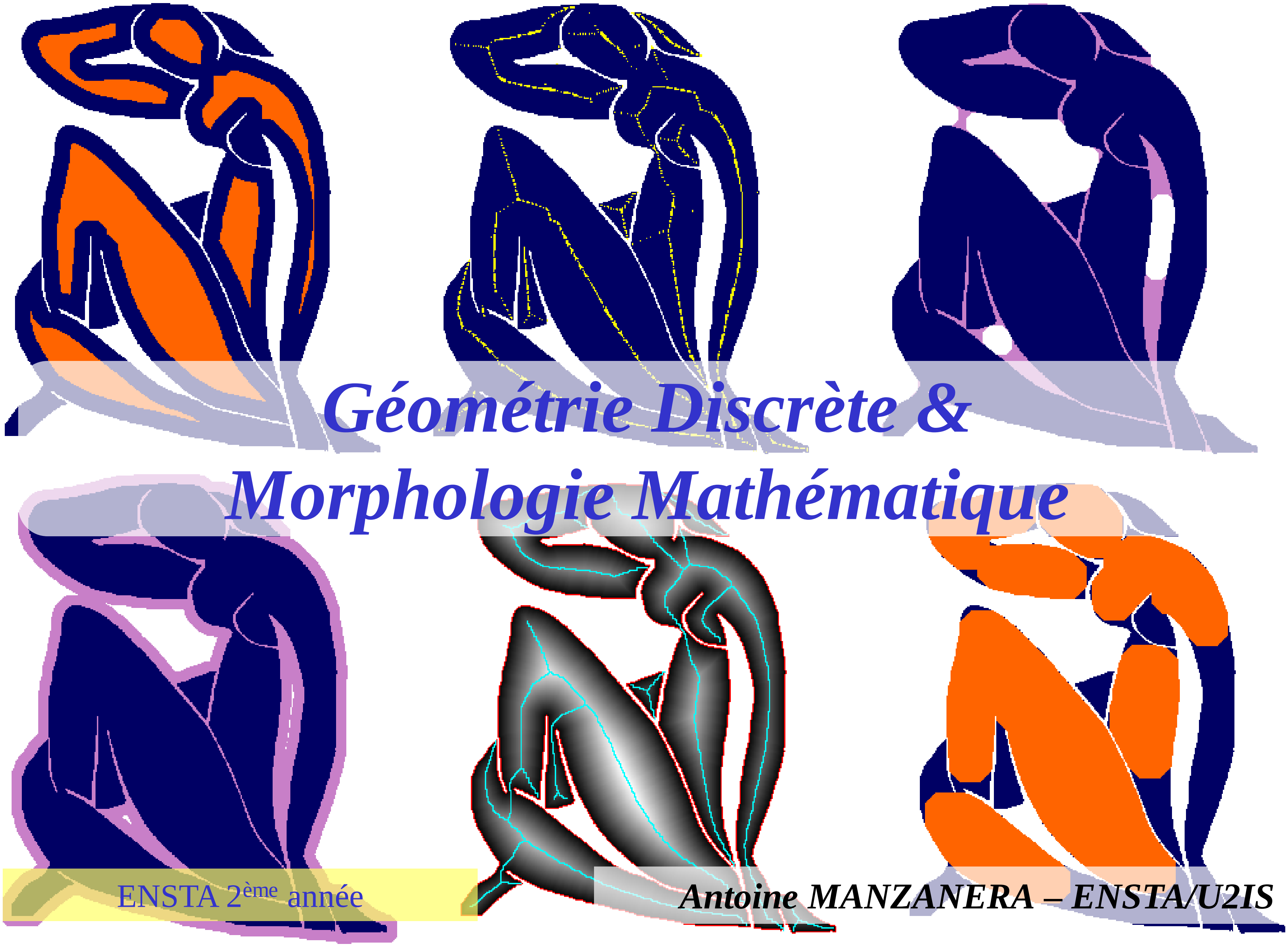


Géométrie Discrète & Morphologie Mathématique

ENSTA 2ème année

Antoine MANZANERA – ENSTA/U2IS

Présentation et objectifs du cours

La *Géométrie Discrète* est une discipline encore plus ancienne que l'analyse d'images, dont l'objectif est la formalisation rigoureuse dans un espace discret des notions communes en géométrie euclidienne (droites, cercles, distance, topologie,…)

La *Morphologie Mathématique* est une approche non linéaire permettant d'aborder toute la chaîne d'analyse des images (modélisation, filtrage, segmentation, extraction de caractéristiques,…) en se fondant sur un bagage théorique très réduit issu des ensembles partiellement ordonnés.

L'objectif de ce cours est de permettre à tout étudiant scientifique de modéliser une image et de concevoir un algorithme d'analyse appliqué à une extraction automatique d'information à partir de données images.

Le cours s'accompagne *d'exercices* pour se *familiariser* avec les manipulations algébriques ou géométriques, et pour *développer* certains aspects du cours.

Des *travaux pratiques* permettront enfin, d'une part *d'expérimenter* les outils étudiés en cours, et d'autre part, de s'immerger profondément dans les aspects algorithmiques, en *programmant* soi-même certaines fonctions de traitement d'images.

Géométrie Disc. & Morpho. Math. : Plan du cours

Chapitre 1 : Introduction et premiers opérateurs

Fondements algébriques & fondements géométriques – Érosion et dilatation ensemblistes et fonctionnelles – Premiers opérateurs résiduels ou composés – Introduction aux opérateurs géodésiques.

Chapitre 2 : Géométrie discrète et approche algorithmique

Pavages et maillages, topologie et métrique discrètes – Transformées en distance – Application aux opérateurs de base : Érosion et Reconstruction géodésique.

Chapitre 3 : Filtrage morphologique et opérateurs connexes

Granulométries et Filtres alternés séquentiels – Reconstruction et opérateurs connexes – Espaces d'échelles morphologiques – Formalisme EDP.

Chapitre 4 : Squelettes et Lignes de Partage des Eaux

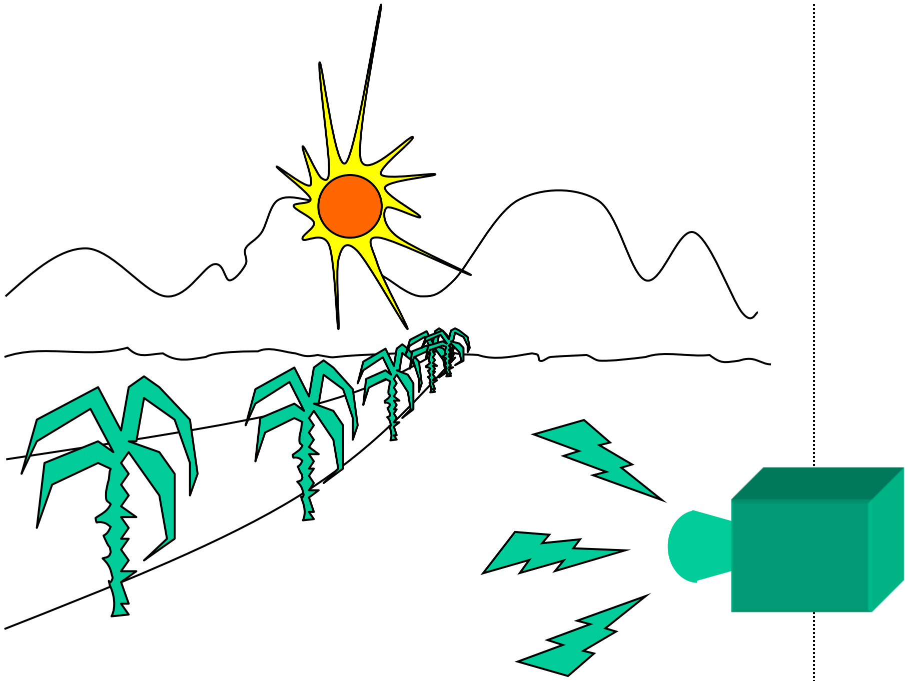
Squelettes morphologiques, squelettes par amincissement, Squelettes par fonction de choc géodésique – LPE : fondements et algorithmes – LPE par immersion, marqueurs et filtrage connexe – LPE stochastique sur graphes.

- Programme à jour, copies de transparent et feuilles d'exercices :
  - https://perso.ensta-paris.fr/~manzaner/Cours/MI206/
- Modalités de notation :
  - 1 compte-rendu de TP-Projet (TP n°2)
  - 1 contrôle écrit (~1h30)

MI206 GDMM : Chapitre 1

INTRODUCTION ET PREMIERS OPERATEURS

Les problématiques du traitement d'images



COMPRESSION → ***transmission, stockage***

changement de représentation de l'image numérique dans le but de réduire la quantité de mémoire nécessaire

AMELIORATION → ***visualisation***

diminution des effets du bruit d'acquisition, numérisation ou compression pour rendu visuel ou analyse

SEGMENTATION

partition de l'image numérique en fonction d'un certain prédicat : luminance, texture, couleur, mouvement...

EXTRACTION DE CARACTERISTIQUES

calcul d'une ou plusieurs grandeurs scalaires : dénombrement, détection d'événements...

vision artificielle

ACQUISITION

transformation de l'énergie lumineuse en énergie électrique

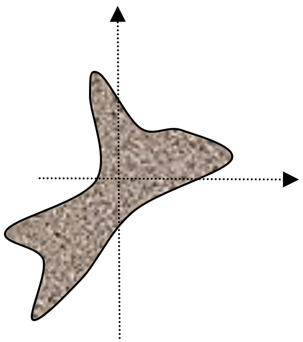
CODAGE

transformation d'une grandeur analogique en une grandeur numérique

SCENE REELLE

IMAGE NUMERIQUE

L’approche morphologique du traitement d’images



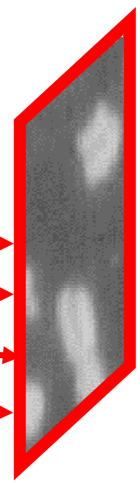
Objet de référence

=

Elément structurant

Le principe de base de l’analyse morphologique est d’extraire de la connaissance de l’image à partir des réponses fournies à différents tests (transformations).

Transformations non linéaires

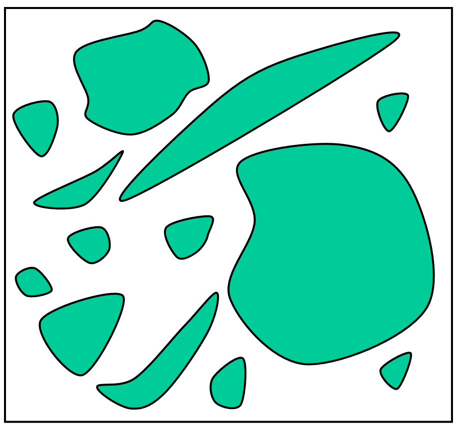


Critères de :

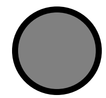
- ✓ ***taille***
- ✓ ***forme***
- ✓ ***orientation***
- ✓ ***connexité***
- ✓ ***…/…***

L’approche morphologique du traitement d’images

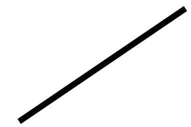
Exemple :



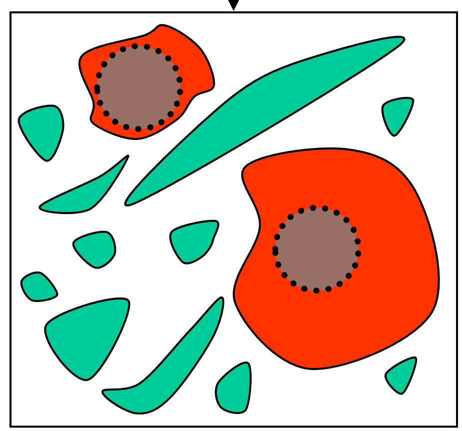
Elément structurant 1

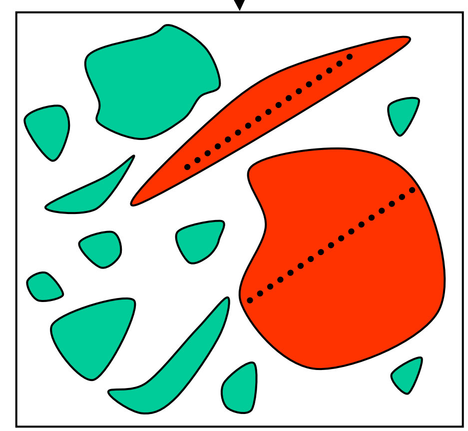


Elément structurant 2



Test : « contient »





Taille, forme, orientation,…

Analyse quantitative, spatiale,…

Traitement d'images linéaire : structure fondamentale

Dans le cas du traitement d'images linéaire, la structure fondamentale est celle d'***espace vectoriel***.

structure de base

ESPACE VECTORIEL

E espace vectoriel sur K

opérateurs de base

Ce sont ceux qui préservent la structure et commutent avec les lois de base :

$$\boxed{\forall \lambda \in K, \forall (x,y) \in E^2 : f(\lambda x) = \lambda f(x) \text{ et } f(x+y) = f(x) + f(y)}$$

isomorphismes d'espace vectoriel

$\downarrow$

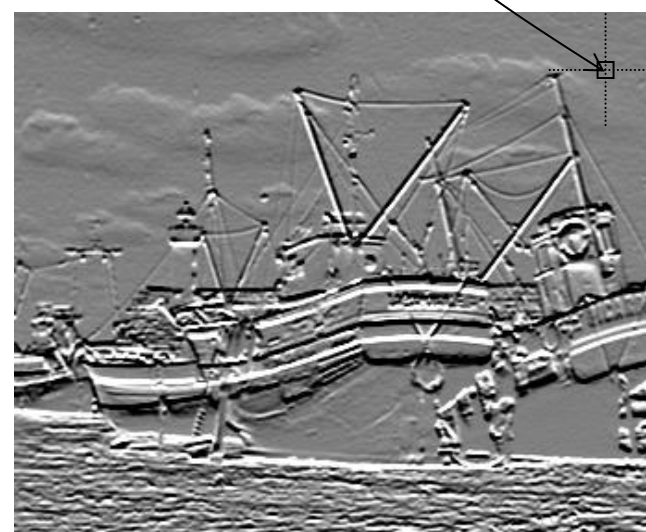
Applications linéaires $\longrightarrow$ ***CONVOLUTIONS***

Traitement linéaire : convolutions

		5		
	11	16	11	
5	16	24	16	5
	11	16	11	
		5		

-1
0
1

Filtre passe-bas



Gradient vertical

Morphologie mathématique : structure fondamentale

Dans le cas de la morphologie mathématique, la structure fondamentale est celle de ***treillis complet***.

structure de base

TREILLIS COMPLET

(1) Ensemble ordonné $(E, \leq)$

$$\leq \begin{cases} \textit{\textbf{REFLEXIVE}} & x \leq x \\ \textit{\textbf{ANTI-SYMETRIQUE}} & x \leq y \text{ et } y \leq x \Rightarrow x = y \\ \textit{\textbf{TRANSITIVE}} & x \leq y \text{ et } y \leq z \Rightarrow x \leq z \end{cases}$$

(2) Toute partie P de E admet :
- une borne sup
- une borne inf

Sup : plus petit des majorants $\vee P$

Inf : plus grand des minorants $\wedge P$

Morphologie mathématique : opérateurs de base

opérateurs de base

Ceux qui préservent la structure...

$$\boxed{x \leq y \Rightarrow \Phi(x) \leq \Phi(y)}$$

CROISSANCE

...et commutent avec les lois de base :

sup $\longrightarrow$ $\| \quad \Phi\left(\vee \left\{x_i\right\}\right) = \vee \left\{\Phi(x_i)\right\}$ → ***DILATATION***

inf $\longrightarrow$ $\| \quad \Psi\left(\wedge \left\{x_i\right\}\right) = \wedge \left\{\Psi(x_i)\right\}$ → ***EROSION***

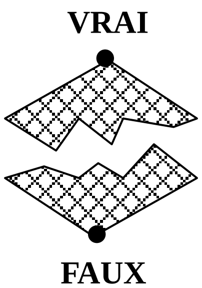
Exemples de treillis complets

Treillis des formules booléennes

• ***éléments :*** formules booléennes f,g,h

• ***relation d'ordre :*** implication $f \to g$

• ***sup :*** OU logique • ***inf :*** ET logique • ***éléments extrêmes :***

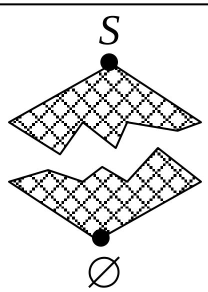


Treillis ensembliste

• ***éléments :*** les parties d'un ensemble S

• ***relation d'ordre :*** inclusion $\subset$

• ***sup :*** Union $\cup$ • ***inf :*** Intersection $\cap$ • ***éléments extrêmes :***

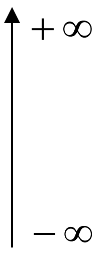


Treillis des nombres

• ***éléments :*** nombres réels (ou nombres entiers)

• ***relation d'ordre :*** $\leq$ (ordre total)

• ***sup :*** max • ***inf :*** min • ***éléments extrêmes :***



Exemples de treillis complets

Treillis des fonctions

• ***éléments :*** les fonctions réelles ou numériques : $f : S \to \mathbf{R}$

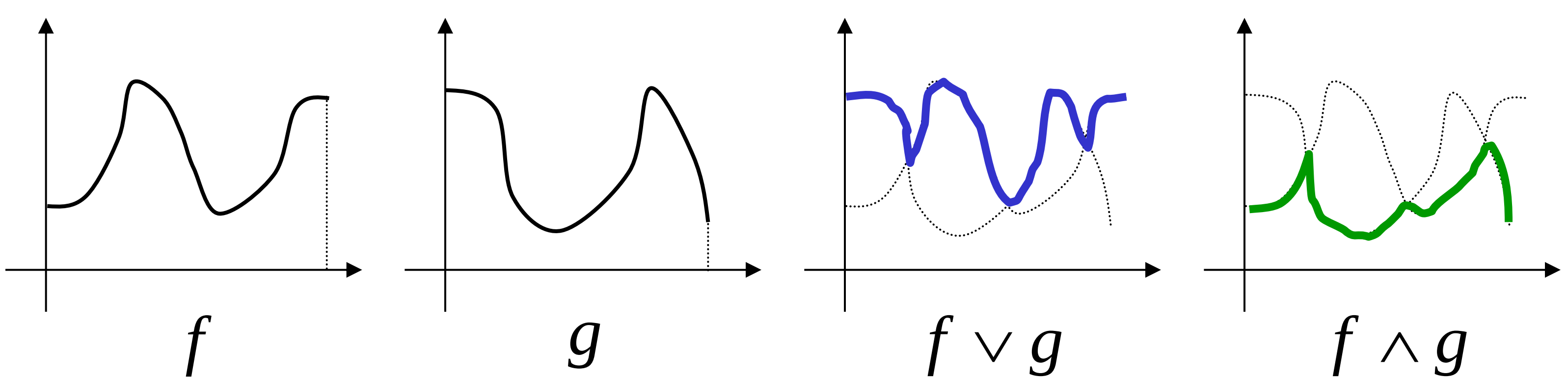
ou $S \to \mathbf{Z}$

• ***relation d'ordre :*** $f \leq g \Leftrightarrow \forall x \in S, f(x) \leq g(x)$

• ***sup :*** $\vee\{f_i\}$

• ***inf :*** $\wedge\{f_i\}$

définies par : $\begin{cases} (\vee\{f_i\})(x) = \vee\{f_i(x)\} \\ (\wedge\{f_i\})(x) = \wedge\{f_i(x)\} \end{cases}$



Le principe de dualité

Dans un treillis, les lois *Sup* et *Inf* jouent des rôles symétriques.

On appelle ***involution*** l'opérateur $\overline{\cdot} : E \rightarrow E$

qui permet d'échanger leur rôle :

$$\wedge \overline{P} = \overline{\vee P} \quad \text{et} \quad \vee \overline{P} = \overline{\wedge P}$$

On dit que deux opérateurs Φ et Φ* sont ***duaux*** pour l'involution $\overline{\cdot}$

si : $$\boxed{\Phi(\overline{x}) = \overline{\Phi^*(x)}}$$

Exemples d'involutions

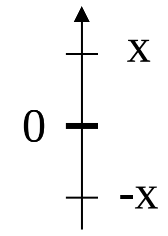
Treillis des formules booléennes

NON logique :

g	¬g
0	1
1	0

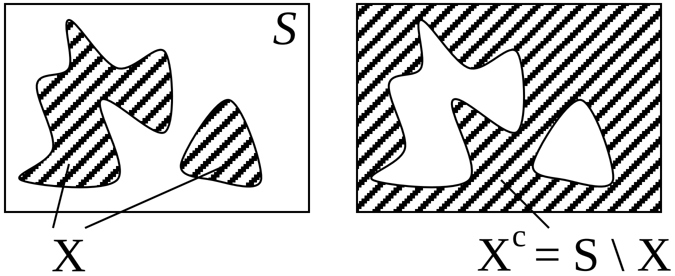
Treillis des nombres

opposé :



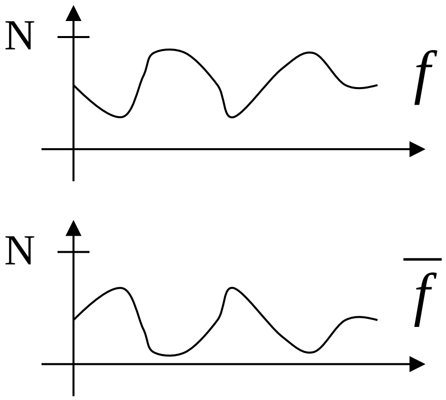
Treillis ensembliste

Complémentaire :



Treillis des fonctions dans [0,N]

$\overline{f} = N - f$:



Propriétés des opérateurs : quelques définitions

$$\Phi : E \rightarrow E$$

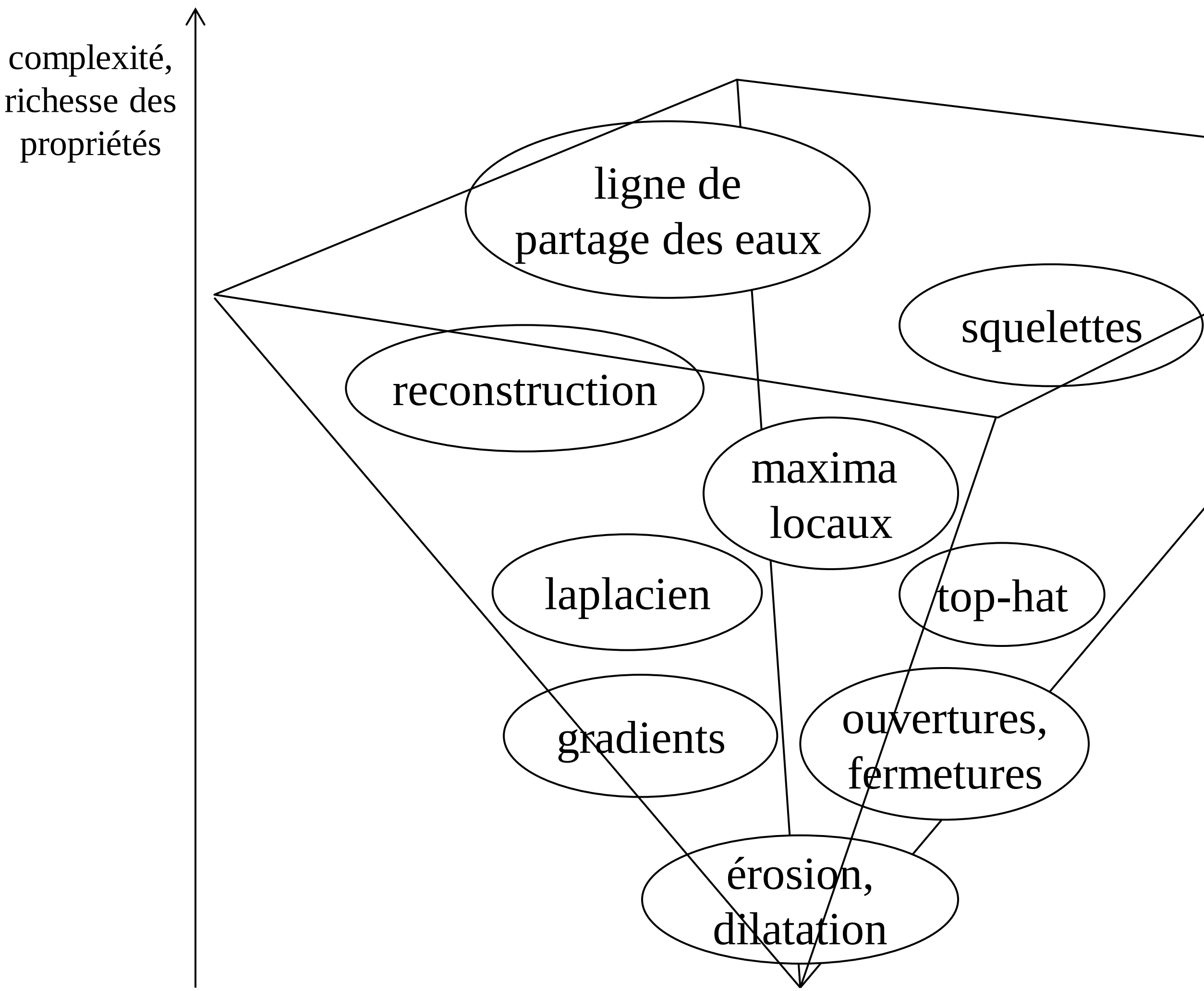
$$x \leq y \Rightarrow \Phi(x) \leq \Phi(y)$$ ***Croissance***

$$x \leq \Phi(x)$$ ***Extensivité***

$$\Phi(x) \leq x$$ ***Anti-extensivité***

$$\Phi\big(\Phi(x)\big) = \Phi(x)$$ ***Idempotence***

Construction des opérateurs de la morphologie mathématique



Construction de nouveaux opérateurs :

- par composition

$$\boxed{\Gamma(x) = \Phi\big(\Psi(x)\big)}$$

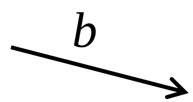
- par différence

$$\boxed{\Lambda(x) = \Phi(x) - \Psi(x)}$$

Opérations de Minkowski dans R^n

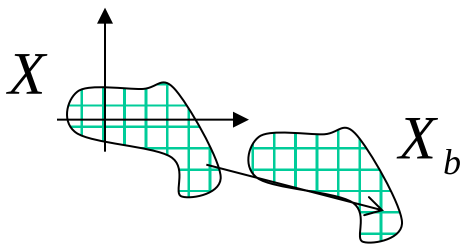
Définitions préliminaires

On se place ici dans E : l'ensemble des parties de $\mathbf{R}^n$



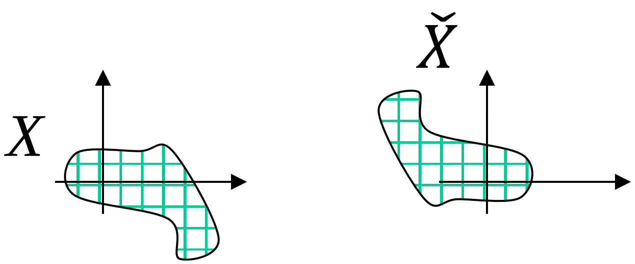
Pour $X \subset \mathbf{R}^n$

et $b \in \mathbf{R}^n$



on note $\boxed{X_b = \{x + b ; x \in X\}}$

le ***translaté*** de X par b.



et on note $\boxed{\check{X} = \{-x ; x \in X\}}$

le ***transposé*** de X.

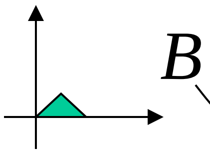
Rq: si X est symétrique alors $\check{X} = X$

L'addition de Minkowski

L 'addition de Minkowski de X et B est définie par :

$$X \oplus B = \bigcup_{b \in B} X_b$$

X $\quad$ $X \oplus B$

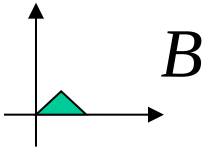


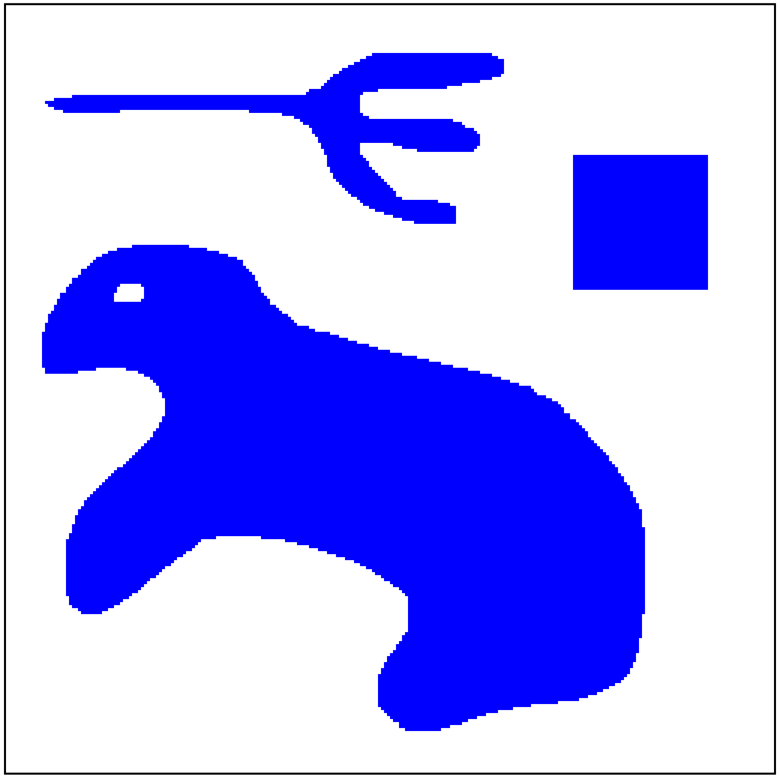
élément structurant

Rq : $\quad X \oplus B = B \oplus X$

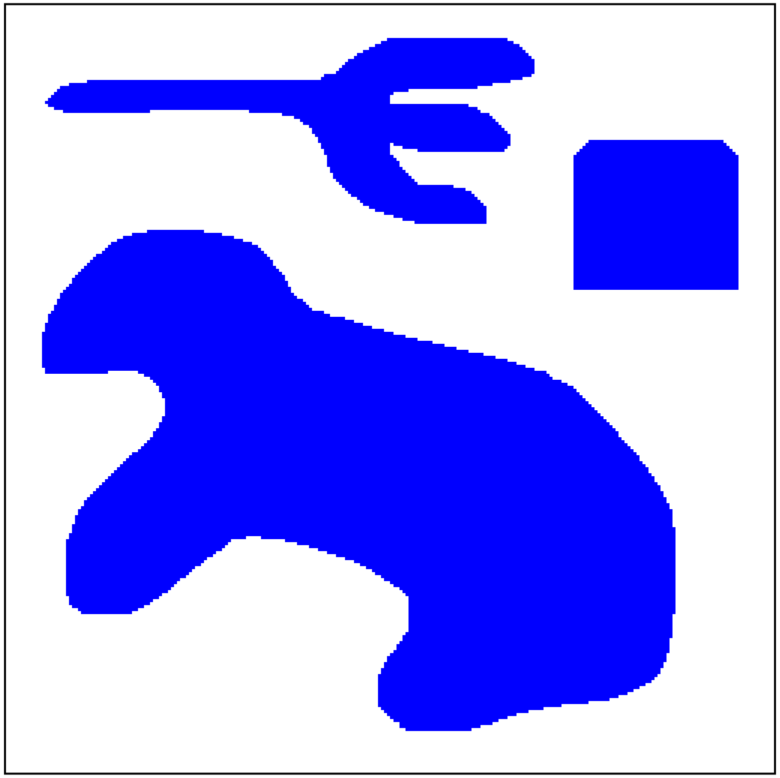
C'est le lieu géométrique des points de B_x lorsque x parcours X

L'addition de Minkowski





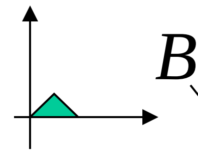
X



$X \oplus B$

La dilatation morphologique

La dilatation morphologique de *X* par *B* est définie par : $\boxed{\delta_B(X) = X \oplus \check{B}}$



élément structurant

$$\delta_B(X) = X \oplus \check{B} = \bigcup_{b \in \check{B}} X_b$$

$$= \{z / \exists x \in X, \exists b \in B : z = x - b\}$$

$$= \{z / \exists x \in X, \exists b \in B : z + b = x\}$$

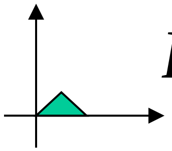
$$= \{z / B_z \cap X \neq \emptyset\}$$

X $\delta_B(X)$

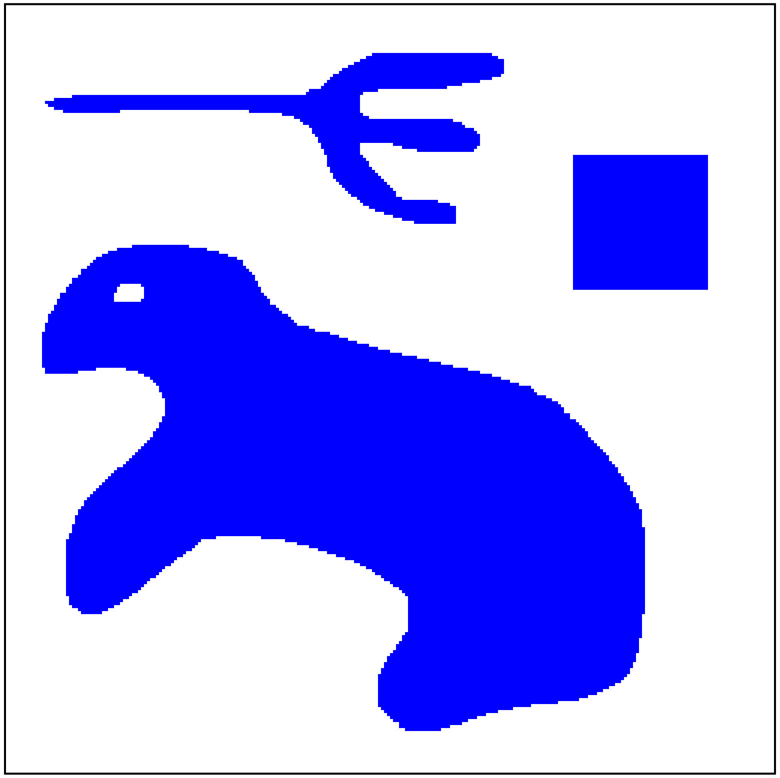
$$\boxed{\delta_B(X) = \{z / B_z \cap X \neq \emptyset\}}$$

C'est le lieu géométrique des points z tels que B_z intersecte *X*

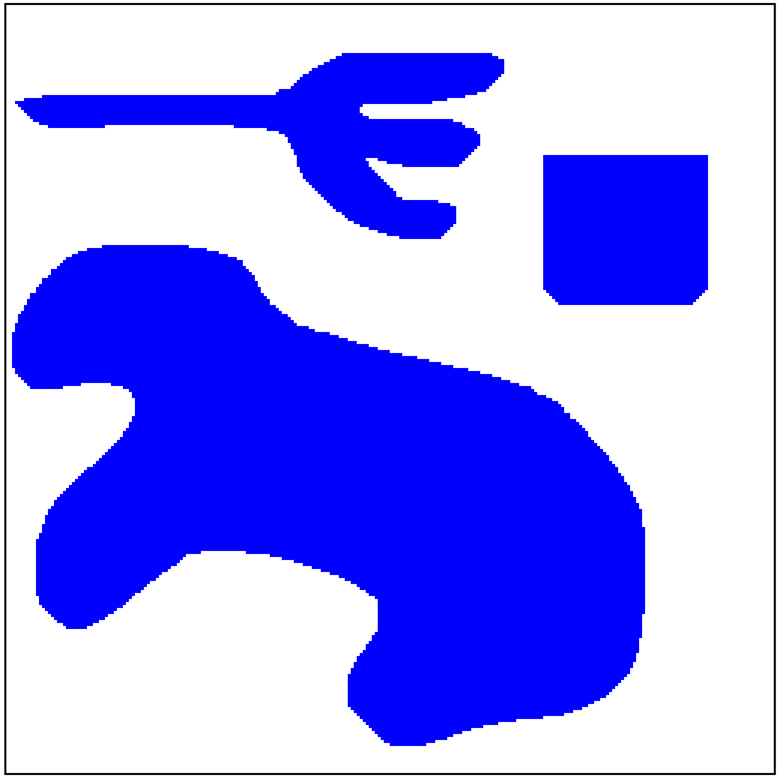
La dilatation morphologique



B



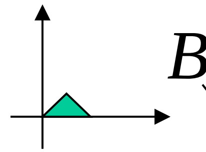
X



$\delta_B(X)$

L’érosion morphologique

L’érosion morphologique de X par B est définie par le principe de dualité : $\varepsilon_B(\overline{X}) = \overline{\delta_B(X)}$



élément structurant

$$\varepsilon_B(X) = \overline{\delta_B(\bar{X})} = \overline{\bar{X} \oplus \check{B}} = \overline{\bigcup_{b \in \check{B}} \overline{X_b}} = \bigcap_{b \in \check{B}} X_b$$

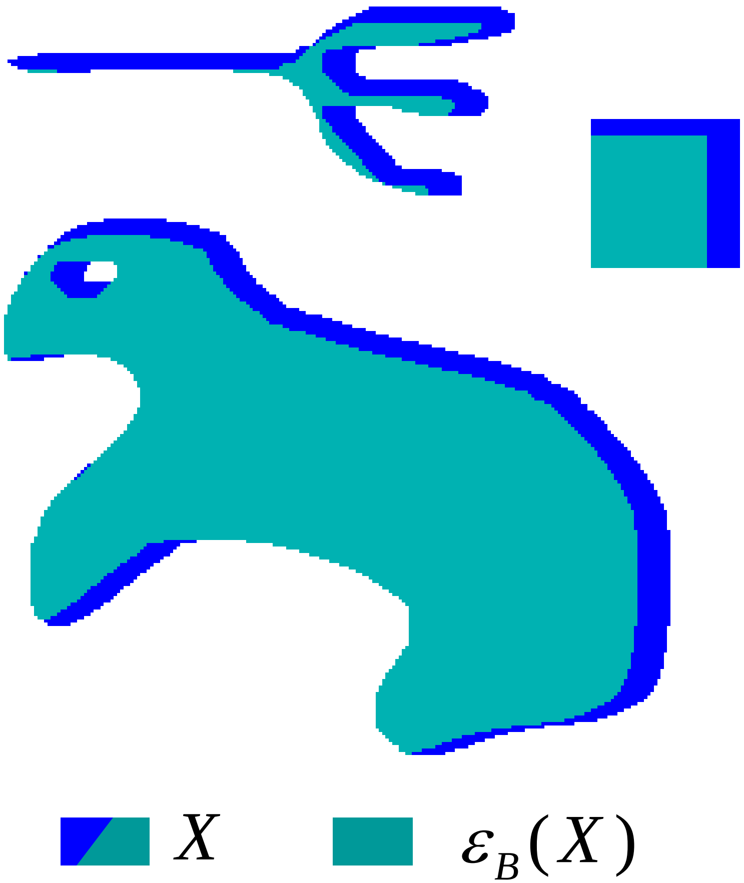
$$= X \ominus \check{B}$$

Soustraction de Minkowski

$$\varepsilon_B(X) = \bigcap_{b \in \check{B}} X_b = \{z / \forall b \in B, \exists x \in X : z + b = x\}$$

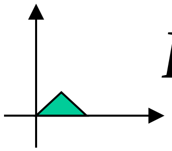
$$= \{z / B_z \subset X\}$$

$$\boxed{\varepsilon_B(X) = \{z / B_z \subset X\}}$$

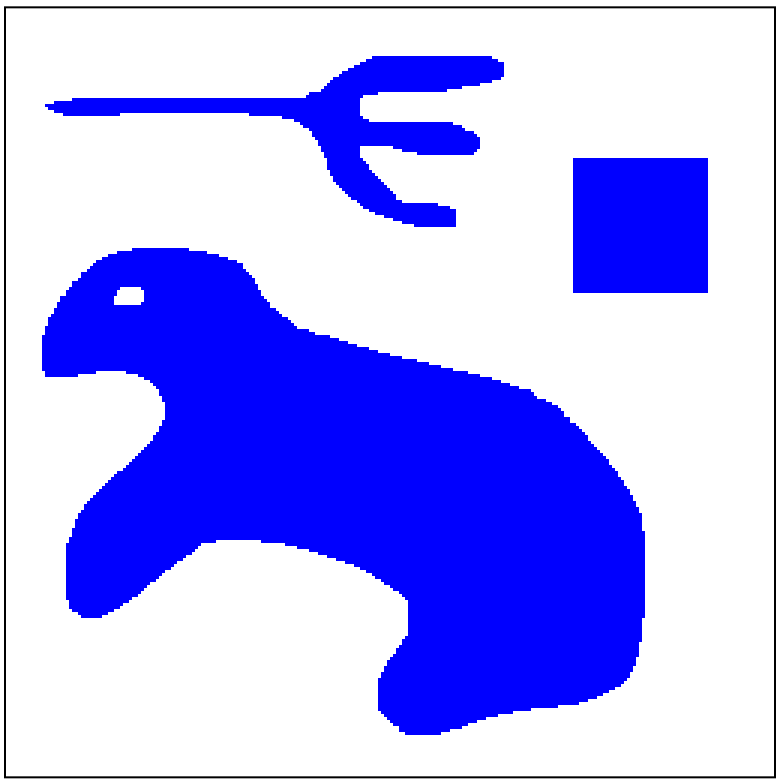


C’est le lieu géométrique des points z tels que B_z est inclus dans X

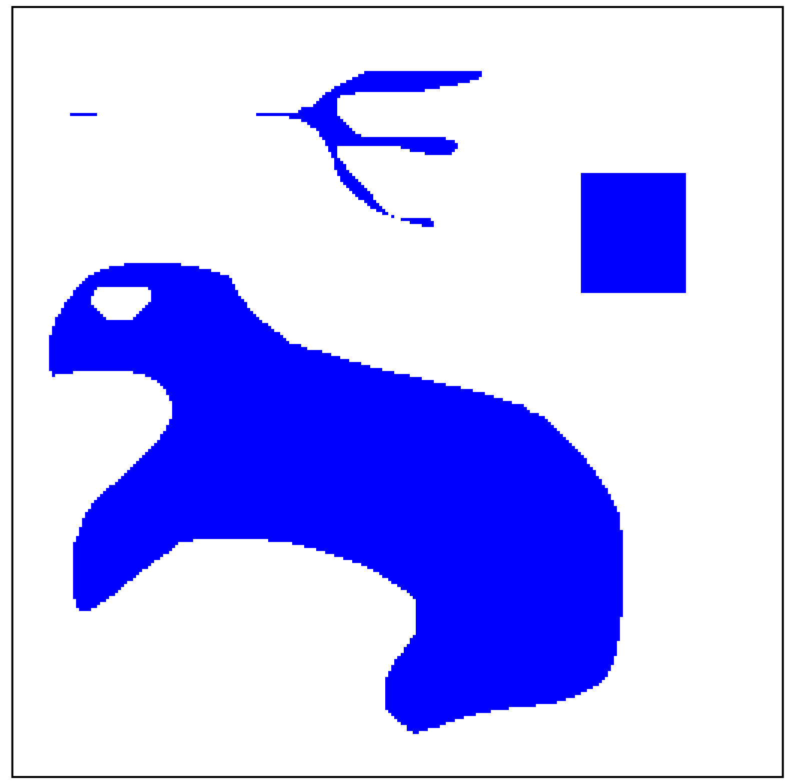
L’érosion morphologique



B



X



$\varepsilon_B(X)$

Propriétés algébriques des opérateurs de base

CROISSANCE

La dilatation et l'érosion sont des opérateurs ***croissants***

$$X \subset Y \Rightarrow \delta_B(X) \subset \delta_B(Y)$$
$$X \subset Y \Rightarrow \varepsilon_B(X) \subset \varepsilon_B(Y)$$

! L'érosion est ***décroissante*** par rapport à l'élément structurant : $B \subset B' \Rightarrow \varepsilon_B(X) \supset \varepsilon_{B'}(X)$

EXTENSIVITE

Si l'élément structurant B contient l'origine :

- La dilatation est ***extensive*** $\quad X \subset \delta_B(X)$
- L'érosion est ***anti-extensive*** $\quad \varepsilon_B(X) \subset X$

- La dilatation commute avec le ***Sup*** $\quad \delta_B(X \cup Y) = \delta_B(X) \cup \delta_B(Y)$
- L'érosion commute avec le ***Inf*** $\quad \varepsilon_B(X \cap Y) = \varepsilon_B(X) \cap \varepsilon_B(Y)$

On a les égalités :

$$\delta_{B \cup B'}(X) = \delta_B(X) \cup \delta_{B'}(X)$$
$$\varepsilon_{B \cup B'}(X) = \varepsilon_B(X) \cap \varepsilon_{B'}(X)$$

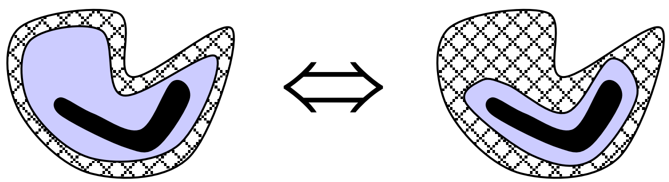
! Mais seulement les inclusions :

$$\delta_B(X \cap Y) \subset \delta_B(X) \cap \delta_B(Y)$$
$$\varepsilon_B(X \cup Y) \supset \varepsilon_B(X) \cup \varepsilon_B(Y)$$

$$\delta_{B \cap B'}(X) \subset \delta_B(X) \cap \delta_{B'}(X)$$
$$\varepsilon_{B \cap B'}(X) \supset \varepsilon_B(X) \cup \varepsilon_{B'}(X)$$

Propriétés algébriques des opérateurs de base

PROPRIETE D'ADJONCTION



$$X \subset \varepsilon_B(Y) \Leftrightarrow \delta_{\check{B}}(X) \subset Y$$

CAS DEGENERES

élément structurant vide

$$\varepsilon_{\varnothing}(X) = \mathbf{R}^n$$
$$\delta_{\varnothing}(X) = \varnothing$$

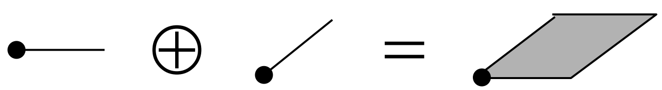
ASSOCIATIVITE DE LA DILATATION

$$\delta_{B'}\big(\delta_B(X)\big) = \delta_{\delta_{B'}(B)}(X)$$
$$\varepsilon_{B'}\big(\varepsilon_B(X)\big) = \varepsilon_{\delta_{B'}(B)}(X)$$

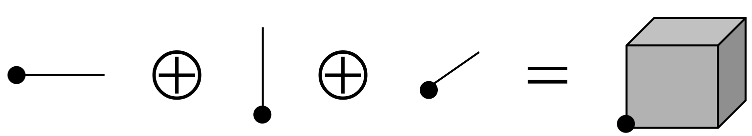
<u>Application</u> : *Polyèdres de Steiner* dans $\mathbf{R}^n$:

ex:

dans $\mathbf{R}^2$:



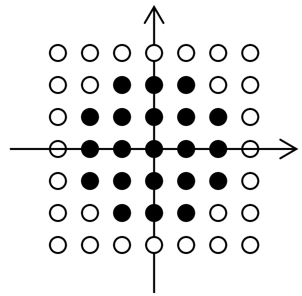
dans $\mathbf{R}^3$:



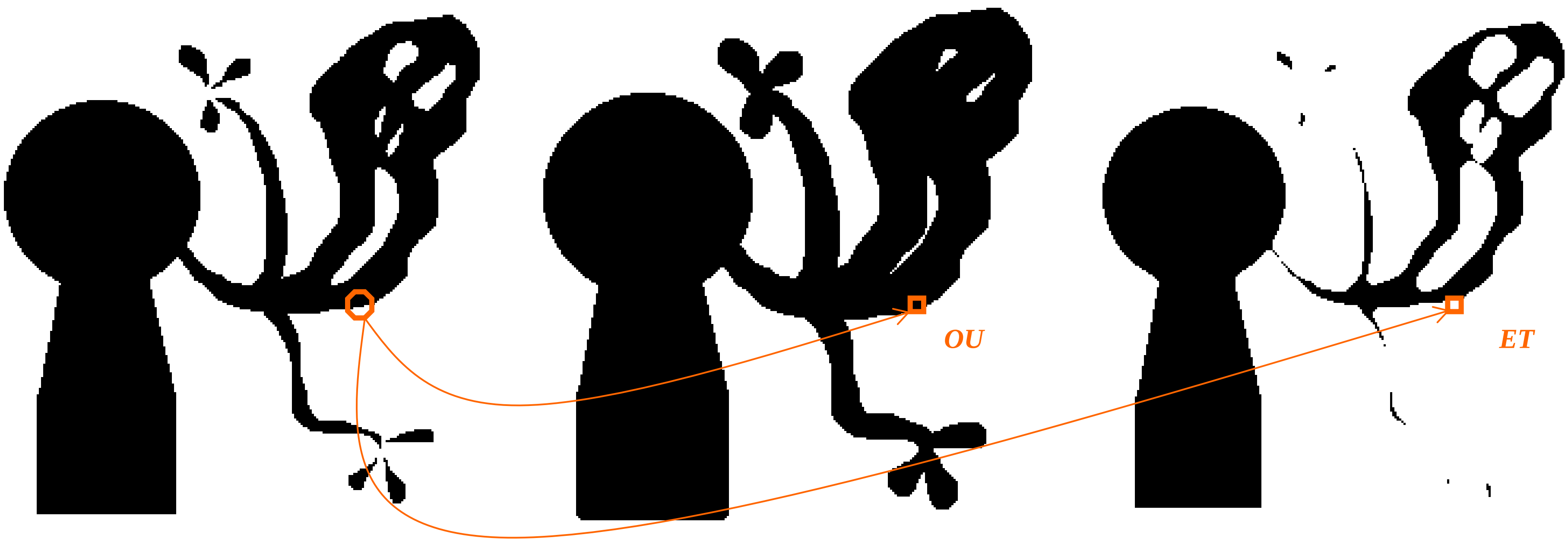
Décomposition des éléments structurants convexes en sommes de segments

Application aux images binaires

Le treillis est l'ensemble des parties de $\mathbf{Z}^2$

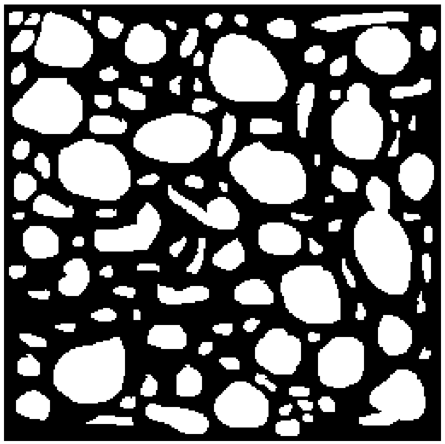


B

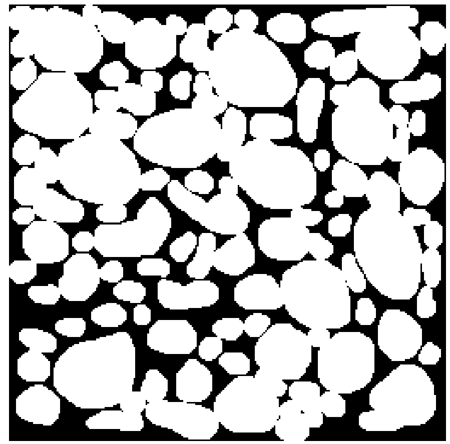


X $\qquad$ $\delta_B(X)$ $\qquad$ $\varepsilon_B(X)$

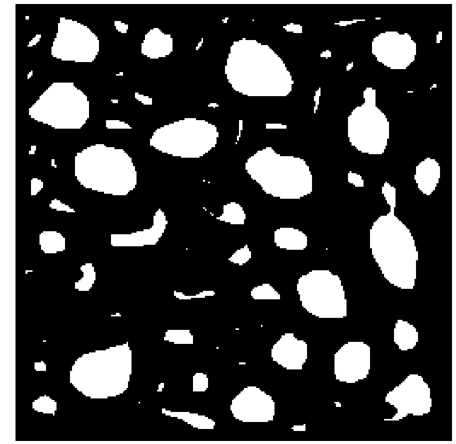
Conclusions sur les opérateurs de base



Originale



Dilatée



Erodée

- *La dilatation fait disparaître les petits trous et les petits détroits, et fait grossir les objets.*
- *L'érosion fait disparaître les petits objets et les petits isthmes, et amincit les objets restants.*

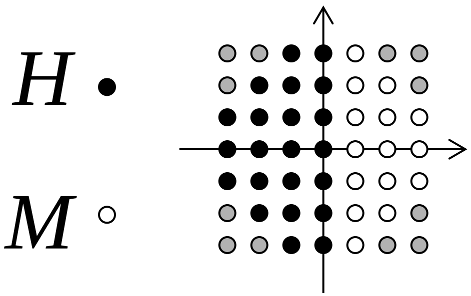
!

Dilatation et érosion sont des opérations *non réversibles*.

Dilatation et érosion sont des opérations *duales*, *pas inverses* !

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\textit{dilatation}} & \delta_B(X) \\ \textit{complémentation} \updownarrow & & \updownarrow \\ X^c & \longrightarrow & \varepsilon_B(X^c) \end{array}$$

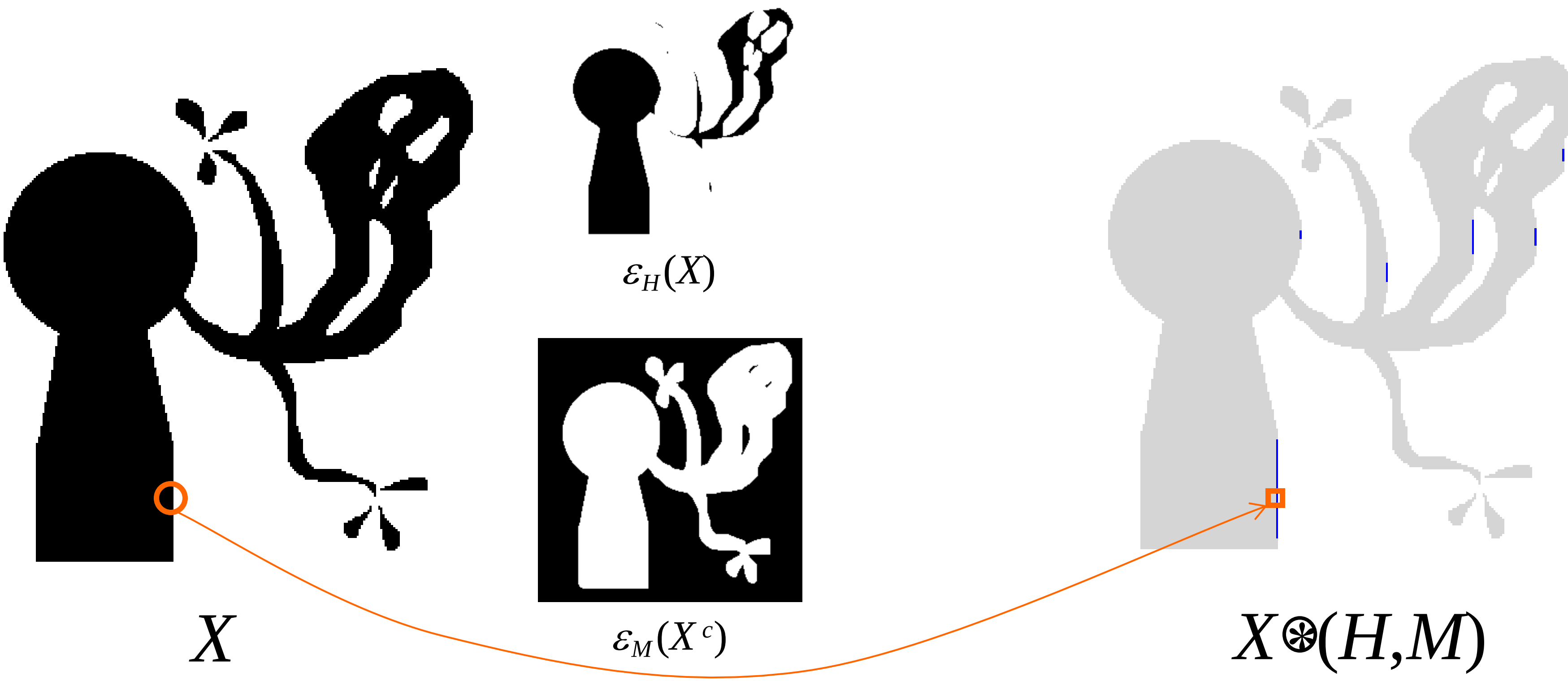
Transformées en tout-ou-rien



Les transformées en tout-ou-rien (*Hit-or-Miss Transform*) unifient et généralisent érosions et dilatations.

$$\boxed{X \circledast (H,M) = \varepsilon_H(X) \cap \varepsilon_M(X^c)}$$

Application : Recherche de configurations



Du cadre ensembliste au cadre fonctionnel

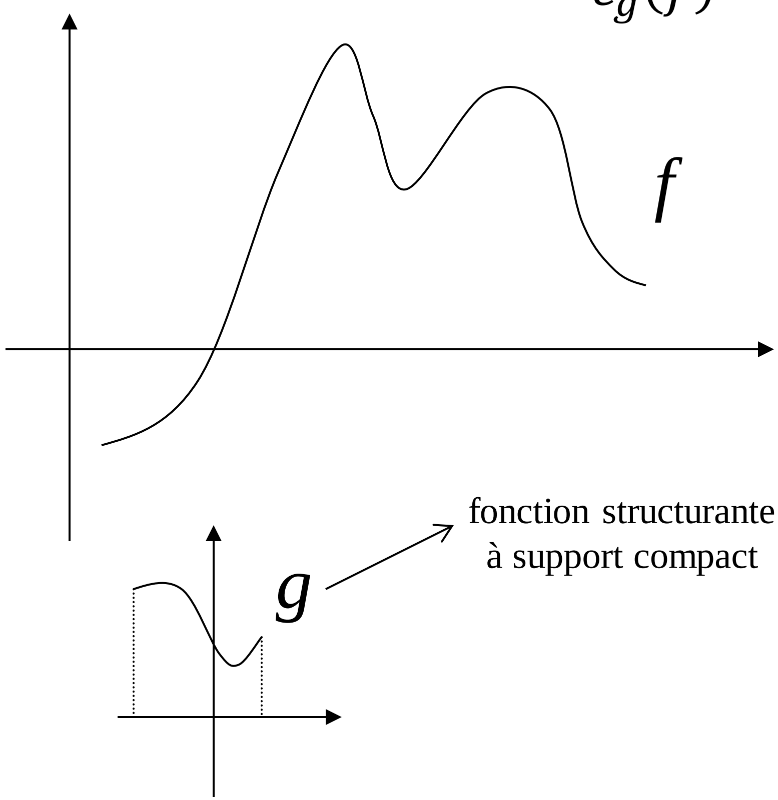
On se place à présent dans le cadre des fonctions : $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$

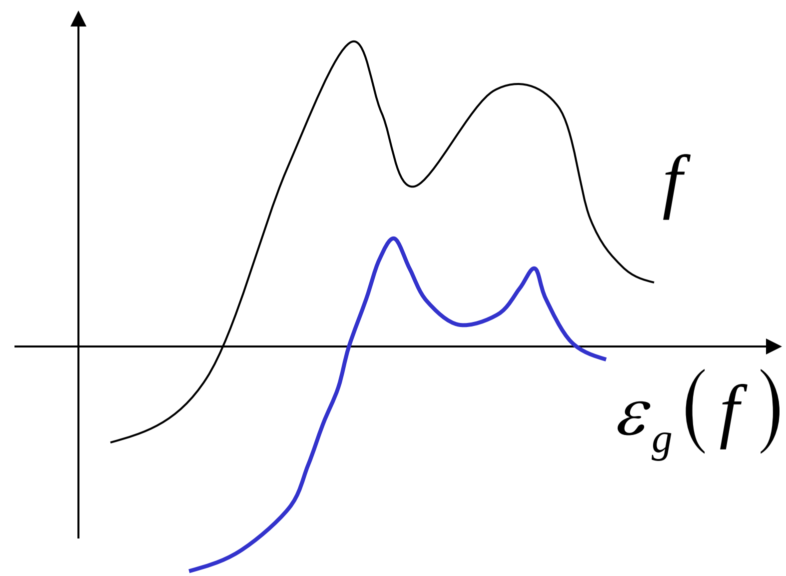
La dilatation et l'érosion fonctionnelles sont respectivement définies par :

$$\delta_g(f) = f \oplus \check{g}$$
$$\varepsilon_g(f) = f \ominus \check{g}$$

$$\boxed{\delta_g(f)(x) = \sup_{y \in \mathbf{R}^n} \left\{ f(y) + g(y-x) \right\}}$$

$$\boxed{\varepsilon_g(f)(x) = \inf_{y \in \mathbf{R}^n} \left\{ f(y) - g(y-x) \right\}}$$





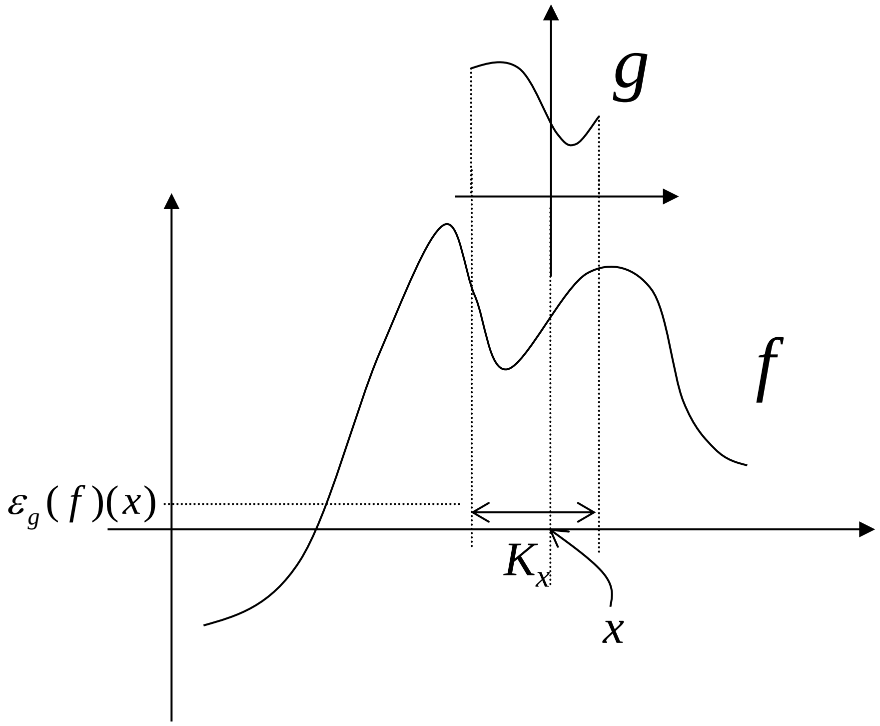
Du cadre ensembliste au cadre fonctionnel

Soit K le support de g

$$\varepsilon_g(f)(x) = \inf_{y \in \mathbf{R}^n} \left\{ f(y) - g(y-x) \right\}$$

$$= \inf_{y-x \in K} \left\{ f(y) - g(y-x) \right\}$$

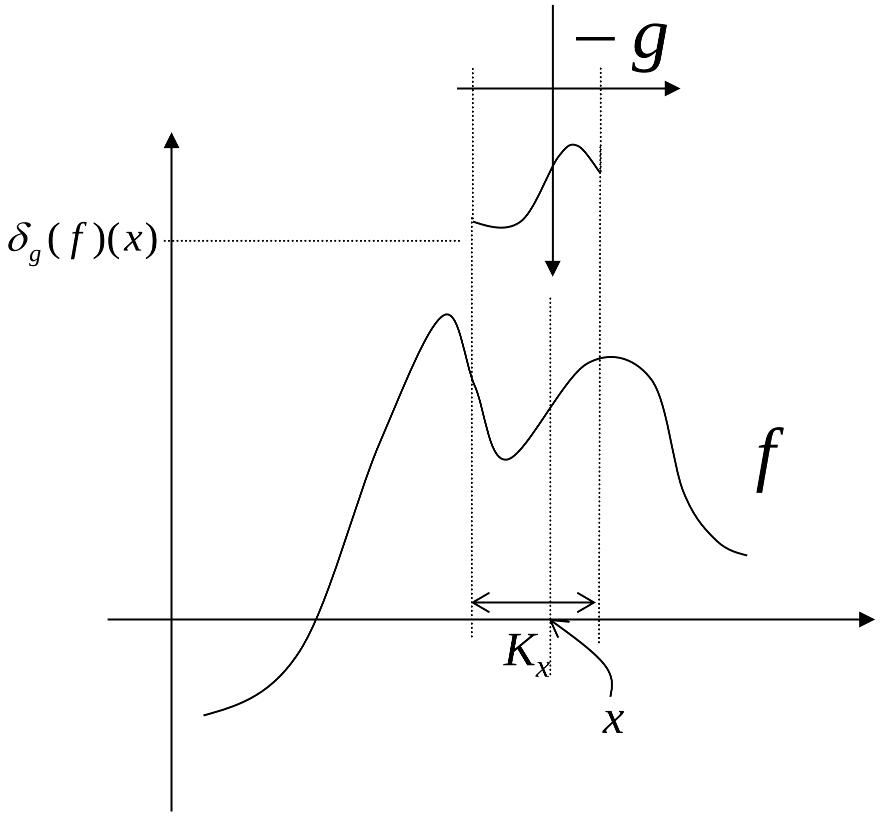
$$= \inf_{y \in K_x} \left\{ f(y) - g(y-x) \right\}$$



Du cadre ensembliste au cadre fonctionnel

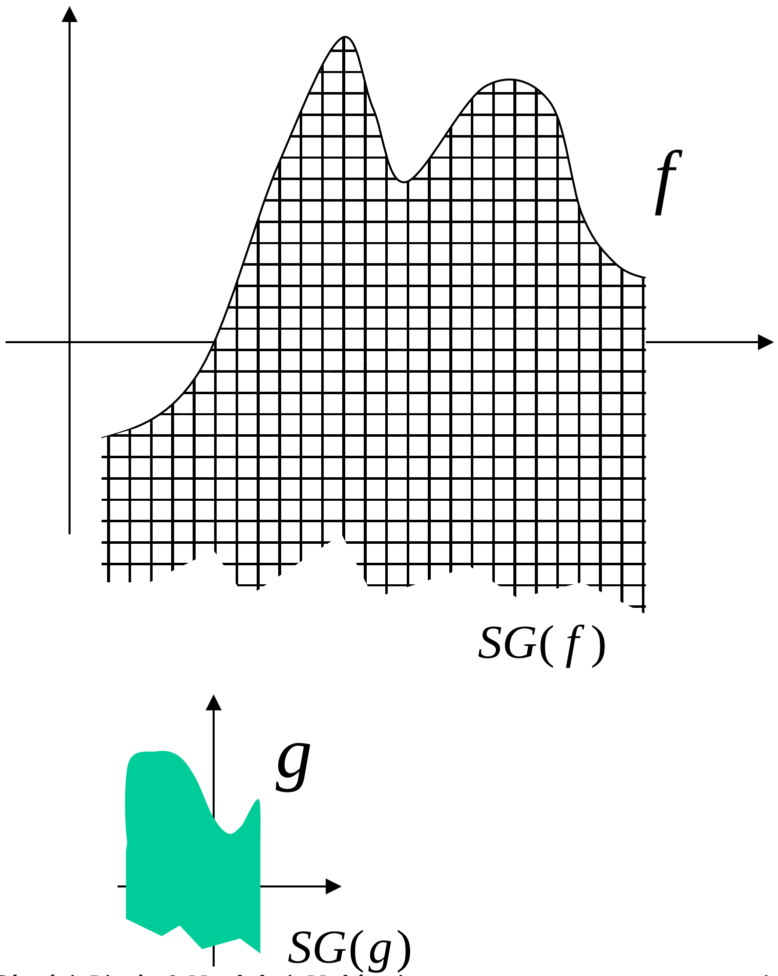
Soit K le support de g

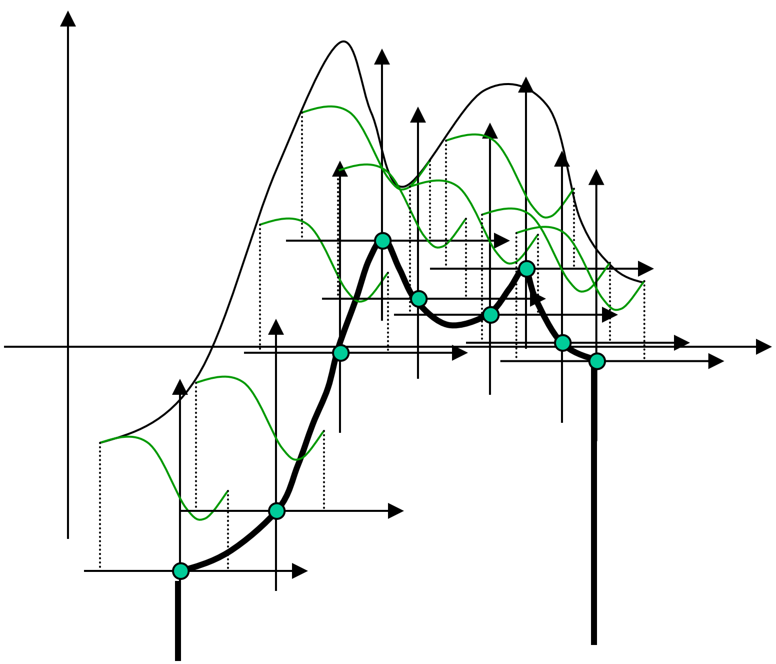
$$\delta_g(f)(x) = \sup_{y\in\mathbf{R}^n}\left\{f(y)+g(y-x)\right\}$$
$$= \sup_{y-x\in K}\left\{f(y)+g(y-x)\right\}$$
$$= \sup_{y\in K_x}\left\{f(y)+g(y-x)\right\}$$



Du cadre ensembliste au cadre fonctionnel

A toute fonction f on associe son ***sous-graphe*** : $SG(f) = \left\{(x,t) \in \mathbf{R}^n \times \overline{\mathbf{R}} \,/\, t \leq f(x)\right\}$





Du cadre ensembliste au cadre fonctionnel

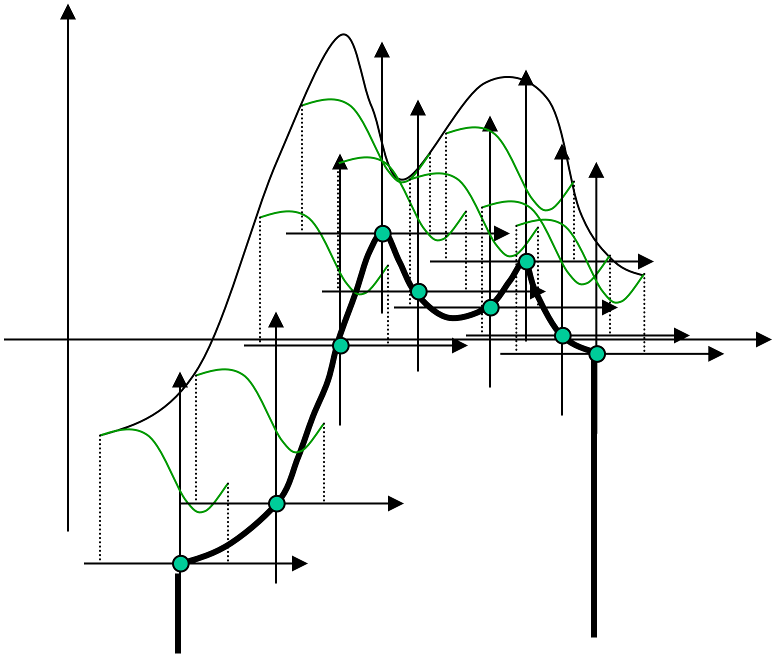
Interprétation ensembliste :

$$SG\big(\varepsilon_g(f)\big) = \boldsymbol{\varepsilon}_{SG(g)}\big(SG(f)\big)$$

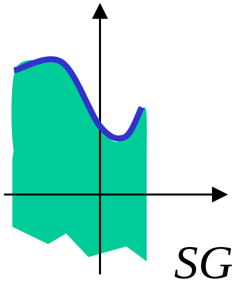
$$SG\big(\delta_g(f)\big) = \boldsymbol{\delta}_{-SG(-g)}\big(SG(f)\big)$$

fonctionnel

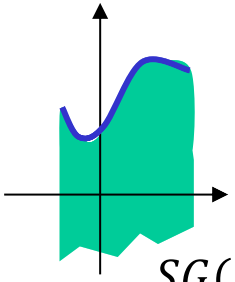
ensembliste



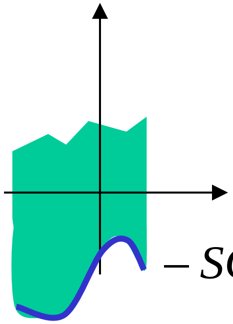
$-g \neq \check{g}$



$SG(g)$



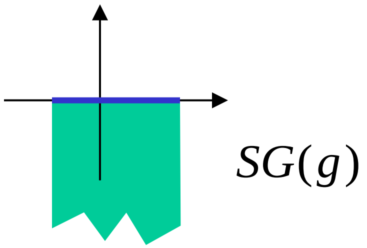
$SG(\check{g})$



$-SG(-g)$

Cas des éléments structurants plans

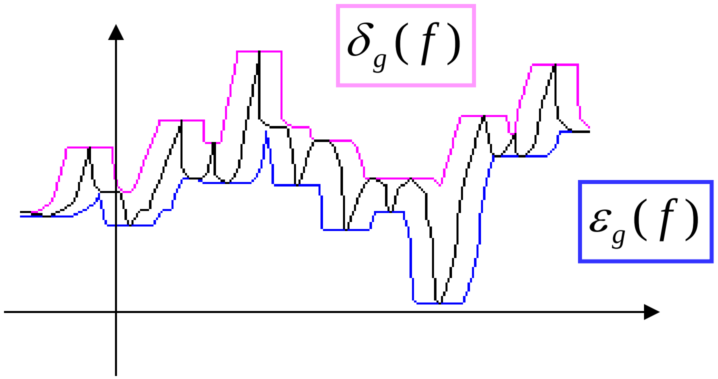
Élément structurant plan =
fonction structurante nulle sur un
support compact K



L'expression algébrique des
opérateurs de base devient :

ex:

$$\varepsilon_g(f)(x) = \inf_{\substack{y \in \mathbf{R}^n \\ y-x \in K}} \{f(y)\} = \inf_{y \in K_x} \{f(y)\}$$



$$\delta_g(f)(x) = \sup_{y \in K_x} \{f(y)\}$$

Propriétés des opérateurs de base dans le cadre fonctionnel

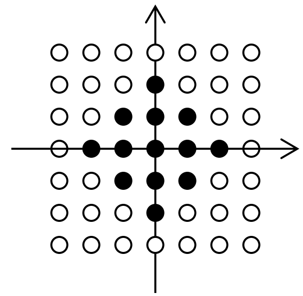
Identiques au cas ensembliste, en remplaçant :

$$\subset \;\rightarrow\; \leq$$
$$\cup \;\rightarrow\; \vee$$
$$\cap \;\rightarrow\; \wedge$$

$f \leq f' \Rightarrow \delta_g(f) \leq \delta_g(f')$ $f \leq f' \Rightarrow \varepsilon_g(f) \leq \varepsilon_g(f')$ $g \leq g' \Rightarrow \varepsilon_g(f) \geq \varepsilon_{g'}(f)$	Si $O \in \mathrm{Supp}(g)$: $f \leq \delta_g(f)$ $\varepsilon_g(f) \leq f$	$\delta_g(f \vee f') = \delta_g(f) \vee \delta_g(f')$ $\varepsilon_g(f \wedge f') = \varepsilon_g(f) \wedge \varepsilon_g(f')$
$\delta_{g \vee g'}(f) = \delta_g(f) \vee \delta_{g'}(f)$ $\varepsilon_{g \vee g'}(f) = \varepsilon_g(f) \wedge \varepsilon_{g'}(f)$		$\delta_g(f \wedge f') \leq \delta_g(f) \wedge \delta_g(f')$ $\varepsilon_g(f \vee f') \geq \varepsilon_g(f) \vee \varepsilon_g(f')$ $\delta_{g \wedge g'}(f) \leq \delta_g(f) \wedge \delta_{g'}(f)$ $\varepsilon_{g \wedge g'}(f) \geq \varepsilon_g(f) \vee \varepsilon_{g'}(f)$
$f \leq \varepsilon_g(f') \Leftrightarrow \delta_{\check{g}}(f) \leq f'$	$\delta_{g'}\left(\delta_g(f)\right) = \delta_{\delta_{g'}(g)}(f)$ $\varepsilon_{g'}\left(\varepsilon_g(f)\right) = \varepsilon_{\delta_{g'}(g)}(f)$	

Application aux images numériques

Le treillis est l'ensemble des fonctions de $\mathbf{Z}^2$ dans $\mathbf{Z}$



B

élément structurant plan $\cong$ ensemble

X $\qquad$ $\delta_B(X)$ $\qquad$ $\varepsilon_B(X)$

Premiers opérateurs par différence

Opérateur par différence : $$\Lambda(x) = \Phi(x) - \Psi(x)$$

Cas ensembliste

$$\boxed{\Lambda(X) = \Phi(X) \setminus \Psi(X)}$$

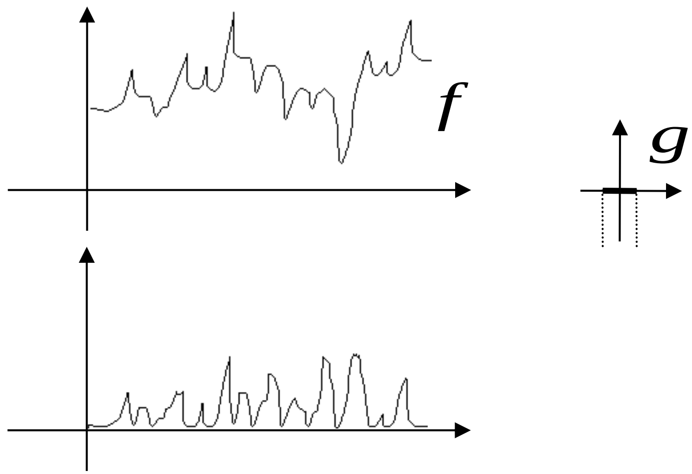
Cas fonctionnel

$$\boxed{\Lambda(f) = \Phi(f) - \Psi(f)}$$

Gradient intérieur

$$\boxed{g_y^-(x)}$$

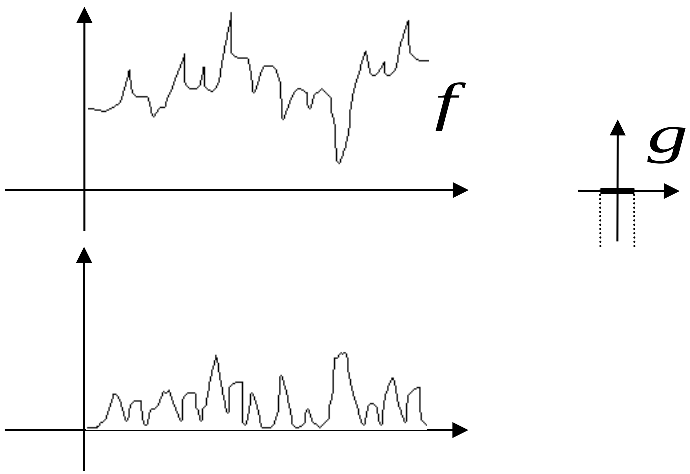
$$\Phi(x) = x \qquad \Psi(x) = \varepsilon_y(x)$$



Gradient extérieur

$$\boxed{g_y^+(x)}$$

$$\Phi(x) = \delta_y(x) \qquad \Psi(x) = x$$



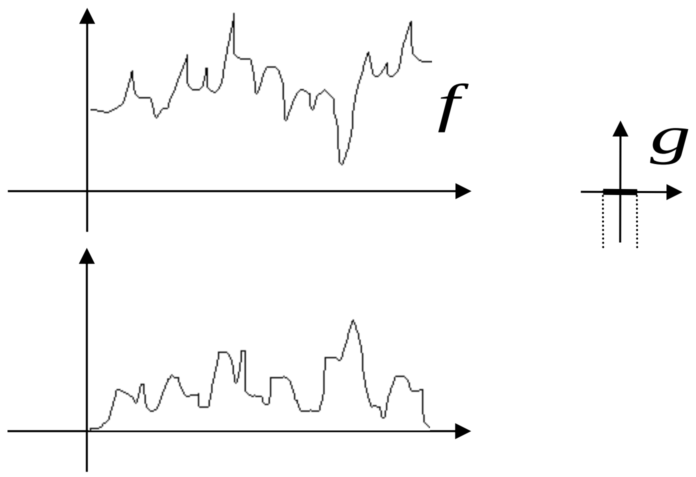
Premiers opérateurs par différence

Gradient morphologique

(symétrisée)

$$\boxed{g_y^m(x)}$$

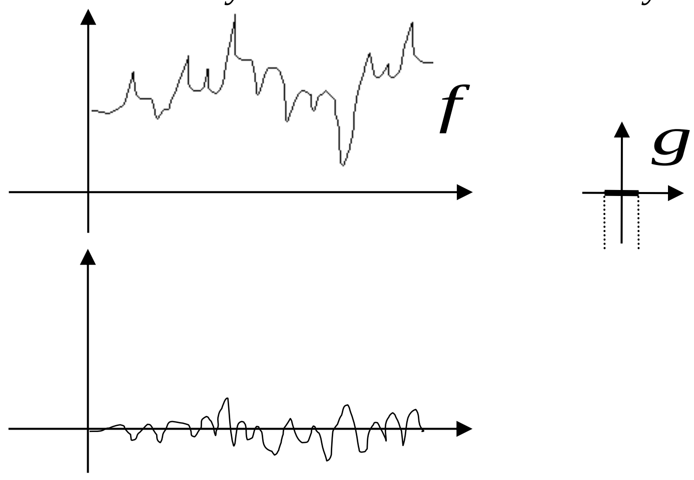
$$\Phi(x) = \delta_y\left(x\right) \qquad \Psi(x) = \varepsilon_y(x)$$



Laplacien morphologique

$$\boxed{\lambda_y(x)}$$

$$\Phi(x) = g_y^+(x) \qquad \Psi(x) = g_y^-(x)$$



Rq : dans le cas de fonctions de $\mathbf{R}^2$ dans $\mathbf{R}$, en prenant pour élément structurant une boule euclidienne centrée sur l'origine, le gradient morphologique et le laplacien morphologique tendent respectivement vers le module du gradient et le laplacien euclidiens lorsqu'ils sont définis, quand le rayon de la boule tend vers zéro :

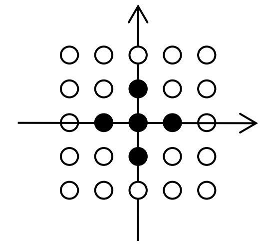
$$\left\|\nabla I\right\| = \sqrt{\left(\frac{\partial I}{\partial x}(u,v)\right)^2 + \left(\frac{\partial I}{\partial y}(u,v)\right)^2} \qquad \Delta I = \frac{\partial^2 I}{\partial x^2}(u,v) + \frac{\partial^2 I}{\partial y^2}(u,v)$$

Gradients et laplacien : images numériques

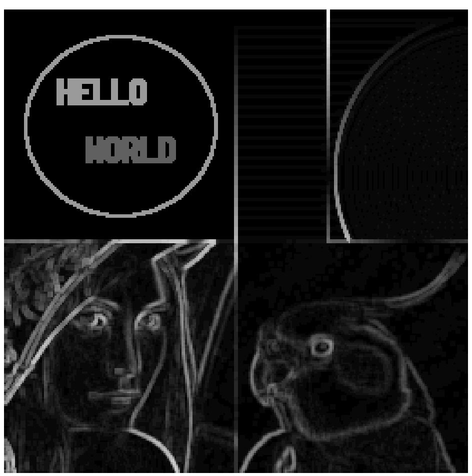
X

$\varepsilon_B(X)$

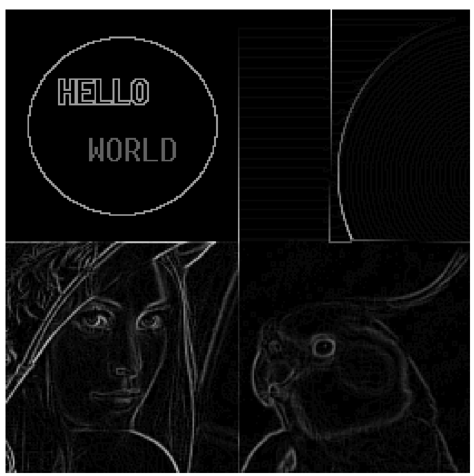
$\delta_B(X)$



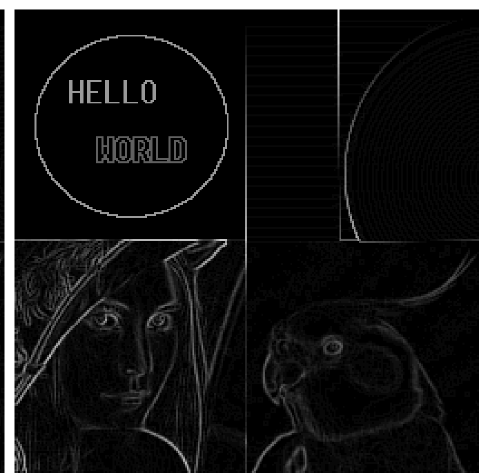
B



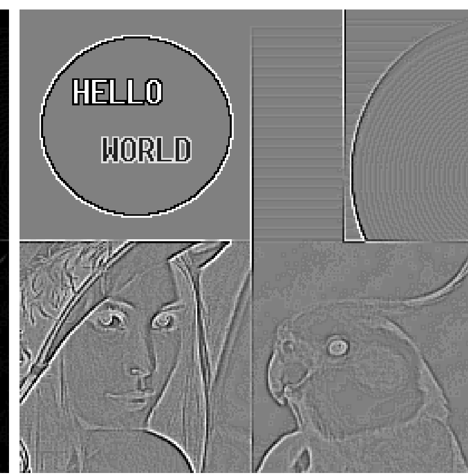
$g_B^m(X) = \delta_B(X) - \varepsilon_B(X)$



$g_B^-(X) = X - \varepsilon_B(X)$

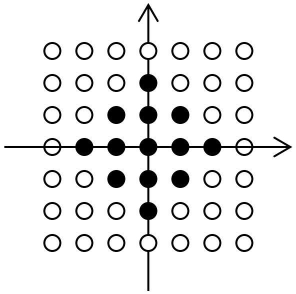


$g_B^+(X) = \delta_B(X) - X$



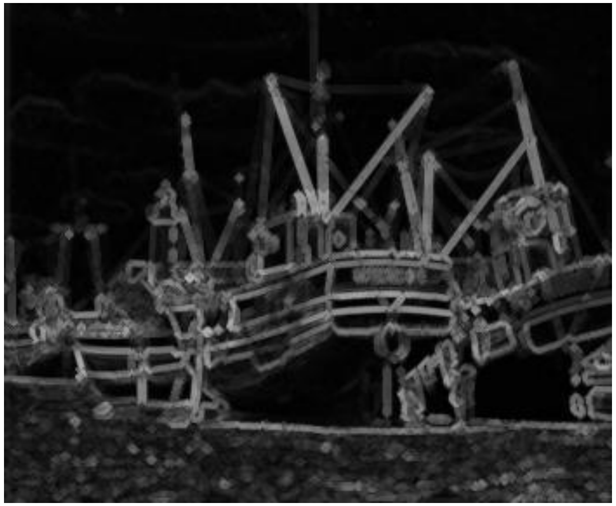
$\lambda_B(X) = g_B^+(x) - g_B^-(x)$

Gradients et laplacien : images numériques



B

X



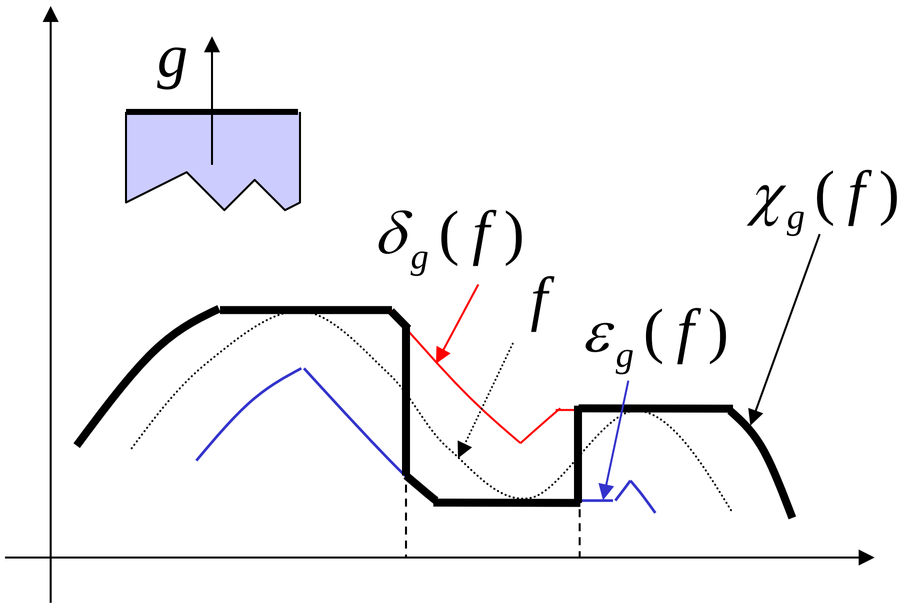
$g_B^m(X)$

$\lambda_B(X)$

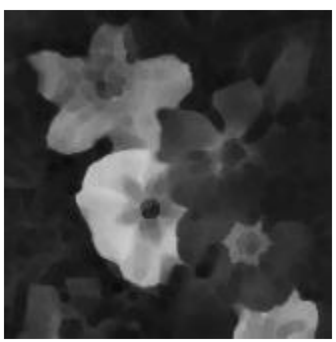
Augmentation de contraste morphologique

Le filtre rehausseur de contraste est défini par :

$$\begin{cases} \chi_g(f) = \delta_g(f) \text{ si } (\delta_g(f)-f) < (f-\varepsilon_g(f)) \\ \chi_g(f) = \varepsilon_g(f) \text{ si } (\delta_g(f)-f) > (f-\varepsilon_g(f)) \end{cases}$$

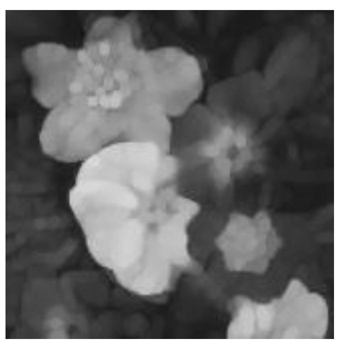


erodé



$\varepsilon_g(f)$

dilaté



$\delta_g(f)$

image originale

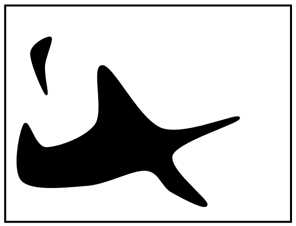
f

image rehaussée

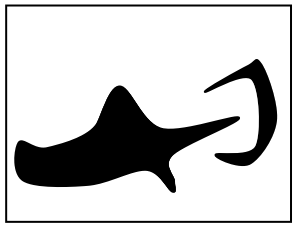
$\chi_g(f)$

Ouvertures et fermetures morphologiques

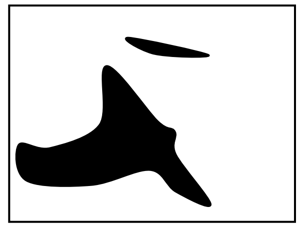
Problème Min/Max : étant donné $Y \in E$, $B \in E$,
trouver le plus petit $X \in E$ tel que : $Y = \varepsilon_B(X)$



X_1

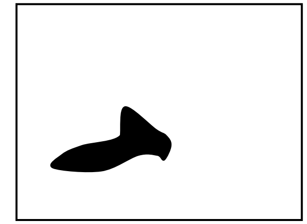


X_2



X_3

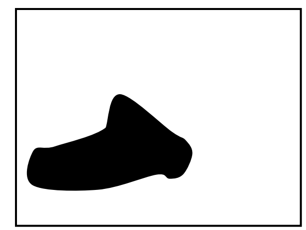
B



$$Y = \varepsilon_B(X_1) = \varepsilon_B(X_2) = \varepsilon_B(X_3)$$

REPONSE : C'est le dilaté de Y par le transposé de B:

$$\delta_{\check{B}}(Y) = Y \oplus B$$



On note : $\gamma_B(X) = \delta_{\check{B}}(\varepsilon_B(X)) = \left(X \ominus \check{B}\right) \oplus B$

l'ouverture morphologique de X par B.

et son dual : $\varphi_B(X) = \varepsilon_{\check{B}}(\delta_B(X)) = \left(X \oplus \check{B}\right) \ominus B$

la fermeture morphologique de X par B.

Propriétés algébriques des ouvertures et fermetures

CROISSANCE

$$x \leq y \Rightarrow \begin{cases} \gamma_B(x) \leq \gamma_B(y) \\ \varphi_B(x) \leq \varphi_B(y) \end{cases}$$

IDEMPOTENCE

$$\gamma_B(\gamma_B(x)) = \gamma_B(x)$$

$$\varphi_B(\varphi_B(x)) = \varphi_B(x)$$

<u>*dém:*</u> $\delta_{\breve{B}}(\varepsilon_B(x)) \leq x \leq \varepsilon_{\breve{B}}(\delta_B(x))$

donc $\underbrace{\delta_{\breve{B}}\varepsilon_B \leq id_E}_{\downarrow} \leq \varepsilon_{\breve{B}}\delta_B$

$\varepsilon_B\delta_{\breve{B}}\varepsilon_B \leq \varepsilon_B$

et $\delta_B\varepsilon_{\breve{B}} \leq \underbrace{id_E \leq \varepsilon_B\delta_{\breve{B}}}_{\downarrow}$

$\varepsilon_B \leq \varepsilon_B\delta_{\breve{B}}\varepsilon_B$

donc $\varepsilon_B = \varepsilon_B\delta_{\breve{B}}\varepsilon_B$

et donc $\delta_{\breve{B}}\varepsilon_B = \delta_{\breve{B}}\varepsilon_B\delta_{\breve{B}}\varepsilon_B$

EXTENSIVITE

L'ouverture est anti-extensive : $\gamma_B(x) \leq x$

La fermeture est extensive : $x \leq \varphi_B(x)$

<u>*dém:*</u>

Dans la propriété d'adjonction :

$$x \leq \varepsilon_B(y) \Leftrightarrow \delta_{\breve{B}}(x) \leq y$$

$x = \varepsilon_B(y)$ donne $\delta_{\breve{B}}(\varepsilon_B(y)) \leq y$

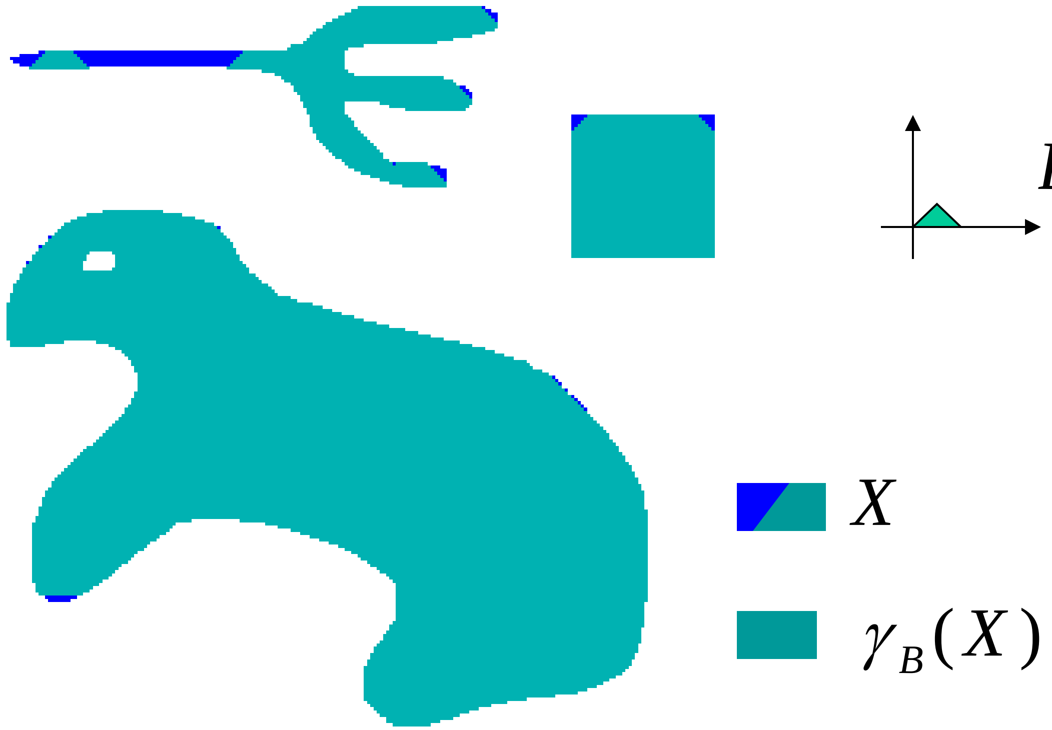
et $y = \delta_B(x)$ donne $x \leq \varepsilon_{\breve{B}}(\delta_B(x))$

PROPRIETE MIN/MAX

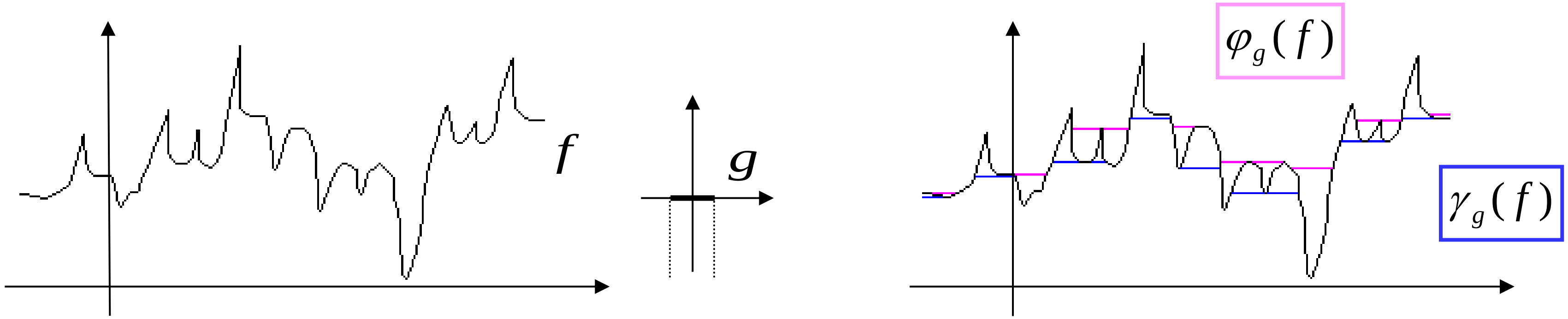
Soient *x*, *x'*, et *y* tels que : $\begin{cases} y = \varepsilon_B(x) = \varepsilon_B(x') \\ \text{et} \\ x = \delta_{\breve{B}}(y) \end{cases}$

alors $x = \delta_{\breve{B}}(y) = \delta_{\breve{B}}(\varepsilon_B(x))$
$= \delta_{\breve{B}}(\varepsilon_B(x')) = \gamma_B(x') \leq x'$

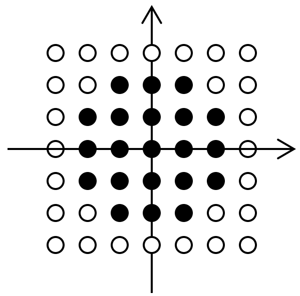
Ouvertures et fermetures : ensembles et fonctions



C'est le lieu géométrique des points de B_z tels que B_z est inclus dans X

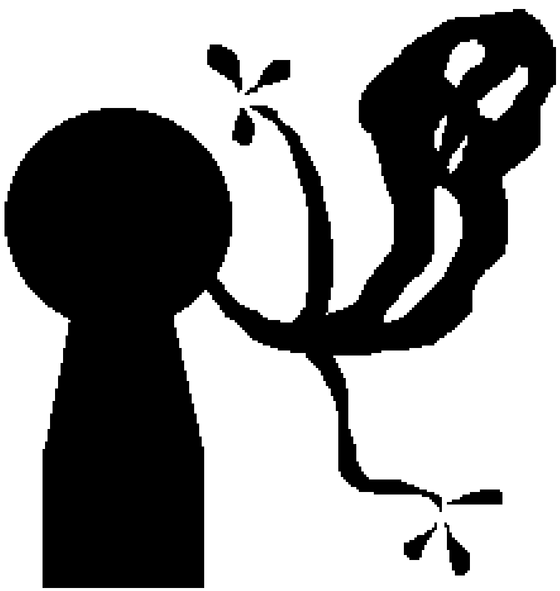


Ouvertures et fermetures : images binaires



B

- l'ouverture élimine les petites composantes, et ouvre les petits isthmes.
- la fermeture bouche les petites trous, et ferme les petits détroits.

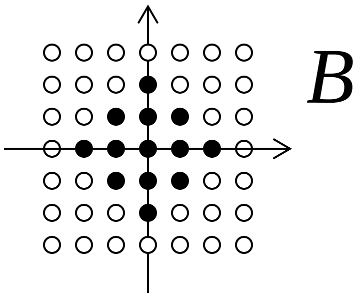


X

$\gamma_B(X)$

$\varphi_B(X)$

Ouvertures et fermetures : images numériques



$\varepsilon_B(X)$

$\delta_B(X)$

X

$\gamma_B(X)$

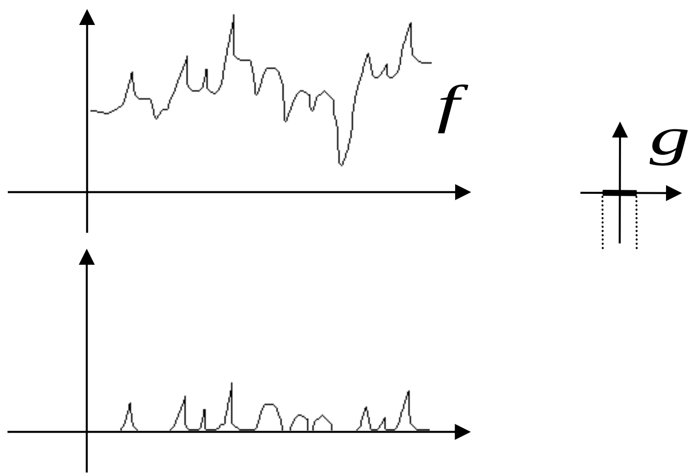
$\varphi_B(X)$

Opérateurs obtenus par différence d’ouvertures et fermetures

Opérateur par différence : $$\Lambda(x) = \Phi(x) - \Psi(x)$$

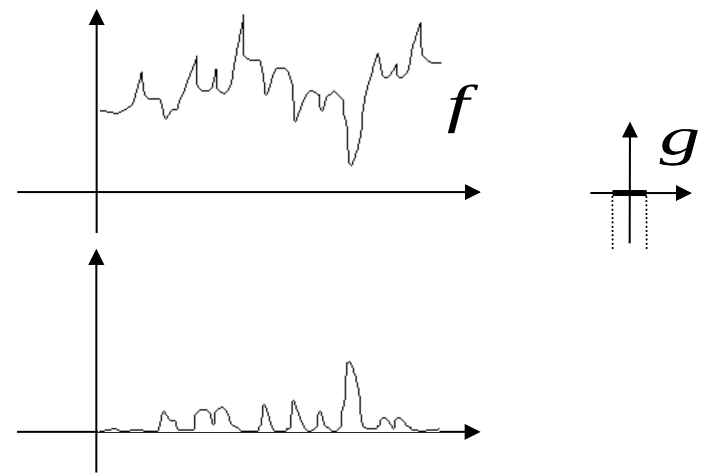
Top-hat

$$\Phi(x) = x \qquad \Psi(x) = \gamma_y(x)$$

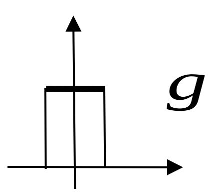


Top-hat conjugué

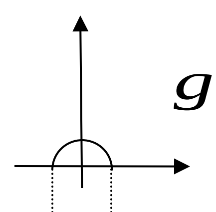
$$\Phi(x) = \varphi_y(x) \qquad \Psi(x) = x$$



Top-hat



Rolling ball

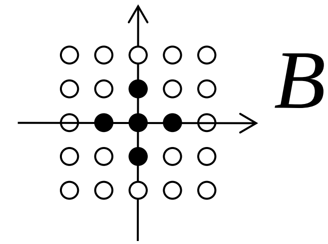


Top Hat : images numériques

X

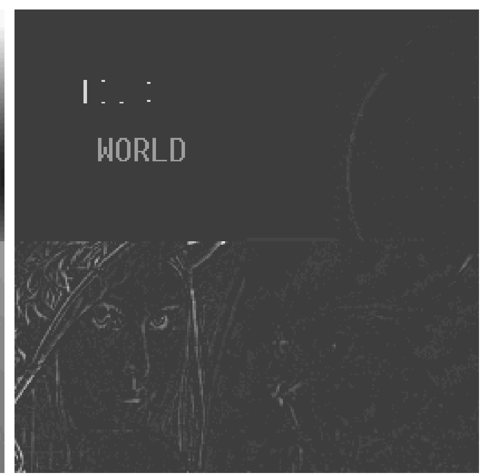
$\varepsilon_B(X)$

$\delta_B(X)$



$\gamma_B(X)$

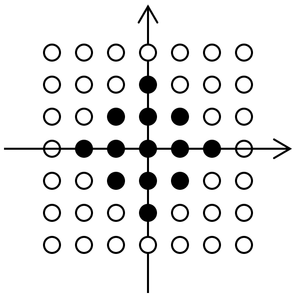
$\varphi_B(X)$



$\tau_B(X) = X - \gamma_B(X)$

$\tilde{\tau}_B(X) = \varphi_B(X) - X$

Top Hat : images numériques



B

$\gamma_B(X)$

$\varphi_B(X)$

X

$\tau_B(X)$

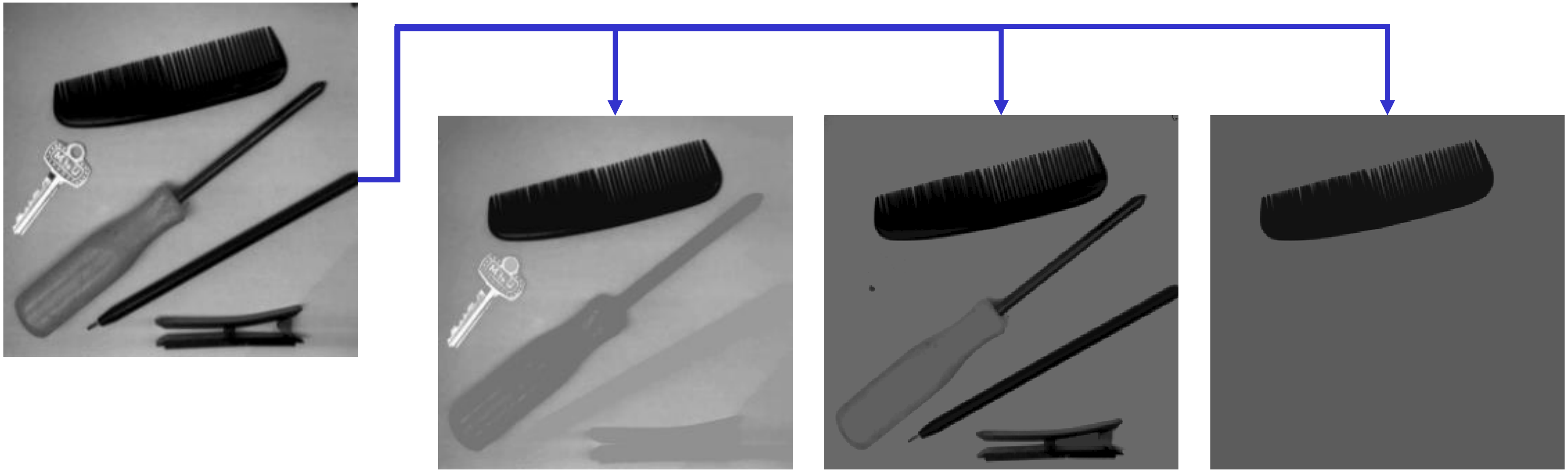
$\tilde{\tau}_B(X)$

Introduction aux opérations géodésiques

Objectif sous-jacent : l'analyse individuelle des « objets » d'une image.

En l'absence de données de plus haut niveau sémantique, l'objet dans une image est associé à une particule, correspondant en général à une composante connexe.

L'analyse individuelle des objets nécessite donc l'utilisation d'opérateurs (filtres) connexes, c'est-à-dire qui préserve les objets (une composante connexe est soit préservée, soit intégralement éliminée).



Opérations géodésiques

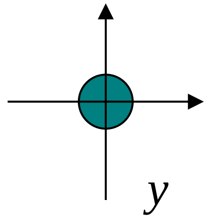
Les opérations géodésiques sont celles qui sont conditionnées par un élément de référence *r* du treillis. Elles sont définies à partir des opérations géodésiques de base :

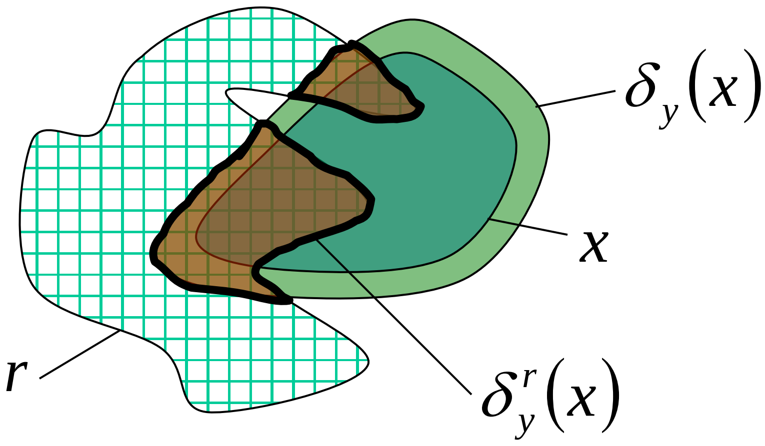
la ***dilatation géodésique*** et la ***reconstruction géodésique***.

Dans les opérations géodésiques, l'élément structurant représente le "voisinage élémentaire" de l'origine ; et définit donc la topologie sous-jacente.

La dilatation géodésique dans *r* :

$$\boxed{\delta_y^r(x) = \delta_y(x) \wedge r}$$





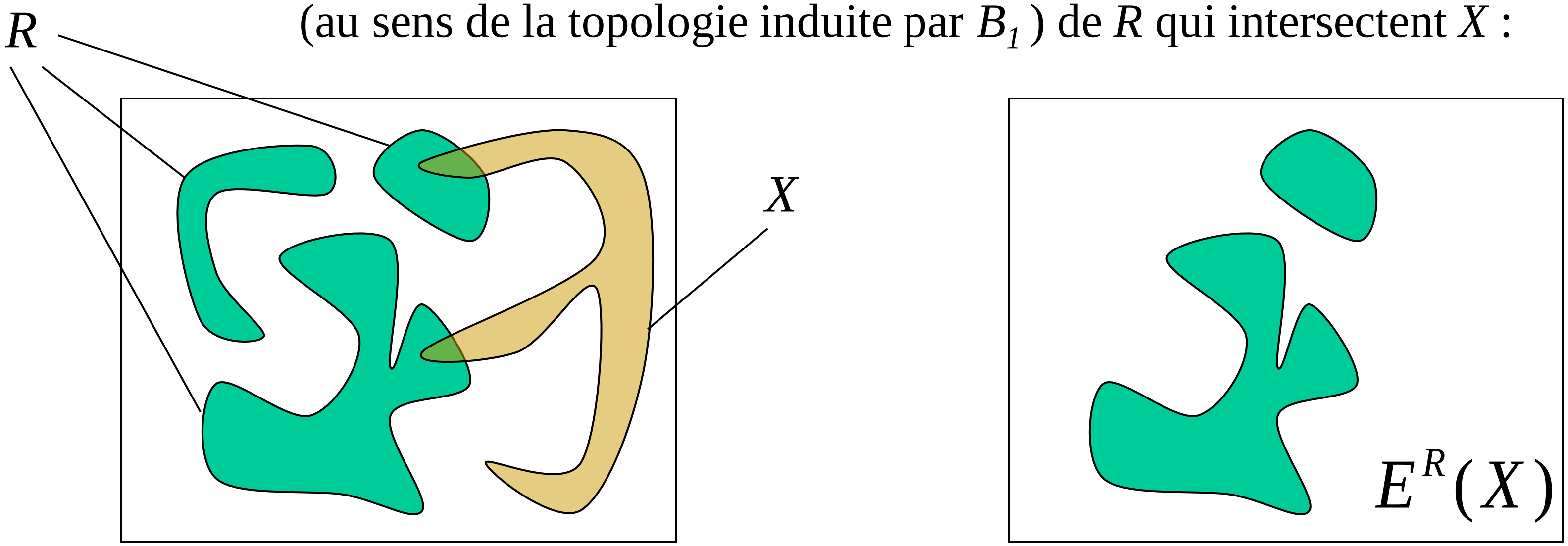
La reconstruction géodésique

posons
$$\begin{cases} (\delta_{B_1}^R)^0(X) = X \\ (\delta_{B_1}^R)^n(X) = \delta_{B_1}^R\left((\delta_{B_1}^R)^{n-1}(X)\right) \quad \text{pour} \quad n > 0 \end{cases}$$

La reconstruction géodésique
de X dans R est définie par :

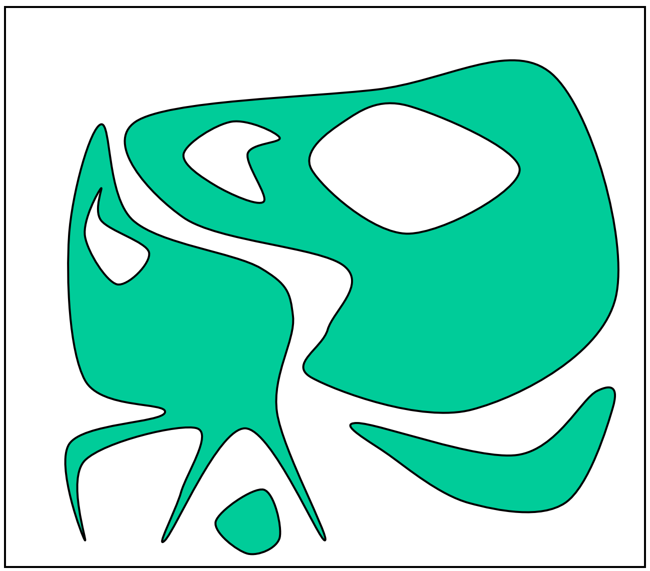
$$\boxed{E_{B_1}^R(X) = \sup_{n \geq 0}\left\{(\delta_{B_1}^R)^n(X)\right\}}$$

Dans le cadre ensembliste, c'est l'ensemble des composantes connexes
(au sens de la topologie induite par B_1) de R qui intersectent X :

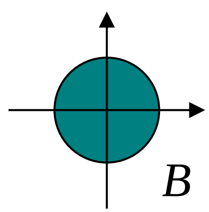


Ouvertures et fermetures par reconstruction

L'ouverture par reconstruction élimine les composantes connexes qui n'appartiennent pas à l'ouvert sans modifier les autres :



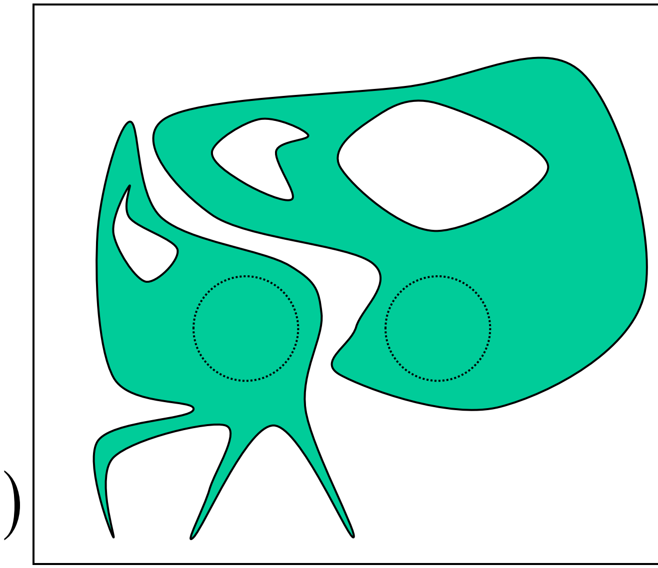
X



B

ouverture par reconstruction

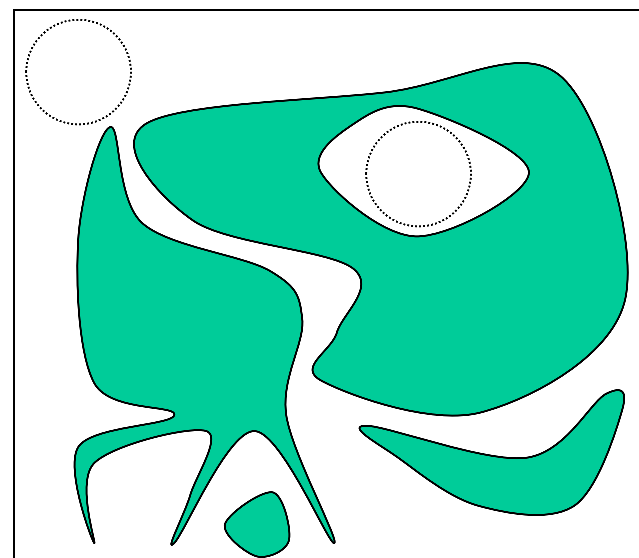
$$E^{X}\left(\gamma_B(X)\right)$$



La fermeture par reconstruction est définie par dualité :

fermeture par reconstruction

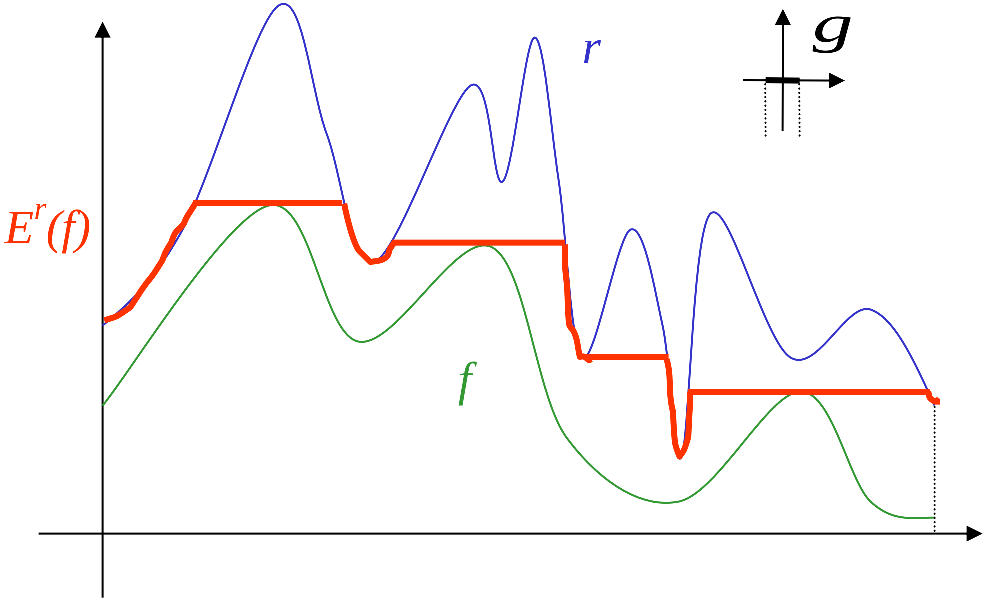
$$\left(E^{X^c}\left(\left(\varphi_B(X)\right)^c\right)\right)^c$$



Reconstruction fonctionnelle

La dilatation géodésique de f dans r :

$$\delta_g^r(f) = \delta_g(f) \wedge r$$



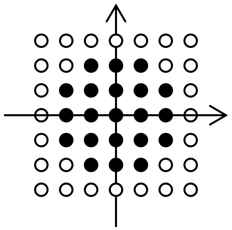
La reconstruction géodésique de f dans r :

$$E_g^r(f) = \sup_{n \geq 0} \left\{ (\delta_g^r)^n (f) \right\}$$

Ouvertures et fermetures par reconstruction

Par extension, les ouvertures et fermetures par reconstruction éliminent les petites structures en préservant les contours des images numériques :

élément structurant de l'ouverture morphologique :



original

ouverture par reconstruction

fermeture par reconstruction

Premiers Opérateurs – Conclusion

A RETENIR POUR CE COURS :

- Principes de base : Notion de treillis complet – Erosion et Dilatation algébriques – Liens avec les opérateurs de Minkowski, Passage des treillis ensemblistes aux treillis fonctionnels.

- Opérateurs résiduels : Gradients et Laplacien, définition et liens avec les opérateurs différentiels. Opérateurs de sélection : exemple du contraste.

- Ouverture et Fermeture : Définitions, Propriétés géométriques. Opérateurs Top-Hat : à distinguer des gradients.

- Dilatation et reconstruction géodésiques : définitions.