

ENSTA 2e année - MI206  
Géométrie Discrète &  
Morphologie Mathématique  
RECUEIL D'EXERCICES

## 1 Erosion et dilatation

EXPLIQUEZ comment utiliser un calque avec l'élément structurant  $B_1$  pour dessiner l'ensemble égal à l'addition de Minkowski  $X \oplus B_1$  (voir Figure 1(1)). Quels sont les deux techniques qui peuvent être utilisées pour dessiner le dilaté morphologique  $\delta_{B_1}(X) = X \oplus B_1$  ?

DESSINEZ l'érodé et le dilaté de l'ensemble  $X$  représenté sur la figure 1(1), pour l'élément structurant  $B_1$ , puis pour l'élément structurant  $B_2$ .

DESSINEZ l'érodée et la dilatée de la fonction  $f$  représentée sur la figure 1(2), pour la fonction structurante  $g_1$ , puis pour la fonction structurante  $g_2$ .

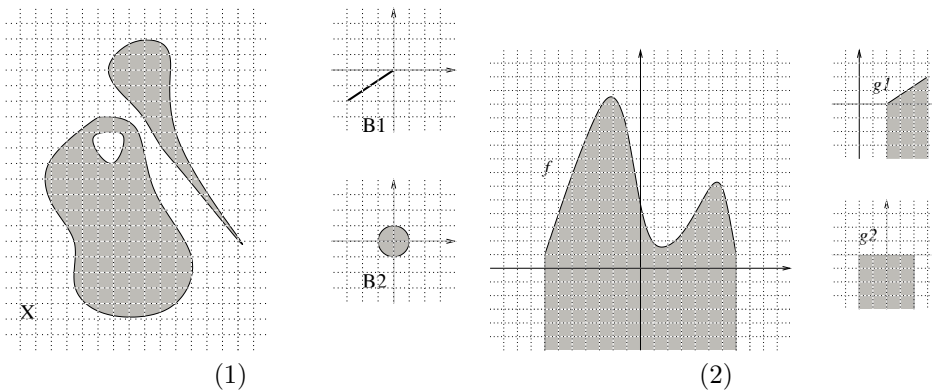


FIGURE 1 – Opérations ensemblistes et fonctionnelles.

## 2 Ouvertures et fermetures

### 2.1 Ouvertures morphologiques

A partir de la combinaison d'une érosion  $\varepsilon$  et d'une dilatation  $\delta$  on obtient les opérateurs ouverture morphologique  $\gamma = \delta\varepsilon$  et fermeture morphologique  $\varphi = \varepsilon\delta$ .

MONTREZ QUE l'ouverture et la fermeture sont indépendants de l'origine de l'élément structurant, i.e. pour toute ouverture (resp. fermeture)  $\gamma$ , tout  $t \in \mathbb{R}^n$  et tout  $(X, B) \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ ,  $\gamma_{B_t}(X) = \gamma_B(X)$ , où  $B_t$  est le translaté de  $B$  par  $t$ .

DESSINEZ l'ouvert et le fermé de l'ensemble  $X$  représenté sur la figure 1(1), pour l'élément structurant  $B_2$ .

DESSINEZ l'ouverte et la fermée de la fonction  $f$  représentée sur la figure 1(2), pour la fonction structurante  $g_2$ .

## 2.2 Ouvertures algébriques

La notion d'ouverture peut être définie de manière plus générale. On appelle ouverture algébrique toute transformation :

- croissante
- idempotente
- anti-extensive

On définit de manière duale la notion de fermeture algébrique : croissante, idempotente et extensive.

1. L'opération consistant à boucher les trous des particules d'une image binaire est-elle une ouverture/fermeture ? Et l'opération consistant à extraire les particules possédant au moins un trou dans une image binaire ? Justifiez les réponses.
2. Une façon d'obtenir de nouvelles ouvertures est de considérer une famille  $\{\gamma_i\}, i \in I$  d'ouvertures. Montrez que le supremum d'ouvertures  $\gamma = \vee_i \gamma_i$  est une ouverture, et par dualité, que l'infimum de fermetures  $\varphi = \wedge_i \varphi_i$  est une fermeture.
3. L'ouverture triviale vise à extraire les parties d'un ensemble selon un critère donné. On dit qu'un critère  $T$  est croissant quand pour tout ensemble  $X \in \mathcal{P}(E)$  :

$$\begin{cases} X \text{ satisfait } T \text{ et } Y \geq X & \Rightarrow Y \text{ satisfait } T \\ X \text{ ne satisfait pas } T \text{ et } Y \leq X & \Rightarrow Y \text{ ne satisfait pas } T \end{cases}$$

Etant donné un critère croissant  $T$  dans le treillis  $\mathcal{P}(E)$ , l'opérateur

$$\gamma_T(X) = \begin{cases} X & \text{si } X \text{ satisfait } T, \\ \emptyset & \text{sinon,} \end{cases}$$

est une ouverture appelée ouverture triviale associée au critère  $T$ .

L'ouverture connexe ponctuelle  $\gamma_x(X)$  d'un ensemble  $X \in \mathcal{P}(E)$  au point  $x \in E$  est la composante connexe de  $X$  qui contient  $x$  si  $x \in X$  et  $\emptyset$  sinon.

La démarche qui consiste à extraire les composantes connexes d'un ensemble  $X \in \mathcal{P}(E)$  à l'aide de l'ouverture connexe ponctuelle  $\gamma_x, x \in E$  peut être combinée avec l'ouverture triviale selon un critère croissant  $T$ , notée  $\gamma_T$ , pour extraire les composantes connexes d'un ensemble qui vérifient le critère  $T$  :

Soient  $X \in \mathcal{P}(E)$  un ensemble et  $T$  un critère croissant. L'ouverture par attribut  $\gamma^T$  de l'ensemble  $X$  est défini par :

$$\gamma^T(X) = \bigcup_{x \in X} \gamma_T(\gamma_x(X)).$$

Montrez que l'ouverture par attribut est invariante par translation et que l'ouverture connexe ponctuelle ne l'est pas.

Les critères suivants sont-ils croissants (illustrer éventuellement à l'aide d'un contre-exemple) : (1) La surface de  $X$  est supérieur à  $\sigma$ , (2) Le périmètre de  $X$  est supérieur à  $\pi$ , (3) Le diamètre géodésique de  $X$  est supérieur à  $\delta$ , (4) Le rayon du plus grand cercle contenu dans  $X$  est supérieur à  $\rho$ , (5) Le rayon du plus petit cercle qui contient  $X$  est supérieur à  $\rho$ , (6) L'indice de compacité de  $X$  (e.g. rapport entre le diamètre du plus grand cercle contenu dans  $X$  et le diamètre du plus petit cercle contenant  $X$ ) est supérieur à  $\chi$ .

### 3 Distance de Hausdorff

Dans cet exercice, on se propose de construire une distance entre ensembles qui puisse être utile pour comparer des images binaires. Considérons tout d'abord le cas d'un point  $x$  et d'un ensemble  $Y$  dans un espace muni d'une distance  $d$ . Dans le cas où  $Y$  est une image binaire discrète ( $Y \subset \mathbb{Z}^2, \text{card}(Y) < \infty$ ),  $x$  un pixel ( $x \in \mathbb{Z}^2$ ), on peut calculer facilement la « distance » de  $x$  à  $Y$ , définie par :

$$\hat{d}(x, Y) = \min_{y \in Y} d(x, y)$$

Q1 : Proposez un algorithme (efficace!) de calcul de  $\hat{d}$  pour une image binaire  $Y$  définie sur  $D = \{0, w-1\} \times \{0, h-1\}$ , et  $x \in D$ . Quelle est la complexité de votre algorithme ?

Si l'on veut maintenant mesurer la dissemblance entre deux ensembles  $X$  et  $Y$ , on peut assez intuitivement utiliser la grandeur suivante :

$$h(X, Y) = \max_{x \in X} \hat{d}(x, Y)$$

Q2 : Néanmoins  $h$  n'est pas une distance. Montrez-le à l'aide d'un contre-exemple.

La distance de Hausdorff est définie de la façon suivante :

$$H(X, Y) = \max\{h(X, Y), h(Y, X)\}$$

Q3 : Exprimez la distance de Hausdorff à l'aide de dilatations morphologiques.

Q4 : En vous appuyant sur la question 1, proposez un algorithme de calcul d'une distance de Hausdorff discrète entre deux images binaires et estimez sa complexité.

Q5 : Quelle relation existe-t-il entre  $H(X, Y)$  et  $H(X, Y_b)$ , où  $Y_b$  est le translaté de  $Y$  de vecteur  $b$ ? Comment rendre la distance de Hausdorff invariante par translation? Proposez un algorithme et estimez sa complexité. La mesure obtenue reste-t-elle une distance ?

Q6 : Le recalage d'image est une technique très utile dans de nombreuses applications, comme la fusion, navigation, cartographie... Sous sa forme dite « rigide », il consiste à trouver les paramètres d'une transformation géométrique affectant tous les pixels entre une image  $A$  et une image  $B$  (voir exemple Figure 2). Proposez un algorithme utilisant la distance de Hausdorff pour estimer ces paramètres et estimez sa complexité.



FIGURE 2 – Un problème de recalage d'images.

## 4 Transformée en Tout-ou-rien.

### 4.1 Généralités

Etant donné une image binaire  $I \subset \mathbb{Z}^2$ , un couple  $(H, M)$  d'éléments structurants  $H, M \subset \mathbb{Z}^2$  tels que  $H \cap M = \emptyset$ , on appelle *transformée en tout-ou-rien* (TTR) de  $I$  par le couple  $(H, M)$ , l'image :

$$I \circledast (H, M) = \varepsilon_H(I) \cap \varepsilon_M(I^c) = (I \ominus \check{H}) \cap (I^c \ominus \check{M}).$$

POURQUOI peut-on dire que les TTR généralisent les érosions et les dilations ?

### 4.2 Amincissement et épaissement.

Lorsque l'origine  $O \in H$ , on appelle *amincissement* de  $I$  par le couple  $(H, M)$ , l'image :

$$I \circ (H, M) = I \setminus (I \circledast (H, M)).$$

Lorsque l'origine  $O \in M$ , on appelle *épaissement* de  $I$  par le couple  $(H, M)$ , l'image :

$$I \bullet (H, M) = I \cup (I \circledast (H, M)).$$

POUR un couple  $(H, M)$  donné, quelle relation de dualité existe-t-il entre l'amincissement et l'épaissement ?

POUR les deux premiers couples  $\alpha$  (où  $M = \emptyset$ ) et  $\beta$  représentés sur la figure 3, à quelle opération correspond la TTR ? et l'amincissement ?

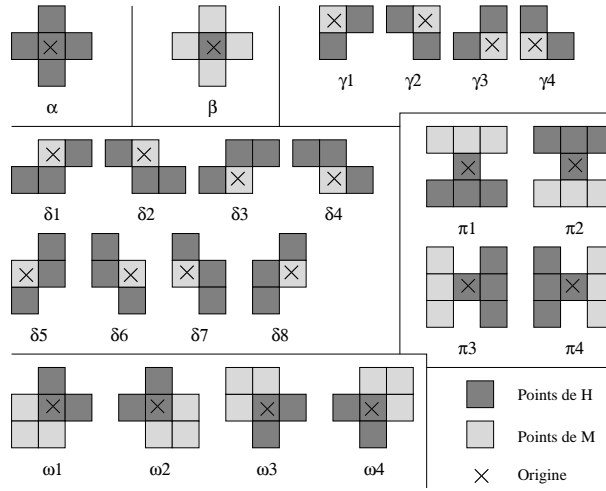


FIGURE 3 – Exemples de TTR - amincissements - épaisissements.

### 4.3 Union de TTR.

Soit  $\Phi = \{\phi_i = (H_i, M_i)\}_{i \in S}$  une famille de couples d'éléments structurants tels que  $\forall i \in S, H_i \cap M_i = \emptyset$ . La transformation par l'union de transformée en tout-ou-rien (UTTR)  $\Phi$  de l'image  $I$  est définie par  $I \hat{\otimes} \Phi = \bigcup_{i \in S} I \otimes \phi_i$

EXPLIQUEZ pourquoi toute transformation binaire invariante par translation peut s'écrire comme une UTTR.

### 4.4 Epaisseur itéré.

CONSIDÉREZ les UTTR définies par les familles  $\Gamma = \{\gamma_i\}_{1 \leq i \leq 4}$  et  $\Delta = \{\delta_i\}_{1 \leq i \leq 8}$  représentées sur la figure 3. Que calculent-elles? Quelle est la transformation obtenue en répétant jusqu'à stabilité l'épaissement  $I \bullet \Gamma = I \cup (I \hat{\otimes} \Gamma)$ ? Même question avec  $\Delta$ . Les transformations obtenues sont-elles des filtres morphologiques? Préservent-elles la topologie?

### 4.5 Amincissement itéré.

CONSIDÉREZ les familles  $\Pi = \{\pi_i\}_{1 \leq i \leq 4}$  et  $\Omega = \{\omega_i\}_{1 \leq i \leq 4}$  représentées sur la figure 3. Montrer que, pour tout  $i$ , les amincissements  $I \circ \pi_i$  et  $I \circ \omega_i$  préservent la topologie de l'image  $I$ , au sens de la 8-connexité. Montrer que l'amincissement  $I \setminus (I \hat{\otimes} (\Pi \cup \Omega))$  ne préserve pas la topologie de  $I$ . Comment peut-on construire un squelette connexe à partir des TTR  $\{\pi_i\}$  et  $\{\omega_i\}$ ? Ecrire l'opérateur correspondant. Est-ce un filtre morphologique?

## 5 Paraboles et ellipses discrètes

Pour toute distance  $d$ , on peut définir formellement une parabole  $\mathcal{P}$  comme le lieu géométrique des points dont la distance au foyer  $F$  est égal à la distance

à la droite génératrice  $\mathcal{D}$  et une ellipse  $\mathcal{E}_x$  comme étant le lieu géométrique des points dont la somme des distances aux deux foyers  $F_1$  et  $F_2$  est constante et égale à  $x$  :

$$\mathcal{P} = \{p; d(p, F) = d(p, \mathcal{D})\}; \mathcal{E}_x = \{p; d(p, F_1) + d(p, F_2) = x\}$$

- Dans la maille carrée, considérant  $d_4$  (resp.  $d_8$ ) la distance de la 4-connexité (resp 8-connexité), quelle est la forme d’une parabole pour la distance  $d_4$ , et pour la distance  $d_8$  ?
- Les foyers  $F$ ,  $F_1$  et  $F_2$ , ainsi que la droite discrète  $\mathcal{D}$  étant donnés, proposez un algorithme rapide pour calculer la parabole du plan discret ainsi que l’ensemble des ellipses  $\{\mathcal{E}_x\}_{x \geq 0}$ .
- Quelle est la complexité de votre algorithme ? Comment tracer la parabole, ou une ellipse de paramètre  $x$  donné qui soit connexe quelque soit  $x$  ?

## 6 Opérateurs connexes

Un opérateur binaire  $\Psi$  de  $\mathcal{P}(\mathbb{Z}^2)$  dans  $\mathcal{P}(\mathbb{Z}^2)$  est dit *connexe* si pour toute image binaire  $X \subset \mathbb{Z}^2$ , la différence ensembliste symétrique  $X \Delta \Psi(X) = (X \setminus \Psi(X)) \cup (\Psi(X) \setminus X)$  est exclusivement composée de composantes connexes de  $X$  ou de composantes connexes de  $X^c$ .

On peut généraliser cette notion aux opérateurs sur des images en niveaux de gris  $I : \mathbb{Z}^2 \rightarrow [0, N - 1]$ , en utilisant la notion de *partition en zones plates* : Une zone plate de  $I$  est une composante connexe  $P$  de  $\mathbb{Z}^2$  telle que : (1)  $\forall(x, y) \in P^2, I(x) = I(y)$ , et (2)  $\forall Q$  connexe,  $Q \neq P$  et  $P \subset Q, \Rightarrow \exists(x, z) \in P \times Q, I(z) \neq I(x)$ . Une image  $I$  définit donc une unique partition de  $\mathbb{Z}^2$  en zones plates.

Soit  $\{P_i\}$  et  $\{Q_i\}$  deux partitions de  $\mathbb{Z}^2$ . On dit que  $\{P_i\}$  est *plus fine* que  $\{Q_i\}$  si  $\forall i, \forall(x, y) \in P_i^2, \exists j$  tel que  $(x, y) \in Q_j^2$ . Un opérateur en niveau de gris  $\Psi$  est alors dit *connexe* si pour toute image en niveau de gris  $I$ , la partition en zone plates associée à  $I$  est plus fine que celle associée à  $\Psi(I)$ .

CITEZ des exemples d’opérateurs connexes vus en cours.

Dans le contexte des opérateurs connexes, les notions de *Max-tree* ou *Min-tree* offrent un mode de représentation intéressant des images en niveaux de gris. Soit  $I$  une image en niveaux de gris  $I : \mathbb{Z}^2 \rightarrow [0, N - 1]$ , à laquelle on associe les  $N$  images binaires dites “coupes” ou “ensembles de niveau” :  $I_i = \{x \in \mathbb{Z}^2; I(x) \geq i\}$ . Le Max-tree associé à l’image  $I$  est un arbre, où chaque nœud correspond à une composante connexe d’une coupe  $I_i$ . Il est défini récursivement comme suit :

- La racine de l’arbre est l’unique nœud de niveau 0, et correspond à  $\mathbb{Z}^2$ .
- Pour  $i > 0$ , pour chaque composante connexe  $C$  de  $I_i$ , on crée un nouveau nœud, auquel on attribue comme unique *prédécesseur* ou *père*, le nœud correspondant au plus petit sur-ensemble de  $C$  parmi les composantes connexes des coupes précédentes  $\{I_j\}, j < i$ .

Le Min-tree est défini par dualité, comme le Max-tree de l’image “négative”  $\bar{I} = (N - 1) - I$ .

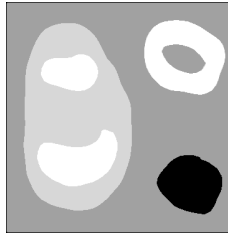


FIGURE 4 – Exemple d'image en niveaux de gris pour le calcul des Max/Min trees.

CONSTRUISEZ les Max-tree et Min-tree correspondant à l'image de la Figure 4 sur 4 niveaux de gris (de 0=noir à 3=blanc), en attribuant un label à chaque zone plate et en désignant chaque nœud en fonction de ces labels.

OPÉRATIONS SUR LES ARBRES : A quoi correspondent les feuilles (i.e. nœuds sans successeur) des Max-trees ? des Min-trees ? Quelles sont les propriétés des opérateurs qui consiste à élaguer (i.e. retirer itérativement des feuilles d'un arbre en fusionnant les zones plates correspondantes avec celle de leur prédécesseur) un Max-tree ? un Min-tree ? Quels avantages et inconvénients voyez-vous à ce mode de représentation sur le plan algorithmique ?

## 7 Squelette morphologique

Soit  $d$  une distance discrète sur  $\mathbb{Z}^2$ .

La boule de centre  $x \in \mathbb{Z}^2$  et de rayon  $n \in \mathbb{N}$  est définie par

$$B(x, n) = \{z \in \mathbb{Z}^2, d(x, z) \leq n\}.$$

Soit  $X \subset \mathbb{Z}^2$  une image binaire. Une boule  $B(x, n) \subset X$  est dite *maximale* dans  $X$  si  $\forall (y, n') \in \mathbb{Z}^2 \times \mathbb{N}, B(x, n) \subset B(y, n') \subset X \Rightarrow (x, n) = (y, n')$ .

Le *squelette morphologique* de  $X$  associé à la distance  $d$  est défini comme l'ensemble des centres des boules maximales :

$$S(X) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{x \in X; B(x, n) \text{ est maximale dans } X\}$$

L'ensemble des *résidus d'ouverture* de  $X$  associé à la distance  $d$  est défini comme l'ensemble des points qui appartiennent à l'érodé de  $X$  par une boule de taille  $n$  mais pas à l'ouvert de cet érodé par la boule élémentaire :

$$R(X) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \varepsilon_{B(O, n)}(X) \setminus \gamma_{B(O, 1)}(\varepsilon_{B(O, n)}(X))$$

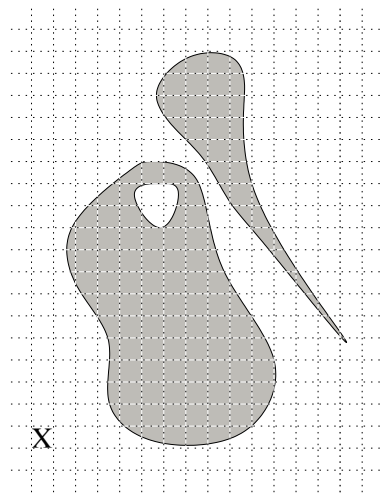
où  $O$  désigne l'origine de  $\mathbb{Z}^2$ .

Enfin l'ensemble des *maxima locaux* de  $X$  relativement à la transformée en distance  $d$  est défini comme suit :

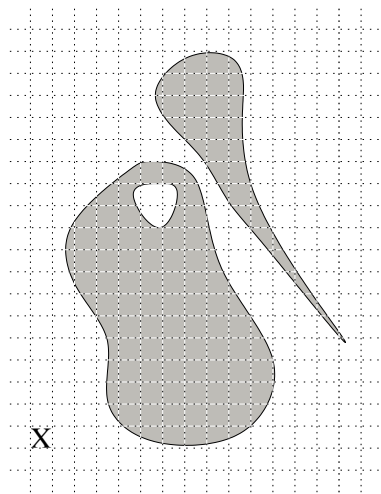
$$M(X) = \{x \in X; \forall y, y \in B(x, 1) \Rightarrow d(y, X^c) \leq d(x, X^c)\}$$

MONTREZ la double égalité :

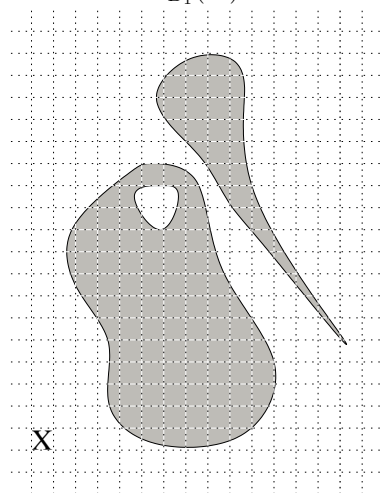
$$S(X) = R(X) = M(X)$$



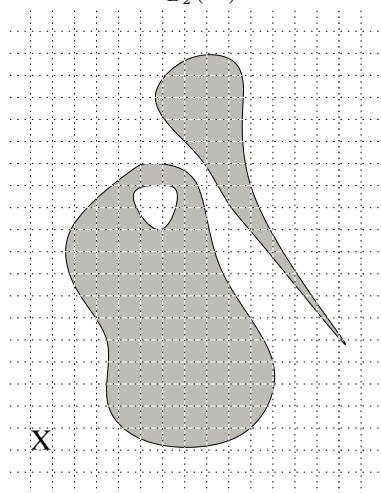
$\epsilon_{B_1}(X)$



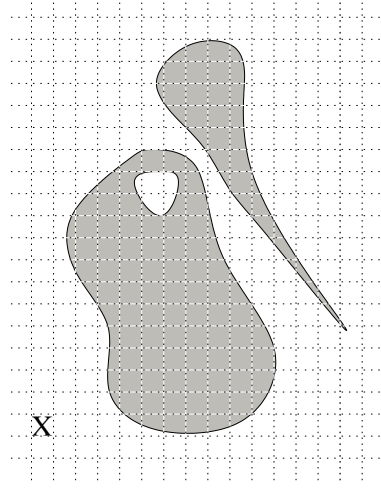
$\epsilon_{B_2}(X)$



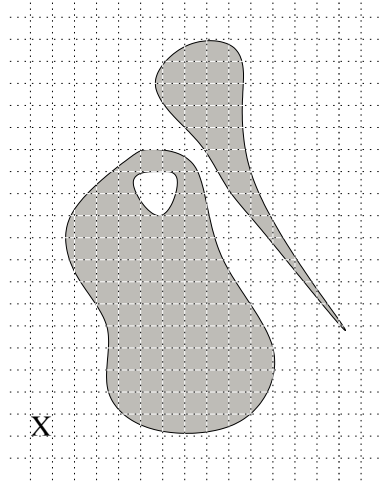
$\delta_{B_1}(X)$



$\delta_{B_2}(X)$

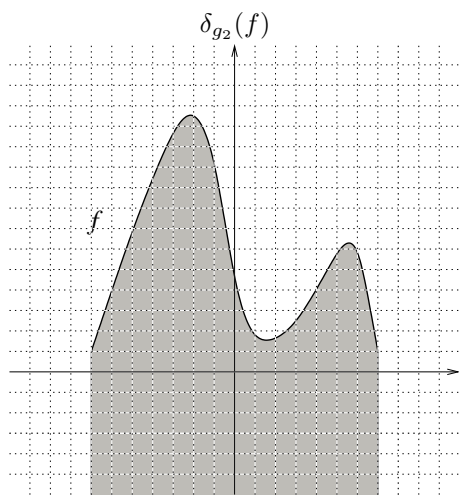
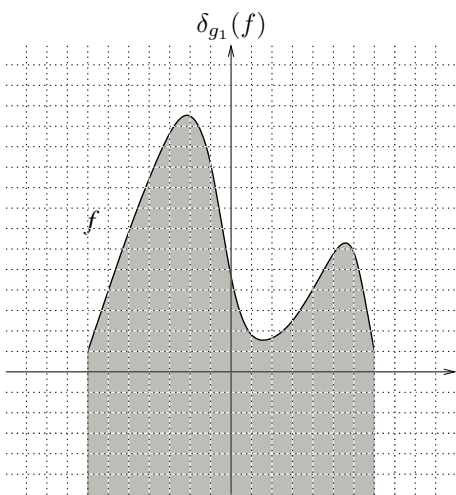
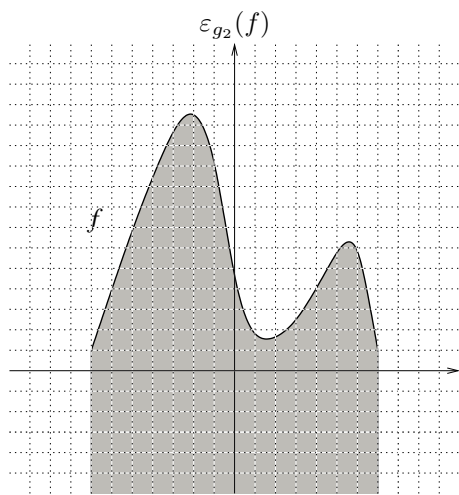
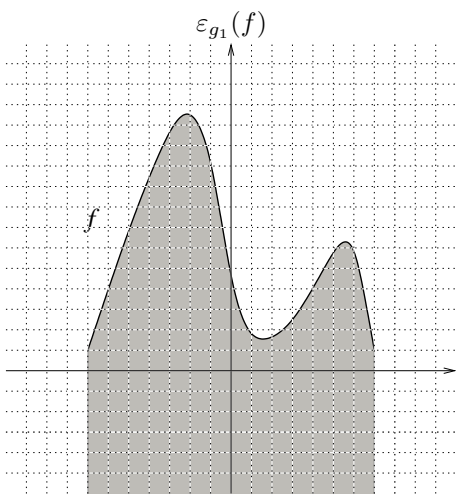
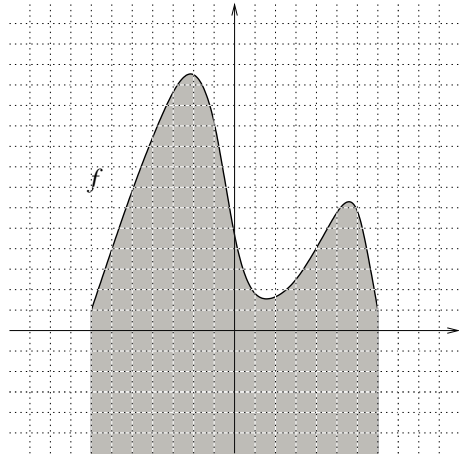
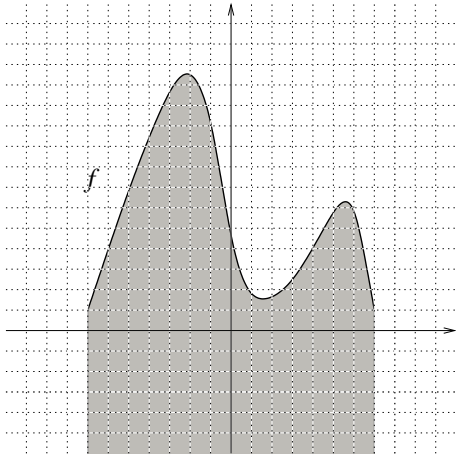


$\gamma_{B_2}(X)$



$\phi_{B_2}(X)$





$\varepsilon_{g_1}(f)$

$\varepsilon_{g_2}(f)$

$\delta_{g_1}(f)$

$\delta_{g_2}(f)$

$\gamma_{g_2}(f)$

$\phi_{g_2}(f)$