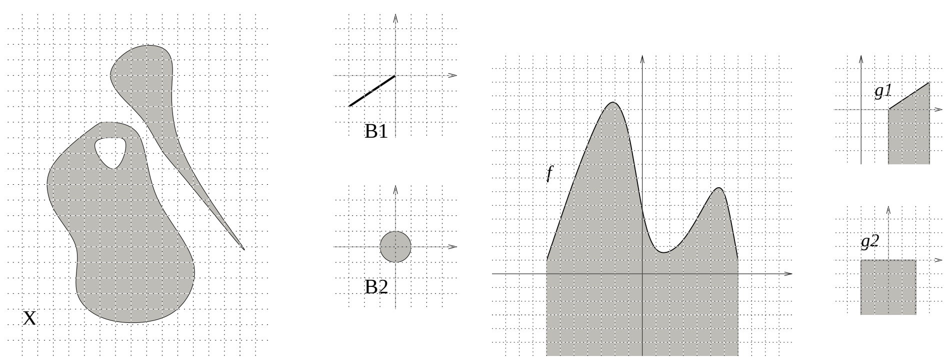
ENSTA 2e année - ESE 42
Morphologie mathématique
RECUEIL D'EXERCICES

1 Erosion et dilatation

EXPLIQUEZ comment utiliser le calque avec l'élément structurant B_1 pour dessiner l'ensemble égal à l'addition de Minkowski $X \oplus B_1$ (voir Figure 1(1)). Quels sont les deux techniques qui peuvent être utilisées pour dessiner le dilaté morphologique $\delta_{B_1}(X) = X \oplus \check{B}_1$?

DESSINEZ l'érodé et le dilaté de l'ensemble X représenté sur la figure 1(1), pour l'élément structurant B_1, puis pour l'élément structurant B_2.

DESSINEZ l'érodée et la dilatée de la fonction f représentée sur la figure 1(2), pour la fonction structurante g_1, puis pour la fonction structurante g_2.



(1) (2)

FIG. 1 – Opérations ensemblistes et fonctionnelles.

2 Ouvertures et fermetures

2.1 Ouvertures morphologiques

A partir de la combinaison d'une érosion ε et d'une dilatation δ on obtient les opérateurs ouverture morphologique $\gamma = \delta\varepsilon$ et fermeture morphologique $\varphi = \varepsilon\delta$.

MONTREZ QUE l'ouverture et la fermeture sont indépendants de l'origine de l'élément structurant, i.e. pour toute ouverture (resp. fermeture) γ, tout $t \in \mathbb{R}^n$ et tout $(X, B) \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, $\gamma_{B_t}(X) = \gamma_B(X)$, où B_t est le translaté de B par t.

DESSINEZ l'ouvert et le fermé de l'ensemble X représenté sur la figure 1(1), pour l'élément structurant B_2.

DESSINEZ l'ouverte et la fermée de la fonction f représentée sur la figure 1(2), pour la fonction structurante g_2.

2.2 Ouvertures algébriques

La notion d'ouverture peut être définie de manière plus générale. On appelle ouverture algébrique toute transformation :

- croissante
- idempotente
- anti-extensive

On définit de manière duale la notion de fermeture algébrique : croissante, idempotente et extensive.

1. L'opération consistant à boucher les trous des particules d'une image binaire est-elle une ouverture/fermeture ? Et l'opération consistant à extraire les particules possédant au moins un trou dans une image binaire ? Justifiez les réponses.
2. Une façon d'obtenir de nouvelles ouvertures est de considérer une famille $\{\gamma_i\}, i \in I$ d'ouvertures. Montrez que le supremum d'ouvertures $\gamma = \vee_i \gamma_i$ est une ouverture, et par dualité, que l'infimum de fermetures $\varphi = \wedge_i \varphi_i$ est une fermeture.
3. L'*ouverture triviale* vise à extraire les parties d'un ensemble selon un critère donné. On dit qu'un critère T est croissant quand pour tout ensemble $X \in \mathcal{P}(E)$:

$$\left\{ \begin{array}{ll} X \text{ satisfait } T \text{ et } Y \geq X & \Rightarrow Y \text{ satisfait } T \\ X \text{ ne satisfait pas } T \text{ et } Y \leq X & \Rightarrow Y \text{ ne satisfait pas } T \end{array} \right.$$

Etant donné un critère croissant T dans le treillis $\mathcal{P}(E)$, l'opérateur

$$\gamma_T(X) = \left\{ \begin{array}{ll} X & \text{si } X \text{ satisfait } T, \\ \emptyset & \text{sinon,} \end{array} \right.$$

est une ouverture appelée ouverture triviale associée au critère T.

L'*ouverture connexe ponctuelle* $\gamma_x(X)$ d'un ensemble $X \in \mathcal{P}(E)$ au point $x \in E$ est la composante connexe de X qui contient x si $x \in X$ et $\emptyset$ sinon.

La démarche qui consiste à extraire les composantes connexes d'un ensemble $X \in \mathcal{P}(E)$ à l'aide de l'ouverture connexe ponctuelle γ_x, $x \in E$ peut être combinée avec l'ouverture triviale selon un critère croissant T, notée γ_T, pour extraire les composantes connexes d'un ensemble qui vérifient le critère T :

Soient $X \in \mathcal{P}(E)$ un ensemble et T un critère croissant. L'*ouverture par attribut* γ^T de l'ensemble X est défini par :

$$\gamma^T(X) = \bigcup_{x \in X} \gamma_T(\gamma_x(X)).$$

Montrez que l'ouverture par attribut est invariante par translation et que l'ouverture connexe ponctuelle ne l'est pas.

Les critères suivants sont-ils croissants (illustrer éventuellement à l'aide d'un contre-exemple) : (1) La surface de X est supérieur à σ, (2) Le périmètre de X est supérieur à π, (3) Le diamètre géodésique de X est supérieur à δ, (4) Le rayon du plus grand cercle contenu dans X est supérieur à ρ, (5) Le rayon du plus petit cercle qui contient X est supérieur à ρ, (6) L'indice de compacité de X (e.g. rapport entre le diamètre du plus grand cercle contenu dans X et le diamètre du plus petit cercle contenant X) est supérieur à χ.

3 Distance de Hausdorff

La distance de Haussdorff, définie sur des ensembles dans un espace métrique, permet de comparer deux images binaires.

Soit x un point, Y un ensemble, d une distance dans l'espace métrique. La distance du point x à l'ensemble Y est définie par :

$$d(x,Y) = \min_{y \in Y} d(x,y)$$

Pour un couple d'ensembles (X,Y), on définit la grandeur suivante :

$$h(X,Y) = \max_{x \in X} d(x,Y)$$

Q1 : Montrer par un contre-exemple que h n'est pas une distance.

La distance de Hausdorff est définie de la façon suivante :

$$H(X,Y) = \max\{h(X,Y), h(Y,X)\}$$

Q2 : Exprimer la distance de Hausdorff à l'aide de dilatations morphologiques.

Q3 : Proposer (dans les grandes lignes) un algorithme de calcul d'une distance de Hausdorff discrète entre deux images binaires et estimer sa complexité.

Q4 : Quels sont selon vous les points forts et les points faibles de la distance de Hausdorff en termes de précision et de robustesse pour comparer deux images binaires ?

4 Transformée en Tout-ou-rien.

4.1 Généralités

Etant donné une image binaire $I \subset \mathbb{Z}^2$, un couple (H,M) d'éléments structurants $H, M \subset \mathbb{Z}^2$ tels que $H \cap M = \emptyset$, on appelle *transformée en tout-ou-rien* (TTR) de I par le couple (H,M), l'image :

$$I \circledast (H,M) = \varepsilon_H(I) \cap \varepsilon_M(I^c) = (I \ominus \check{H}) \cap (I^c \ominus \check{M}).$$

POURQUOI peut-on dire que les TTR généralisent les érosions et les dilatations ?

4.2 Amincissement et épaississement.

Lorsque l'origine $O \in H$, on appelle *amincissement* de I par le couple (H, M), l'image :

$$I \circ (H, M) = I \setminus (I \circledast (H, M)).$$

Lorsque l'origine $O \in M$, on appelle *épaississement* de I par le couple (H, M), l'image :

$$I \bullet (H, M) = I \cup (I \circledast (H, M)).$$

POUR un couple (H, M) donné, quelle relation de dualité existe-t-il entre l'amincissement et l'épaississement ?

POUR les deux premiers couples α (où $M = \emptyset$) et β représentés sur la figure 2, à quelle opération correspond la TTR ? et l'amincissement ?

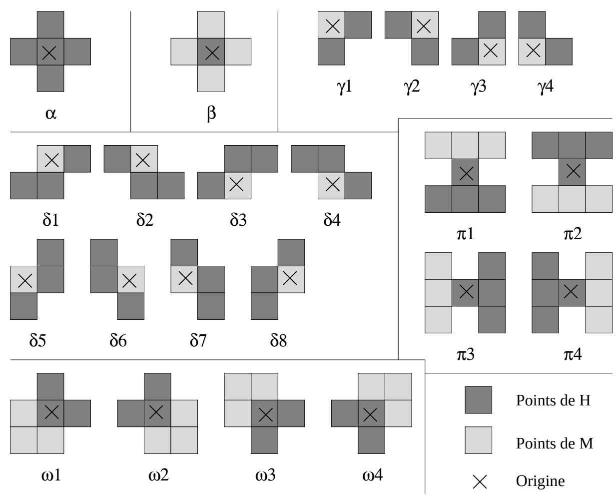


FIG. 2 – Exemples de TTR - amincissements - épaississements.

4.3 Union de TTR.

Soit $\Phi = \{\phi_i = (H_i, M_i)\}_{i \in S}$ une famille de couples d'éléments structurants tels que $\forall i \in S, H_i \cap M_i = \emptyset$. La transformation par l'union de transformée en tout-ou-rien (UTTR) Φ de l'image I est définie par $I \widehat{\circledast} \Phi = \bigcup_{i \in S} I \circledast \phi_i$

EXPLIQUEZ pourquoi toute transformation binaire invariante par translation peut s'écrire comme une UTTR.

4.4 Epaississement itéré.

CONSIDÉREZ les UTTR définies par les familles $\Gamma = \{\gamma_i\}_{1 \leq i \leq 4}$ et $\Delta = \{\delta_i\}_{1 \leq i \leq 8}$ représentées sur la figure 2. Que calculent-elles ? Quelle est la transformation obtenue en réitérant jusqu'à stabilité l'épaississement $I \widehat{\bullet} \Gamma = I \cup (I \widehat{\circledast} \Gamma)$? Même question avec Δ. Les transformations obtenues sont-elles des filtres morphologiques ? Préservent-elles la topologie ?

4.5 Amincissement itéré.

CONSIDÉREZ les familles $\Pi = \{\pi_i\}_{1\leq i\leq 4}$ et $\Omega = \{\omega_i\}_{1\leq i\leq 4}$ représentées sur la figure 2. Montrer que, pour tout i, les amincissements $I \circ \pi_i$ et $I \circ \omega_i$ préservent la topologie de l'image I, au sens de la 8-connexité. Montrer que l'amincissement $I \setminus (I \widehat{\circledast}(\Pi \cup \Omega))$ ne préserve pas la topologie de I. Comment peut-on construire un squelette connexe à partir des TTR $\{\pi_i\}$ et $\{\omega_i\}$? Ecrire l'opérateur correspondant. Est-ce un filtre morphologique ?

5 Opérateurs connexes

Un opérateur binaire Ψ de $\mathcal{P}(\mathbb{Z}^2)$ dans $\mathcal{P}(\mathbb{Z}^2)$ est dit *connexe* si pour toute image binaire $X \subset \mathbb{Z}^2$, la différence ensembliste symétrique $X \Delta \Psi(X) = (X \setminus \Psi(X)) \cup (\Psi(X) \setminus X)$ est exclusivement composée de composantes connexes de X ou de composantes connexes de X^c.

On peut généraliser cette notion aux opérateurs sur des images en niveaux de gris $I : \mathbb{Z}^2 \to [0, N-1]$, en utilisant la notion de *partition en zones plates* : Une zone plate de I est une composante connexe P de $\mathbb{Z}^2$ telle que : (1) $\forall (x,y) \in P^2, I(x) = I(y)$, et (2) $\forall Q$ connexe, $Q \neq P$ et $P \subset Q, \Rightarrow \exists (x,z) \in P \times Q, I(z) \neq I(x)$. Une image I définit donc une unique partition de $\mathbb{Z}^2$ en zones plates.

Soit $\{P_i\}$ et $\{Q_i\}$ deux partitions de $\mathbb{Z}^2$. On dit que $\{P_i\}$ est *plus fine* que $\{Q_i\}$ si $\forall i, \forall (x,y) \in P_i^2, \exists j$ tel que $(x,y) \in Q_j^2$. Un opérateur en niveau de gris Ψ est alors dit *connexe* si pour toute image en niveau de gris I, la partition en zone plates associée à I est plus fine que celle associée à $\Psi(I)$.

CITEZ des exemples d'opérateurs connexes vus en cours.

Dans le contexte des opérateurs connexes, les notions de *Max-tree* ou *Min-tree* offrent un mode de représentation intéressant des images en niveaux de gris. Soit I une image en niveaux de gris $I : \mathbb{Z}^2 \to [0, N-1]$, à laquelle on associe les N images binaires dites "coupes" ou "ensembles de niveau" : $I_i = \{x \in \mathbb{Z}^2; I(x) \geq i\}$. Le Max-tree associé à l'image I est un arbre, où chaque nœud correspond à une composante connexe d'une coupe I_i. Il est défini récursivement comme suit :

- La racine de l'arbre est l'unique nœud de niveau 0, et correspond à $\mathbb{Z}^2$.
- Pour $i > 0$, pour chaque composante connexe C de I_i, on crée un nouveau nœud, auquel on attribue comme unique *prédécesseur* ou *père*, le nœud correspondant au plus petit sur-ensemble de C parmi les composantes connexes des coupes précédentes $\{I_j\}, j < i$.

Le Min-tree est défini par dualité, comme le Max-tree de l'image "négative" $\bar{I} = (N-1) - I$.

CONSTRUISEZ les Max-tree et Min-tree correspondant à l'image de la Figure 3 sur 4 niveaux de gris (de 0=noir à 3=blanc), en attribuant un label à chaque zone plate et en désignant chaque nœud en fonction de ces labels.

OPÉRATIONS SUR LES ARBRES : A quoi correspondent les feuilles (i.e. nœuds sans successeur) des Max-trees ? des Min-trees ? Quelles sont les propriétés des opérateurs qui consiste à élaguer (i.e. retirer itérativement des feuilles d'un arbre

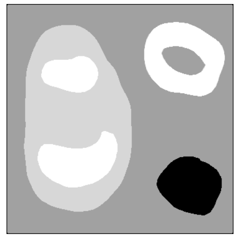


FIG. 3 – Exemple d'image en niveaux de gris pour le calcul des Max/Min trees.

en fusionnant les zones plates correspondantes avec celle de leur prédécesseur) un Max-tree ? un Min-tree ? Quels avantages et inconvénients voyez-vous à ce mode de représentation sur le plan algorithmique ?

6 Squelette morphologique

Soit d une distance discrète sur $\mathbb{Z}^2$.

La boule de centre $x \in \mathbb{Z}^2$ et de rayon $n \in \mathbb{N}$ est définie par $B(x,n) = \{z \in \mathbb{Z}^2, d(x,z) \leq n\}$.

Soit $X \subset \mathbb{Z}^2$ une image binaire. Une boule $B(x,n) \subset X$ est dite *maximale* dans X si $\forall (y,n') \in \mathbb{Z}^2 \times \mathbb{N}, B(x,n) \subset B(y,n') \subset X \Rightarrow (x,n) = (y,n')$.

Le *squelette morphologique* de X associé à la distance d est défini comme l'ensemble des centres des boules maximales :

$$S(X) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{x \in X; B(x,n) \text{ est maximale dans } X\}$$

L'ensemble des *résidus d'ouverture* de X associé à la distance d est défini comme l'ensemble des points qui appartiennent à l'érodé de X par une boule de taille n mais pas à l'ouvert de cet érodé par la boule élémentaire :

$$R(X) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \varepsilon_{B(O,n)}(X) \setminus \gamma_{B(O,1)}((\varepsilon_{B(O,n)}(X))$$

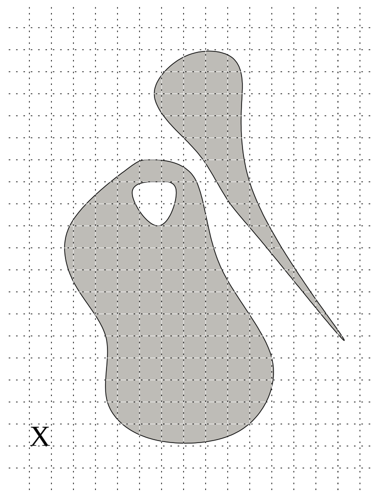
où O désigne l'origine de $\mathbb{Z}^2$.

Enfin l'ensemble des *maxima locaux* de X relativement à la transformée en distance d est défini comme suit :

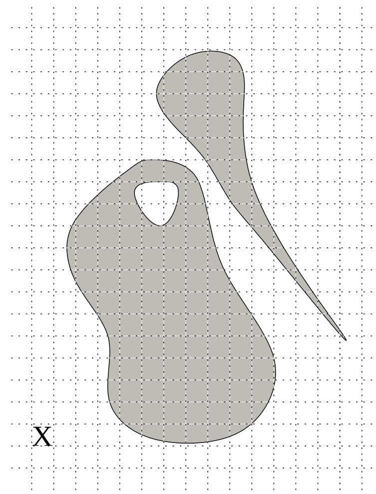
$$M(X) = \{x \in X; \forall y, y \in B(x,1) \Rightarrow d(y,X^c) \leq d(x,X^c)\}$$

MONTREZ la double égalité :

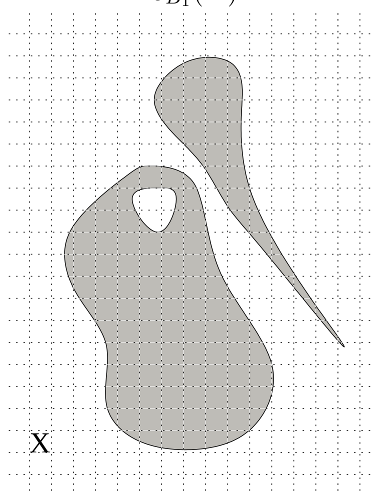
$$S(X) = R(X) = M(X)$$



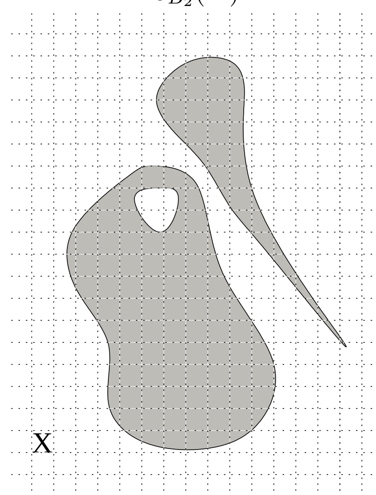
$\varepsilon_{B_1}(X)$



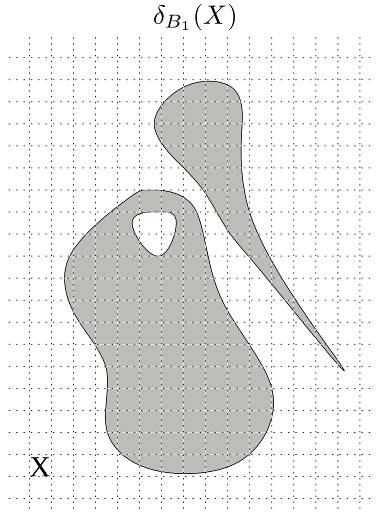
$\varepsilon_{B_2}(X)$



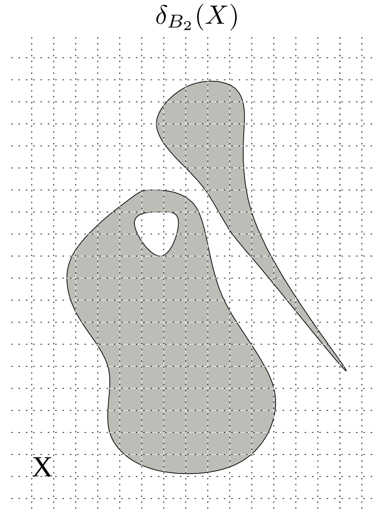
$\delta_{B_1}(X)$



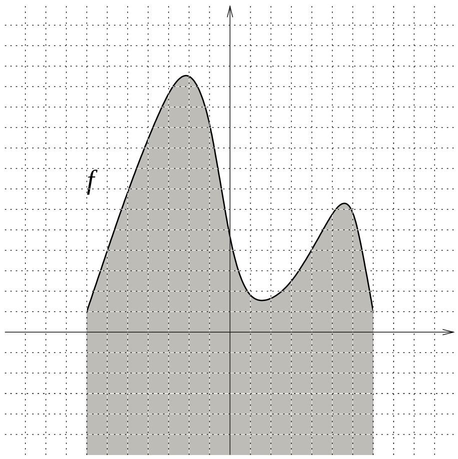
$\delta_{B_2}(X)$



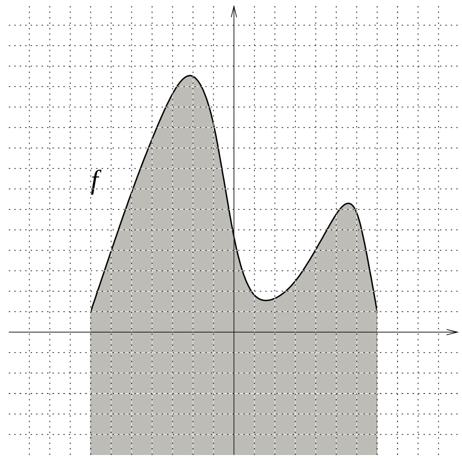
$\gamma_{B_2}(X)$



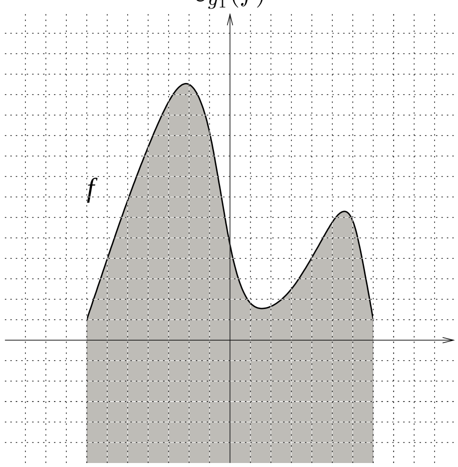
$\phi_{B_2}(X)$



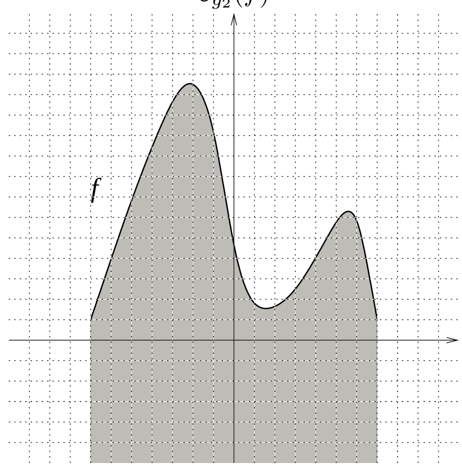
$\varepsilon_{g_1}(f)$



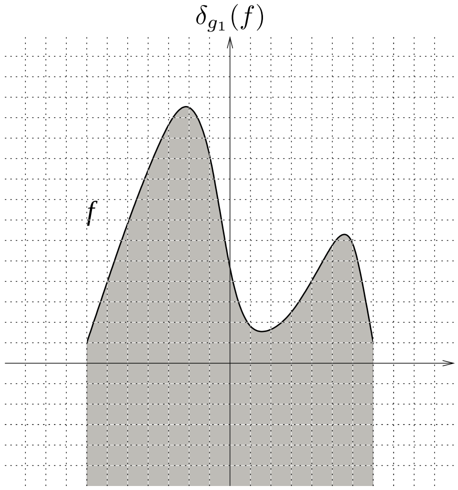
$\varepsilon_{g_2}(f)$



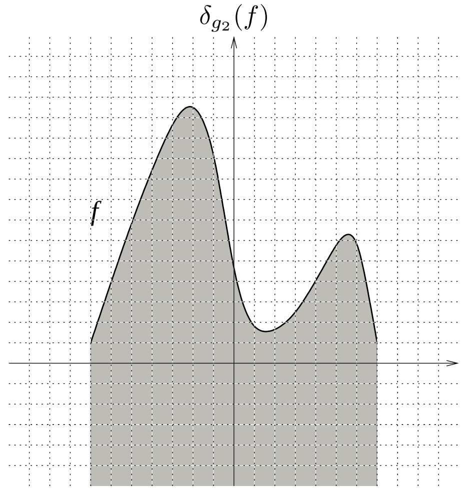
$\delta_{g_1}(f)$



$\delta_{g_2}(f)$



$\gamma_{g_2}(f)$



$\phi_{g_2}(f)$