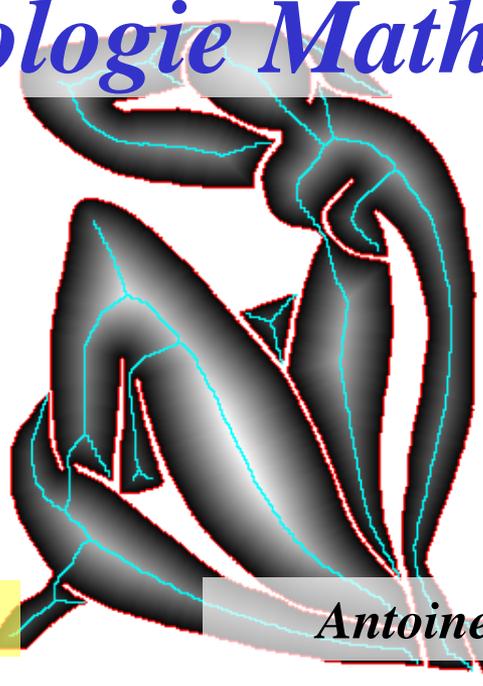




# *Géométrie Discrète & Morphologie Mathématique*



Cours ENSTA – 2<sup>ème</sup> année

*Antoine MANZANERA – ENSTA/U2IS*

## *Chapitre 4* : Squelettes et Lignes de Partage des Eaux

- (1) Squelettes : introduction.
- (2) Squelette morphologique.
- (3) Squelettes par amincissement.
- (4) Squelette multi-échelle par fonction de choc géodésique
- (5) Ligne de Partage des Eaux, principe et applications

# Chapitre 4 : Squelettes et Lignes de Partage des Eaux

## (1) Squelettes : introduction.

(2) Squelette morphologique.

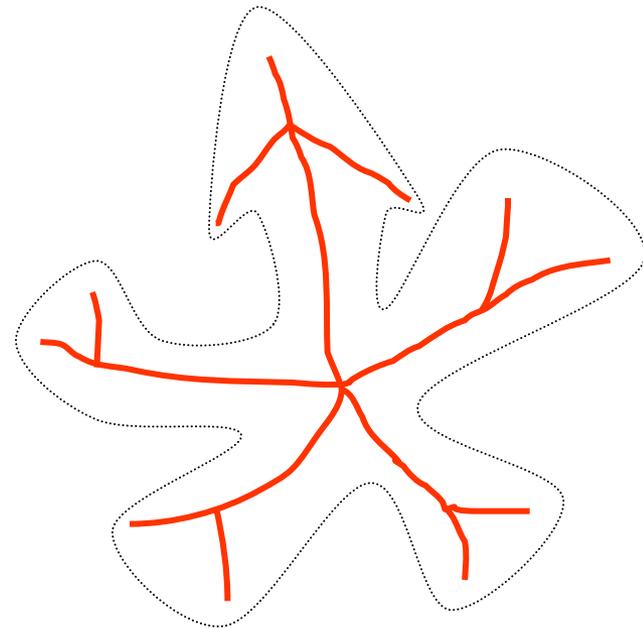
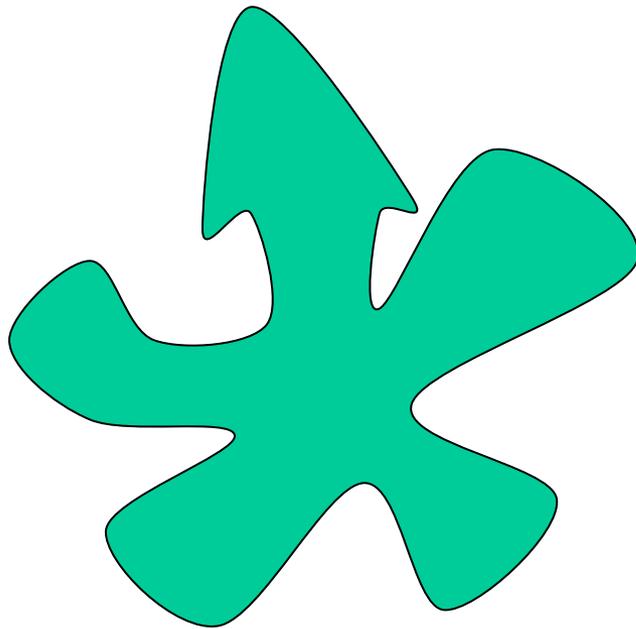
(3) Squelettes par amincissement.

(4) Squelette multi-échelle par fonction de choc géodésique

(5) Ligne de Partage des Eaux, principe et applications

# Squelettes : motivations

L'objectif de la squelettisation est de représenter un ensemble avec un minimum d'information, sous une forme qui soit à la fois simple à extraire et commode à manipuler.

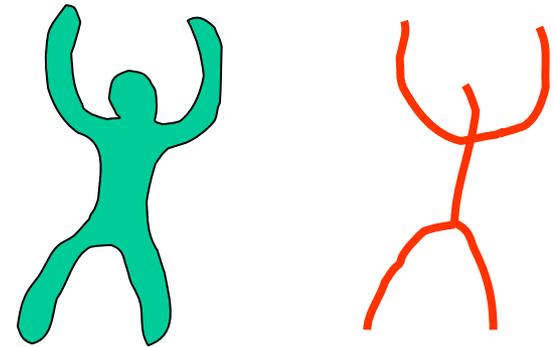


*Remarque* : Ce cours aborde essentiellement le cas des ensembles bidimensionnels (images binaires 2D), mais la plupart des notions s'appliquent également aux dimensions supérieures.

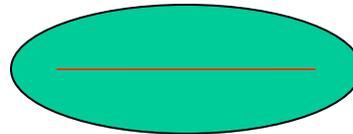
# Squelettes : propriétés recherchées (1)

## *Préservation de la géométrie*

Le squelette doit rendre compte des propriétés géométriques de la forme : ramifications, parties allongées...



## *Épaisseur nulle*



Le squelette doit être constitué de courbes sans épaisseur.

## *Préservation de la topologie*

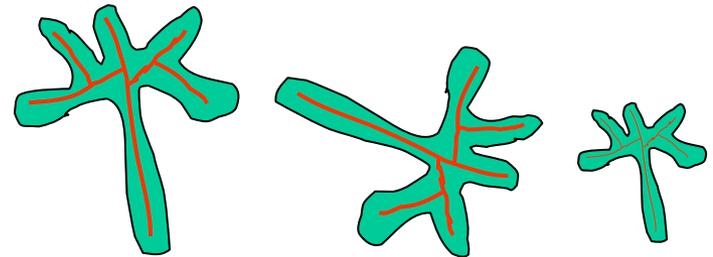
Le squelette doit conserver les relations de connexité : même nombre de composantes connexes, même nombre de trous par composante connexe.



# Squelettes : propriétés recherchées (2)

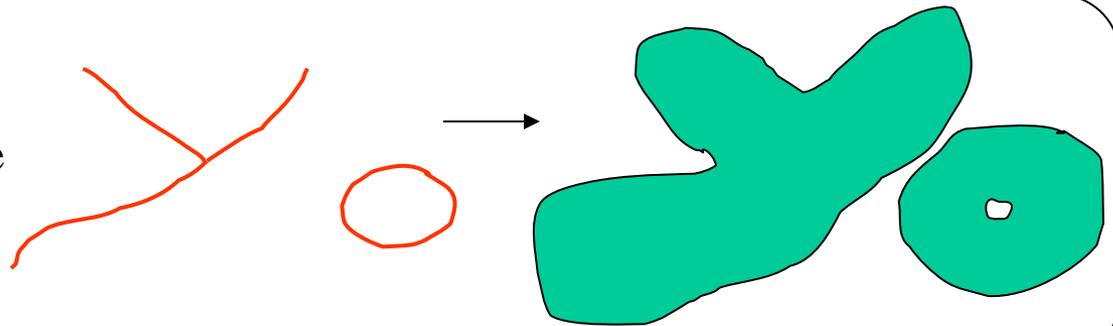
## *Invariance aux transformations affines*

Le squelette doit commuter avec la translation, la rotation et l'homothétie



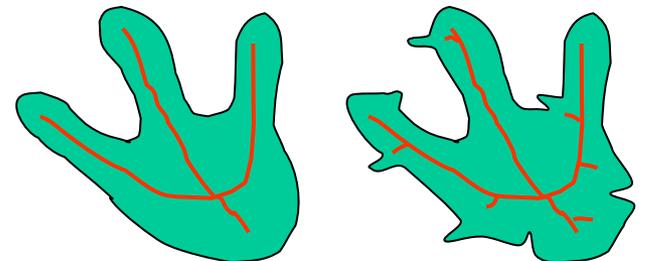
## *Réversibilité*

Le squelette doit permettre de retrouver la forme originale



## *Continuité*

Une petite modification de la forme originale doit induire une petite modification du squelette



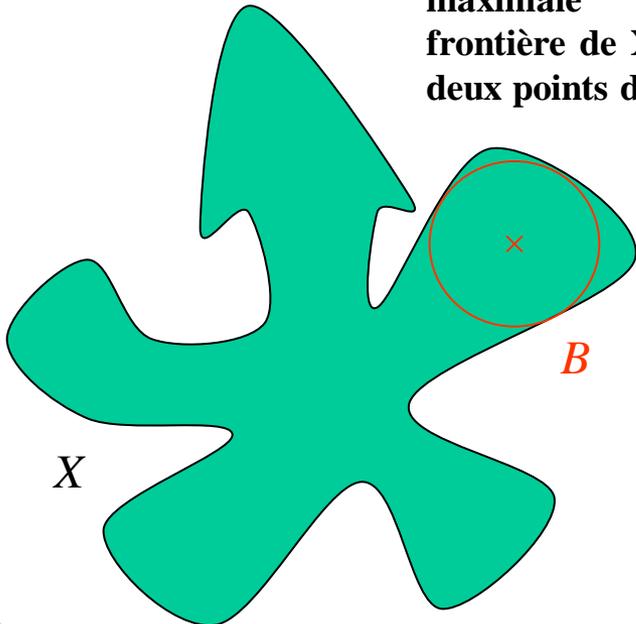
# Squelette morphologique

Le squelette morphologique est fondée sur la notion d'*axe médian* (Blum 67). Il utilise la notion de *boule maximale* :

Une boule  $B$  est dite maximale dans  $X$  si :

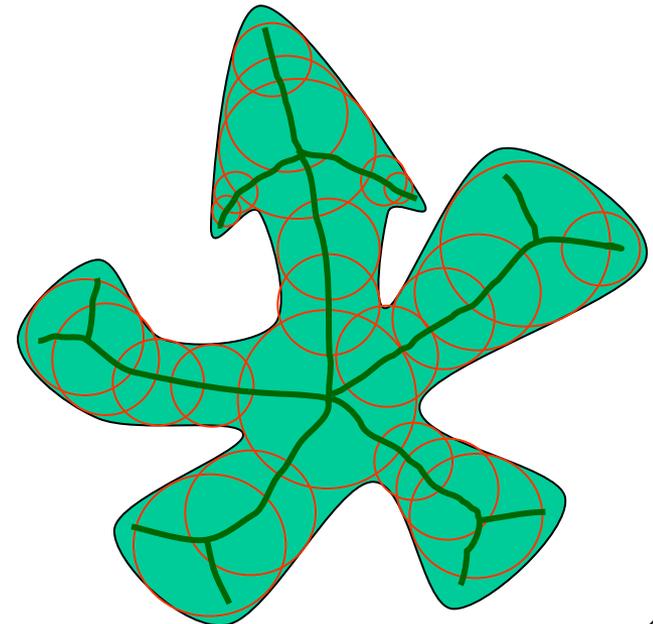
$$B \subset B' \subset X \Rightarrow B' = B$$

**Propriété** : une boule maximale touche la frontière de  $X$  en au moins deux points distincts



Le squelette morphologique (euclidien) est la réunion des centres de boules (euclidiennes) maximales :

$$S(X) = \bigcup_{\rho \geq 0} \{x \in \mathbb{R}^2; B(x, \rho) \text{ est maximale dans } X\}$$



# Propriétés du squelette morphologique (1)

De par sa définition, le squelette morphologique euclidien respecte la géométrie de la forme originale, et il est invariant par homothétie. Il possède de plus les propriétés suivantes :

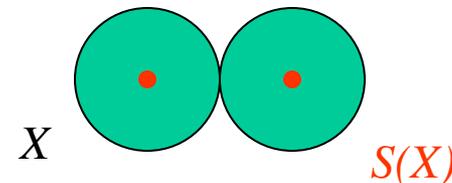
- Il est sans épaisseur (d'intérieur vide).

- Il est anti-extensif et idempotent :

$$S(X) \subset X \qquad S(S(X)) = S(X)$$

- Si  $X$  est ouvert, alors  $X$  et  $S(X)$  ont la même topologie.

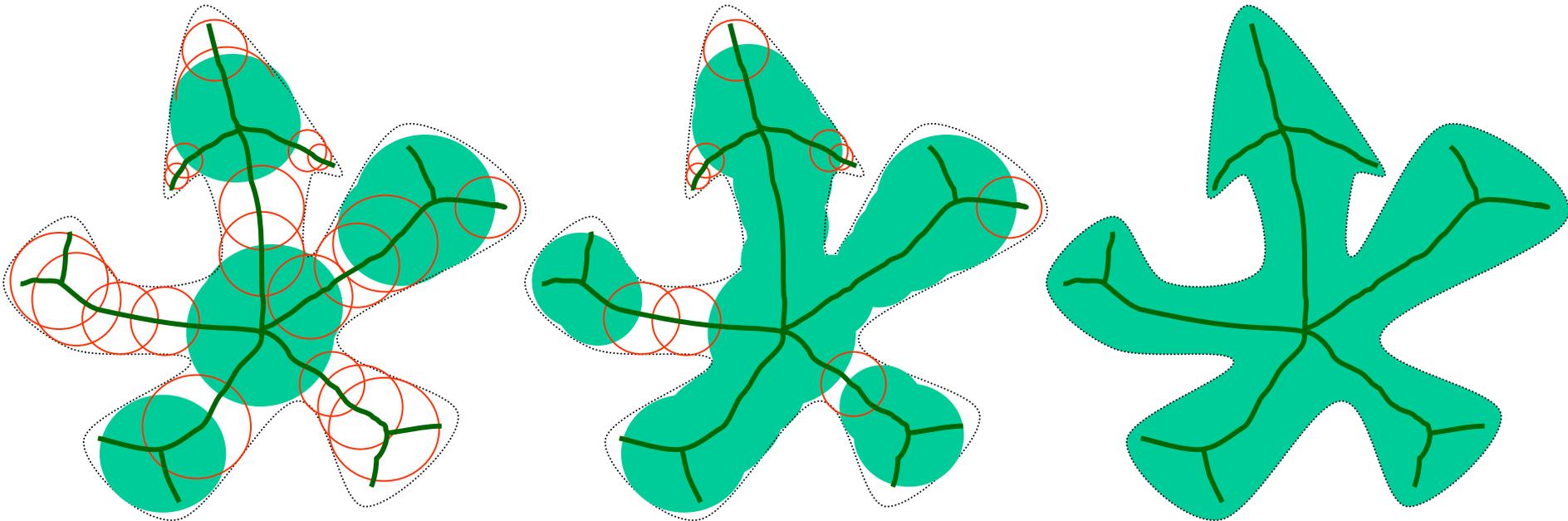
Contre-exemple :



# Propriétés du squelette morphologique (2)

## *Réversibilité :*

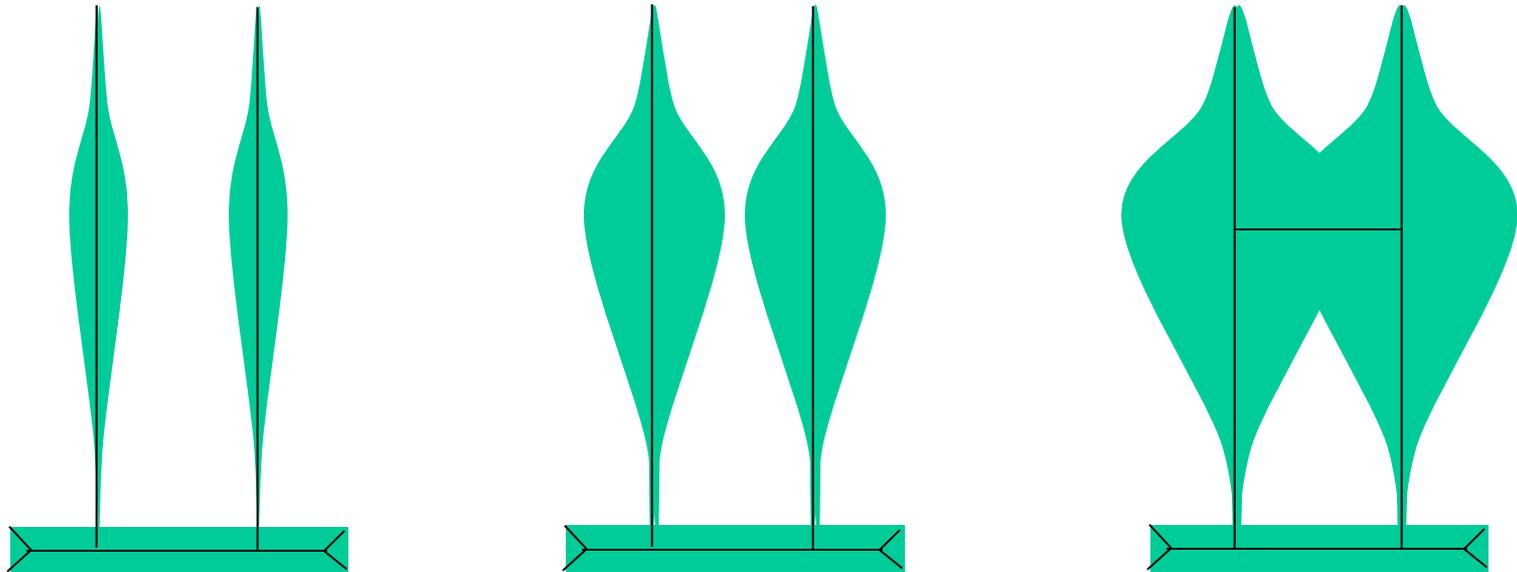
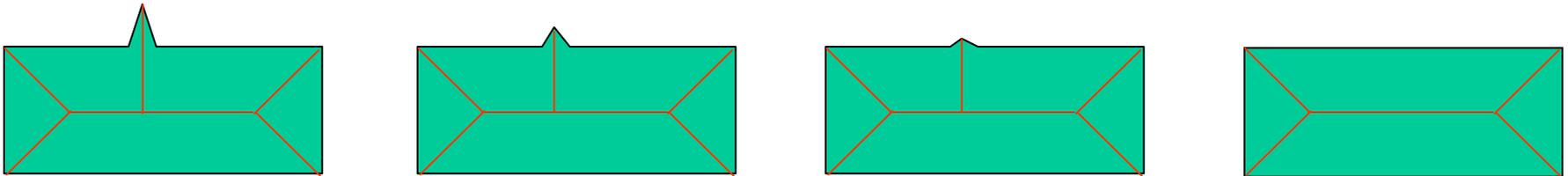
La donnée de la transformée en distance euclidienne de  $X$  sur  $S(X)$  permet de reconstruire exactement  $X$  :



# Propriétés du squelette morphologique (3)

## *Non-continuité :*

Le squelette morphologique euclidien n'est pas une transformation continue :



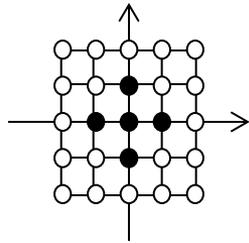
## Chapitre 4 : Squelettes et Lignes de Partage des Eaux

- (1) Squelettes : introduction.
- (2) Squelette morphologique.**
- (3) Squelettes par amincissement.
- (4) Squelette multi-échelle par fonction de choc géodésique
- (5) Ligne de Partage des Eaux, principe et applications

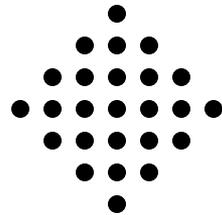
# Squelette morphologique : passage au discret

Dans le cas discret, les boules maximales sont les boules d'une distance discrète donnée

Exemples :

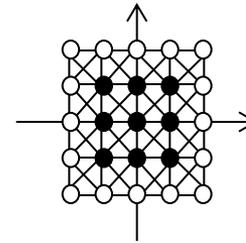


voisinage élémentaire  
de l'origine

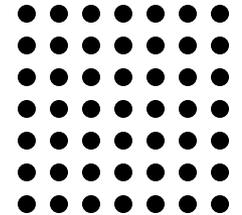


boule de rayon 3

Distance  $d_4$



voisinage élémentaire  
de l'origine



boule de rayon 3

Distance  $d_8$

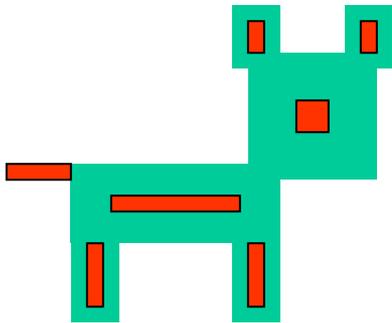
## *PROPRIÉTÉ*

Un point  $x$  est centre d'une boule maximale de rayon  $r$  dans  $X$  si et seulement si il appartient à l'érodé de  $X$  par une boule de taille  $r$ , mais pas à l'ouvert de cet érodé par la boule élémentaire :

$$\begin{aligned} S_r(X) &= \left\{ x \in \mathbf{Z}^2; B(x, r) \text{ est maximale dans } X \right\} \\ &= \mathcal{E}_{B(0,r)}(X) \setminus \gamma_{B(0,1)}(\mathcal{E}_{B(0,r)}(X)) \end{aligned}$$

# Squelette morphologique : passage au discret

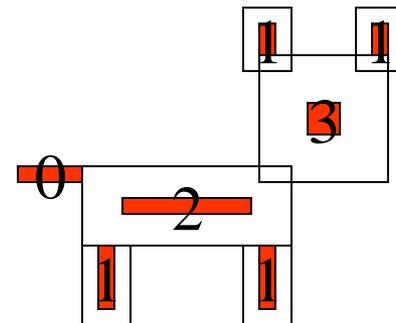
Par conséquent, le squelette morphologique est égal à l'union des résidus d'ouverture des érodés successifs de la forme originale :



$$\begin{aligned}
 S(X) &= \bigcup_{r \in \mathbb{N}} S_r(X) \\
 &= \bigcup_{r \in \mathbb{N}} \varepsilon_{B(0,r)}(X) \setminus \gamma_{B(0,1)}(\varepsilon_{B(0,r)}(X)) \quad \text{Lantuéjoul 78}
 \end{aligned}$$

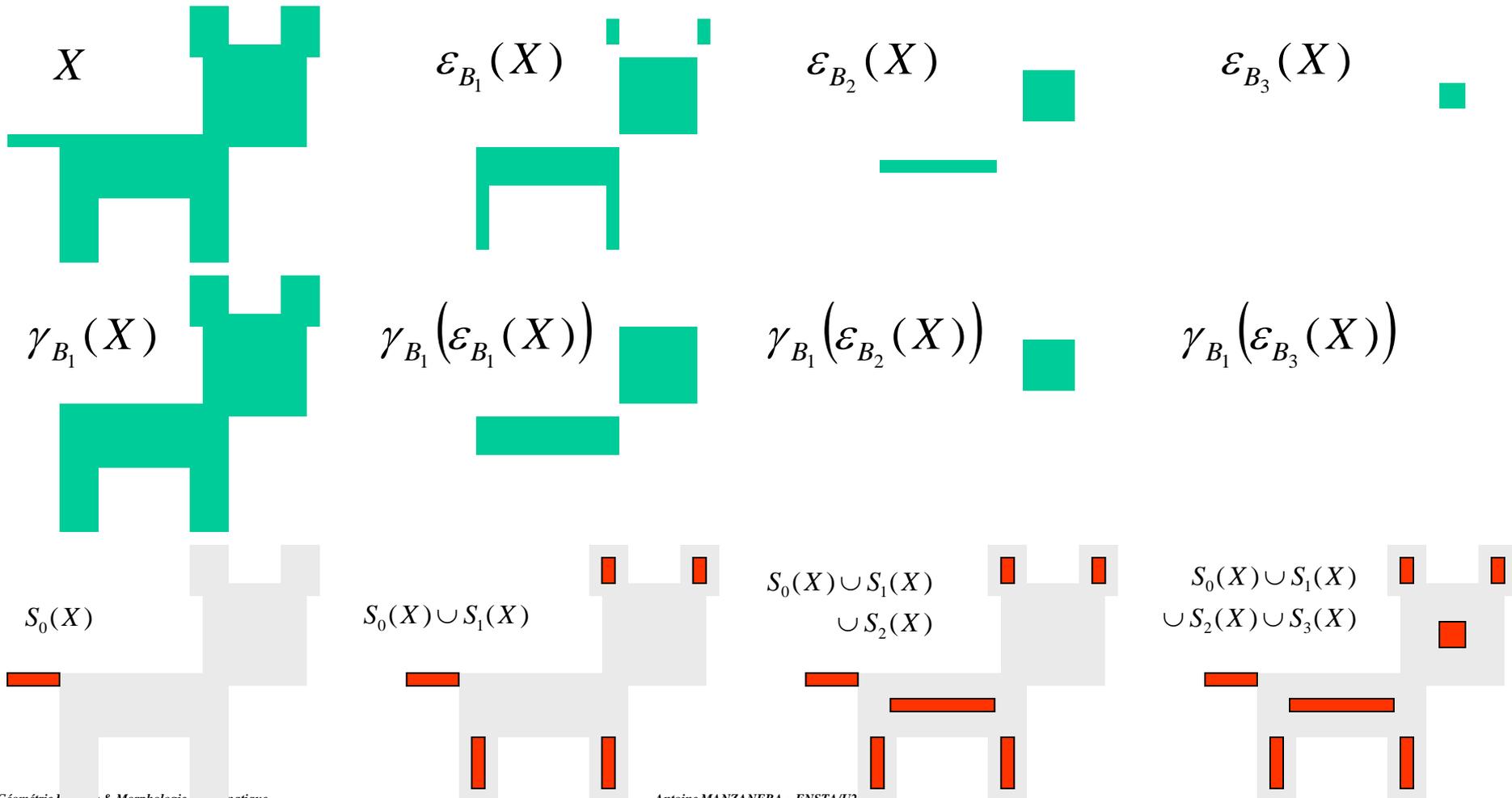
Formule d'inversion du squelette morphologique :

$$X = \bigcup_{r \in \mathbb{N}} \delta_{B(0,r)}(S_r(X))$$



# Squelette morphologique : passage au discret

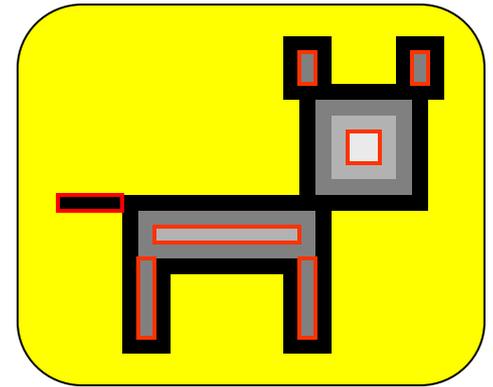
La formule de Lantuéjoul fournit un moyen explicite de calculer le squelette morphologique :



# Squelette morphologique : passage au discret

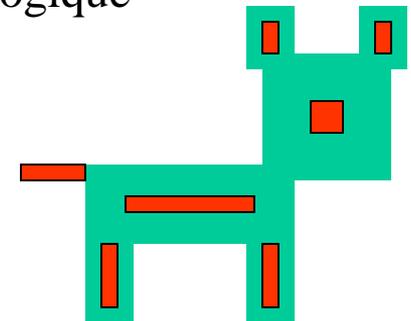
Comme l'ensemble des résidus d'ouverture coïncide avec l'ensemble des maxima locaux de la transformée en distance, le squelette morphologique discret est égal aux maxima locaux de la transformée en distance :

$$S(X) = \{x \in X; \forall y, \delta(x, y) = 1 \Rightarrow \delta(y, X^c) \leq \delta(x, X^c)\}$$



Contrairement au cas continu, le squelette morphologique ne préserve pas la topologie de la forme originale :

Les algorithmes de squelettisation connexe traitent donc le problème de préservation de la topologie directement dans le cadre discret.



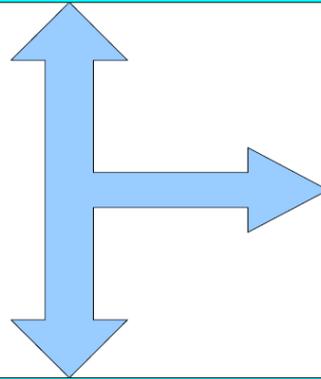
# Squelette morphologique : Propriété

**Les 3 propriétés suivantes sont équivalentes :**

(1)  $x$  est un résidu d'ouverture de  $X$   
 $\exists n \in \mathbb{N} / x \in (X \ominus B_n) \text{ et } x \notin \gamma_{B_1}(X \ominus B_n)$

(2)  $x$  est un maximum local de  
la fonction distance dans  $X$   
 $\forall y \delta(x, y) = 1 : \delta(y, X^c) \leq \delta(x, X^c)$

(3)  $x$  est centre d'une boule maximum dans  $X$   
 $\exists n \in \mathbb{N} / B(x, n) \subset B(y, m) \subset X \Rightarrow (y, m) = (x, n)$



# Squelette morphologique : Propriété

(1)  $\Leftrightarrow$  (2)

$x$  est un résidu d'ouverture de  $X$

$\Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N} / x \in (X \ominus B_n)$  et  $x \notin \gamma_{B_1}(X \ominus B_n)$

$\Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N} / x \in (X \ominus B_n)$  et  $x \notin [(X \ominus B_n) \ominus B_1] \oplus B_1$

$\Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N} / x \in (X \ominus B_n)$  et  $x \notin [(X \ominus B_{n+1}) \oplus B_1]$

$\Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N} / x \in (X \ominus B_n)$  et  $\forall y, \delta(x, y) = 1 : y \notin (X \ominus B_{n+1})$

$\Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N} / \delta(x, X^c) \geq n$  et  $\forall y, \delta(x, y) = 1 : \delta(y, X^c) < n + 1$

soit  $x$  est un maximum local de la fonction distance dans  $X$

# Squelette morphologique : Propriété

(3)  $\Rightarrow$  (2)

$x$  est un centre de boule maximum dans  $X$

alors  $\delta(x, X^c) = n$

Supposons  $\exists y, \delta(x, y) = 1$  et  $\delta(y, X^c) > n$

Mais dans ce cas  $\exists p, B(x, n) \subset B(y, p) \subset X$

ce qui contredit l'hypothèse

donc  $x$  est un maximum local de la fonction distance dans  $X$

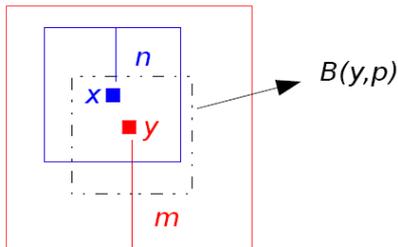
# Squelette morphologique : Propriété

(2)  $\Rightarrow$  (3)

Soit  $x$  un maximum local de la fonction distance dans  $X$

Soit  $B(x,n)$  la plus grosse boule de centre  $x$  contenue dans  $X$

Supposons  $\exists(y,m) \mid (y,m) \neq (x,n)$  et  $B(x,n) \subset B(y,m) \subset X$  nota :  $m < n$



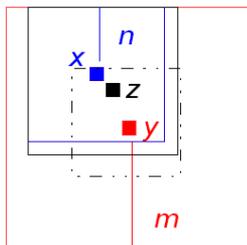
Considérons alors :  $B(y,p) = B(y,m) \ominus B_n$

$x \in B(y,p)$  puisque  $B(x,n) \subset B(y,m)$

mais :  $x \notin (B(y,p) \ominus B_1)$

car sinon :  $B(x,n+1) \subset B(y,m) \subset X$

...or  $B(x,n)$  est la plus grosse boule de centre  $x$  contenue dans  $X$



Par conséquent :  $\exists z, \delta(x,z) = n+1 \mid z \in (B(y,p) \ominus B_1)$

Mais alors :  $B(z,n+1) \subset B(y,m) \subset X$

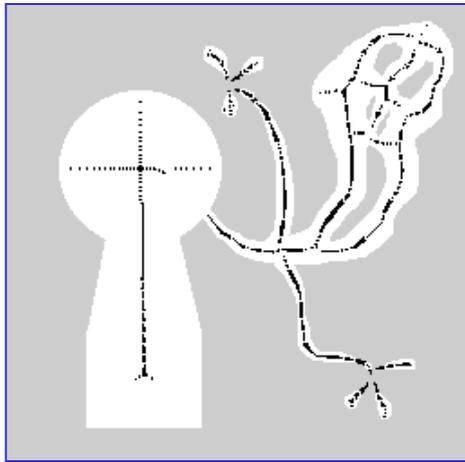
et donc  $\delta(z, X^c) = n+1$

ce qui contredit l'hypothèse.

donc  $x$  est un centre de boule maximum dans  $X$

# Squelette morphologique / Erodés ultimes

REMARQUE : Noter les parallèles entre le squelette morphologique et les érodés ultimes :



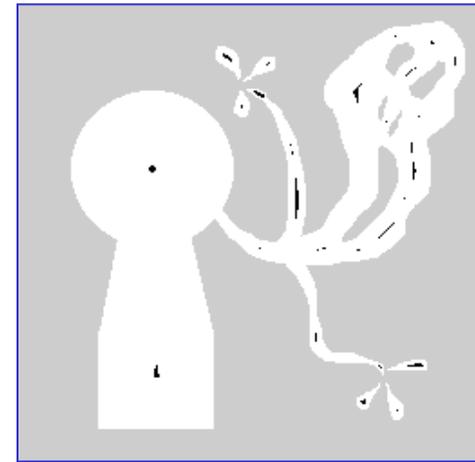
*Squelette morphologique*

||

*Maxima locaux* de la transformée en distance

||

Résidus d'*ouverture*



*Erodés ultimes*

||

*Maxima régionaux* de la transformée en distance

||

Résidus d'*ouverture par reconstruction*



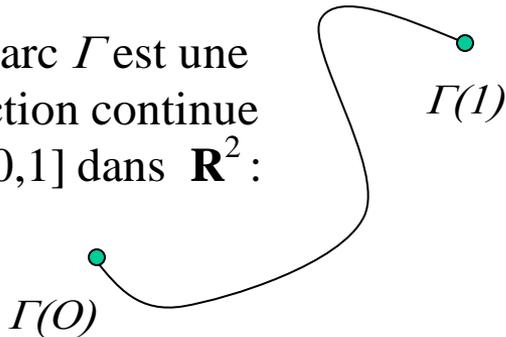
## Chapitre 4 : Squelettes et Lignes de Partage des Eaux

- (1) Squelettes : introduction.
- (2) Squelette morphologique.
- (3) Squelettes par amincissement.**
- (4) Squelette multi-échelle par fonction de choc géodésique
- (5) Ligne de Partage des Eaux, principe et applications

# Homotopie : cas continu

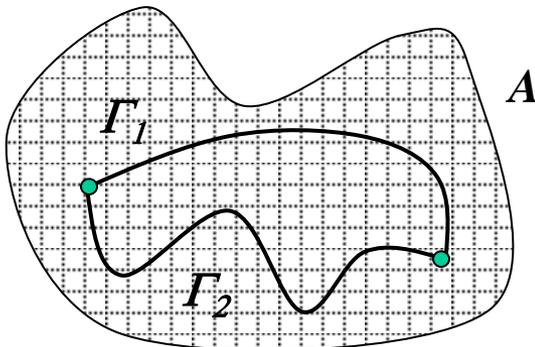
La préservation de la topologie est liée à la notion d'*homotopie*, originellement définie pour des arcs dans une partie du plan  $\mathbf{R}^2$

Un arc  $\Gamma$  est une fonction continue de  $[0,1]$  dans  $\mathbf{R}^2$  :

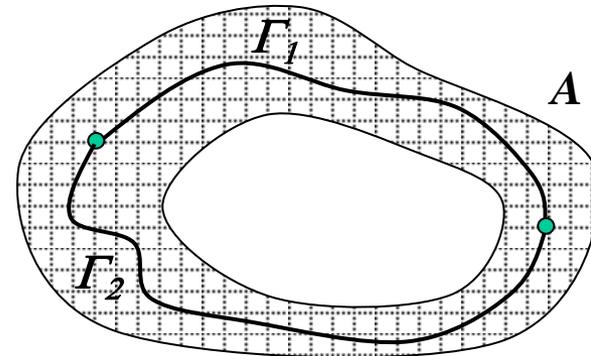


Soit  $A$  une partie de  $\mathbf{R}^2$ . Deux arcs  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$  de mêmes extrémités sont **homotopes** dans  $A$  s'il existe une fonction  $\Theta$  *bicontinue* de  $[0,1] \times [0,1]$  dans  $A$  telle que :

$$\begin{aligned} \forall t \in [0,1]: \Theta(t,0) = \Gamma_1(t) & \quad \forall u \in [0,1]: \Theta(0,u) = \Gamma_1(0) = \Gamma_2(0) \\ \Theta(t,1) = \Gamma_2(t) & \quad \Theta(t,u) = \Gamma_2(1) = \Gamma_1(1) \end{aligned}$$



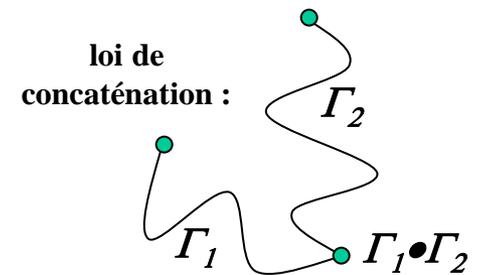
$\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$  sont homotopes dans  $A$ .



$\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$  ne sont pas homotopes dans  $A$ .

# Homotopie : cas continu

- L'homotopie est une relation d'équivalence.
- Si  $A$  est un ouvert de  $\mathbf{R}^2$ , l'ensemble des classes d'homotopie, muni de la loi de concaténation, est un groupe dit *groupe fondamentale* de  $A$ .

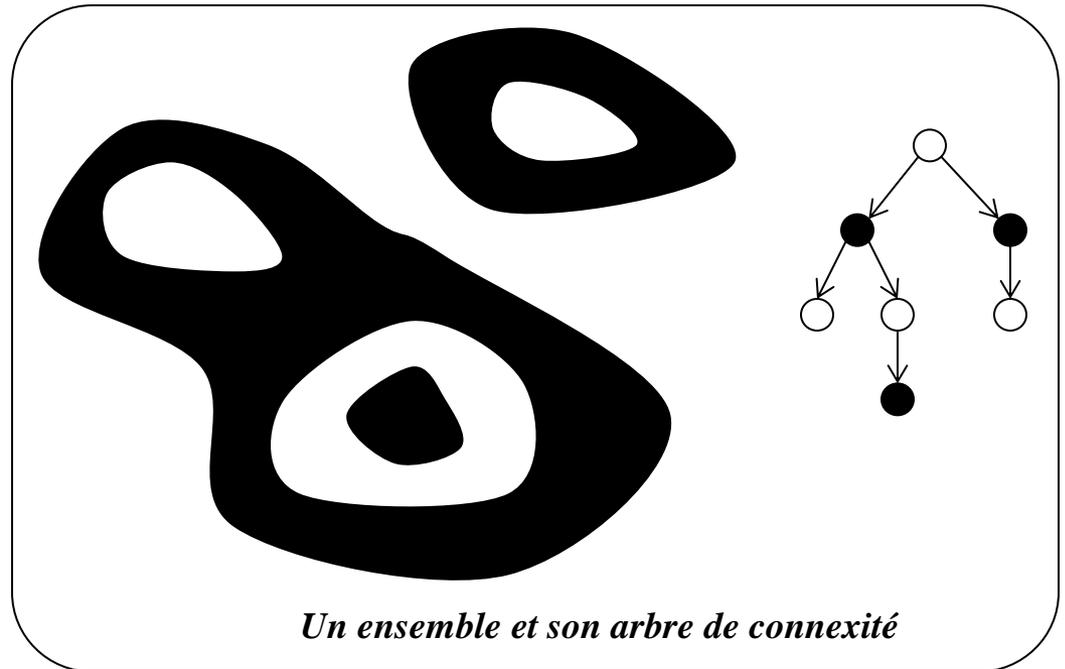


- Le groupe fondamental caractérise la topologie de l'ensemble, et on dira que deux ouverts sont *homotopes* si leurs groupes fondamentaux sont isomorphes.
- Etant donnée une fonction  $F$  de  $\mathbf{R}^2$  dans  $\mathbf{R}^2$ , on dira que  $F$  *préserve la topologie* si et seulement si pour tout ouvert  $A$ ,  $A$  et  $F(A)$  sont homotopes.

# Homotopie et arbre de connexité

On peut représenter le groupe fondamental d'un ouvert borné du plan par un arbre orienté dit arbre de connexité

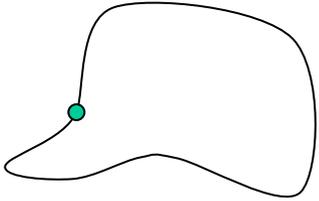
- Chaque nœud noir représente une composante connexe de l'ouvert, chaque nœud blanc représente une composante connexe du complémentaire.



- Les successeurs de chaque nœud blanc (resp. nœud noir) correspondent aux composantes connexes de l'ouvert (resp. du complémentaire) que la composante représentée par le nœud *entoure*.

La définition de la relation “entoure” est liée au *théorème de Jordan*...

# Théorème de Jordan dans $\mathbb{R}^2$

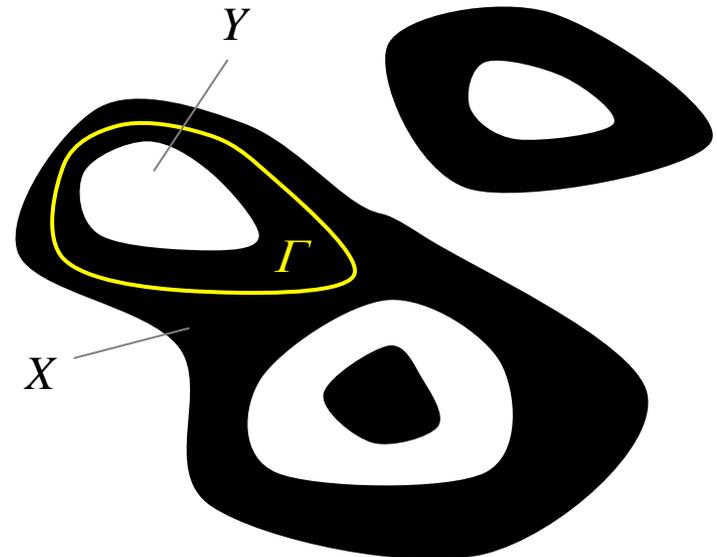


**Déf :** Une courbe de Jordan est une *courbe simple fermée* (arc  $\Gamma$  injectif sur  $[0,1[$  et tel que  $\Gamma(0) = \Gamma(1)$ )

**Théorème de Jordan :** Une courbe de Jordan sépare le plan en deux parties : l'*intérieur* et l'*extérieur* de la courbe.

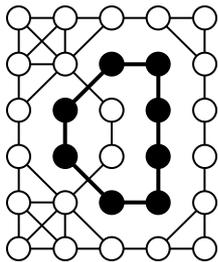
## **Relation d'entourage :**

On dit qu'une composante  $X$  de l'ouvert (resp. du complémentaire) entoure une composante  $Y$  du complémentaire (resp. de l'ouvert) s'il existe une courbe de Jordan  $\Gamma$  incluse dans  $X$  telle que  $Y$  est inclus dans l'intérieur de  $\Gamma$  :

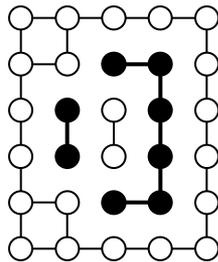


# Théorème de Jordan en maille carrée

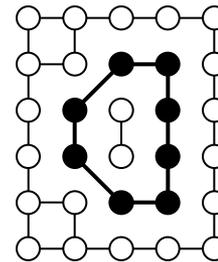
Le théorème de Jordan n'est pas valide dans la maille carrée...



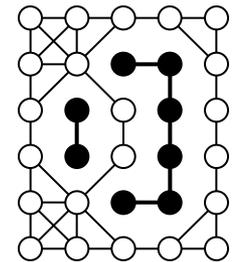
8-connexité



4-connexité



(8,4)-connexité



(4,8)-connexité

...sauf si l'on considère des topologies différentes pour l'objet et pour le complémentaire.

( $K = 8$  ou  $4$  ; On note  $\tilde{K} = 12 - K$ )

## Propriété d'homotopie en maille carrée :

$A$  et  $B$  sont  $K$ -homotopes si et seulement si : il existe une bijection entre l'ensemble des composantes  $K$ -connexes de  $A$  et celles de  $B$ , et une bijection entre les composantes  $\tilde{K}$ -connexes de  $A^c$  et celles de  $B^c$ , qui préservent la relation d'entourage



# Homotopie discrète et simplicité

Lorsqu'il y a une relation d'inclusion entre les deux ensembles, l'homotopie s'exprime plus simplement :

Soit  $A \subset B$ . Alors  $A$  est homotope à  $B$  si les 2 conditions suivantes sont vérifiées :

- Toute  $K$ -cc de  $B$  contient exactement une  $K$ -cc de  $A$ .
- Toute  $\tilde{K}$ -cc de  $A^c$  contient exactement une  $\tilde{K}$ -cc de  $B^c$ .

*Stefanelli & Rosenfeld 1971*

## *Ensembles simples :*

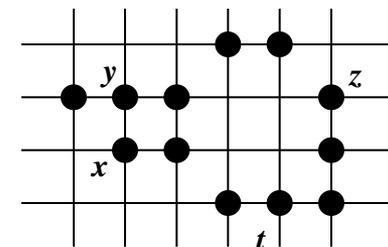
Soit  $A \subset X$ .  $A$  est dit  *$K$ -simple* dans  $X$  si et seulement si  $X \setminus A$  est homotope à  $X$ .

## *Points simples :*

Soit  $x \in X$ .  $x$  est un point  *$K$ -simple* de  $X$  si  $\{x\}$  est un ensemble  $K$ -simple dans  $X$ .

exemples :

- $x$  et  $y$  sont 8-simples
- $x$  et  $z$  sont 4-simples



# Caractérisation analytique des points simples

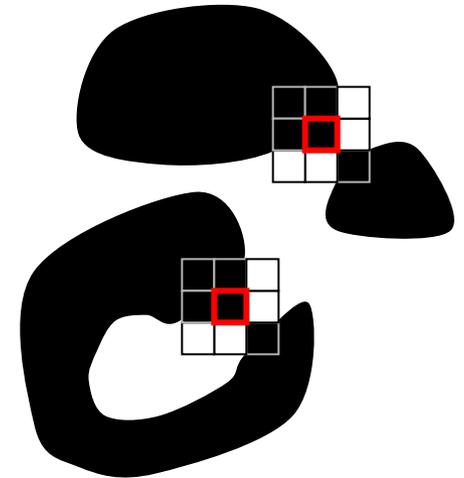
La simplicité d'un point peut être déterminée en examinant ses 8 voisins :

## Théorème :

Soit  $x \in X$ .  $x$  est un point *K-simple* de  $X$  si et seulement si :

(1)  $x$  a au moins un  $\tilde{K}$ -voisin dans  $X^c$ .

(2)  $x$  est  $K$ -voisin d'une seule  $K$ -cc dans son voisinage strict.



## Nombres de connexité :

somme arithmétique

$x_j = 1$  si  $x_j \in X$   
 $x_j = 0$  si  $x_j \notin X$

addition modulo 8

$$N_{c_8}^X(x) = \sum_{i=0}^3 (x_{2i+1} \vee x_{2i+2}) \wedge \neg x_{2i}$$

$$N_{c_4}^X(x) = \sum_{i=0}^3 x_{2i} \wedge \neg(x_{2i+1} \wedge x_{2i+2})$$

Yokoï 1973

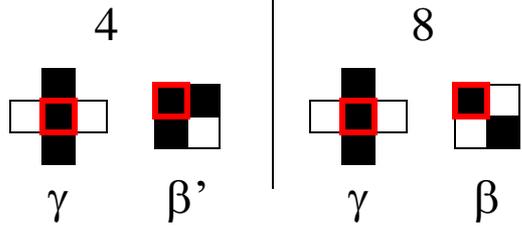
## Propriété :

$$x \text{ est } K\text{-simple dans } X \Leftrightarrow N_{c_K}^X(x) = 1$$

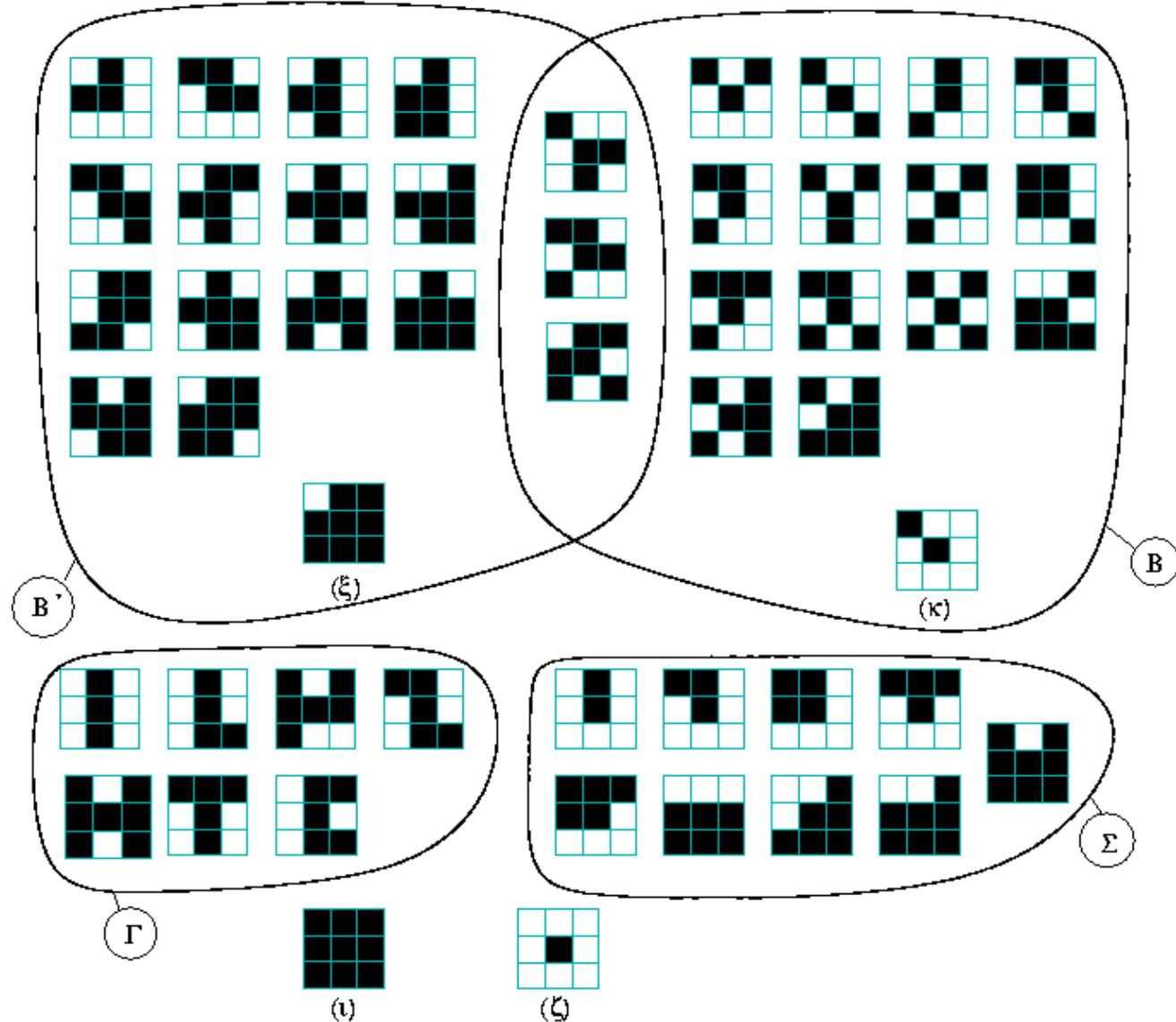
Notation des 8 voisins :

$x_3$	$x_2$	$x_1$
$x_4$	$x$	$x_0$
$x_5$	$x_6$	$x_7$

# Caractérisation géométrique des points simples



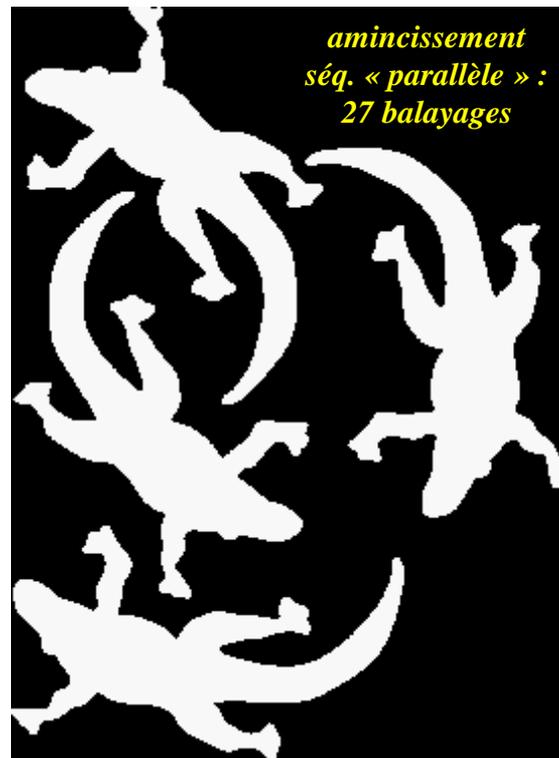
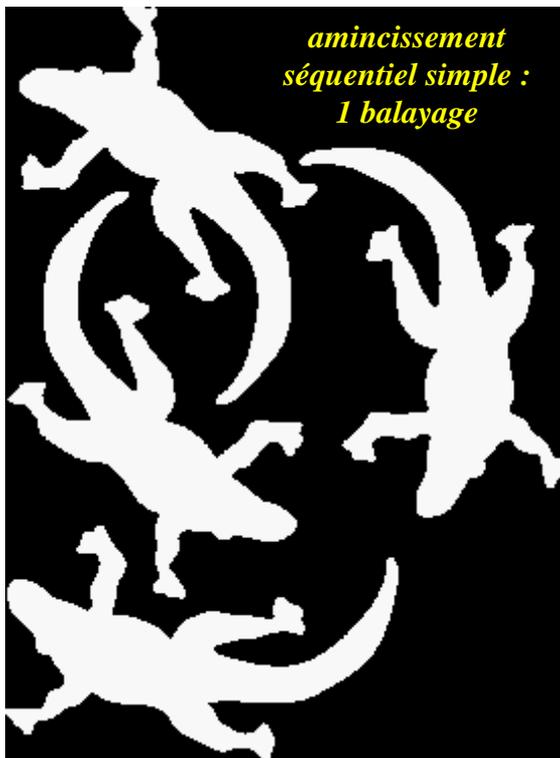
Ce classement montre une caractérisation géométrique des points simples : Un point qui n'est ni un point intérieur (configuration  $\iota$ ), ni un point isolé (configuration  $\zeta$ ), est 8-simple (resp. 4-simple) s'il ne contient pas dans son 8-voisinage l'une des sous-configurations  $\gamma$  ou  $\beta$  (resp.  $\gamma$  ou  $\beta'$ ). La réciproque est également vraie, sauf pour la configuration  $\kappa$  (resp.  $\xi$ ).



*Classification des configurations de 8-voisinage en fonction de sous-configurations communes*

# Squelettisation : séquentiel vs parallèle

Si l'on retire des points de squelette (simples et non terminaux) de manière séquentielle, on préserve la connexité : on obtient donc un squelette en 1 seule itération... mais toutes les propriétés métriques du squelette disparaissent ! Les algorithmes d'amincissement séquentiels « simulent » donc le parallélisme pour retirer indépendamment les points, en travaillant sur une image d'entrée  $I_{IN}$ , et une image de sortie  $I_{OUT}$ , la mise à jour  $I_{IN} = I_{OUT}$  ne se faisant qu'à la fin de chaque balayage.



Par conséquent, il est indispensable de pouvoir retirer un grand nombre de points « simultanément ».



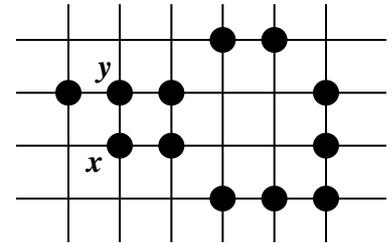
*ENSEMBLES  
SIMPLES*

# Points simples et ensembles simples



Une réunion de points simples ne forment pas un ensemble simple en général :

ex :  $x$  et  $y$  sont tous deux 8-simples, mais la destruction de la paire  $\{x,y\}$  déconnecte l'objet en deux composantes 8-connexes



Se pose alors la question de la validité des algorithmes de squelettisation *parallèles*.  
Le résultat suivant répond à ce problème :

## ***Théorème de Ronse (1988) :***

Soit  $A$  un opérateur de  $P(\mathbb{Z}^2)$  dans  $P(\mathbb{Z}^2)$  tel que pour tout  $X$ ,  $A(X) \subset X$ .

Si pour tout  $X$ , les 3 conditions suivantes sont vérifiées :

- Tout  $x \in X \setminus A(X)$  est  $K$ -simple.
- Toute paire  $\{x,y\} \subset X \setminus A(X)$  de points  $(12-K)$ -adjacents est  $K$ -simple.
  - Si  $K=8$ , alors aucune  $K$ -cc de  $X$  contenue dans un carré  $2 \times 2$  n'appartient à  $X \setminus A(X)$ .

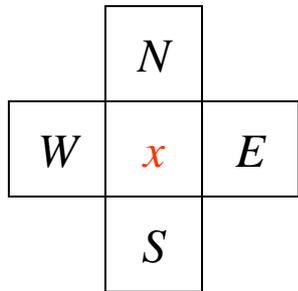
Alors l'opérateur  $A$  préserve la  $K$ -topologie

K	
4	8

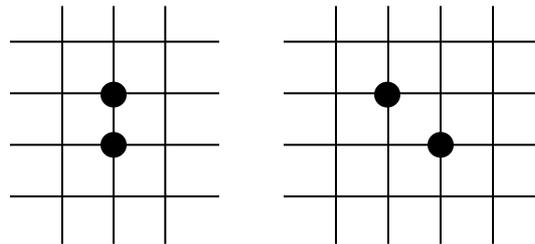
# Points simples et ensembles simples

Pour assurer l'homotopie dans le cas d'une destruction simultanée de points simples, il faut donc en général examiner un voisinage plus large. On peut également utiliser la propriété suivante, qui est une simple conséquence du théorème de Ronse :

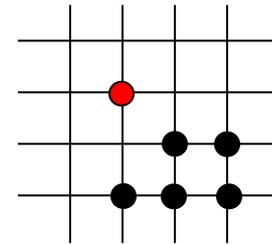
Le retrait simultané de points simples d'une image  $X$  ne modifie pas la topologie de  $X$  si on ne retire que les points qui ont un voisin *Nord* (resp. *Est*, *Sud*, et *Ouest*) dans  $X^c$ , sauf pour les composantes connexes de deux pixels.



dénomination cardinale  
des 4-voisins



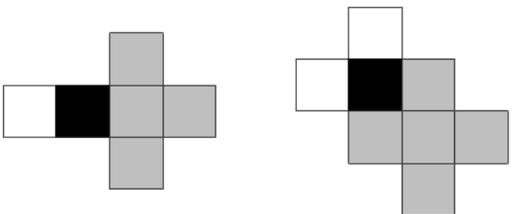
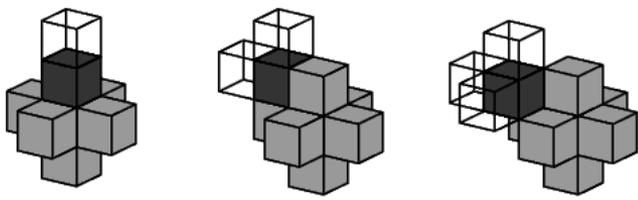
cas des composantes de deux pixels



Pixel terminal : un seul  
voisin dans l'image

Ou encore : le retrait simultané de points simples *et non terminaux* d'une image  $X$  ne modifie pas la topologie de  $X$  si on ne retire que les points qui ont un voisin *Nord* (resp. *Est*, *Sud*, et *Ouest*) dans  $X^c$ .

# Squelettes MB multi-dimensionnels

Dimension	function Alpha	function Beta
1	$\alpha_0$ 	—
2	$\alpha_1$ $\alpha_0$ 	$\beta_0$ 
3	$\alpha_2$ $\alpha_1$ $\alpha_0$ 	$\beta_1$ $\beta_0$ 

Le squelette MB est un squelette par amincissement valide en n-dimension.

Il consiste à retirer itérativement des points du contour correspondant à l'une des configurations  $\alpha_i$ , mais pas à l'une des configurations  $\beta_j$ .

Il est entièrement parallèle (pas de sous-itérations).

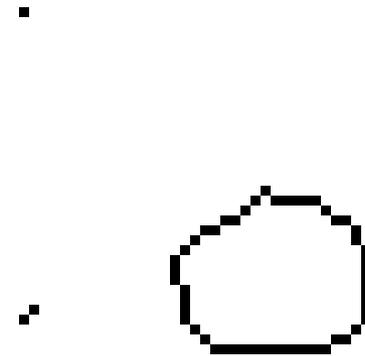
[Manzanera & Bernard 1999]

# Noyau homotopique

En retirant les points simples de la frontière dans une direction cardinale donnée, puis en réitérant le procédé en alternant les directions *Nord*, *Est*, *Ouest* et *Sud*, et ce, jusqu'à convergence, on obtient "le plus petit" (au sens du procédé de destruction des points) ensemble homotope à l'original, dit *noyau homotopique* :



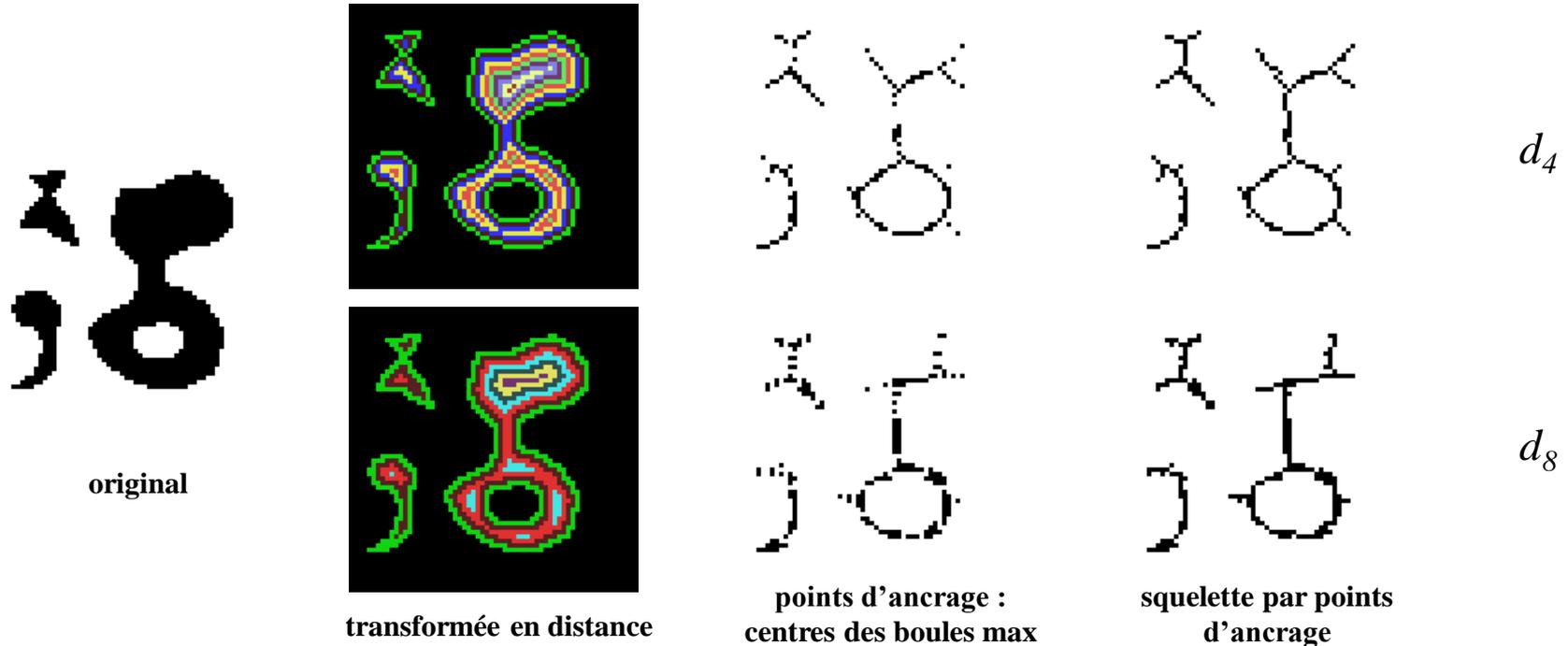
Original



Noyau homotopique

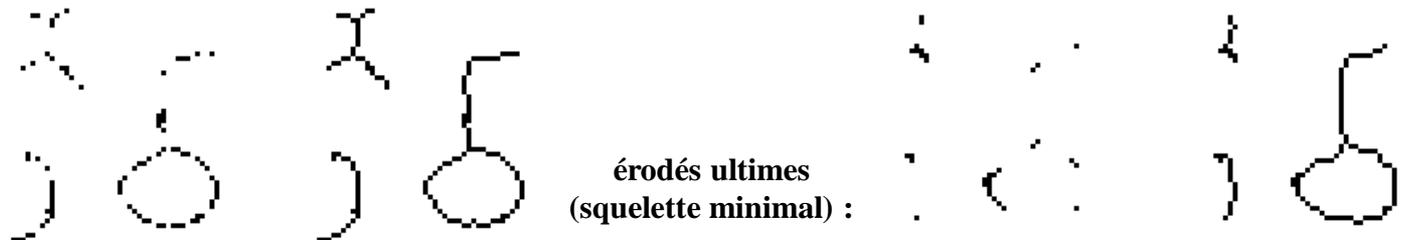
# Squelettes par points d'ancrage

En imposant la présence d'un ensemble de référence par un OU logique à chaque itération du noyau homotopique, on obtient le *squelette par points d'ancrage* :

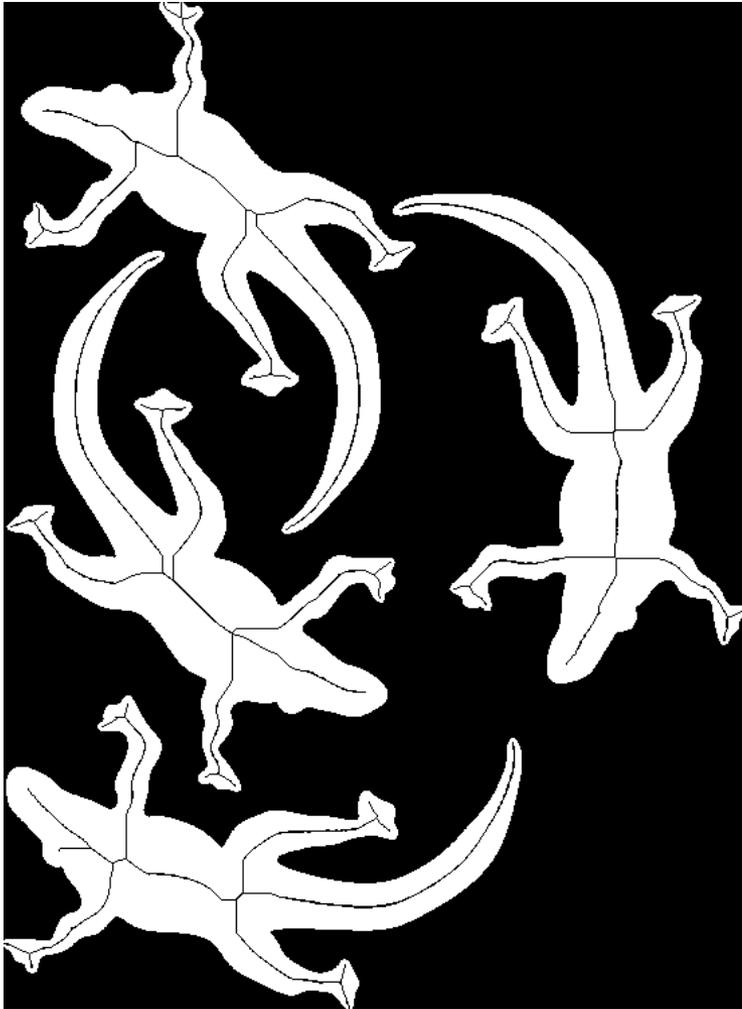


*d'autres exemples...*

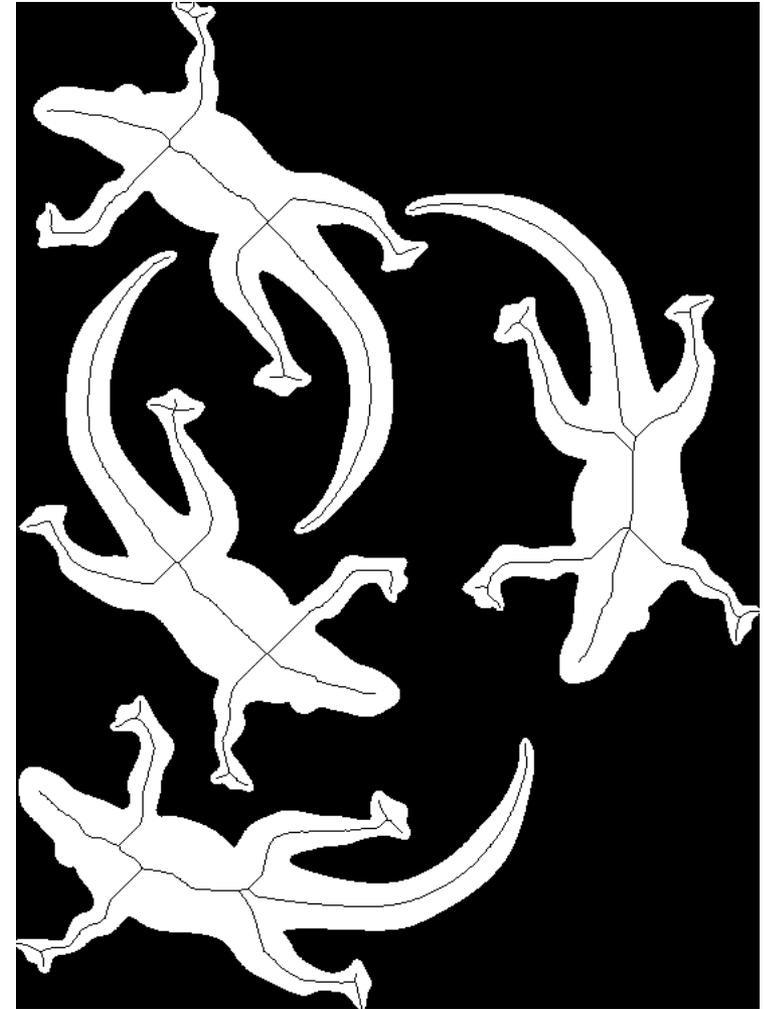
**Intersection des max locaux pour  $d_4$  et  $d_8$  :**



# Métrie et parallélisme



*MB fully parallel (géométrie induite par la distance  $d_4$ )*

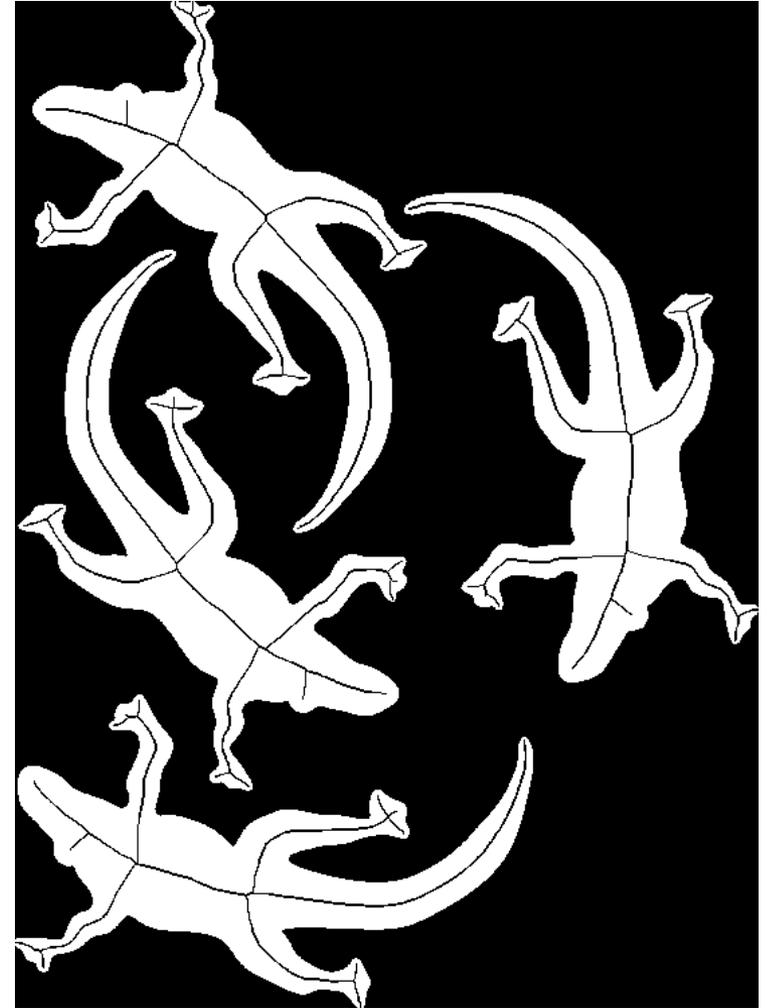


*MB directionnel (géométrie induite par la distance  $d_8$ )*

# Contrainte par la fonction distance



*Fonction distance  
(chamfrein 5-7-11)*



*MB contraint (les points sont retirés dans  
l'ordre induit par la fonction distance)*

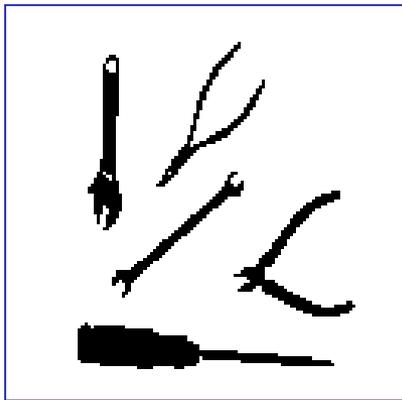
# Squelette par zones d'influence

Soit  $X$  un ensemble composé des différentes composantes connexes  $X_i$ :  $X = \bigcup_i X_i$

La *zone d'influence* d'une composante connexe de  $X$  est l'ensemble des points du plan plus proche de cette composante que de toute autre composante de  $X$ :

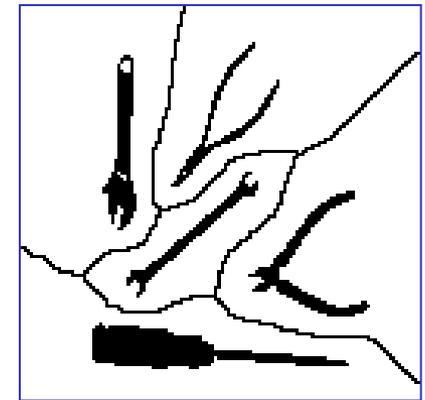
$$IZ(X_i) = \{x \in \mathbf{R}^2; \forall j \neq i, d(x, X_i) < d(x, X_j)\}$$

Le *squelette par zone d'influence* (SKIZ) de  $X$  est la frontière de l'ensemble des zones d'influence :



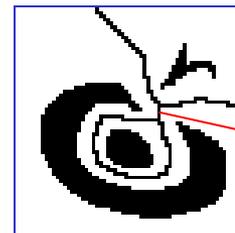
*original*

$$SKIZ(X) = \left[ \bigcup_i IZ(X_i) \right]^c$$



*SKIZ + original*

En discret, le SKIZ peut se calculer à partir du noyau homotopique dual, qui en constitue déjà une bonne approximation :



cette partie de la courbe n'appartient pas au SKIZ

## Chapitre 4 : Squelettes et Lignes de Partage des Eaux

- (1) Squelettes : introduction.
- (2) Squelette morphologique.
- (3) Squelettes par amincissement.
- (4) Squelette multi-échelle par fonction de choc géodésique**
- (5) Ligne de Partage des Eaux, principe et applications

# Squelettes euclidiens multi-échelles

Nous présentons dans cette partie l'une des techniques les plus élégantes et les plus efficaces de squelettisation : le squelette euclidien multi-échelles.

Son principe de calcul repose sur les 4 étapes suivantes :

1- Associer une *étiquette unique* à chaque pixel du contour

2- *Propager* les valeurs des étiquettes aux pixels les plus proches

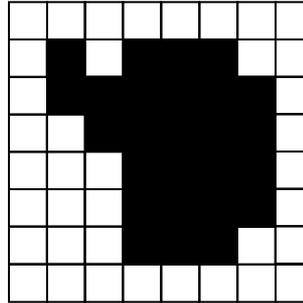
3- Calculer une *fonction de choc locale* selon la différence des valeurs des étiquettes entre pixels adjacents

4- Le squelette est obtenu par *seuillage* de la fonction de choc.

Une propriété remarquable est que, grâce au calcul récursif de la transformée en distance, chacune de ces étapes a un *coût de calcul constant*.

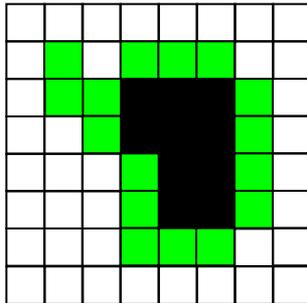
# Etiquetage de contours

Soit  $X$  une image binaire.



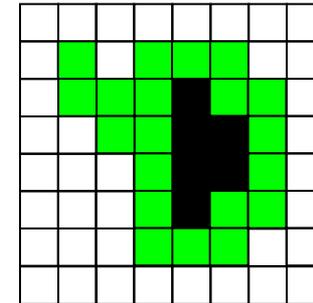
Contour en 4-connexité :

$$\partial_X^4 = \{z \in X; \exists q \notin X : d_4(z, q) = 1\}$$



Contour en 8-connexité :

$$\partial_X^8 = \{z \in X; \exists q \notin X : d_8(z, q) = 1\}$$

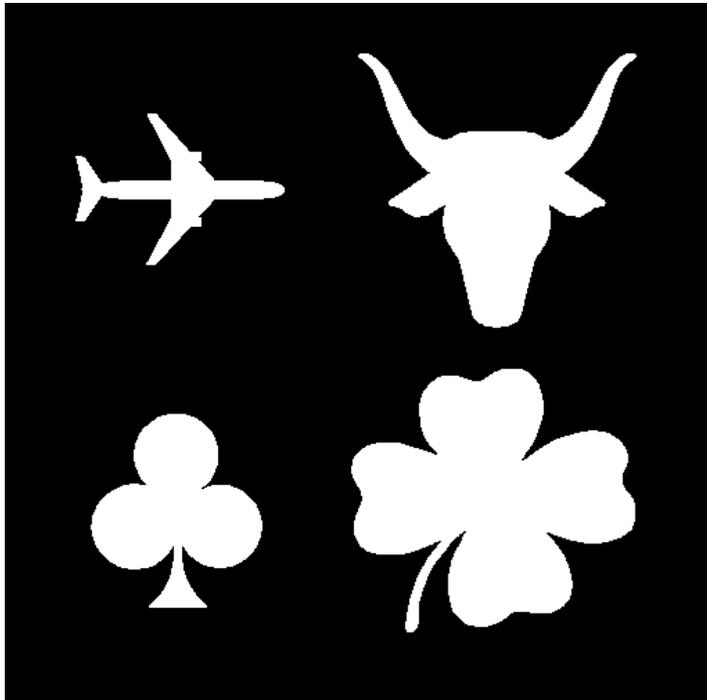


Remarque : le contour en 4-connexité forme une courbe 8-connexe pour chaque composante 8-connexe de  $X$ . Le contour en 8-connexité forme une composante 4-connexe pour chaque composante 4-connexe de  $X$ .

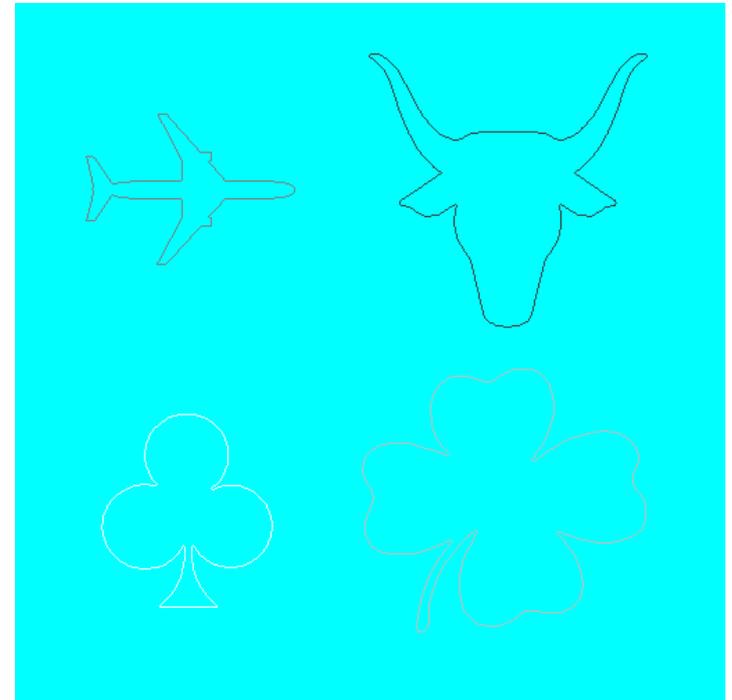
# Étiquetage de contours

L'étiquetage de contours consiste à attribuer à chaque pixel de contour de  $X$  une paire d'étiquettes  $(\Lambda, \lambda)$  tels que :

- 1-  $\Lambda$  identifie chaque composante connexe de  $X$
- 2-  $\lambda$  attribue à chaque pixel de chaque composante un numéro unique selon un certain sens de parcours.



$X$

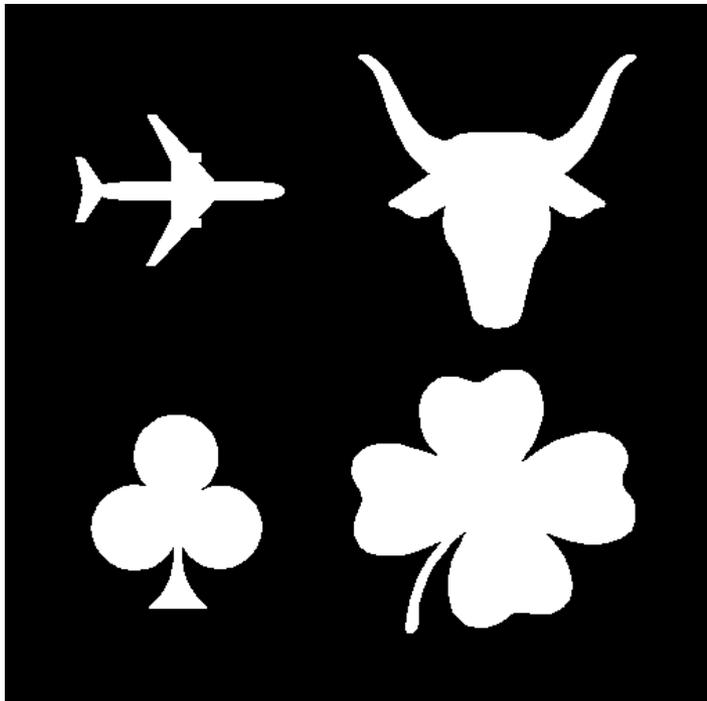


$\Lambda_X$

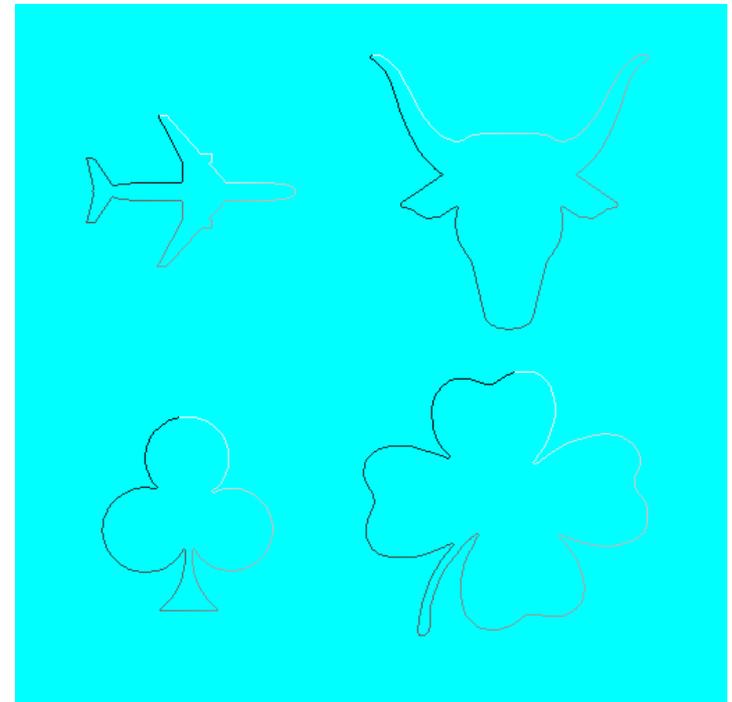
# Étiquetage de contours

L'étiquetage de contours consiste à attribuer à chaque pixel de contour de  $X$  une paire d'étiquettes  $(\Lambda, \lambda)$  tels que :

- 1-  $\Lambda$  identifie chaque composante connexe de  $X$
- 2-  $\lambda$  attribue à chaque pixel de chaque composante un numéro unique selon un certain sens de parcours.



$X$



$\lambda_X$

# Propagation des étiquettes

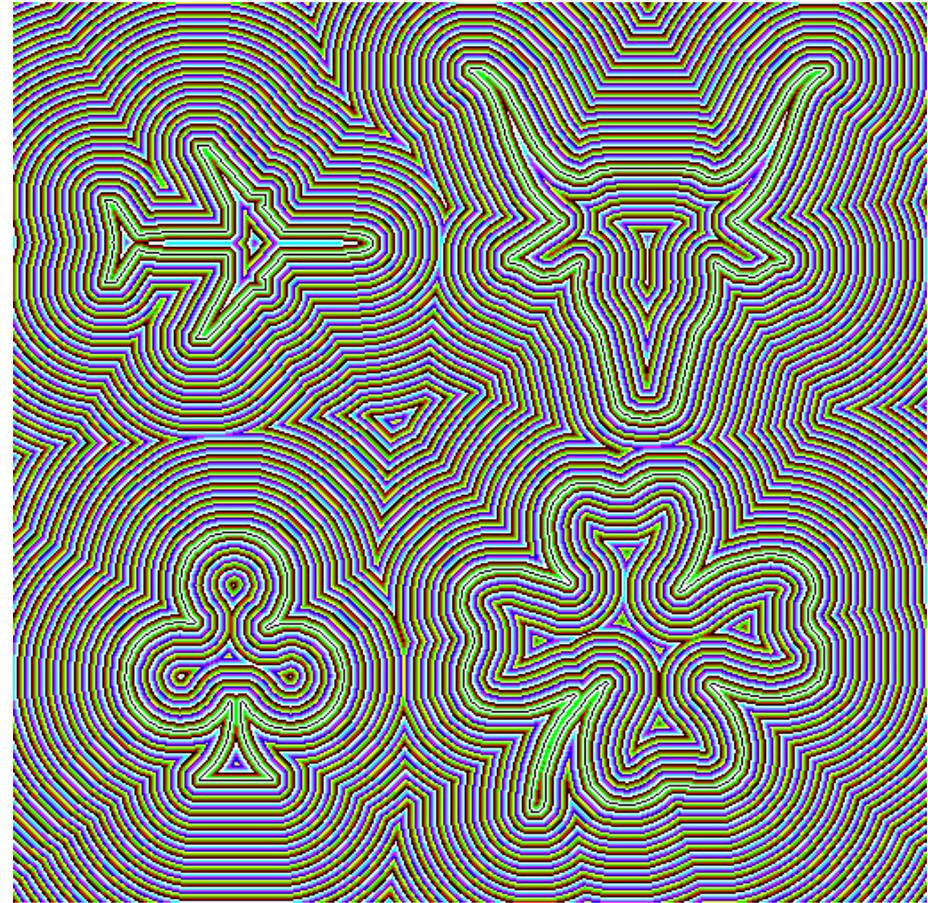
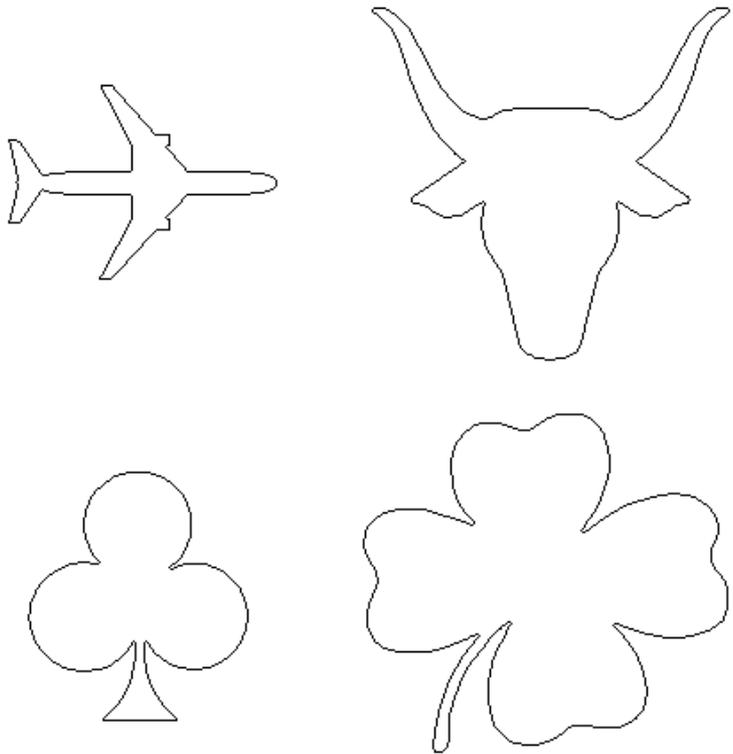
La propagation des étiquettes aux pixels les plus proches se fait simplement en utilisant l'algorithme de calcul de la transformée en distance sur le complémentaire du contour. On associe alors à chaque pixel  $(x,y)$  les coordonnées relatives  $(R_x(x,y), R_y(x,y))$  du pixel de contour le plus proche de  $(x,y)$ .

Si  $L$  est une fonction étiquette sur le contour de  $X$ , la propagation de l'étiquette  $L$  selon la distance  $d$  est la fonction définie sur  $X$  comme suit :

$$\Pi_L^d(x, y) = L(x + R_x, y + R_y)$$

- La propagation des étiquettes  $\Lambda$  (composantes connexes) fournit la partition de  $X$  en zones d'influence (SKIZ).
- La propagation des étiquettes  $\lambda$  (énumération de contours) calcule les zones d'influence de chaque pixel du contours, ce qui, par différenciation, fournira le squelette.

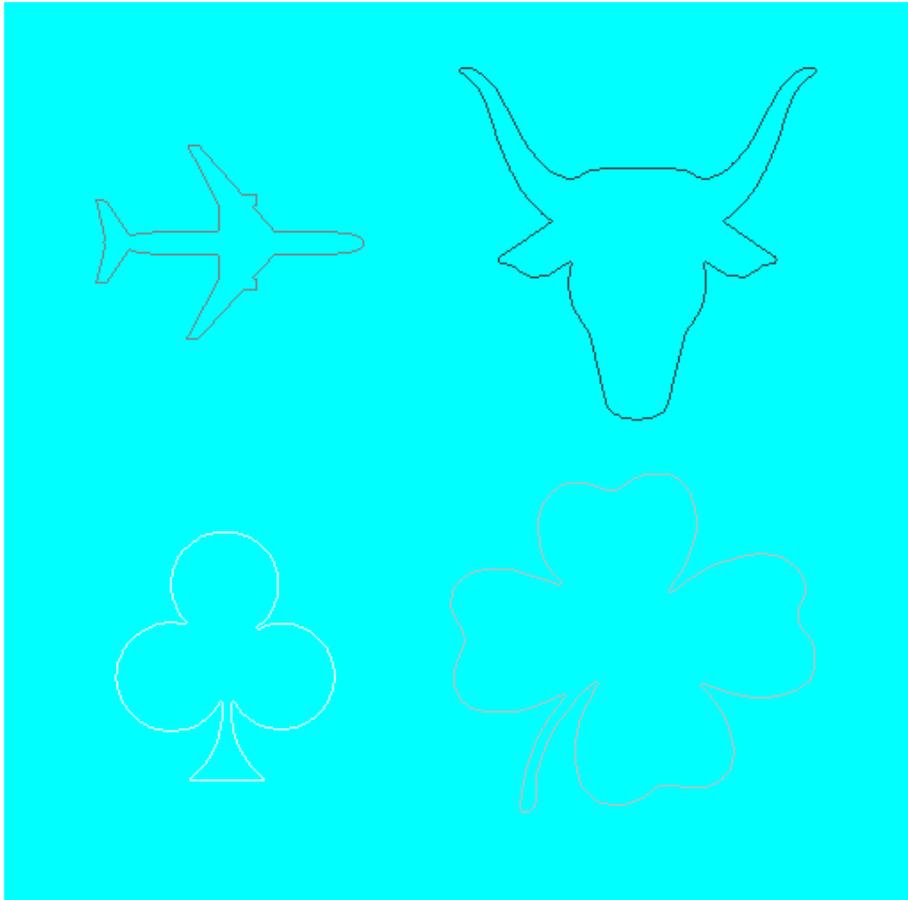
# Propagation des étiquettes



$$\partial^4 X$$

$$F_{(\partial^4 X)^c}^{d_E}$$

# Propagation des étiquettes

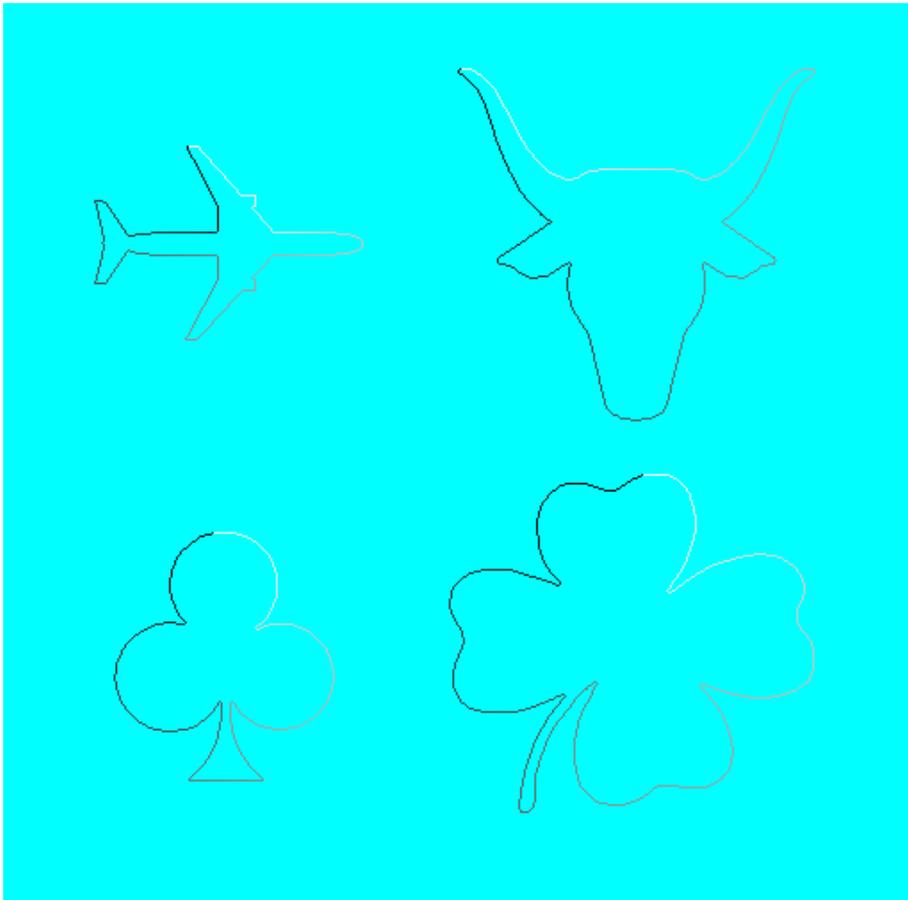


$\Lambda_X$



$\prod_{\Lambda_X}^{d_E}$

# Propagation des étiquettes

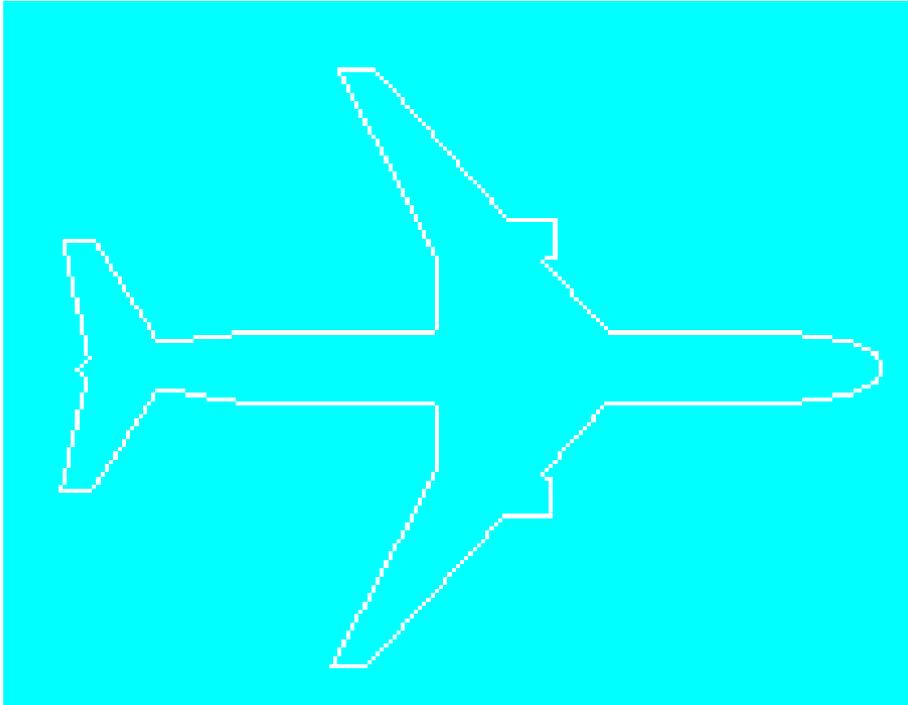


$\lambda_X$

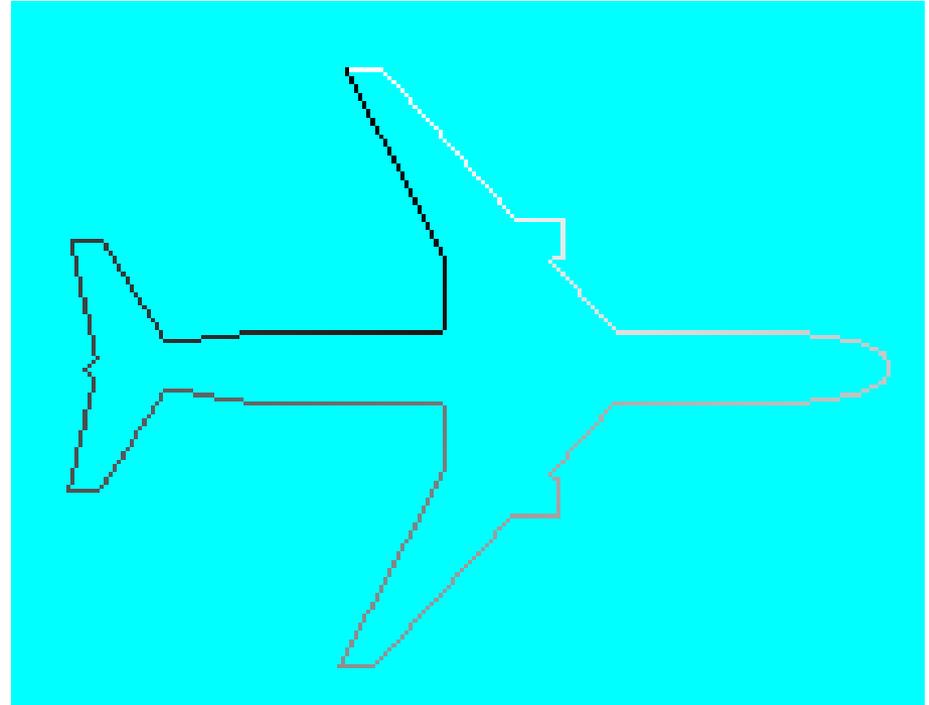


$\prod_{\lambda_X}^{d_E}$

# Propagation des étiquettes

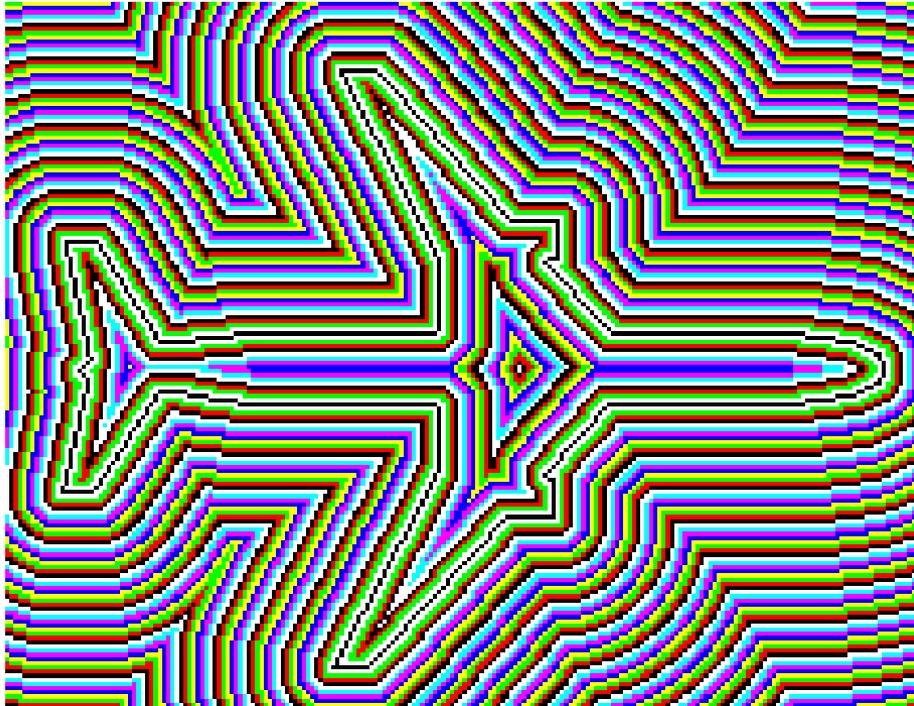


$\Lambda_X$  (1 étiquette)



$\lambda_X$  (679 étiquettes)

# Propagation des étiquettes



$$F_{(\partial^4 X)^c}^{d_E}$$



$$\prod_{\lambda_X}^{d_E}$$

# Fonction de choc

- La fonction de choc associe à chaque pixel  $p$  une valeur proportionnelle à « l'éloignement » maximum entre le pixel du contour correspondant à l'étiquette de  $p$  et ceux qui correspondent à l'étiquette des pixels voisins de  $p$ .
- L'éloignement est associé à une fonction de coût  $\kappa$  définie sur le contour, où chaque pixel est identifié par sa paire d'étiquette  $(\Lambda, \lambda)$ .

On note  $N_X(p)$  le point du contour de  $X$  le plus proche de  $p$  :

$$N_X(p) = (x_p + R_x(p), y_p + R_y(p))$$

Fonction de choc 8-connexes :

$$S_8(p) = \max_{d_4(p,q)=1} \kappa(N_X(p), N_X(q))$$

Fonction de choc 4-connexes :

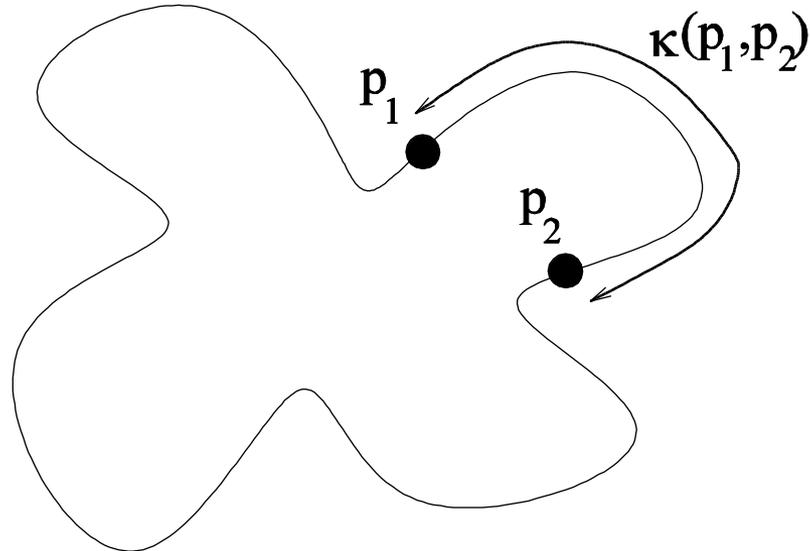
$$S_4(p) = \max_{d_8(p,q)=1} \kappa(N_X(p), N_X(q))$$

Remarquer la dualité : on calcule la valeur maximale dans le 4-voisinage pour un squelette 4-connexes, et réciproquement.

# Fonction de choc

La fonction de coût associée à la fonction de choc est la distance géodésique entre 2 points du contour  $p_1 = N_X(p)$  et  $p_2 = N_X(q)$ , le long du contour de  $X$  :

$$\kappa(p_1, p_2) = d_{\partial_X}(p_1, p_2)$$

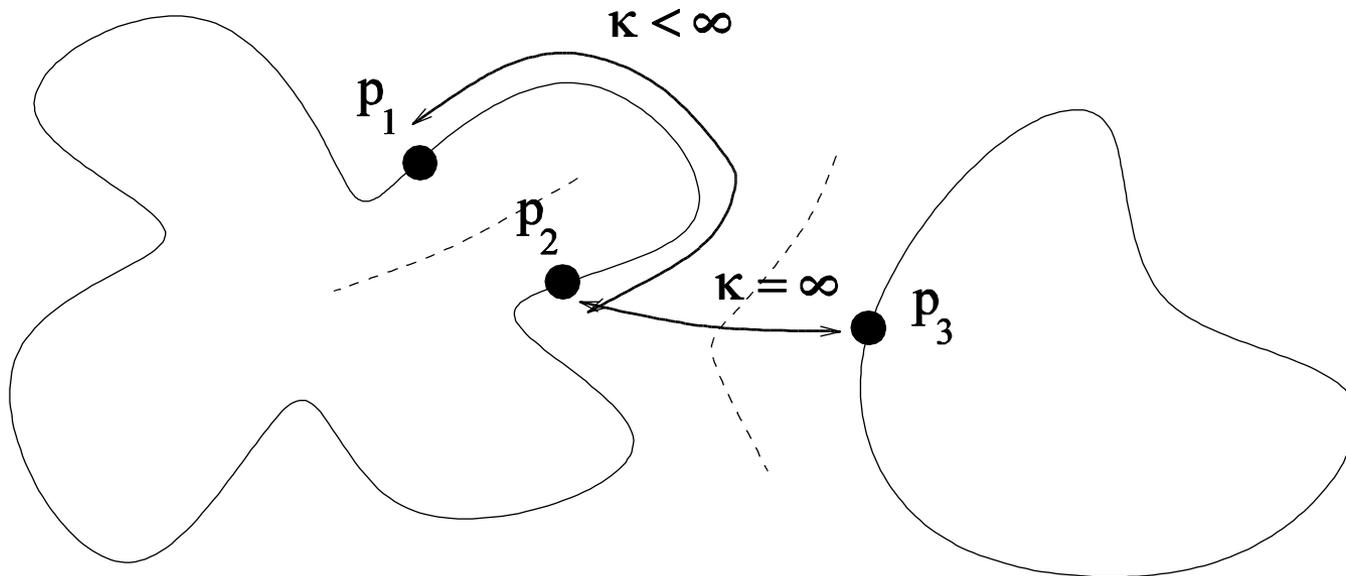


# Fonction de choc

La fonction de choc associée à la distance géodésique se calcule très simplement en comparant les étiquettes  $\Lambda_X$  et  $\lambda_X$  entre 2 pixels  $p$  et  $q$  adjacents :

(1) Si  $\Lambda_X(p) \neq \Lambda_X(q)$ , alors  $p$  est à la frontière des zones d'influence de plusieurs contours connexes, et donc :

$$\kappa(N_X(p), N_X(q)) = \infty$$



# Fonction de choc

(2) Si  $\Lambda_X(p) = \Lambda_X(q)$ , alors la fonction de choc est égale à la différence des étiquettes  $\lambda_X$ , *modulo* le nombre total de pixel du contour contenant  $p$  et  $q$ .

Fonction de choc symétrique

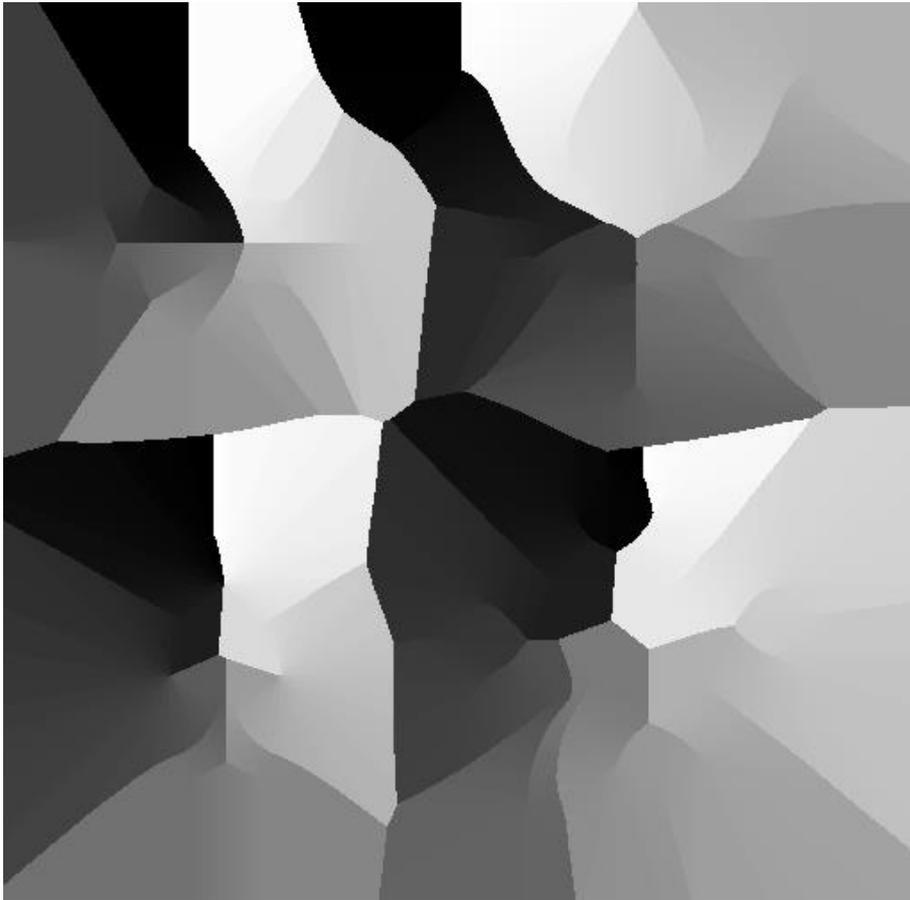
$$\kappa(N_X(p), N_X(q)) = \left| \Pi_{\lambda_X}^d(p) - \Pi_{\lambda_X}^d(q) \right| \bmod \underbrace{|\partial_X^p|}_{\substack{\text{Nombre de pixels de la composante} \\ \text{connexe du contour de } X \text{ contenant } p.}}$$

Fonction de choc asymétrique

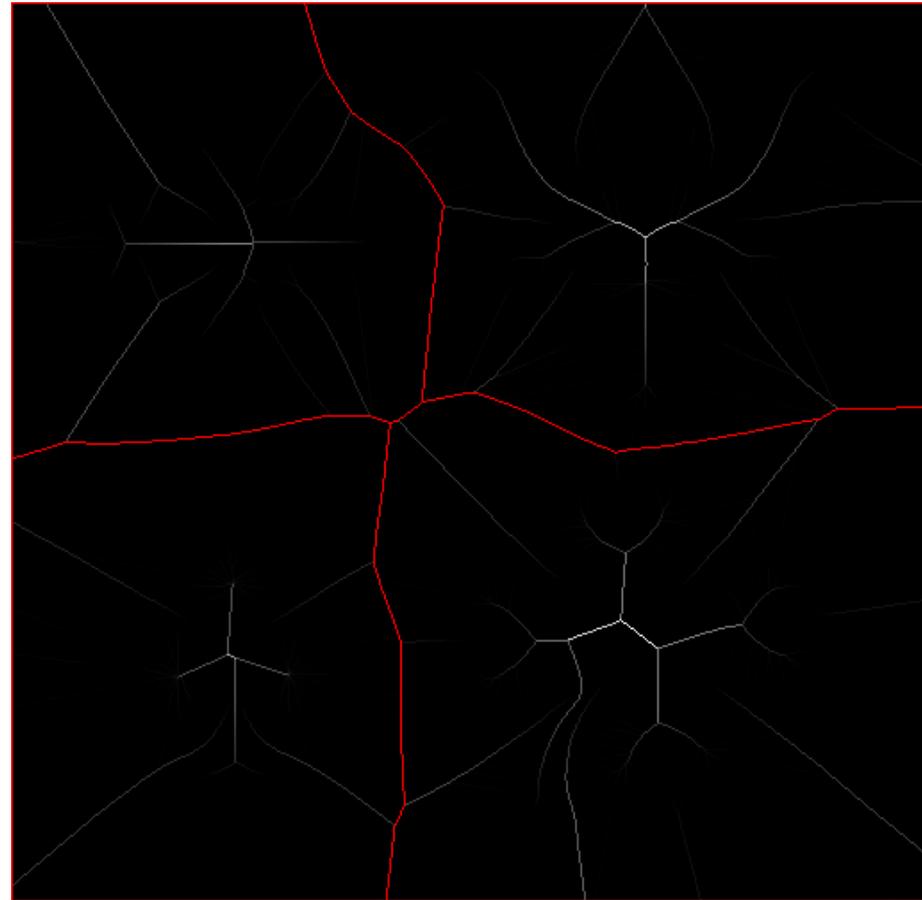
$$\kappa(N_X(p), N_X(q)) = \left( \Pi_{\lambda_X}^d(p) - \Pi_{\lambda_X}^d(q) \right) \bmod |\partial_X^p|$$

La fonction de choc symétrique produit un squelette centré mais d'épaisseur 2, tandis que la fonction de choc asymétrique produit un squelette d'épaisseur 1, avec une erreur possible de placement d'un demi-pixel.

# Fonction de choc



$$\Pi_{\lambda_X}^{d_E}$$

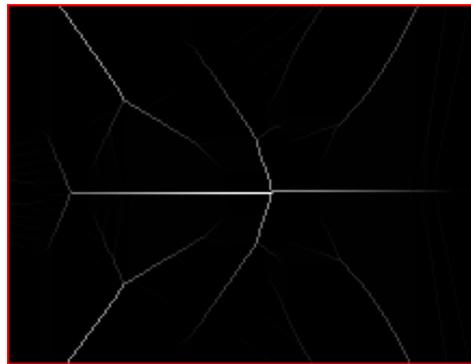
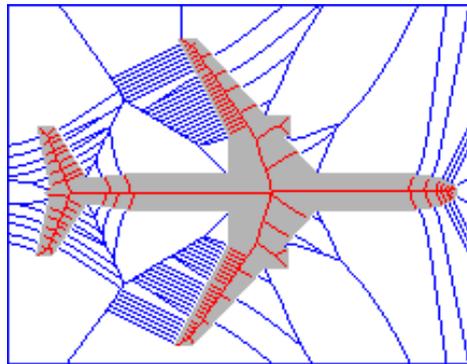
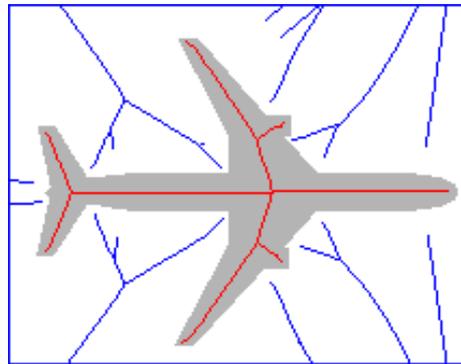
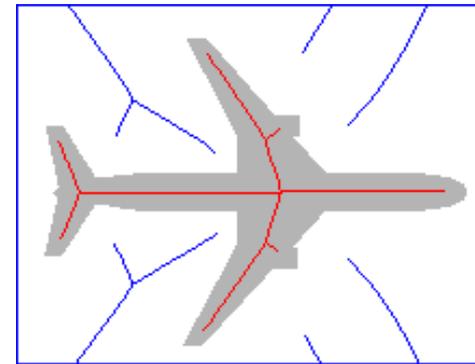


$$S_8(\Pi_{\lambda_X}^{d_E})$$

# Squelette multi-échelles

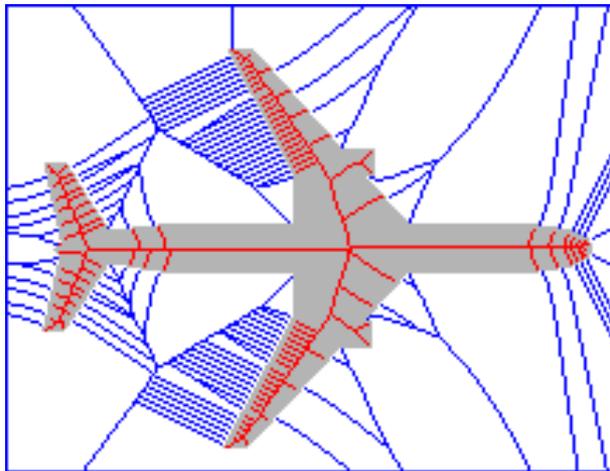
Une fois la fonction de choc  $S$  définie, le squelette à l'échelle  $\sigma$  est simplement défini comme le seuil de niveau  $\sigma$  de la fonction de choc :

$$Sk_{\sigma}(X) = \{z; S(z) > \sigma\}$$

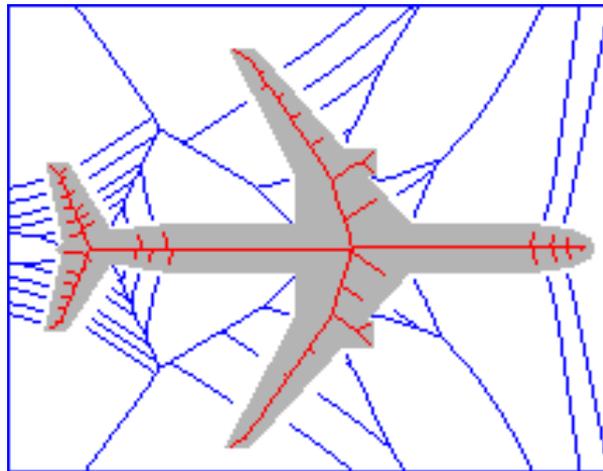
 $S_8(\Pi_{\lambda_X}^{d_E})$  $Sk_1(X)$  $Sk_5(X)$  $Sk_{20}(X)$

# Squelette multi-échelles

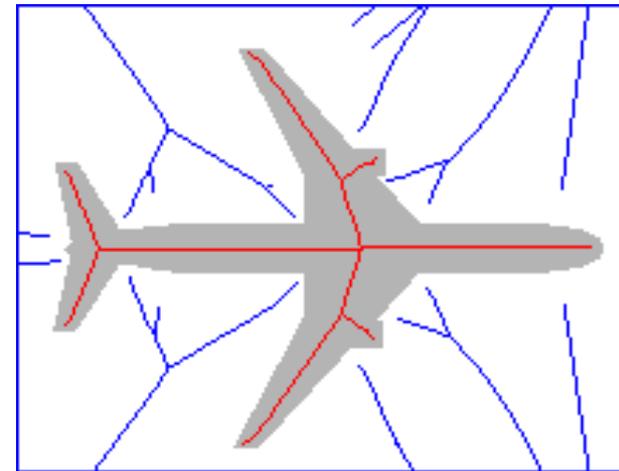
PROPRIETE : La fonction de choc associée à la distance géodésique le long du contour est connexe-monotone : pour tout entier  $n$ , l'ensemble des pixels dont la fonction de choc est supérieure à  $n$  a le même nombre de composantes connexes que l'image initiale :



$Sk_1(X)$



$Sk_2(X)$

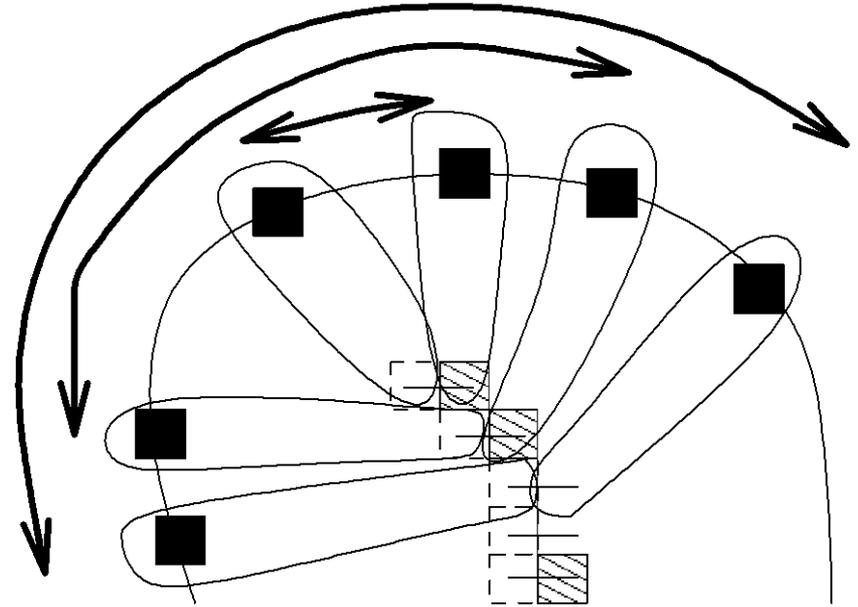


$Sk_5(X)$

# Connectivité des squelettes multi-échelles

La propriété de connexe-monotonie de la fonction de choc est due au fait que les zones d'influence des pixels du contour sont connexes :

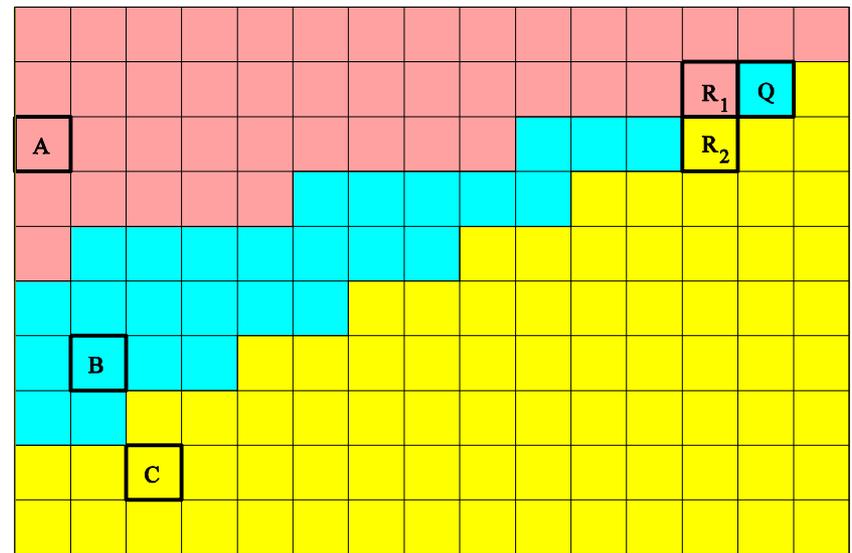
La connectivité des zones d'influence des pixels implique la croissance de la fonction de choc le long du squelette à partir des extrémités :



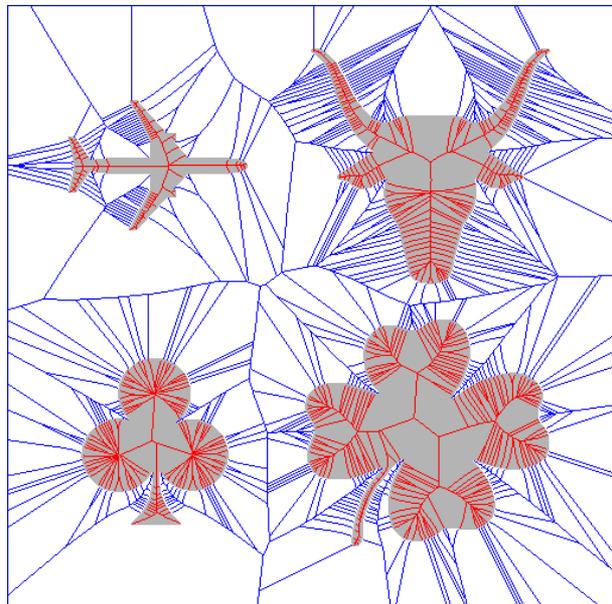
# Connectivité des squelettes multi-échelles

La connectivité des zones d'influence des pixels est aussi une condition nécessaire de connectivité des squelettes multi-échelles. En ce sens l'algorithme de Danielsson-Leymarie pour le calcul de la fonction distance quasi-euclidienne est plus adapté qu'une transformée en distance euclidienne exacte :

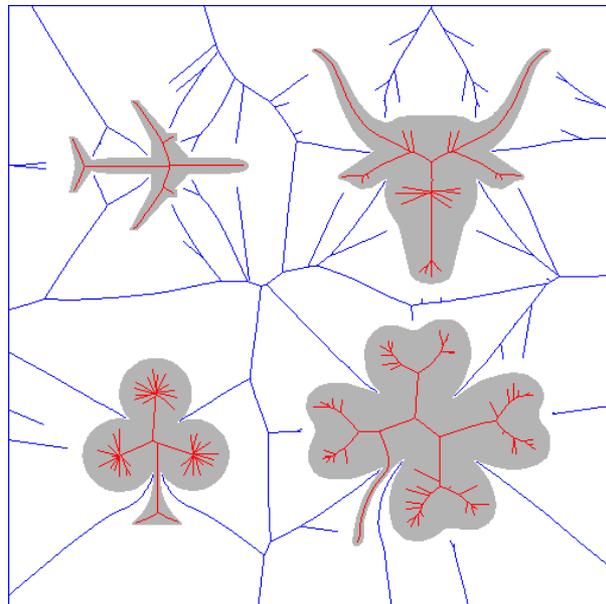
En se basant sur la distance euclidienne exacte, on pourrait construire un chemin connexe reliant A, B et C, qui aurait un (exo-)squelette déconnecté :



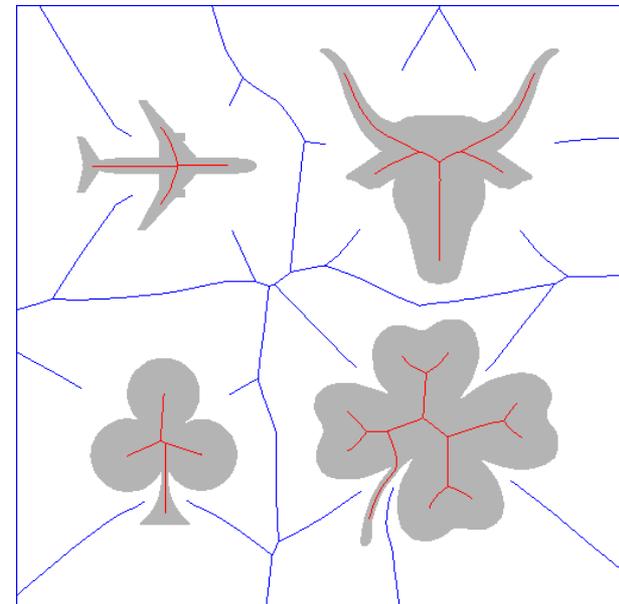
# Squelettes multi-échelles



$Sk_1(X)$



$Sk_5(X)$

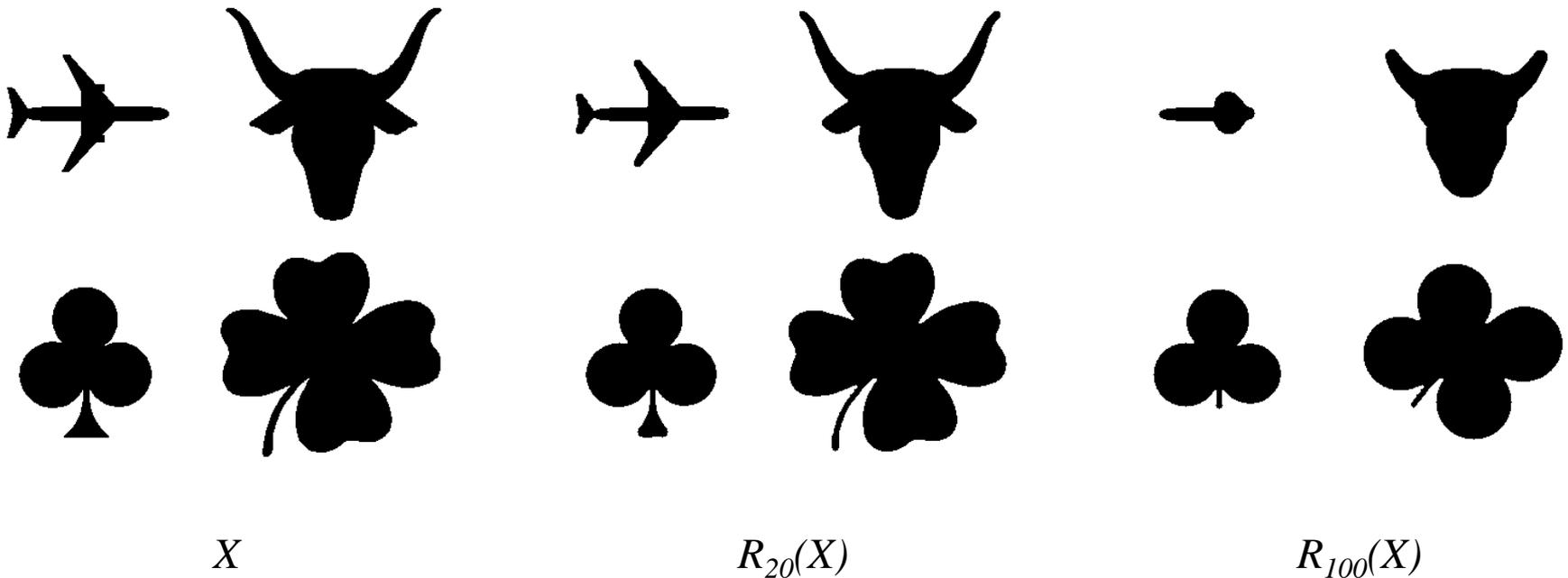


$Sk_{50}(X)$

# Reconstruction multi-échelles

La reconstruction de l'image  $X$  à l'échelle  $\sigma$  s'obtient par la formule d'inversion du squelette :

$$R_\sigma(X) = \bigcup_{z \in Sk_\sigma(X)} B_z(F_X^d(z))$$



# Carte de reconstruction

Toutes les reconstructions pour l'ensemble des échelles peuvent être obtenues rapidement à partir de la carte de reconstruction définie comme suit :

$$M_X(p) = \max_{z \in Sk_1(X); p \in B_z(F_X^d(z))} S_X(z)$$

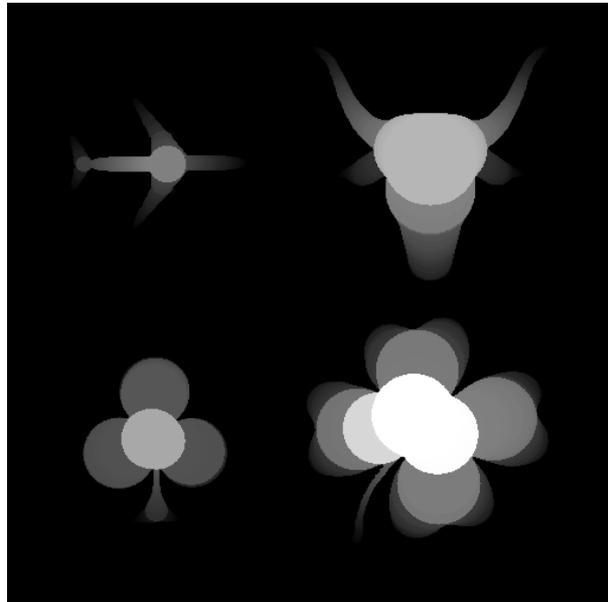
La reconstruction de l'image  $X$  à l'échelle  $\sigma$  s'obtient ensuite par seuillage de la carte de reconstruction à la valeur  $\sigma$  :

$$R_\sigma(X) = \{z; M_X(z) > \sigma\}$$

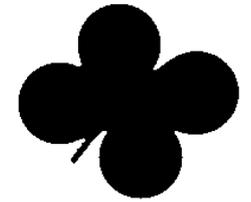
# Carte de reconstruction



$X$



$M_X$



$\{z; M_X(z) > 100\}$

# Squelettes – Conclusion

## PROPRIETES / AVANTAGES DES DIFFERENTS SQUELETTES :

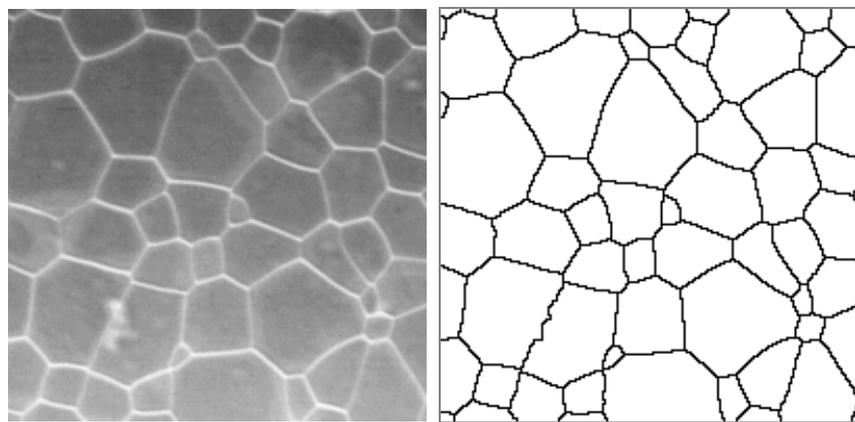
		Propriétés / Avantages				
A L G O S		Connexité	Rapidité	Géométrie	Réversibilité	Extension 3d
	<i>Squelette morphologique</i>					
	<i>Squelette par amincissement</i>					
	<i>Squelette multi-échelle par fonction de chocs</i>					

## Chapitre 4 : Squelettes et Lignes de Partage des Eaux

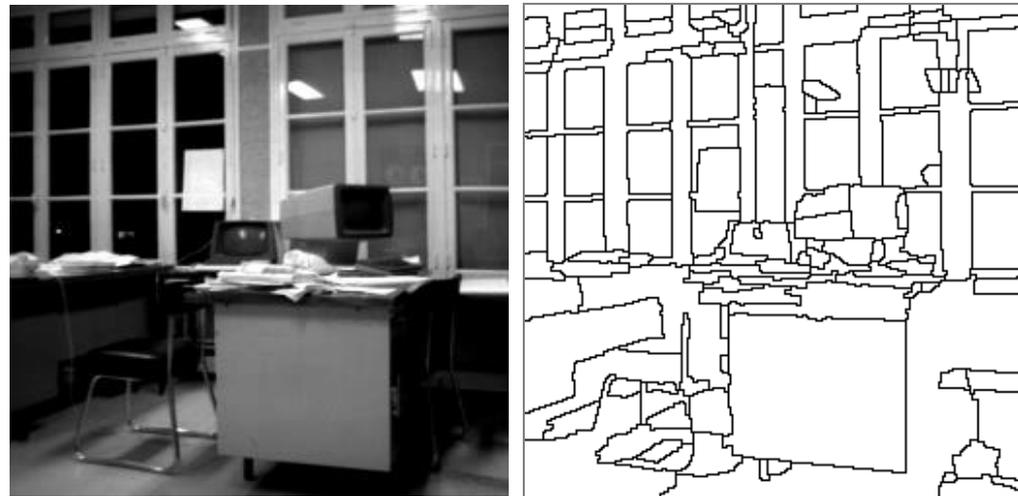
- (1) Squelettes : introduction.
- (2) Squelette morphologique.
- (3) Squelettes par amincissement.
- (4) Squelette multi-échelle par fonction de choc géodésique
- (5) Ligne de Partage des Eaux, principe et applications**

# LPE : motivation

La *ligne de partage des eaux* (LPE) constitue l'approche morphologique de la segmentation d'une image en niveaux de gris. Le but est d'obtenir une partition de l'image en régions regroupant des pixels jugés équivalents en fonction d'un certain critère.



ex1 : analyse des cristaux de minerai d'uranium

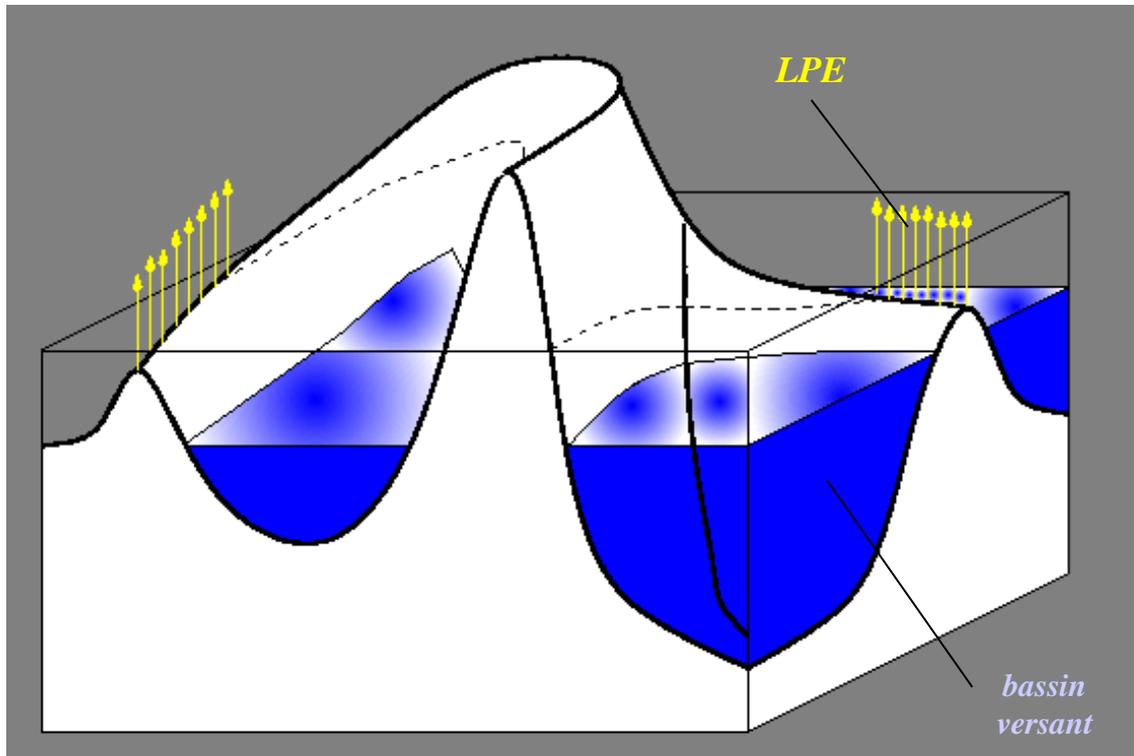


ex2 : détection de contours

La segmentation est la base de la représentation de l'image qui permettra d'aller vers une description évoluée de la scène.

# LPE par simulation d'immersion

Si l'on considère une image comme une surface topographique, où l'altitude correspond au niveau de gris, le principe de construction de la LPE par immersion est le suivant : en imaginant que tous les minima régionaux sont percés, on immerge progressivement le relief par une montée des eaux.



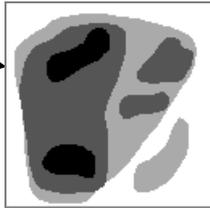
(1) A chaque fois que la hauteur de l'eau atteint l'altitude d'un minimum régional, un nouveau bassin versant est créé.

(2) A chaque fois que deux bassins se rencontrent, on empêche leur fusion en construisant une "digue".

*L'ensemble des digues  
forme la LPE.*

# Calcul de la LPE

original  $I$  sur 4 niveaux de gris



$\alpha_i$  : SKIZ géodésique de  $\mu_i$  dans  $\mu_{i+1}$

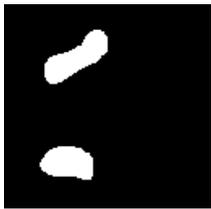
$\beta_i$  :  $\mu_{i+1} \setminus E^{\mu_{i+1}}(\mu_i)$

ensemble des bassins versants :  $\alpha_i \cup \beta_i$

$$\mu_i = \{x; I(x) \leq i\}$$



$\mu_0$



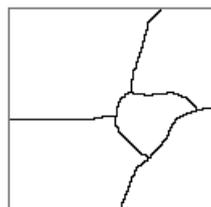
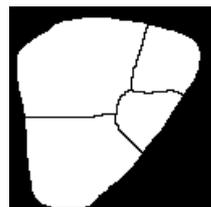
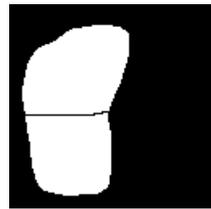
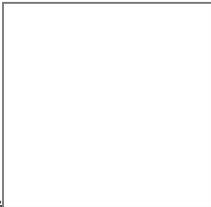
$\mu_1$



$\mu_2$



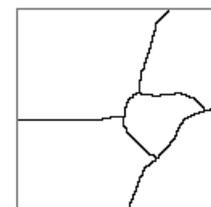
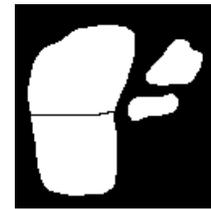
$\mu_3$



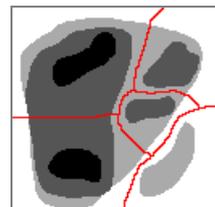
(croissance des bassins versants et construction des digues)



(apparition des nouveaux bassins versants)

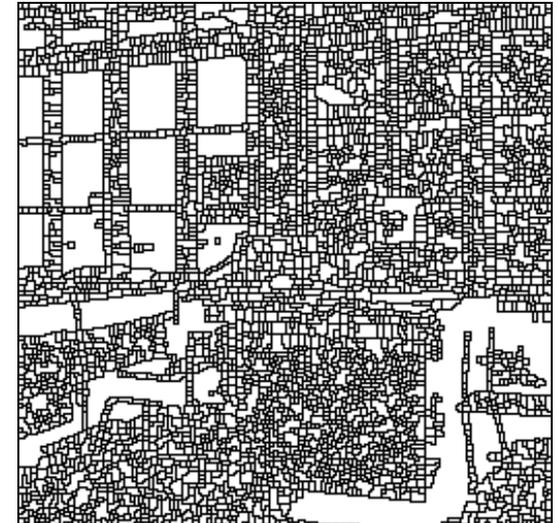
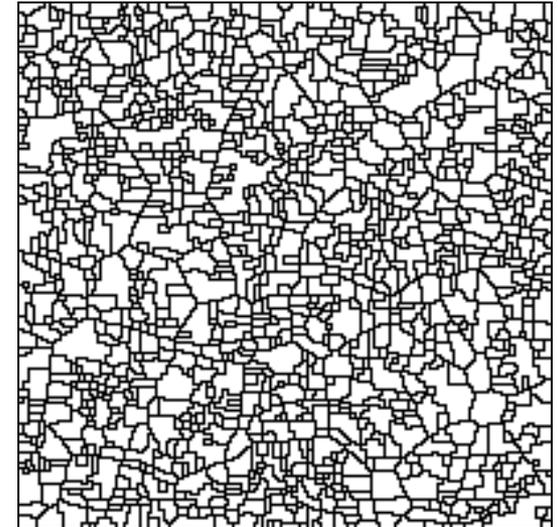
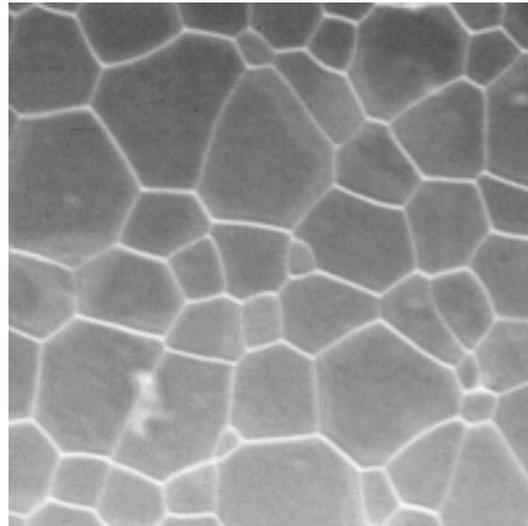


résultat superposée à l'image originale :



# LPE : problème de la sursegmentation

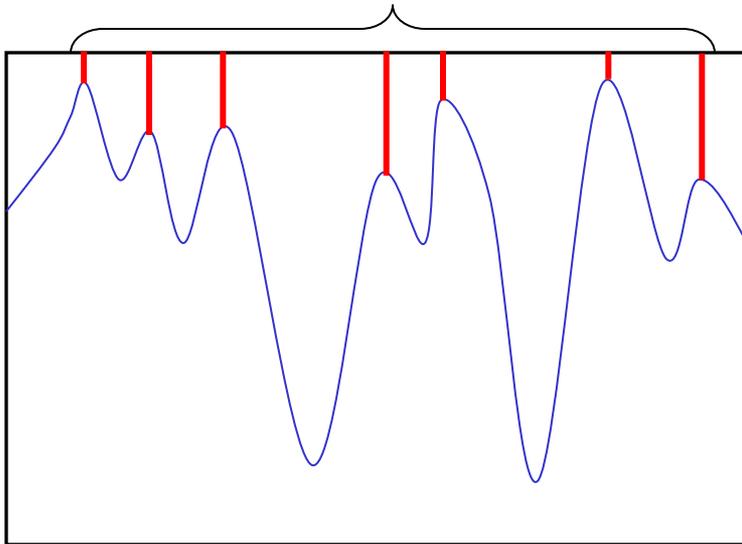
Dans le cas d'images naturelles, l'application de l'algorithme précédent sur l'image (uranium) ou sur le gradient morphologique de l'image (bureau) produit une sursegmentation très importante.



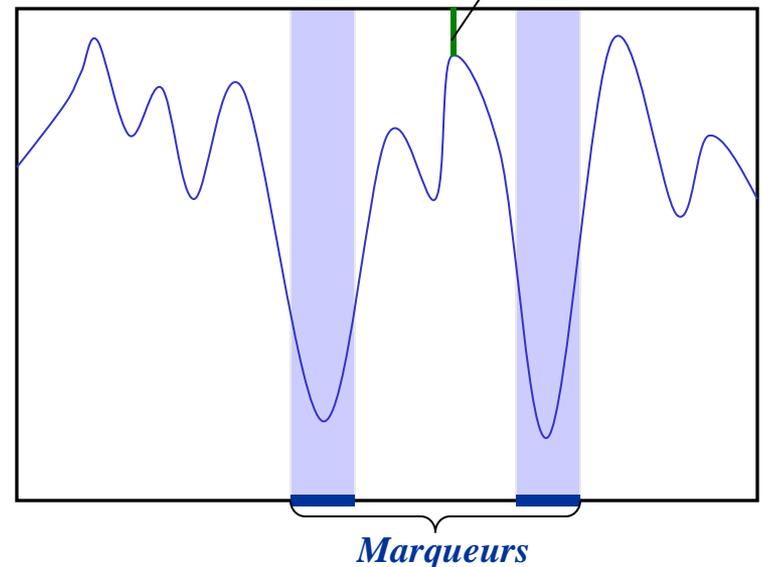
# LPE avec marqueurs

La première technique pour éviter la sursegmentation est d'utiliser des *marqueurs* qui ont pour rôle *d'imposer la présence de certains bassins versants* seulement, de manière à *contraindre la topologie* de la LPE.

*LPE non contrainte*



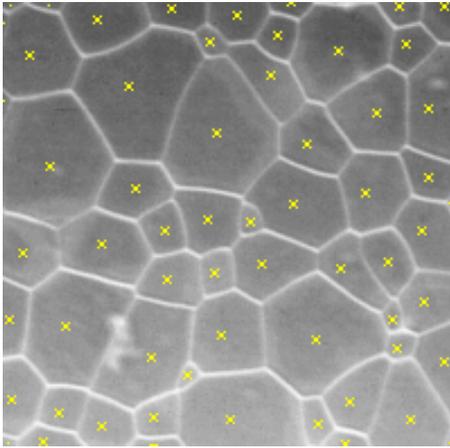
*LPE contrainte*



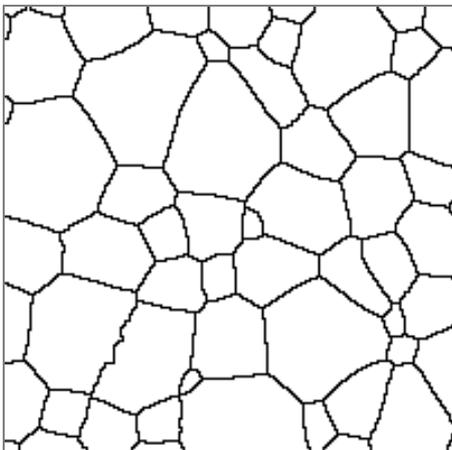
Pratiquement, on impose la présence des marqueurs par un OU logique à chaque étape, et on ne fait pas apparaître de nouveaux bassins versants.

# LPE avec marqueurs : applications

*exemple 1*



*marqueurs (en jaune)*

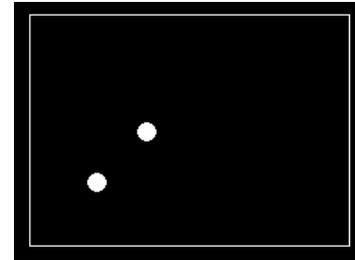


*LPE contrainte*

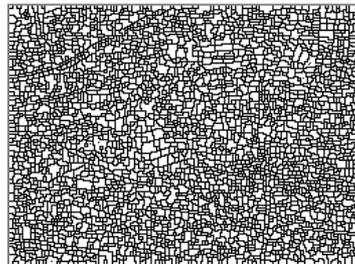
*exemple 2*



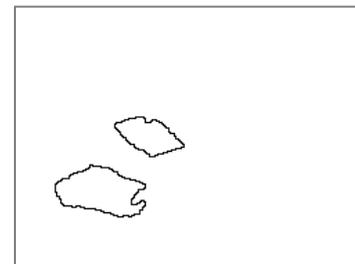
*Séquence du Taxi de Hambourg*



*marqueurs : objets mobiles + fond*



*LPE brute*

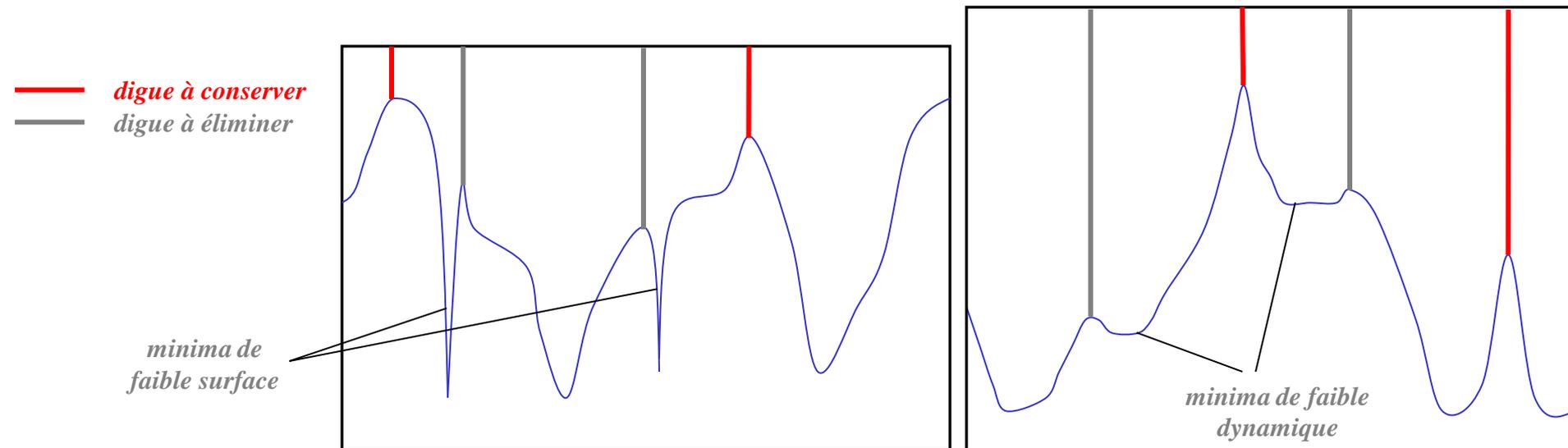


*LPE contrainte*

# LPE par filtrage

La seconde technique pour éviter la sursegmentation est de sélectionner les bassins versants qui apparaîtront dans la LPE en fonction de leur “importance”.

Cette importance revêt deux aspects différents :



*La surface*

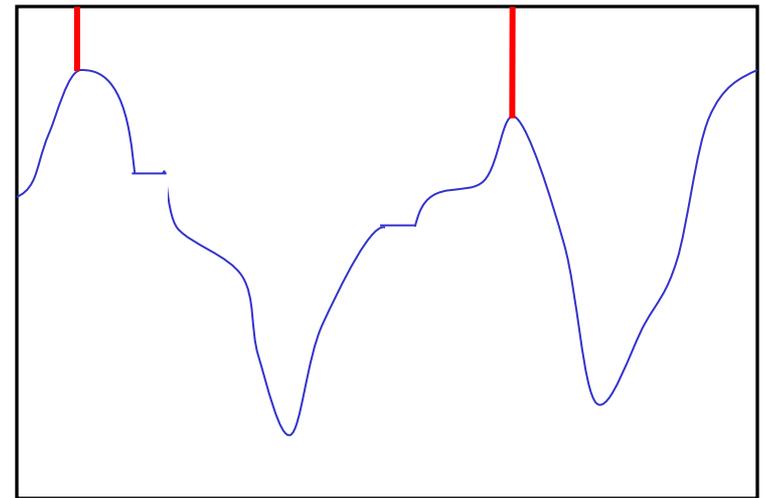
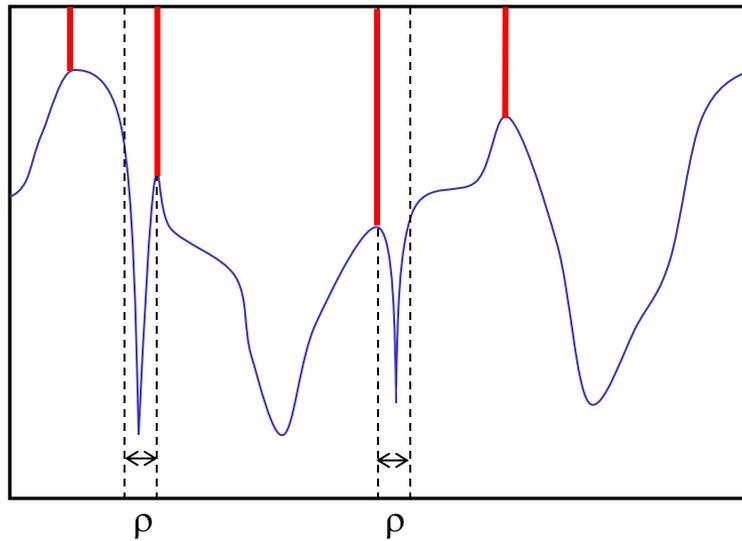
Cet aspect est lié à la notion de *bruit spatial* dans l’image

*La profondeur*

Cet aspect est lié à la notion de *dynamique* dans l’image

# LPE : filtrage spatial

L'élimination des digues produites par des bassins de faible surface peut être obtenue grâce au filtrage morphologique spatial :

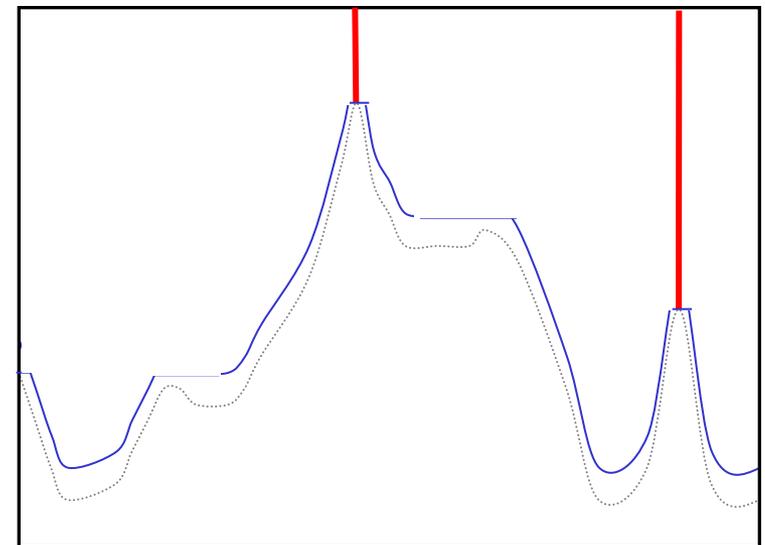
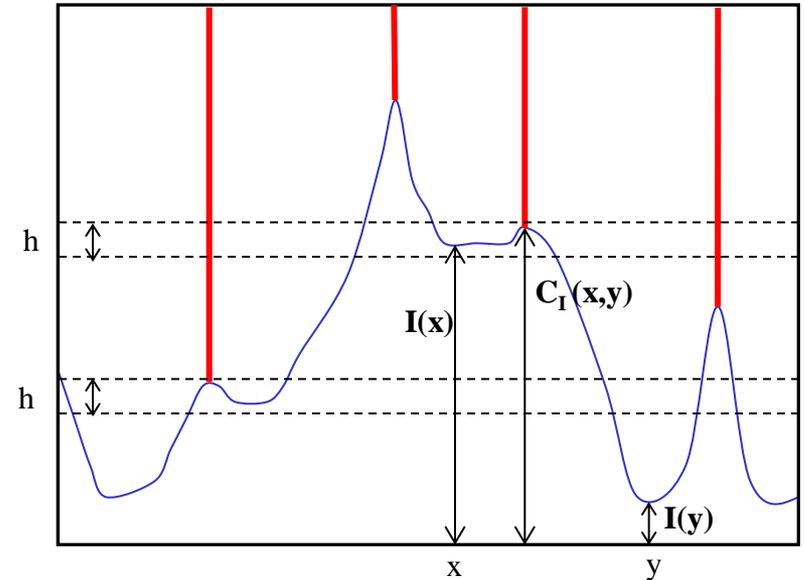
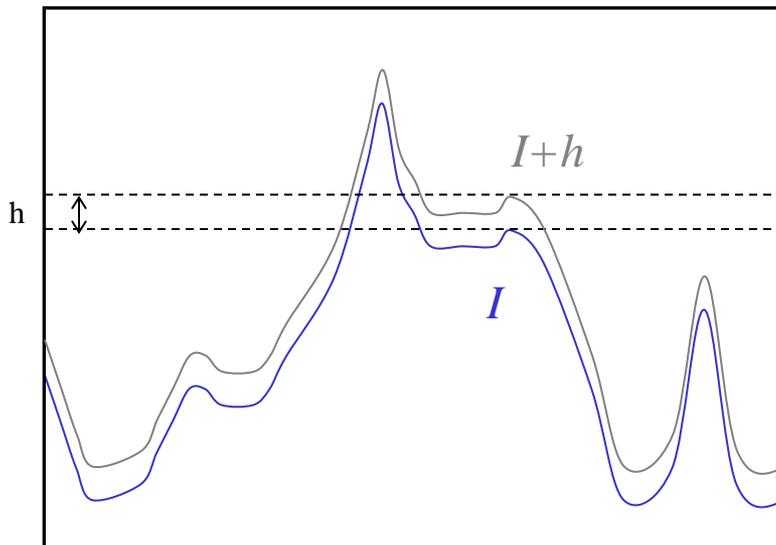


**fermeture par reconstruction  
par une boule de diamètre  $\rho$ .**

# LPE : filtrage de dynamique

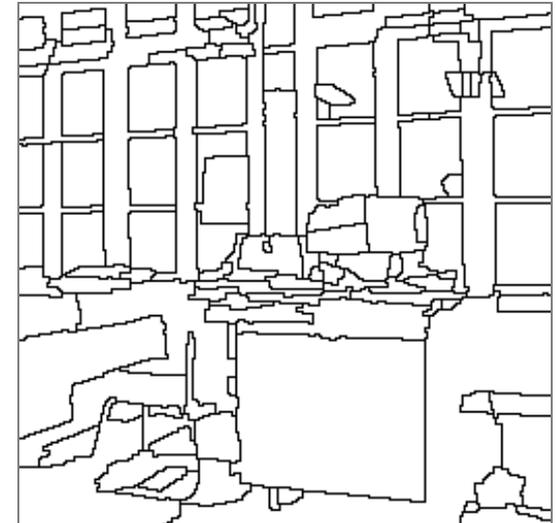
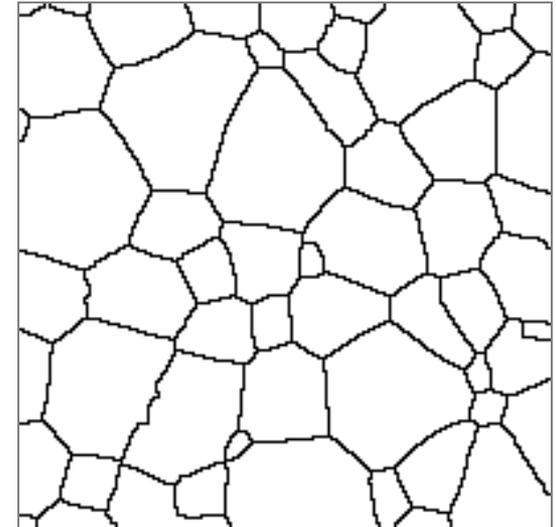
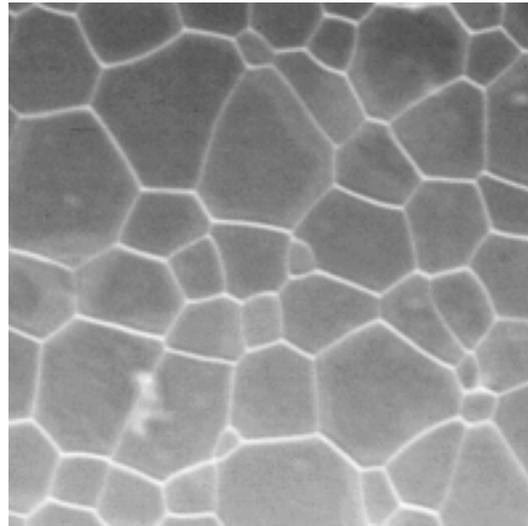
L'élimination des diges produites par des bassins de faible dynamique peut être obtenue grâce au filtrage morphologique de dynamique :

La reconstruction de la fonction  $I$  dans la fonction  $I+h$  élimine les minima régionaux de dynamique inférieure à  $h$  :



# LPE par filtrage : résultats

En appliquant les deux filtres précédents sur l'image (uranium) ou sur le gradient morphologique de l'image (bureau), on élimine dans la LPE les bassins *non significatifs*.



# Squelettes et LPE – Conclusion

## A RETENIR POUR CE COURS :

- Définition du **squelette morphologique discret** : Maxima Locaux de la Transformée en Distance  $\leftrightarrow$  Centres des Boules Maximales  $\leftrightarrow$  Résidus d'ouvertures
- **Squelettes par amincissement** : Homotopie discrète et propriété de Jordan – Points simples et ensembles simples : Homotopie séquentielle ou parallèle – Géométrie des squelettes par amincissement : points d'ancrage ou contrainte d'ordre.
- **Squelettes connexe par fonctions de choc** : Connexité des zones d'influence associées à une transformée en distance – Squelettes multi-échelles : Seuillage de la fonction de choc et reconstruction à divers degrés de détail
- **Lignes de Partage des Eaux** : Principe du calcul par immersion, Contrainte topologique par marqueurs, Filtrage des minima régionaux : taille vs dynamique.