.



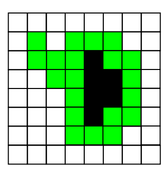
Contour en 4-connexité :

$$\partial_X^4 = \{z \in X ; \exists q \notin X : d_4(z,q) = 1\}$$



Contour en 8-connexité :

$$\partial_X^8 = \{z \in X ; \exists q \notin X : d_8(z,q) = 1\}$$



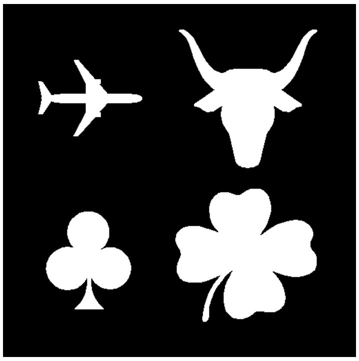
Remarque : le contour en 4-connexité forme une courbe 8-connexe pour chaque composante 8-connexe de *X*. Le contour en 8-connexité forme une composante 4-connexe pour chaque composante 4-connexe de *X*.

Etiquetage de contours

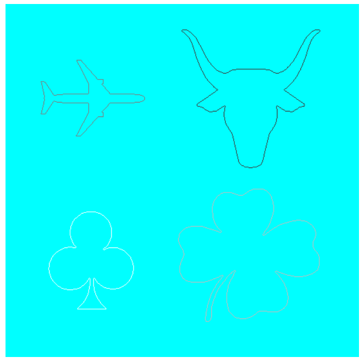
L'étiquetage de contours consiste à attribuer à chaque pixel de contour de *X* une paire d'étiquettes (Λ,λ) tels que :

1- Λ identifie chaque composante connexe de X

2- λ attribue à chaque pixel de chaque composante un numéro unique selon un certain sens de parcours.



X



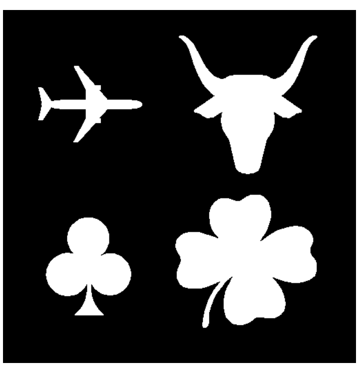
Λ_X

Etiquetage de contours

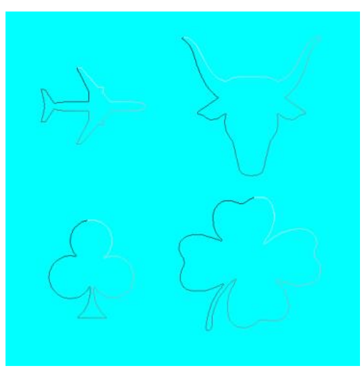
L'étiquetage de contours consiste à attribuer à chaque pixel de contour de *X* une paire d'étiquettes (Λ,λ) tels que :

1- Λ identifie chaque composante connexe de X

2- λ attribue à chaque pixel de chaque composante un numéro unique selon un certain sens de parcours.



X



λ_X

Propagation des étiquettes

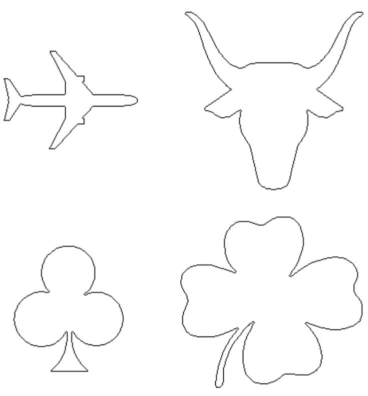
La propagation des étiquettes aux pixels les plus proches se fait simplement en utilisant l'algorithme de calcul de la transformée en distance sur le complémentaire du contour. On associe alors à chaque pixel (x,y) les coordonnées relatives ($R_x(x,y)$,$R_y(x,y)$) du pixel de contour le plus proche de (x,y).

Si L est une fonction étiquette sur le contour de X, la propagation de l'étiquette L selon la distance d est la fonction définie sur X comme suit :

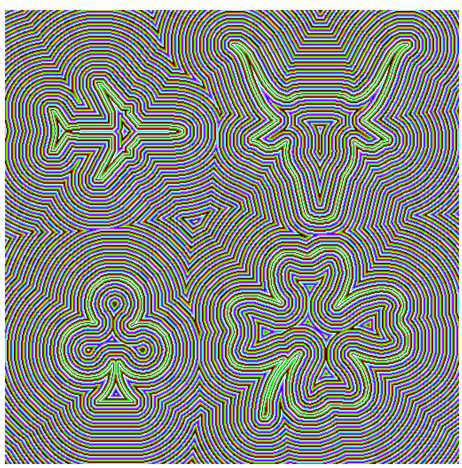
$$\Pi_L^d(x,y) = L(x+R_x, y+R_y)$$

- La propagation des étiquettes Λ (composantes connexes) fournit la partition de X en zones d'influence (SKIZ).
- La propagation des étiquettes λ (énumération de contours) calcule les zones d'influence de chaque pixel du contours, ce qui, par différenciation, fournira le squelette.

Propagation des étiquettes

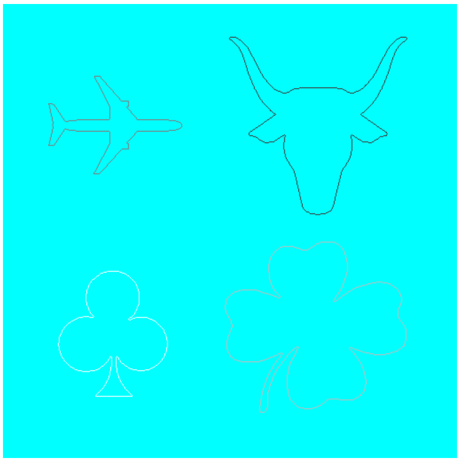


$\partial^4 X$



$F^{d_E}_{(\partial^4 X)^c}$

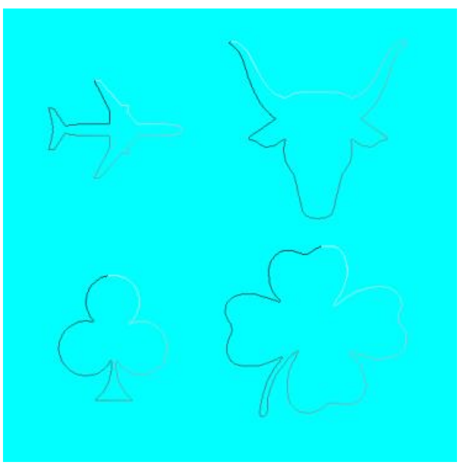
Propagation des étiquettes



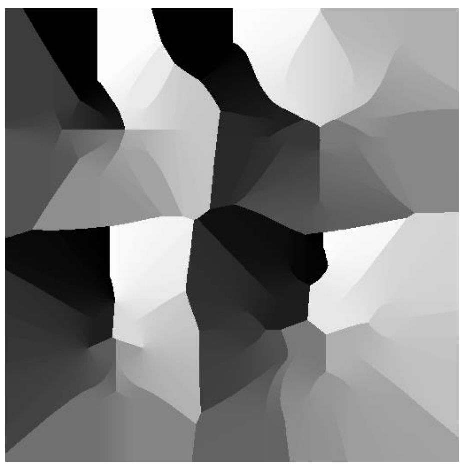
Λ_X

$\Pi_{\Lambda_X}^{d_E}$

Propagation des étiquettes

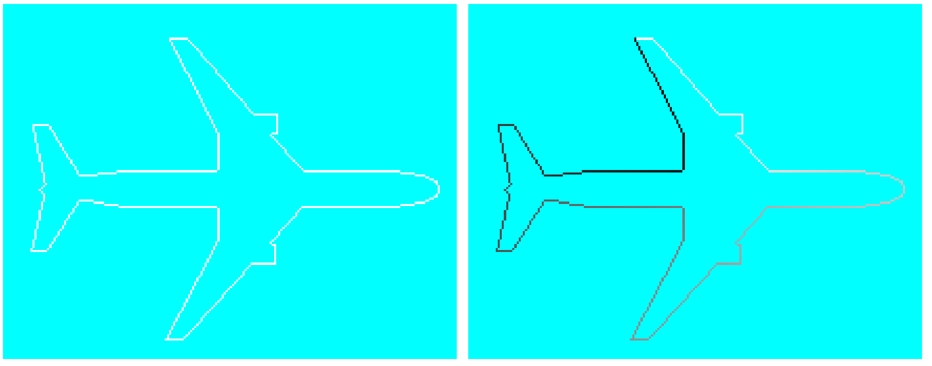


λ_X



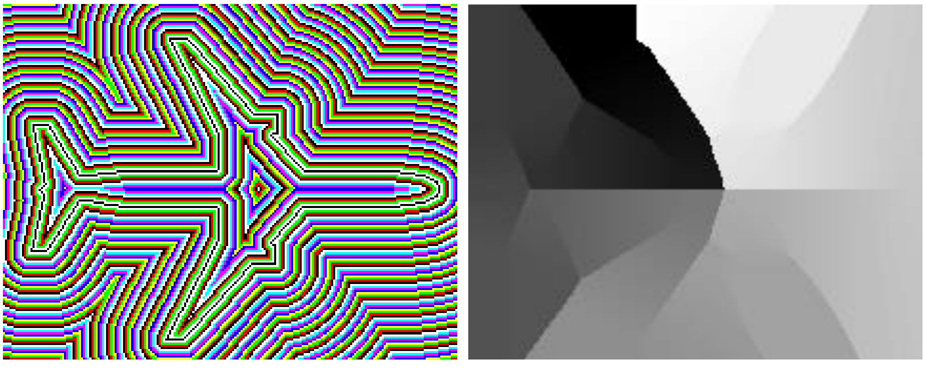
$\Pi_{\lambda_X}^{d_E}$

Propagation des étiquettes



Λ_X (1 étiquette) λ_X (679 étiquettes)

Propagation des étiquettes



$F^{d_E}_{(\partial^4 X)^c}$ $\Pi^{d_E}_{\lambda_X}$

Fonction de choc

• La fonction de choc associe à chaque pixel p une valeur proportionnelle à « l'éloignement » maximum entre le pixel du contour correspondant à l'étiquette de p et ceux qui correspondent à l'étiquette des pixels voisins de p.

• L'éloignement est associé à une fonction de coût κ définie sur le contour, où chaque pixel est identifié par sa paire d'étiquette (Λ,λ).

On note $N_X(p)$ le point du contour de X le plus proche de p :

$$N_X(p) = \left(x_p + R_x(p), y_p + R_y(p)\right)$$

Fonction de choc 8-connexe :

$$S_8(p) = \max_{d_4(p,q)=1} \kappa(N_X(p), N_X(q))$$

Fonction de choc 4-connexe :

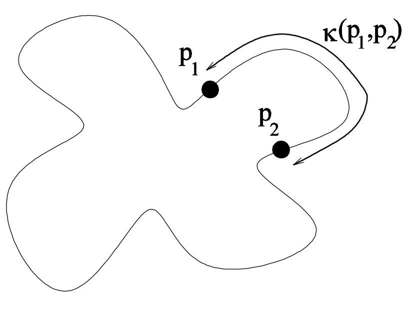
$$S_4(p) = \max_{d_8(p,q)=1} \kappa(N_X(p), N_X(q))$$

Remarquer la dualité : on calcule la valeur maximale dans le 4-voisinage pour un squelette 4-connexe, et réciproquement.

Fonction de choc

La fonction de coût associée à la fonction de choc est la distance géodésique entre 2 points du contour $p_1 = N_X(p)$ et $p_2 = N_X(q)$, le long du contour de X :

$$\kappa(p_1, p_2) = d_{\partial_X}(p_1, p_2)$$

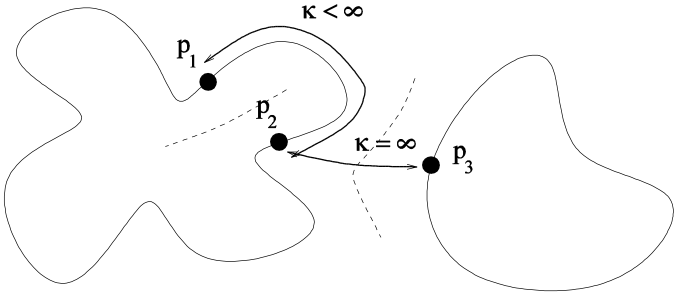


Fonction de choc

La fonction de choc associée à la distance géodésique se calcule très simplement en comparant les étiquettes Λ_X et λ_X entre 2 pixels p et q adjacents :

(1) Si $\Lambda_X(p) \neq \Lambda_X(q)$, alors p est à la frontière des zones d'influence de plusieurs contours connexes, et donc :

$$\kappa(N_X(p), N_X(q)) = \infty$$



Fonction de choc

(2) Si $\Lambda_X(p) = \Lambda_X(q)$, alors la fonction de choc est égale à la différence des étiquettes λ_X, *modulo* le nombre total de pixel du contour contenant p et q.

Fonction de choc symétrique

$$\kappa(N_X(p), N_X(q)) = \left|\Pi^d_{\lambda_X}(p) - \Pi^d_{\lambda_X}(q)\right| \bmod \underbrace{\left|\partial^p_X\right|}$$

Nombre de pixels de la composante connexe du contour de X contenant p.

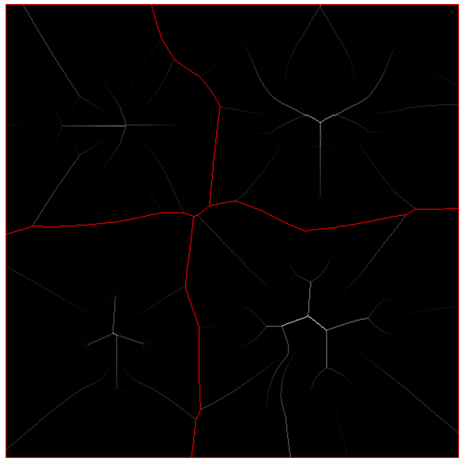
Fonction de choc asymétrique

$$\kappa(N_X(p), N_X(q)) = \left(\Pi^d_{\lambda_X}(p) - \Pi^d_{\lambda_X}(q)\right) \bmod \left|\partial^p_X\right|$$

La fonction de choc symétrique produit un squelette centré mais d'épaisseur 2, tandis que la fonction de choc asymétrique produit un squelette d'épaisseur 1, avec une erreur possible de placement d'un demi-pixel.

Fonction de choc

$\Pi_{\lambda_X}^{d_E}$



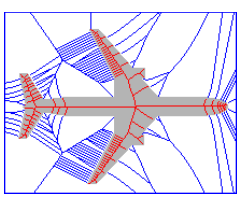
$S_8\left(\Pi_{\lambda_X}^{d_E}\right)$

Squelette multi-échelles

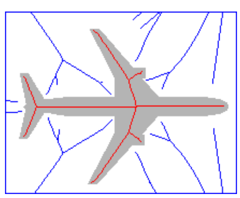
Une fois la fonction de choc S définie, le squelette à l'échelle σ est simplement défini comme le seuil de niveau σ de la fonction de choc :

$$Sk_\sigma(X) = \{z; S(z) > \sigma\}$$

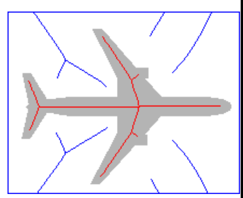
$S_8\left(\Pi_{\lambda_X}^{d_E}\right)$



$Sk_1(X)$



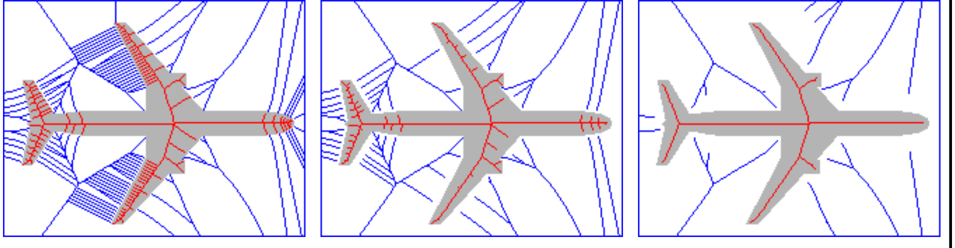
$Sk_5(X)$



$Sk_{20}(X)$

Squelette multi-échelles

PROPRIETE : La fonction de choc associée à la distance géodésique le long du contour est connexe-monotone : pour tout entier n, l'ensemble des pixels dont la fonction de choc est supérieure à n a le même nombre de composantes connexes que l'image initiale :

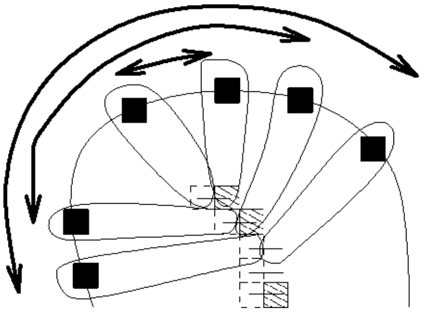


$Sk_1(X)$ $Sk_2(X)$ $Sk_5(X)$

Connectivité des squelettes multi-échelles

La propriété de connexe-monotonie de la fonction de choc est due au fait que les zones d'influence des pixels du contour sont connexes :

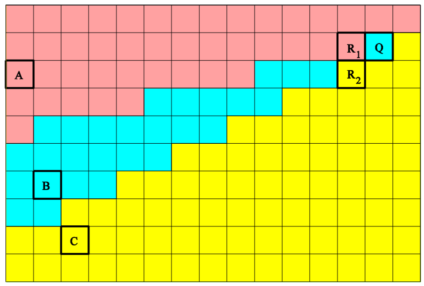
La connectivité des zones d'influence des pixels implique la croissance de la fonction de choc le long du squelette à partir des extrémités :



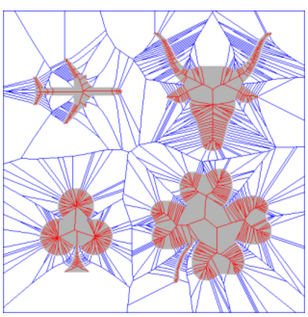
Connectivité des squelettes multi-échelles

La connectivité des zones d'influence des pixels est aussi une condition nécessaire de connectivité des squelettes multi-échelles. En ce sens l'algorithme de Danielsson-Leymarie pour le calcul de la fonction distance quasi-euclidienne est plus adapté qu'une transformée en distance euclidienne exacte :

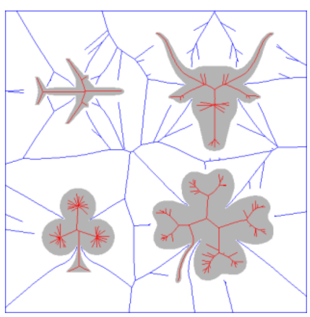
En se basant sur la distance euclidienne exacte, on pourrait construire un chemin connexe reliant A, B et C, qui aurait un (exo-)squelette déconnecté :



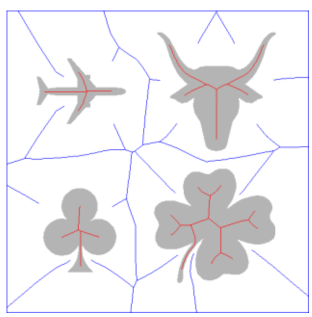
Squelettes multi-échelles



$Sk_1(X)$



$Sk_5(X)$

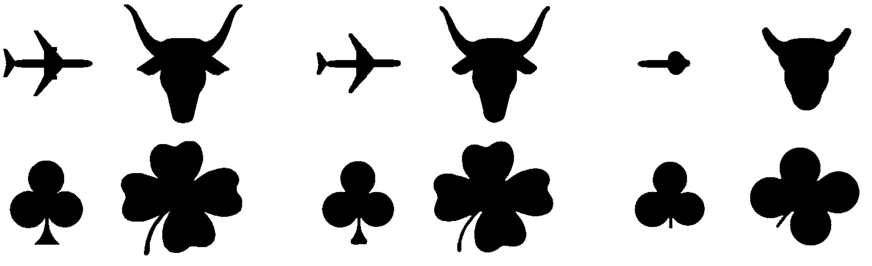


$Sk_{50}(X)$

Reconstruction multi-échelles

La reconstruction de l'image X à l'échelle σ s'obtient par la formule d'inversion du squelette :

$$R_\sigma(X) = \bigcup_{z \in Sk_\sigma(X)} B_z\left(F_X^d(z)\right)$$



X $R_{20}(X)$ $R_{100}(X)$

Carte de reconstruction

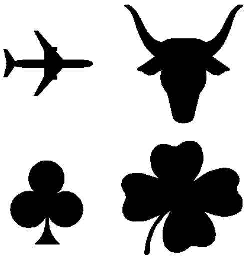
Toutes les reconstructions pour l'ensemble des échelles peuvent être obtenues rapidement à partir de la carte de reconstruction définie comme suit :

$$M_X(p) = \max_{z \in Sk_1(X);\ p \in B_z(F_X^d(z))} S_X(z)$$

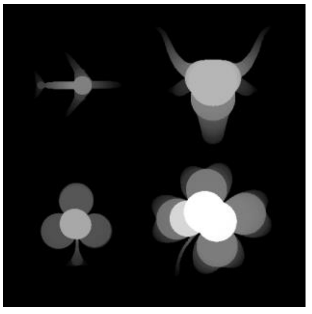
La reconstruction de l'image X à l'échelle σ s'obtient ensuite par seuillage de la carte de reconstruction à la valeur σ :

$$R_\sigma(X) = \{z; M_X(z) > \sigma\}$$

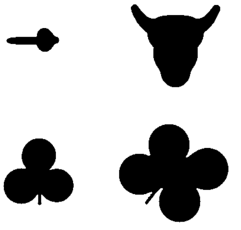
Carte de reconstruction



X



M_X



$\{z; M_X(z) > 100\}$

Squelettes – Conclusion

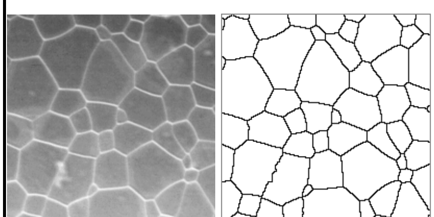
PROPRIETES / AVANTAGES DES DIFFERENTS SQUELETTES :

	Propriétés / Avantages					
A L G O S		**Connexité**	**Rapidité**	**Géométrie**	**Réversibilité**	**Extension 3d**
	Squelette morphologique					
	Squelette par amincissement					
	Squelette multi-échelle par fonction de chocs					

Chapitre 4 : Squelettes et Lignes de Partage des Eaux

LPE : motivation

La *ligne de partage des eaux* (LPE) constitue l'approche morphologique de la segmentation d'une image en niveaux de gris. Le but est d'obtenir une partition de l'image en régions regroupant des pixels jugés équivalents en fonction d'un certain critère.



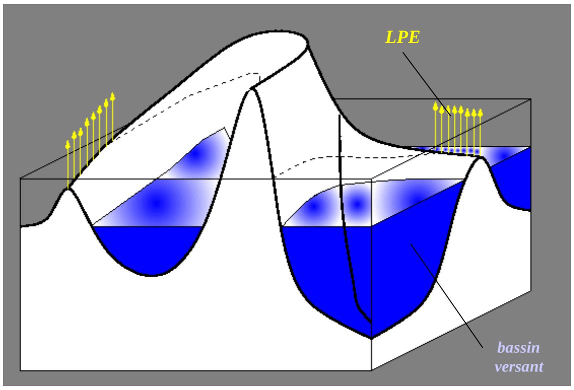
ex1 : analyse des cristaux de minerai d'uramium

ex2 : détection de contours

La segmentation est la base de la représentation de l'image qui permettra d'aller vers une description évoluée de la scène.

LPE par simulation d'immersion

Si l'on considère une image comme une surface topographique, où l'altitude correspond au niveau de gris, le principe de construction de la LPE par immersion est le suivant : en imaginant que tous les minima régionaux sont percés, on immerge progressivement le relief par une montée des eaux.



(1) A chaque fois que la hauteur de l'eau atteint l'altitude d'un minimum régional, un nouveau bassin versant est créé.

(2) A chaque fois que deux bassins se rencontrent, on empêche leur fusion en construisant une "digue".

L'ensemble des digues forme la LPE.

Calcul de la LPE

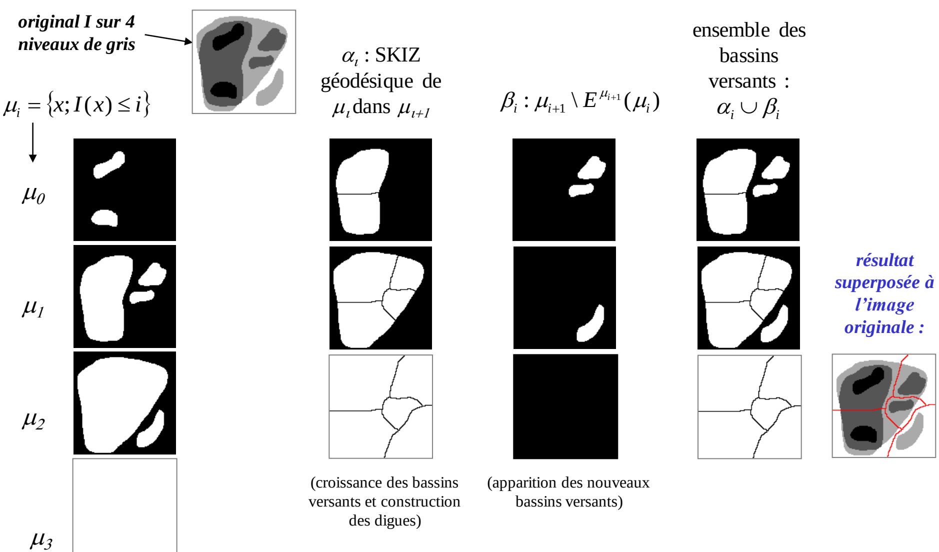
original I sur 4 niveaux de gris

$\mu_i = \{x; I(x) \leq i\}$

α_i : SKIZ géodésique de μ_i dans μ_{i+1}

$\beta_i : \mu_{i+1} \setminus E^{\mu_{i+1}}(\mu_i)$

ensemble des bassins versants : $\alpha_i \cup \beta_i$



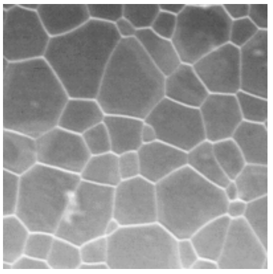
(croissance des bassins versants et construction des digues)

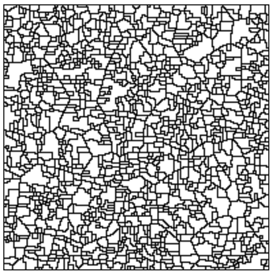
(apparition des nouveaux bassins versants)

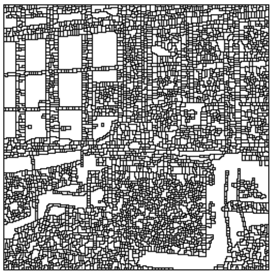
résultat superposée à l'image originale :

LPE : problème de la sursegmentation

Dans le cas d'images naturelles, l'application de l'algorithme précédent sur l'image (uranium) ou sur le gradient morphologique de l'image (bureau) produit une sursegmentation très importante.

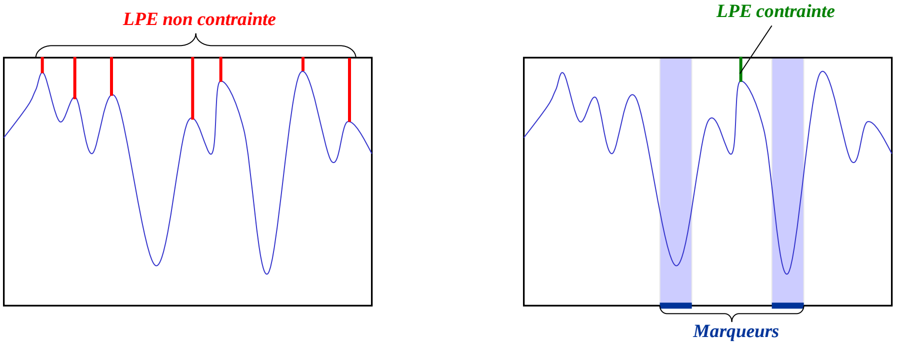






LPE avec marqueurs

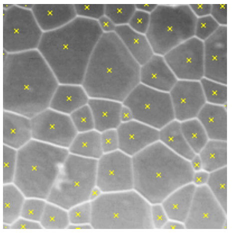
La première technique pour éviter la sursegmentation est d'utiliser des *marqueurs* qui ont pour rôle *d'imposer la présence de certains bassins* versants seulement, de manière à *contraindre la topologie* de la LPE.



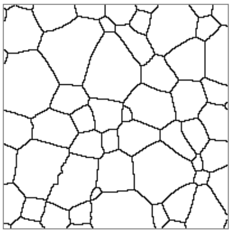
Pratiquement, on impose la présence des marqueurs par un OU logique à chaque étape, et on ne fait pas apparaître de nouveaux bassins versants.

LPE avec marqueurs : applications

exemple 1



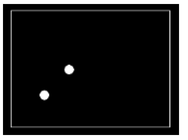
marqueurs (en jaune)



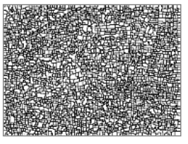
LPE contrainte

exemple 2

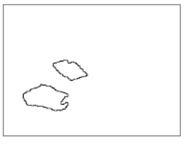
Séquence du Taxi de Hambourg



marqueurs : objets mobiles + fond



LPE brute

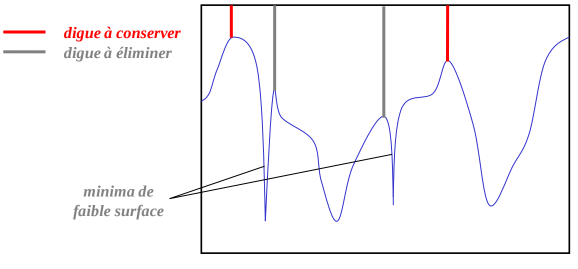


LPE contrainte

LPE par filtrage

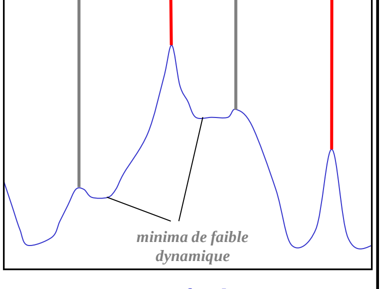
La seconde technique pour éviter la sursegmentation est de sélectionner les bassins versants qui apparaîtront dans la LPE en fonction de leur “importance”.

Cette importance revêt deux aspects différents :



La surface

Cet aspect est lié à la notion de *bruit spatial* dans l'image

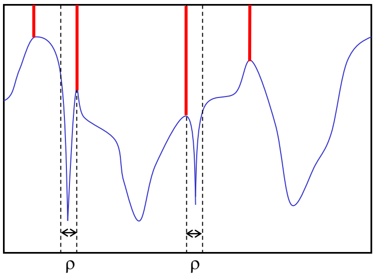


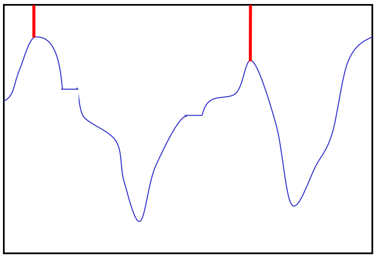
La profondeur

Cet aspect est lié à la notion de *dynamique* dans l'image

LPE : filtrage spatial

L'élimination des digues produites par des bassins de faible surface
peut être obtenue grâce au filtrage morphologique spatial :

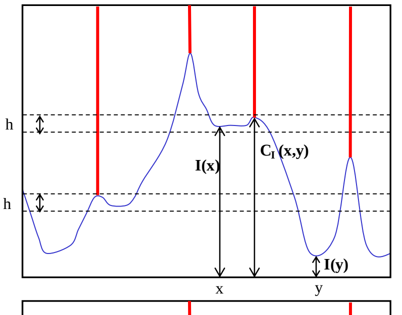




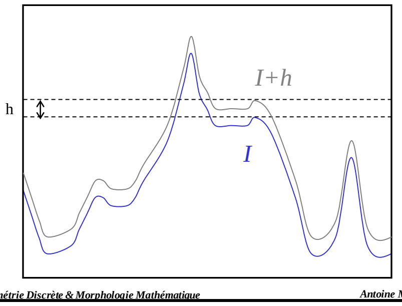
**fermeture par reconstruction
par une boule de diamètre ρ.**

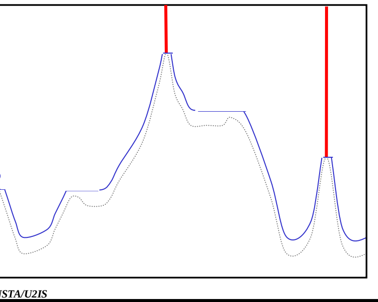
LPE : filtrage de dynamique

L'élimination des digues produites
par des bassins de faible dynamique
peut être obtenue grâce au filtrage
morphologique de dynamique :



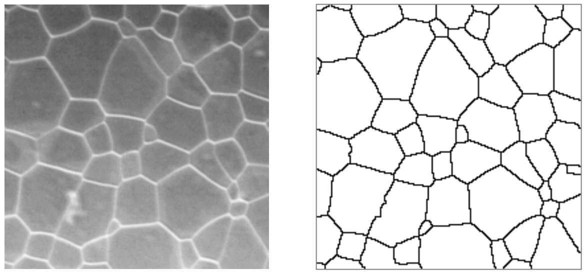
La reconstruction de la fonction *I* dans la fonction *I+h* élimine les minima régionaux de dynamique inférieure à h :





LPE par filtrage : résultats

En appliquant les deux filtrages précédents sur l'image (uranium) ou sur le gradient morphologique de l'image (bureau), on élimine dans la LPE les bassins *non significatifs*.



Squelettes et LPE – Conclusion

A RETENIR POUR CE COURS :

• Définition du **squelette morphologique discret** : Maxima Locaux de la Transformée en Distance ↔ Centres des Boules Maximales ↔ Résidus d'ouvertures

• **Squelettes par amincissement** : Homotopie discrète et propriété de Jordan – Points simples et ensembles simples : Homotopie séquentielle ou parallèle – Géométrie des squelettes par amincissement : points d'ancrage ou contrainte d'ordre.

• **Squelettes connexe par fonctions de choc** : Connexité des zones d'influence associées à une transformée en distance – Squelettes multi-échelles : Seuillage de la fonction de choc et reconstruction à divers degrés de détail

• **Lignes de Partage des Eaux** : Principe du calcul par immersion, Contrainte topologique par marqueurs, Filtrage des minima régionaux : taille *vs* dynamique.


FIN
ENSTA 2ème année
Antoine MANZANERA – ENSTA/U2IS