



## *Présentation et objectifs du cours*

La *morphologie mathématique* est une théorie de traitement *non linéaire* de l'information apparue en France dans les années 60 (G. Matheron & J. Serra, Ecole des Mines de Paris), et qui est aujourd'hui très largement utilisée en *analyse d'images*.

Contrairement au traitement linéaire des images, la morphologie mathématique ne s'appuie pas sur le traitement du signal, mais repose sur les *théories des ensembles et de l'ordre*, qui permettent d'aborder pratiquement tous les outils de l'analyse d'images avec un bagage mathématique très limité.

D'autre part certaines spécificités physiques des images (occultations, non stationnarités, anisotropie,...) se prêtent mieux à une formalisation morphologique que linéaire.

L'objectif de ce cours est de *fournir les bases*, mais aussi de présenter *les techniques les plus récentes* du traitement morphologique des images. On s'efforcera de préserver un *équilibre* entre les *concepts* et les *applications*, en développant autant que possible les problèmes algorithmiques posés.

Des *travaux pratiques* permettront enfin, d'une part *d'expérimenter* les outils étudiés en cours, et d'autre part, d'aborder une application concrète du traitement d'images utilisant l'analyse morphologique.

## Morphologie Mathématique : Plan du cours

### Chapitre 1 : L'approche morphologique de l'analyse d'images.....4

Fondements algébriques : treillis complet, adjonction.  
Fondements géométriques : opérateurs intégraux, érosion dilatation ensemblistes.  
Érosion et dilatation fonctionnelles.  
Premiers opérateurs résiduels ou composés : gradients, ouvertures, top-hats, contraste...  
Introduction aux opérateurs géodésiques.

### Chapitre 2 : Filtrage et Espaces d'Échelles Morphologiques.....58

Ouverture algébrique. Granulométries et spectre morphologique.  
Semi-groupes de Matheron. Filtrés alternés séquentiels.  
Reconstruction numérique et F.A.S par reconstruction. Espaces d'échelles morphologiques.  
Applications de la géodésie et opérateurs connexes  
Invariance par changement de contraste et formalisme EDP

### Chapitre 3 : L'approche morphologique de la Segmentation.....103

Squelettes par boules maximales, résidus d'ouvertures ou maxima locaux de fonction distance  
Squelettes multi-échelles par fonction de choc géodésique  
Connexité des squelettes multi-échelles  
Reconstruction de formes multi-échelles  
LPE : notions de bassin versant et simulation d'immersion  
SKIZ Géodésique et Algorithme de LPE  
LPE contrainte par marqueur. Filtrage bidimensionnel pour la LPE

## Morphologie Mathématique : Chapitre 1

### L'APPROCHE MORPHOLOGIQUE DE L'ANALYSE D'IMAGES

I Introduction : *approche morphologique du TI*

II Opérateurs de base : *Dilatation et Erosion*

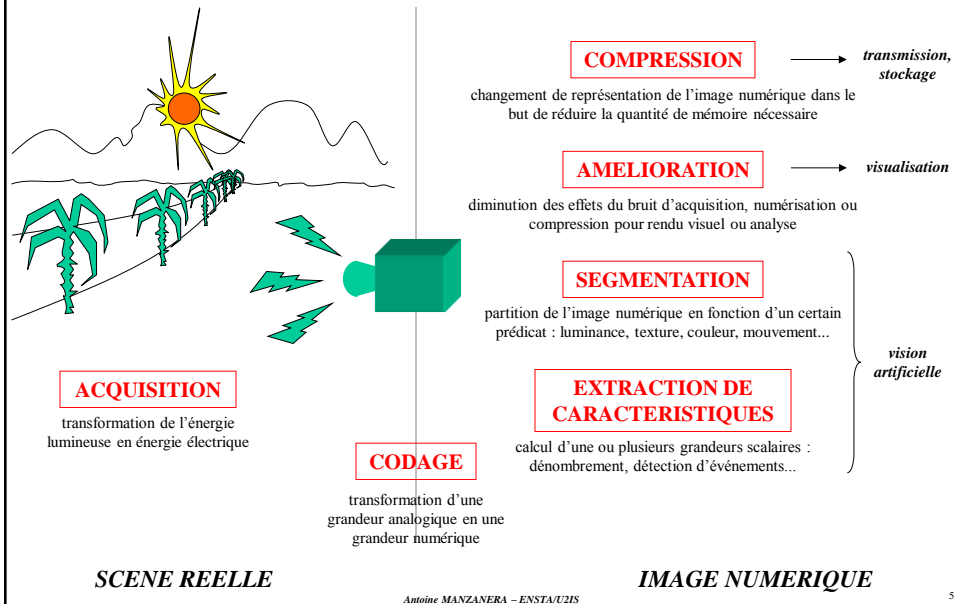
- (a) Opérations ensemblistes
- (b) Opérations fonctionnelles
- (c) Premiers opérateurs composés

III Filtrés de base : *Ouverture et Fermeture*

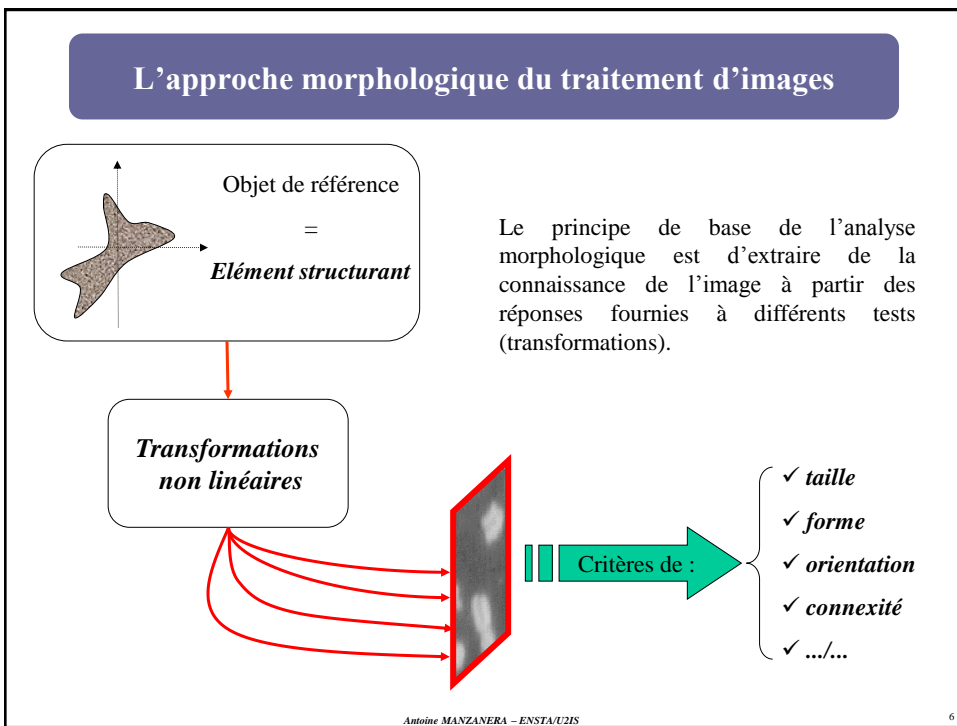
- (a) Définition et propriétés
- (b) Seconds opérateurs composés

III Opérateurs géodésiques : *Reconstruction*

## Les problématiques du traitement d'images

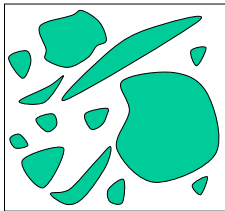


## L'approche morphologique du traitement d'images



## L'approche morphologique du traitement d'images

Exemple :



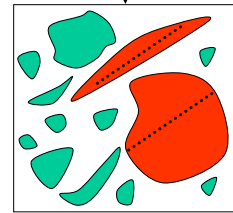
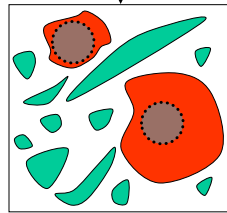
Elément structurant 1



Elément structurant 2



Test : « contient »



Taille, forme, orientation, ...

Analyse quantitative, spatiale, ...

Antoine MANZANERA - ENSTA/UTIS

7

## Traitement d'images linéaire : structure fondamentale

Dans le cas du traitement d'images linéaire, la structure fondamentale est celle d'*espace vectoriel*.

structure de base

**ESPACE VECTORIEL**

$E$  espace vectoriel sur  $K$

opérateurs de base

Ce sont ceux qui préservent la structure et commutent avec les lois de base :

$$\forall \lambda \in K, \forall (x, y) \in E^2: f(\lambda x) = \lambda f(x) \text{ et } f(x+y) = f(x) + f(y)$$

isomorphismes d'espace vectoriel

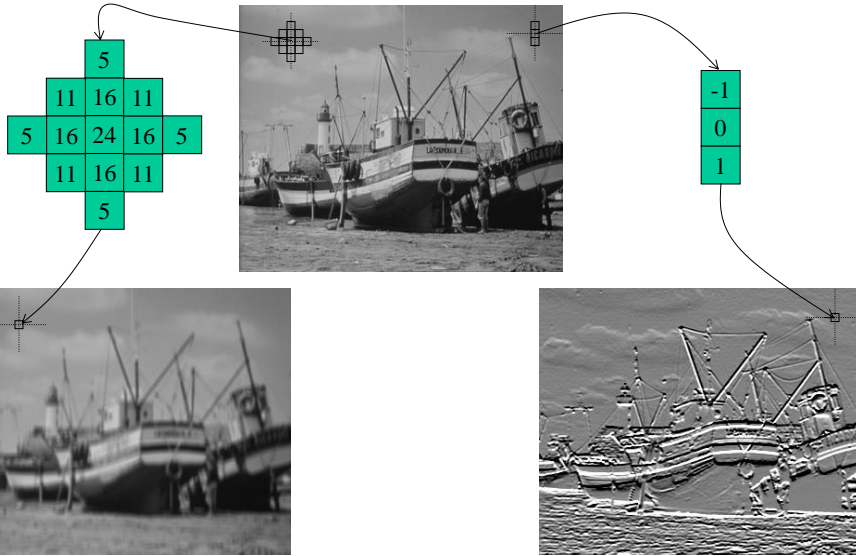
Applications linéaires

→ **CONVOLUTIONS**

Antoine MANZANERA - ENSTA/UTIS

8

## Traitement linéaire : convolutions



Filtre passe-bas

Gradient vertical

Antoine MANZANERA - ENSTA/UTIS

9

## Morphologie mathématique : structure fondamentale

Dans le cas de la morphologie mathématique, la structure fondamentale est celle de *treillis complet*.

structure de base

### TREILLIS COMPLET

(1) Ensemble ordonné  $(E, \leq)$

$$\leq \begin{cases} \text{REFLEXIVE} & x \leq x \\ \text{ANTI-SYMETRIQUE} & x \leq y \text{ et } y \leq x \Rightarrow x = y \\ \text{TRANSITIVE} & x \leq y \text{ et } y \leq z \Rightarrow x \leq z \end{cases}$$

(2) Toute partie  $P$  de  $E$  admet :

- une borne sup
- une borne inf

Sup : plus petit des majorants  $\vee P$

Inf : plus grand des minorants  $\wedge P$

Antoine MANZANERA - ENSTA/UTIS

10

## Morphologie mathématique : opérateurs de base

opérateurs de base

Ceux qui préservent la structure...

$$x \leq y \Rightarrow \Phi(x) \leq \Phi(y)$$

CROISSANCE

...et commutent avec les lois de base :

$$\text{sup} \rightarrow \Phi(\bigvee \{x_i\}) = \bigvee \{\Phi(x_i)\}$$

DILATATION

$$\text{inf} \rightarrow \Psi(\bigwedge \{x_i\}) = \bigwedge \{\Psi(x_i)\}$$

EROSION

## Exemples de treillis complets

Treillis des formules booléennes

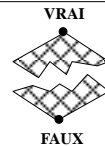
• **éléments** : formules booléennes  $f, g, h$

• **relation d'ordre** : implication  $f \rightarrow g$

• **sup** : OU logique

• **inf** : ET logique

• **éléments extrêmes** :



Treillis ensembliste

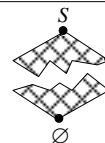
• **éléments** : les parties d'un ensemble  $S$

• **relation d'ordre** : inclusion  $\subset$

• **sup** : Union  $\cup$

• **inf** : Intersection  $\cap$

• **éléments extrêmes** :



Treillis des nombres

• **éléments** : nombres réels (ou nombres entiers)

• **relation d'ordre** :  $\leq$  (ordre total)

• **sup** : max

• **inf** : min

• **éléments extrêmes** :



## Exemples de treillis complets

### Treillis des fonctions

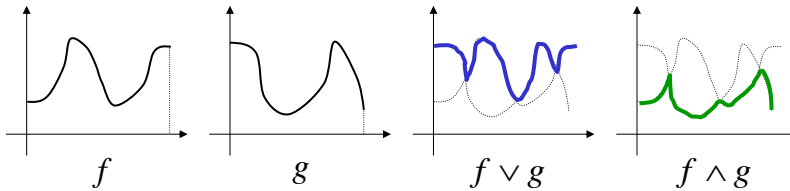
• *éléments* : les fonctions réelles ou numériques :  $f : S \rightarrow \mathbf{R}$   
ou  $S \rightarrow \mathbf{Z}$

• *relation d'ordre* :  $f \leq g \Leftrightarrow \forall x \in S, f(x) \leq g(x)$

• *sup* :  $\bigvee \{f_i\}$

• *inf* :  $\bigwedge \{f_i\}$

définies par :  $\begin{cases} (\bigvee \{f_i\})(x) = \bigvee \{f_i(x)\} \\ (\bigwedge \{f_i\})(x) = \bigwedge \{f_i(x)\} \end{cases}$



Antoine MANZANERA – ENSTA/UTIS

13

## Le principe de dualité

Dans un treillis, les lois *Sup* et *Inf* jouent des rôles symétriques.

On appelle *involution* l'opérateur  $\bar{\cdot} : E \rightarrow E$

qui permet d'échanger leur rôle :

$$\bigwedge \bar{P} = \overline{\bigvee P} \quad \text{et} \quad \bigvee \bar{P} = \overline{\bigwedge P}$$

On dit que deux opérateurs  $\Phi$  et  $\Phi^*$  sont *duaux* pour l'involution  $\bar{\cdot}$ .

si :  $\boxed{\Phi(\bar{x}) = \overline{\Phi^*(x)}}$

Antoine MANZANERA – ENSTA/UTIS

14

## Exemples d'involution

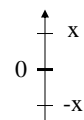
Treillis des formules booléennes

*NON logique :*

$g$	$\neg g$
0	1
1	0

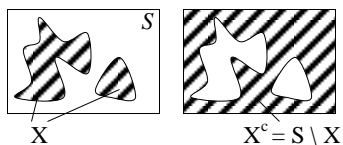
Treillis des nombres

*opposé :*

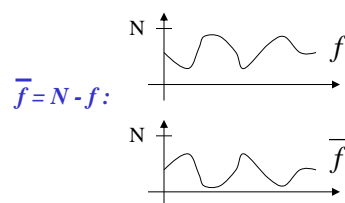


Treillis ensembliste

*Complémentaire :*



Treillis des fonctions dans  $[0, N]$



Antoine MANANERA – ENSTA/UTIS

15

## Propriétés des opérateurs : quelques définitions

$$\Phi: E \rightarrow E$$

$$x \leq y \Rightarrow \Phi(x) \leq \Phi(y) \quad \text{Croissance}$$

$$x \leq \Phi(x) \quad \text{Extensivité}$$

$$\Phi(x) \leq x \quad \text{Anti-extensivité}$$

$$\Phi(\Phi(x)) = \Phi(x) \quad \text{Idempotence}$$

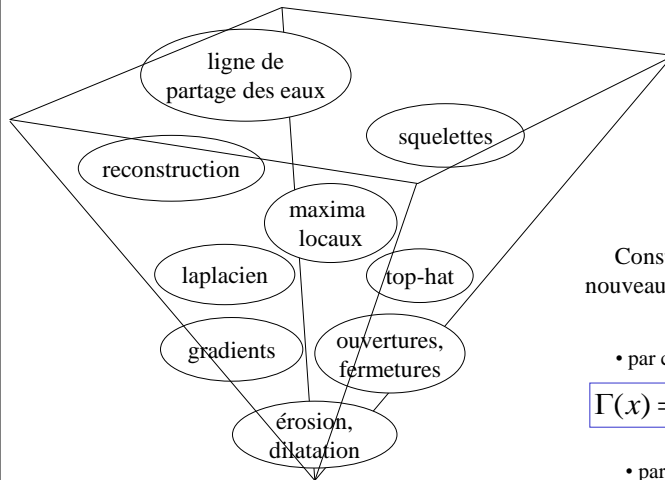
Antoine MANANERA – ENSTA/UTIS

16



## Construction des opérateurs de la morphologie mathématique

complexité,  
richesse des  
propriétés



Construction de nouveaux opérateurs :

- par composition

$$\Gamma(x) = \Phi(\Psi(x))$$

- par différence

$$\Lambda(x) = \Phi(x) - \Psi(x)$$

Antoine MANZANERA - ENSTA/UTIS

17

## Opérations de Minkowski dans $\mathbf{R}^n$

### Définitions préliminaires

On se place ici dans  $E$  : l'ensemble des parties de  $\mathbf{R}^n$

Pour  $X \subset \mathbf{R}^n$   
et  $b \in \mathbf{R}^n$  on note  $X_b = \{x + b; x \in X\}$   
le *translaté* de  $X$  par  $b$ .

et on note  $\tilde{X} = \{-x; x \in X\}$   
le *transposé* de  $X$ .

Rq: si  $X$  est symétrique alors  $X = \tilde{X}$

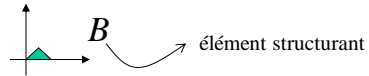
Antoine MANZANERA - ENSTA/UTIS

18

## L'addition de Minkowski

L'addition de Minkowski de  $X$  et  $B$  est définie par :

$$X \oplus B = \bigcup_{b \in B} X_b$$



Rq:  $X \oplus B = B \oplus X$

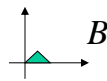
C'est le lieu géométrique des points de  $B_x$  lorsque  $x$  parcourt  $X$

■  $X$     ■  $X \oplus B$

Antoine MANZANERA - ENSTA/UTIS

19

## L'addition de Minkowski



$X$



$X \oplus B$

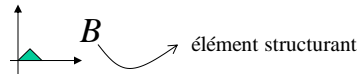
Antoine MANZANERA - ENSTA/UTIS

20

## La dilatation morphologique

La dilatation morphologique de  $X$  par  $B$  est définie par :

$$\delta_B(X) = X \oplus \tilde{B}$$

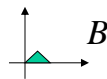


$$\begin{aligned} \delta_B(X) &= X \oplus \tilde{B} = \bigcup_{b \in \tilde{B}} X_b \\ &= \{z / \exists x \in X, \exists b \in \tilde{B}; z = x + b\} \\ &= \{z / \exists x \in X, \exists b \in B; z + b = x\} \\ &= \{z / B_z \cap X \neq \emptyset\} \end{aligned}$$

$$\delta_B(X) = \{z / B_z \cap X \neq \emptyset\}$$

C'est le lieu géométrique des points  $z$  tels que  $B_z$  intersecte  $X$

## La dilatation morphologique



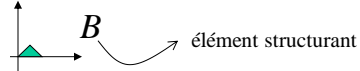
$X$



$\delta_B(X)$

## L'érosion morphologique

L'érosion morphologique de  $X$  par  $B$  est définie par le principe de dualité :  $\varepsilon_B(\overline{X}) = \overline{\delta_B(X)}$



élément structurant

$$\varepsilon_B(X) = \overline{\delta_B(\overline{X})} = \overline{\overline{X} \oplus \overline{B}}$$

$$= \overline{\bigcup_{b \in B} \overline{X}_b} = \bigcap_{b \in B} X_b$$

$$= X \ominus \overline{B}$$

Soustraction de Minkowski

$$\varepsilon_B(X) = \bigcap_{b \in B} X_b = \{z / \forall b \in B, \exists x \in X; z + b = x\}$$

$$= \{z / B_z \subset X\}$$

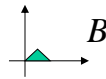
$$\varepsilon_B(X) = \{z / B_z \subset X\}$$

C'est le lieu géométrique des points  $z$  tels que  $B_z$  est inclus dans  $X$

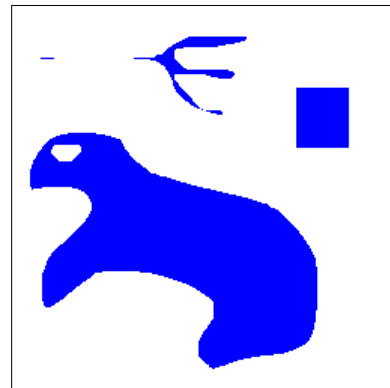
Antoine MANANERA - ENSTA/UTIS

23

## L'érosion morphologique



$X$



$\varepsilon_B(X)$

Antoine MANANERA - ENSTA/UTIS

24

## Propriétés algébriques des opérateurs de base

### CROISSANCE

La dilatation et l'érosion sont des opérateurs *croissants*

$$X \subset Y \Rightarrow \delta_B(X) \subset \delta_B(Y)$$

$$X \subset Y \Rightarrow \varepsilon_B(X) \subset \varepsilon_B(Y)$$



L'érosion est *décroissante* par rapport à l'élément structurant :  $B \subset B' \Rightarrow \varepsilon_B(X) \supset \varepsilon_{B'}(X)$

### EXTENSIVITE

Si l'élément structurant  $B$  contient l'origine :

• La dilatation est *extensive*

$$X \subset \delta_B(X)$$

• L'érosion est *anti-extensive*

$$\varepsilon_B(X) \subset X$$

• La dilatation commute avec le *Sup*

$$\delta_B(X \cup Y) = \delta_B(X) \cup \delta_B(Y)$$

• L'érosion commute avec le *Inf*

$$\varepsilon_B(X \cap Y) = \varepsilon_B(X) \cap \varepsilon_B(Y)$$

On a les égalités :

$$\delta_{B \cup B'}(X) = \delta_B(X) \cup \delta_{B'}(X)$$

$$\varepsilon_{B \cup B'}(X) = \varepsilon_B(X) \cap \varepsilon_{B'}(X)$$



Mais seulement les inclusions :

$$\delta_{B \cap B'}(X) \subset \delta_B(X) \cap \delta_{B'}(X)$$

$$\varepsilon_{B \cap B'}(X) \supset \varepsilon_B(X) \cup \varepsilon_{B'}(X)$$

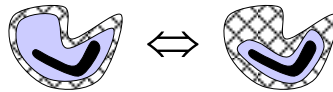
$$\varepsilon_B(X \cup Y) \supset \varepsilon_B(X) \cup \varepsilon_B(Y)$$

Antoine MANZANERA - ENSTA/UTIS

25

## Propriétés algébriques des opérateurs de base

### PROPRIETE D'ADJONCTION



$$X \subset \varepsilon_B(Y) \Leftrightarrow \delta_B(X) \subset Y$$

### CAS DEGENERES

élément structurant vide

$$\varepsilon_{\emptyset}(X) = \mathbf{R}^n$$

$$\delta_{\emptyset}(X) = \emptyset$$

### ASSOCIATIVITE DE LA DILATATION

$$\delta_{B'}(\delta_B(X)) = \delta_{\delta_{B'}(B)}(X)$$

$$\varepsilon_{B'}(\varepsilon_B(X)) = \varepsilon_{\delta_{B'}(B)}(X)$$

Application : Polyèdres de Steiner dans  $\mathbf{R}^n$ :

ex:

dans  $\mathbf{R}^2$ :

dans  $\mathbf{R}^3$ :

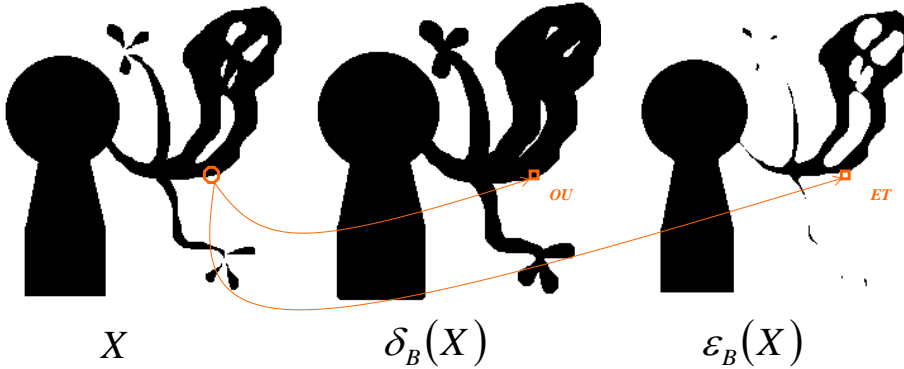
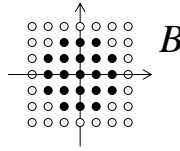
Décomposition des éléments structurants convexes en sommes de segments

Antoine MANZANERA - ENSTA/UTIS

26

## Application aux images binaires

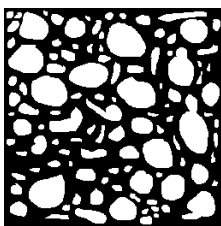
Le treillis est l'ensemble des parties de  $\mathbb{Z}^2$



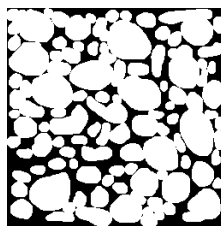
Antoine MANZANERA – ENSTA/UTIS

27

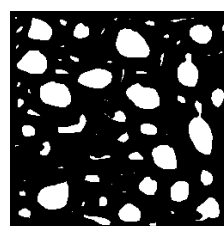
## Conclusions sur les opérateurs de base



Originale



Dilatée



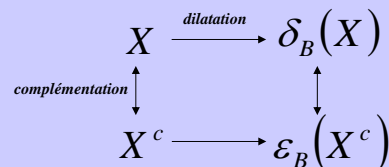
Erodée

- La dilatation fait disparaître les petits trous et les petits détroits, et fait grossir les objets.
- L'érosion fait disparaître les petits objets et les petits isthmes, et amincit les objets restants.



Dilatation et érosion sont des opérations *non réversibles*.

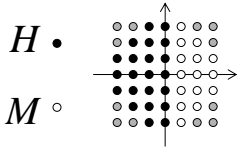
Dilatation et érosion sont des opérations *duales, pas inverses* !



Antoine MANZANERA – ENSTA/UTIS

28

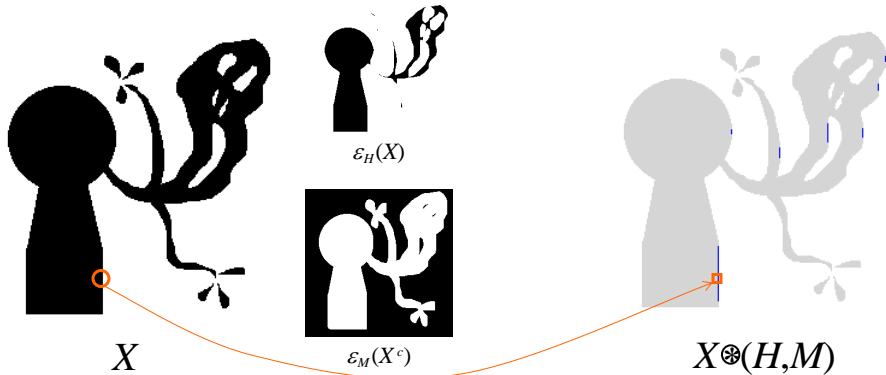
# Transformées en tout-ou-rien



Les transformées en tout-ou-rien (*Hit-or-Miss Transform*) unifient et généralisent érosions et dilatations.

$$X \otimes (H, M) = \varepsilon_H(X) \cap \varepsilon_M(X^c)$$

Application : Recherche de configurations



Antoine MANZANERA - ENSTA/UTIS

29

# Du cadre ensembliste au cadre fonctionnel

On se place à présent dans le cadre des fonctions :  $f : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$

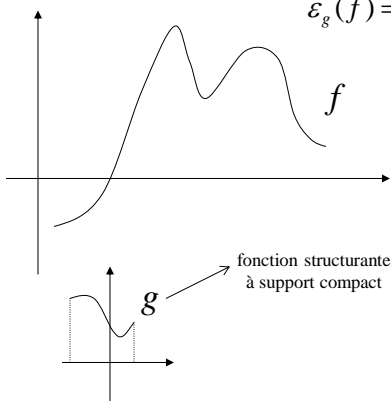
La dilatation et l'érosion fonctionnelles sont respectivement définies par :

$$\delta_g(f) = f \oplus \tilde{g}$$

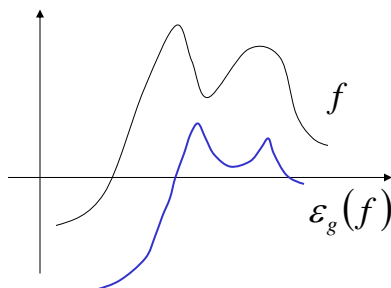
$$\varepsilon_g(f) = f \ominus \tilde{g}$$

$$\delta_g(f)(x) = \sup_{y \in \mathbf{R}^n} \{f(y) + g(y-x)\}$$

$$\varepsilon_g(f)(x) = \inf_{y \in \mathbf{R}^n} \{f(y) - g(y-x)\}$$



fonction structurante à support compact



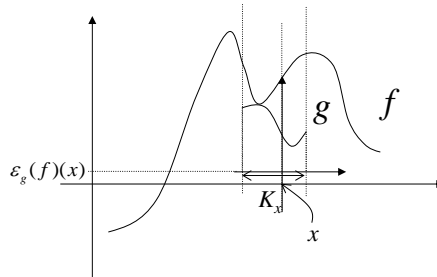
Antoine MANZANERA - ENSTA/UTIS

30

## Du cadre ensembliste au cadre fonctionnel

Soit  $K$  le support de  $g$

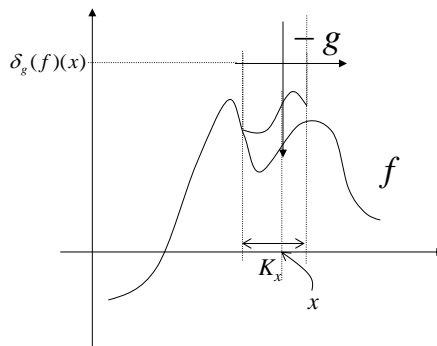
$$\begin{aligned}\varepsilon_g(f)(x) &= \inf_{y \in \mathbf{R}^n} \{f(y) - g(y-x)\} \\ &= \inf_{y-x \in K} \{f(y) - g(y-x)\} \\ &= \inf_{y \in K_x} \{f(y) - g(y-x)\}\end{aligned}$$



## Du cadre ensembliste au cadre fonctionnel

Soit  $K$  le support de  $g$

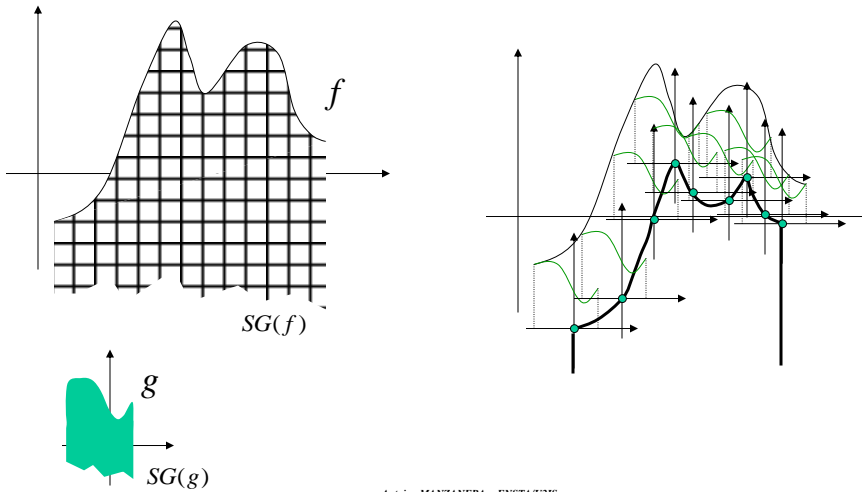
$$\begin{aligned}\delta_g(f)(x) &= \sup_{y \in \mathbf{R}^n} \{f(y) + g(y-x)\} \\ &= \sup_{y-x \in K} \{f(y) + g(y-x)\} \\ &= \sup_{y \in K_x} \{f(y) + g(y-x)\}\end{aligned}$$





## Du cadre ensembliste au cadre fonctionnel

A toute fonction  $f$  on associe son *sous-graphe* :  $SG(f) = \{(x,t) \in \mathbf{R}^n \times \overline{\mathbf{R}} / t \leq f(x)\}$



Antoine MANZANERA – ENSTA/UTIS

33

## Du cadre ensembliste au cadre fonctionnel

*Interprétation ensembliste :*

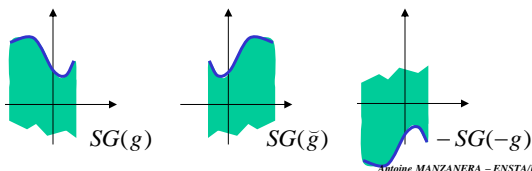
$$SG(\varepsilon_g(f)) = \mathfrak{E}_{SG(g)}(SG(f))$$

$$SG(\delta_g(f)) = \mathfrak{D}_{-SG(-g)}(SG(f))$$

fonctionnel

ensembliste

⚠  $-g \neq \tilde{g}$

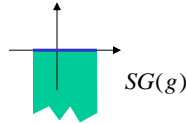


Antoine MANZANERA – ENSTA/UTIS

34

## Cas des éléments structurants plans

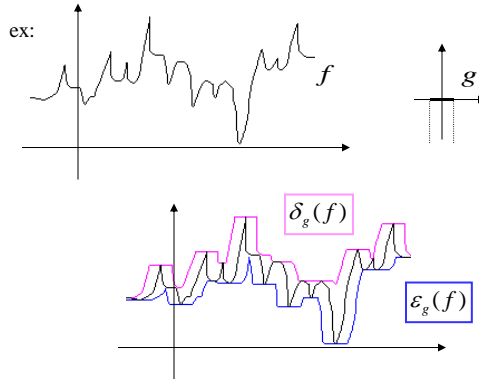
Élément structurant plan =  
fonction structurante nulle sur un  
support compact K



L'expression algébrique des  
opérateurs de base devient :

$$\begin{aligned} \varepsilon_g(f)(x) &= \inf_{\substack{y \in \mathbf{R}^n \\ y-x \in K}} \{f(y)\} \\ &= \inf_{y \in K_x} \{f(y)\} \end{aligned}$$

$$\delta_g(f)(x) = \sup_{y \in K_x} \{f(y)\}$$



Antoine MANZANERA - ENSTA/UTIS

35

## Propriétés des opérateurs de base dans le cadre fonctionnel

Identiques au cas ensembliste, en remplaçant :

$$\begin{aligned} \subset &\rightarrow \leq \\ \cup &\rightarrow \vee \\ \cap &\rightarrow \wedge \end{aligned}$$

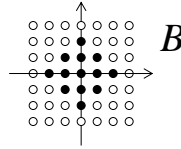
$f \leq f' \Rightarrow \delta_g(f) \leq \delta_g(f')$ $f \leq f' \Rightarrow \varepsilon_g(f) \leq \varepsilon_g(f')$ $g \leq g' \Rightarrow \varepsilon_g(f) \geq \varepsilon_{g'}(f)$	Si $O \in \text{Supp}(g)$ : $f \leq \delta_g(f)$ $\varepsilon_g(f) \leq f$	$\delta_g(f \vee f') = \delta_g(f) \vee \delta_g(f')$ $\varepsilon_g(f \wedge f') = \varepsilon_g(f) \wedge \varepsilon_g(f')$
$\delta_{g \vee g'}(f) = \delta_g(f) \vee \delta_{g'}(f)$ $\varepsilon_{g \vee g'}(f) = \varepsilon_g(f) \wedge \varepsilon_{g'}(f)$		$\delta_{g \wedge g'}(f) \leq \delta_g(f) \wedge \delta_{g'}(f)$ $\varepsilon_{g \wedge g'}(f) \geq \varepsilon_g(f) \vee \varepsilon_{g'}(f)$ $\varepsilon_g(f \vee f') \geq \varepsilon_g(f) \vee \varepsilon_g(f')$
$f \leq \varepsilon_g(f') \Leftrightarrow \delta_g(f) \leq f'$		$\delta_{g'}(\delta_g(f)) = \delta_{\delta_{g'}(g)}(f)$ $\varepsilon_{g'}(\varepsilon_g(f)) = \varepsilon_{\delta_{g'}(g)}(f)$

Antoine MANZANERA - ENSTA/UTIS

36

## Application aux images numériques

Le treillis est l'ensemble  
des fonctions de  $\mathbf{Z}^2$  dans  
 $\mathbf{Z}$



élément  
structurant plan  
 $\cong$   
ensemble



$X$



$\delta_B(X)$



$\varepsilon_B(X)$

Antoine MANZANERA - ENSTA/UTIS

37

## Premiers opérateurs par différence

Opérateur par différence :

$$\Lambda(x) = \Phi(x) - \Psi(x)$$

Cas ensembliste

$$\Lambda(X) = \Phi(X) \setminus \Psi(X)$$

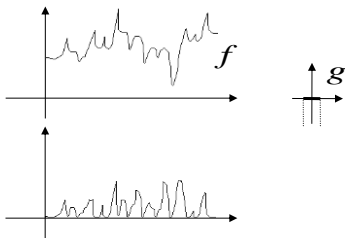
Cas fonctionnel

$$\Lambda(f) = \Phi(f) - \Psi(f)$$

Gradient intérieur

$$g_y^-(x)$$

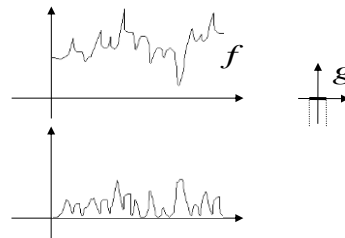
$$\Phi(x) = x \quad \Psi(x) = \varepsilon_y(x)$$



Gradient extérieur

$$g_y^+(x)$$

$$\Phi(x) = \delta_y(x) \quad \Psi(x) = x$$



Antoine MANZANERA - ENSTA/UTIS

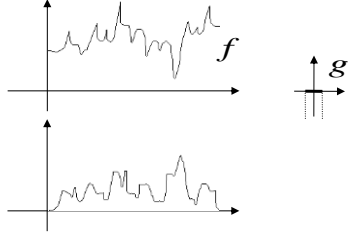
38

## Premiers opérateurs par différence

### Gradient morphologique

(symétrisée)  
 $g_y^m(x)$

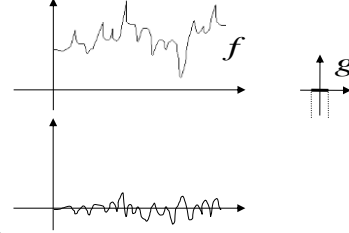
$\Phi(x) = \delta_y(x) \quad \Psi(x) = \varepsilon_y(x)$



### Laplacien morphologique

$\lambda_y(x)$

$\Phi(x) = g_y^+(x) \quad \Psi(x) = g_y^-(x)$



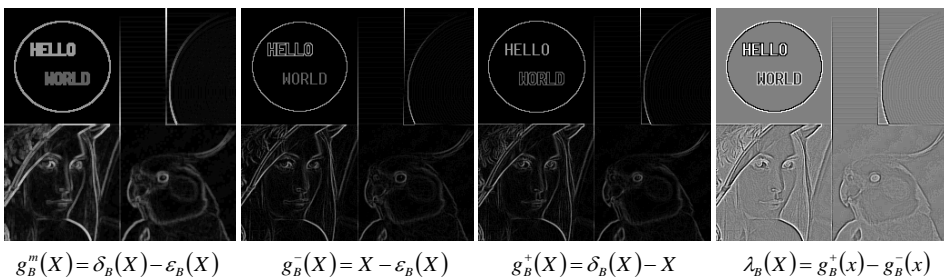
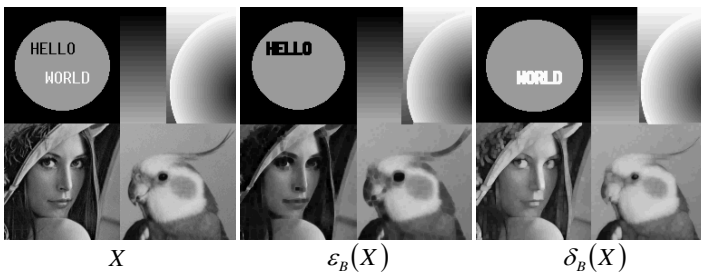
Rq : dans le cas de fonctions de  $\mathbf{R}^2$  dans  $\mathbf{R}$ , en prenant pour élément structurant une boule euclidienne centrée sur l'origine, le gradient morphologique et le laplacien morphologique tendent respectivement vers le module du gradient et le laplacien euclidiens lorsqu'ils sont définis, quand le rayon de la boule tend vers zéro :

$$\|\nabla I\| = \sqrt{\left(\frac{\partial I}{\partial x}(u, v)\right)^2 + \left(\frac{\partial I}{\partial y}(u, v)\right)^2} \quad \Delta I = \frac{\partial^2 I}{\partial x^2}(u, v) + \frac{\partial^2 I}{\partial y^2}(u, v)$$

Antoine MANZANERA - ENSTA/UTIS

39

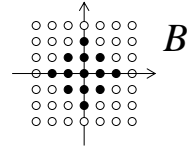
## Gradients et laplacien : images numériques



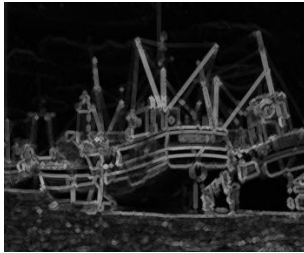
Antoine MANZANERA - ENSTA/UTIS

40

## Gradients et laplacien : images numériques



$X$



$g_B^m(X)$



$\lambda_B(X)$

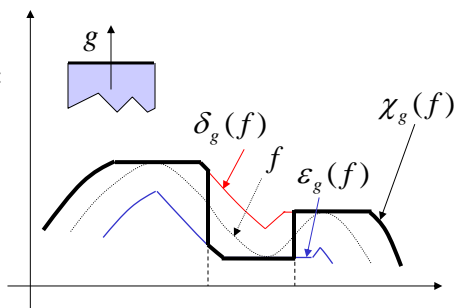
Antoine MANZANERA - ENSTA/UTIS

41

## Augmentation de contraste morphologique

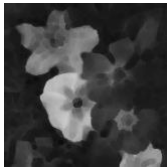
Le filtre rehausseur de contraste est défini par :

$$\begin{cases} \chi_g(f) = \delta_g(f) & \text{si } (\delta_g(f) - f) < (f - \varepsilon_g(f)) \\ \chi_g(f) = \varepsilon_g(f) & \text{si } (\delta_g(f) - f) > (f - \varepsilon_g(f)) \end{cases}$$

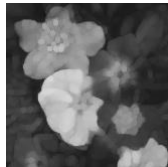


*erodé*

*dilaté*



$\varepsilon_g(f)$



$\delta_g(f)$

*image originale*



$f$

*image rehaussée*



$\chi_g(f)$

Antoine MANZANERA - ENSTA/UTIS

42

## Ouvertures et fermetures morphologiques

Problème Min/Max : étant donné  $Y \in E, B \in E$ ,  
trouver le plus petit  $X \in E$  tel que :  $Y = \varepsilon_B(X)$



$X_1$



$X_2$



$X_3$



$$\begin{aligned} Y &= \varepsilon_B(X_1) \\ &= \varepsilon_B(X_2) \\ &= \varepsilon_B(X_3) \end{aligned}$$

REPOSE : C'est le dilaté de  $Y$  par le transposé de  $B$ :

$$\delta_B(Y) = Y \oplus B$$



On note :  $\gamma_B(X) = X \circ B = \delta_{\bar{B}}(\varepsilon_B(X)) = (X \ominus \bar{B}) \oplus B$   
l'ouverture morphologique de  $X$  par  $B$ .

et son dual :  $\varphi_B(X) = X \bullet B = \varepsilon_{\bar{B}}(\delta_B(X)) = (X \oplus \bar{B}) \ominus B$   
la fermeture morphologique de  $X$  par  $B$ .

Antoine MANZANERA - ENSTA/UTIS

43

## Propriétés algébriques des ouvertures et fermetures

### CROISSANCE

$$x \leq y \Rightarrow \begin{cases} \gamma_B(x) \leq \gamma_B(y) \\ \varphi_B(x) \leq \varphi_B(y) \end{cases}$$

### IDEMPOTENCE

$$\gamma_B(\gamma_B(x)) = \gamma_B(x)$$

$$\varphi_B(\varphi_B(x)) = \varphi_B(x)$$

dém:  $\delta_B(\varepsilon_B(x)) \leq x \leq \varepsilon_B(\delta_B(x))$

donc  $\delta_B \varepsilon_B \leq id_E \leq \varepsilon_B \delta_B$  et  $\delta_B \varepsilon_{\bar{B}} \leq id_E \leq \varepsilon_{\bar{B}} \delta_B$

$\varepsilon_B \delta_B \varepsilon_B \leq \varepsilon_B$  et  $\varepsilon_{\bar{B}} \delta_{\bar{B}} \varepsilon_{\bar{B}} \leq \varepsilon_{\bar{B}}$

$\varepsilon_B \leq \varepsilon_B \delta_B \varepsilon_B$  et  $\varepsilon_{\bar{B}} \leq \varepsilon_{\bar{B}} \delta_{\bar{B}} \varepsilon_{\bar{B}}$

donc  $\varepsilon_B = \varepsilon_B \delta_B \varepsilon_B$   
et donc  $\delta_{\bar{B}} \varepsilon_B = \delta_{\bar{B}} \varepsilon_B \delta_{\bar{B}} \varepsilon_B$

### EXTENSIVITE

L'ouverture est anti-extensive :  $\gamma_B(x) \leq x$   
La fermeture est extensive :  $x \leq \varphi_B(x)$

dém: Dans la propriété d'adjonction :  
 $x \leq \varepsilon_B(y) \Leftrightarrow \delta_B(x) \leq y$   
 $x = \varepsilon_B(y)$  donne  $\delta_B(\varepsilon_B(y)) \leq y$   
et  $y = \delta_B(x)$  donne  $x \leq \varepsilon_B(\delta_B(x))$

### PROPRIETE MIN/MAX

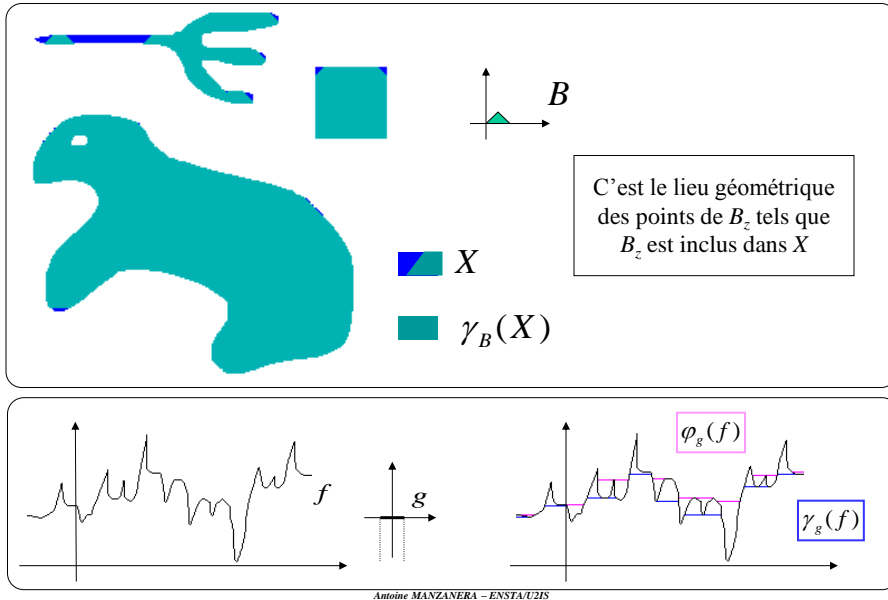
Soient  $x, x'$ , et  $y$   
tels que :  $\begin{cases} y = \varepsilon_B(x) = \varepsilon_B(x') \\ \text{et} \\ x = \delta_B(y) \end{cases}$

alors  $x = \delta_B(y) = \delta_B(\varepsilon_B(x)) = \delta_B(\varepsilon_B(x')) = \gamma_B(x') \leq x'$

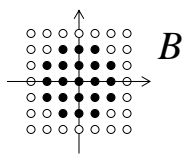
Antoine MANZANERA - ENSTA/UTIS

44

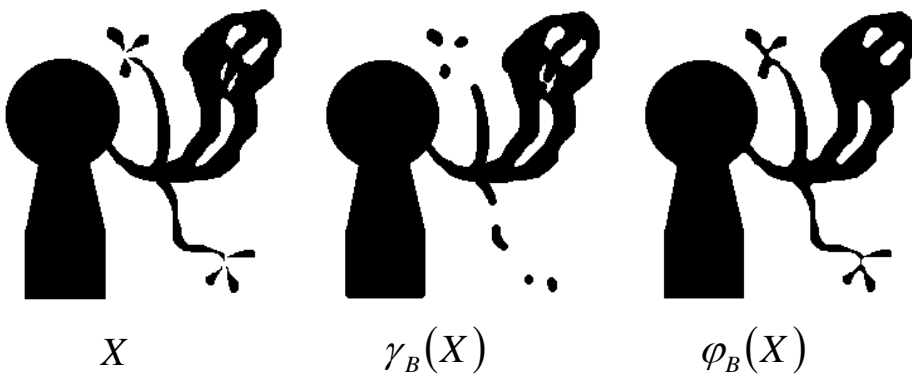
## Ouvertures et fermetures : ensembles et fonctions



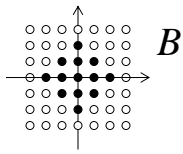
## Ouvertures et fermetures : images binaires



- l'ouverture élimine les petites composantes, et ouvre les petits isthmes.
- la fermeture bouche les petites trous, et ferme les petits détroits.



## Ouvertures et fermetures : images numériques



$\varepsilon_B(X)$



$\delta_B(X)$



$X$



$\gamma_B(X)$



$\varphi_B(X)$

Antoine MANZANERA - ENSTA/UTIS

47

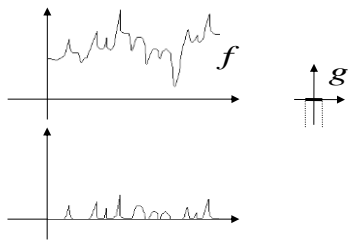
## Opérateurs obtenus par différence d'ouvertures et fermetures

Opérateur par différence :

$$\Lambda(x) = \Phi(x) - \Psi(x)$$

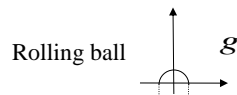
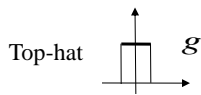
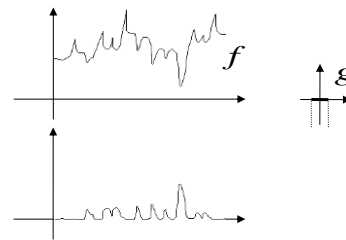
**Top-hat**

$$\Phi(x) = x \quad \Psi(x) = \gamma_y(x)$$



**Top-hat conjugué**

$$\Phi(x) = \varphi_y(x) \quad \Psi(x) = x$$



Antoine MANZANERA - ENSTA/UTIS

48



## Top Hat : images numériques

$X$        $\varepsilon_B(X)$        $\delta_B(X)$

$\gamma_B(X)$        $\varphi_B(X)$        $\tau_B(X) = X - \gamma_B(X)$        $\tilde{\tau}_B(X) = \varphi_B(X) - X$

$B$

Antoine MANZANERA - ENSTA/UTIS

49

## Top Hat : images numériques

$B$

$\gamma_B(X)$        $\varphi_B(X)$

$X$        $\tau_B(X)$        $\tilde{\tau}_B(X)$

Antoine MANZANERA - ENSTA/UTIS

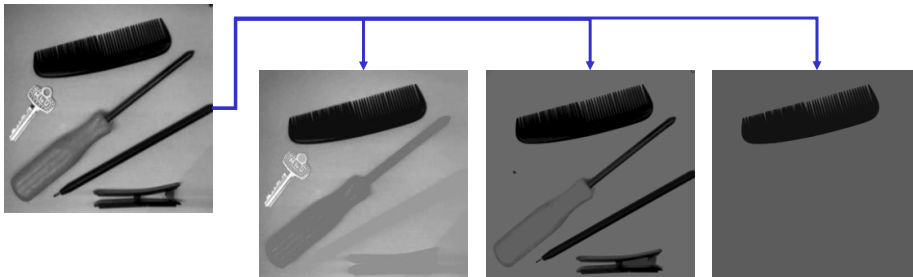
50

## Introduction aux opérations géodésiques

Objectif sous-jacent : l'analyse individuelle des « objets » d'une image.

En l'absence de données de plus haut niveau sémantique, l'objet dans une image est associé à une particule, correspondant en général à une composante connexe.

L'analyse individuelle des objets nécessite donc l'utilisation d'opérateurs (filtres) connexes, c'est-à-dire qui préserve les objets (une composante connexe est soit préservée, soit intégralement éliminée).



Antoine MANZANERA – ENSTA/UTIS

51

## Opérations géodésiques

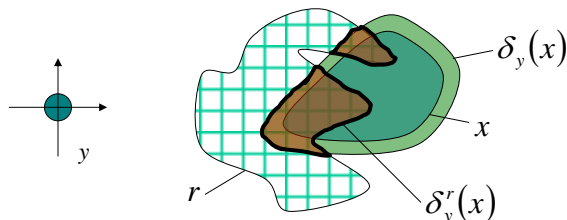
Les opérations géodésiques sont celles qui sont conditionnées par un élément de référence  $r$  du treillis. Elles sont définies à partir des opérations géodésiques de base :

la *dilatation géodésique* et la *reconstruction géodésique*.

Dans les opérations géodésiques, l'élément structurant représente le "voisinage élémentaire" de l'origine ; et définit donc la topologie sous-jacente.

La dilatation géodésique dans  $r$  :

$$\delta_y^r(x) = \delta_y(x) \wedge r$$



Antoine MANZANERA – ENSTA/UTIS

52

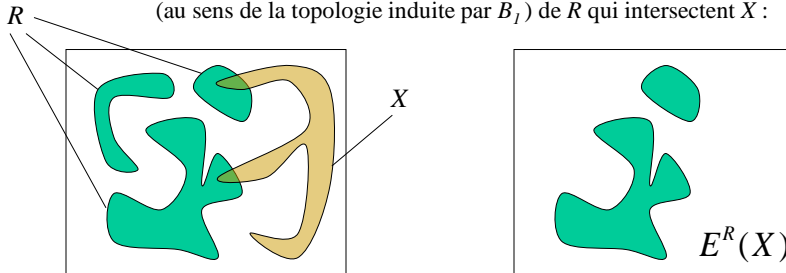
## La reconstruction géodésique

posons 
$$\begin{cases} (\delta_{B_1}^R)^0(X) = X \\ (\delta_{B_1}^R)^n(X) = \delta_{B_1}^R((\delta_{B_1}^R)^{n-1}(X)) \text{ pour } n > 0 \end{cases}$$

La reconstruction géodésique de  $X$  dans  $R$  est définie par :

$$E_{B_1}^R(X) = \sup_{n \geq 0} \{ (\delta_{B_1}^R)^n(X) \}$$

Dans le cadre ensembliste, c'est l'ensemble des composantes connexes (au sens de la topologie induite par  $B_1$ ) de  $R$  qui intersectent  $X$  :

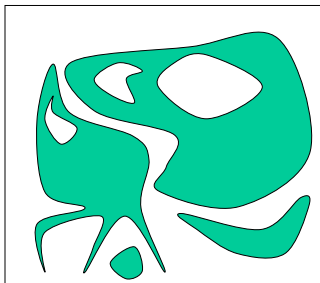


Antoine MANZANERA - ENSTA/UTIS

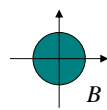
53

## Ouvertures et fermetures par reconstruction

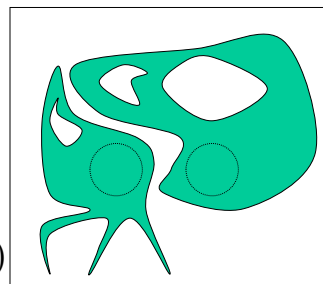
L'ouverture par reconstruction élimine les composantes connexes qui n'appartiennent pas à l'ouvert sans modifier les autres :



$X$

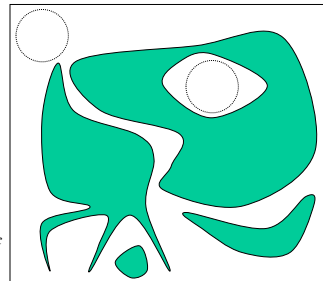


ouverture par reconstruction  
 $E^X(\gamma_B(X))$



La fermeture par reconstruction est définie par dualité :

$$\left( E^{X^c} \left( (\varphi_B(X))^c \right) \right)^c$$



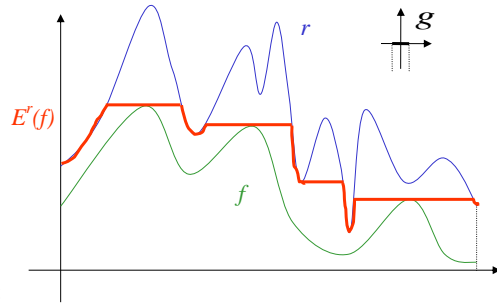
Antoine MANZANERA - ENSTA/UTIS

54

## Reconstruction fonctionnelle

La dilatation géodésique de  $f$  dans  $r$  :

$$\delta_g^r(f) = \delta_g(f) \wedge r$$



La reconstruction géodésique de  $f$  dans  $r$  :

$$E_g^r(f) = \sup_{n \geq 0} \{ (\delta_g^r)^n(f) \}$$

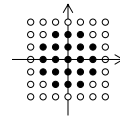
Antoine MANZANERA – ENSTA/UTIS

55

## Ouvertures et fermetures par reconstruction

Par extension, les ouvertures et fermetures par reconstruction élimine les structures en préservant les contours des images numériques :

élément structurant  
de l'ouverture  
morphologique :



original



ouverture par reconstruction



fermeture par reconstruction

Antoine MANZANERA – ENSTA/UTIS

56

## Chapitre 1 – Conclusion

### A RETENIR POUR CE COURS :

- Principes de base : Notion de treillis complet – Erosion et Dilatation algébriques – Liens avec les opérateurs de Minkowski, Passage des treillis ensemblistes aux treillis fonctionnels.
- Opérateurs résiduels : Gradients et Laplacien, définition et liens avec les opérateurs différentiels. Opérateurs de sélection : exemple du contraste.
- Ouverture et Fermeture : Définitions, Propriétés géométriques. Opérateurs Top-Hat : à distinguer des gradients.
- Dilatation et reconstruction géodésiques : définitions.

## Chapitre 2 : Filtrage et Espaces d'Échelles Morphologiques

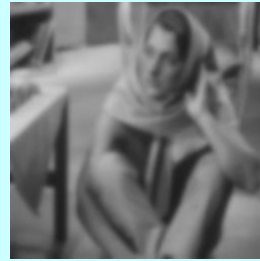
- Filtres morphologiques.
- Ouvertures et fermetures algébriques.
- Analyse granulométrique.
- Filtres alternés séquentiels.
- Pyramides et espaces d'échelles morphologiques.
- Opérateurs connexes et applications de la géodésie
- Filtres connexes et F.A.S par reconstruction
- Invariance par changement de contraste et EDP

## L'approche morphologique du filtrage



En traitement linéaire des images, filtrer, c'est *éliminer* certaines *composantes fréquentielles* des images.

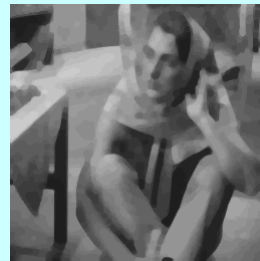
*Filtrage = Convolution*



En morphologie mathématique, filtrer, c'est *simplifier* l'image en supprimant certaines structures géométriques (en général implicitement définies par un ou plusieurs éléments structurants).

Le filtre morphologique simplifie l'image en préservant la structure, mais il perd en général de l'information (→ Croissance).

Le filtre morphologique est stable et possède une classe d'invariance connue (→ Idempotence).



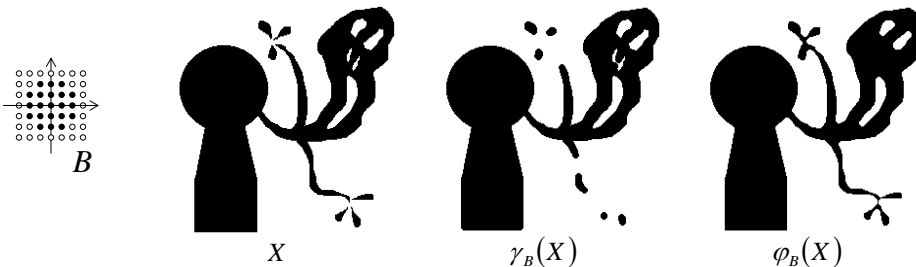
## Rappel : ouvertures et fermetures morphologiques

l'ouverture morphologique de X par B.

$$\gamma_B(X) = X \circ B = \delta_B(\varepsilon_B(X)) = (X \ominus \bar{B}) \oplus B$$

la fermeture morphologique de X par B.

$$\varphi_B(X) = X \bullet B = \varepsilon_B(\delta_B(X)) = (X \oplus \bar{B}) \ominus B$$



**CROISSANCE**

$$x \leq y \Rightarrow \begin{cases} \gamma_B(x) \leq \gamma_B(y) \\ \varphi_B(x) \leq \varphi_B(y) \end{cases}$$

**IDEMPOTENCE**

$$\begin{cases} \gamma_B(\gamma_B(x)) = \gamma_B(x) \\ \varphi_B(\varphi_B(x)) = \varphi_B(x) \end{cases}$$

**EXTENSIVITE**

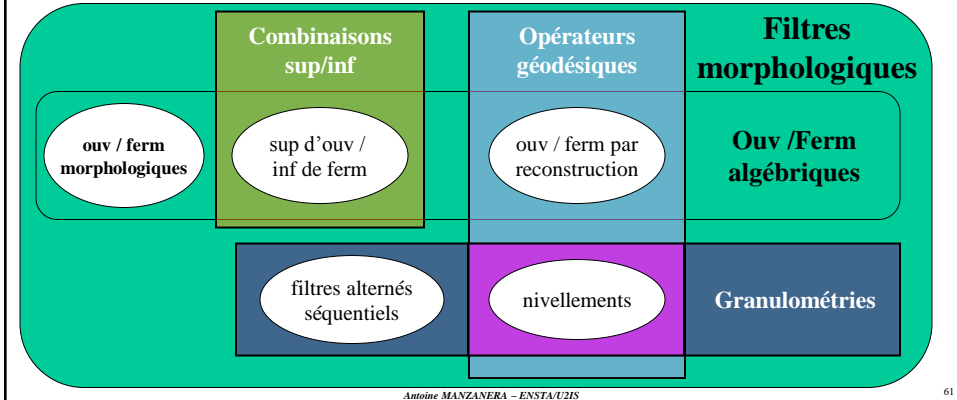
L'ouverture est anti-extensive :  $\gamma_B(x) \leq x$   
 La fermeture est extensive :  $x \leq \varphi_B(x)$

# Filtres morphologiques

Un *filtre morphologique* est un opérateur  $\psi$  *croissant* et *idempotent* :

$$x \leq y \Rightarrow \psi(x) \leq \psi(y) \qquad \psi(\psi(x)) = \psi(x)$$

On peut construire différentes familles de filtres morphologiques à partir des filtres de base, l'ouverture et la fermeture morphologiques :



# Ouvertures et fermetures algébriques

Les ouvertures et fermetures algébriques généralisent les ouvertures et fermetures morphologiques.

- Une **ouverture algébrique** est un filtre morphologique anti-extensif.
- Une **fermeture algébrique** est un filtre morphologique extensif.

PROPRIETE

- Un sup d'ouvertures morphologiques est une ouverture algébrique
- Un inf de fermetures morphologiques est une fermeture algébrique

ex :

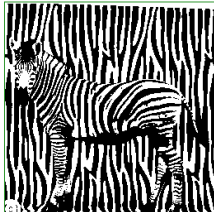
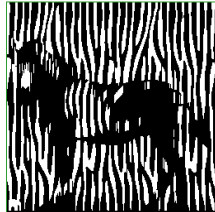


Image originale



Ouverture morphologique par un segment vertical



Ouverture morphologique par un segment horizontal



Ouverture algébrique par union des deux ensembles

# Granulométries

L'analyse granulométrique est l'étude de la taille des objets fondée sur le principe du *tamisage* : sélection des objets par un ensemble de tamis de différentes tailles.

Formellement, une granulométrie peut être définie par une famille d'ouvertures :

$$(\gamma_\lambda)_{\lambda \geq 0} \quad \text{telle que :}$$

$$0 \leq \lambda \leq \lambda' \Rightarrow \gamma_\lambda \gamma_{\lambda'} = \gamma_{\lambda'} \gamma_\lambda = \gamma_{\lambda'}$$

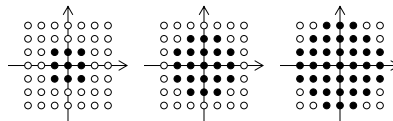
ex1 :  $(\gamma_\lambda)_{\lambda \in \mathbf{R}^+}$

Ouvertures par des boules euclidiennes de rayon  $\lambda$ .



ex2 :  $(\gamma_\lambda)_{\lambda \in \mathbf{N}}$

Ouvertures par une suite croissante de boules discrètes



Antoine MANZANERA - ENSTA/UTIS

63

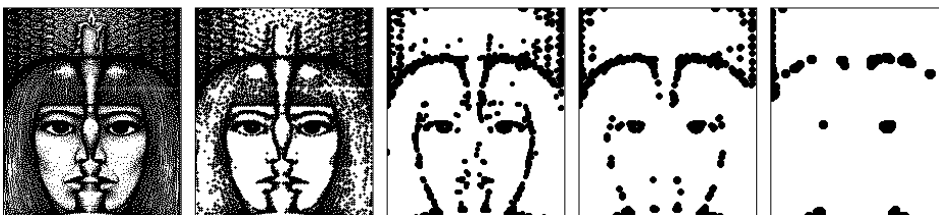
# Granulométrie et anti-granulométrie

La famille des opérateurs duaux (fermetures de taille croissante) est une anti-granulométrie :

granulométrie



anti-granulométrie



Antoine MANZANERA - ENSTA/UTIS

64

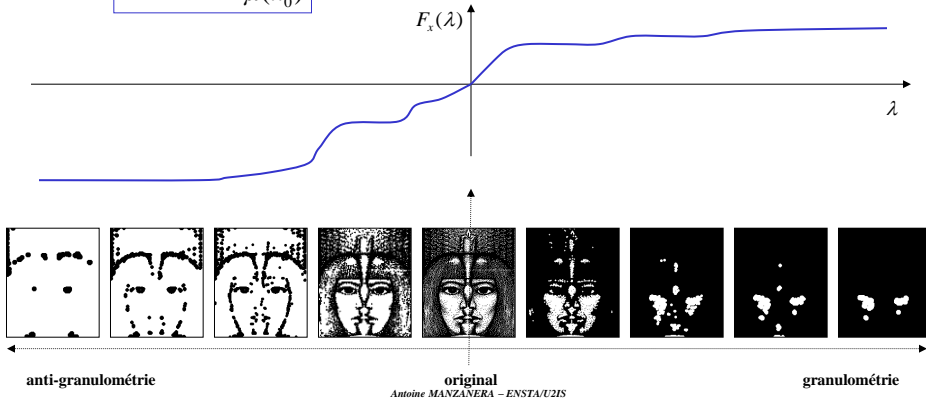


## Fonction de distribution granulométrique

Soit  $\mu$  une mesure bornée sur un treillis  $E$  (aire, intégrale...)

Pour  $x \in E$ , on note  $x_\lambda$  (resp.  $x_{-\lambda}$ ) l'image de  $x$  par l'opérateur de granulométrie (resp. d'anti-granulométrie) d'indice  $\lambda$ .

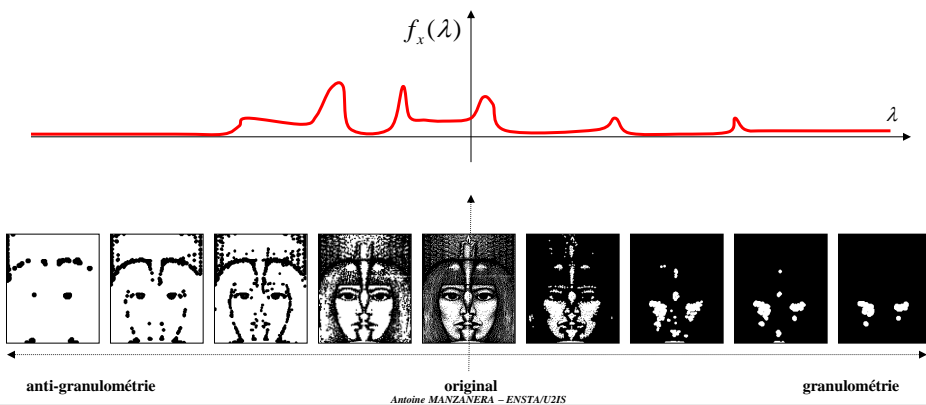
On note  $F_x(\lambda) = 1 - \frac{\mu(x_\lambda)}{\mu(x_0)}$  la fonction de distribution sur  $x$  de la granulométrie  $(\mathcal{V}_\lambda)_\lambda$



## Spectre granulométrique

Le spectre granulométrique est la dérivée de la fonction de distribution granulométrique :

$$f_x(\lambda) = F'_x(\lambda)$$



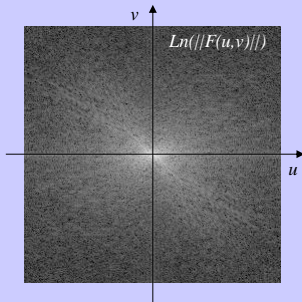
# L'analyse granulométrique

→ Etude quantitative des images par la mesure de la contribution de chaque composante à l'image globale :

Traitement linéaire :

Transformée de Fourier

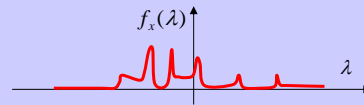
Composantes = sinusoides complexes



Morphologie mathématique :

Analyse granulométrique

Composantes = famille de boules



Historiquement : une des premières application de la morphologie mathématique était l'étude quantitative des sols poreux par analyse granulométrique de coupes microscopiques.

# Construction des filtres alternés

L'ensemble des filtres sur un treillis complet  $\mathfrak{F}$  forme un treillis  $\mathfrak{I}$

**Théorème**

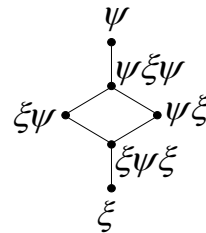
Soient  $\xi, \psi \in \mathfrak{I}$  tels que  $\xi \leq \psi$

• L'ensemble ci-contre est un sous-treillis de  $\mathfrak{I}$  :

• De plus, on a l'équivalence :

$$\psi\xi \leq \xi\psi \Leftrightarrow \psi\xi\psi = \xi\psi \Leftrightarrow \xi\psi\xi = \psi\xi$$

Mathéron 1988



dem : (1) filtres (idempotence) :  $\xi\psi = \xi\xi\psi \leq \xi\psi\xi\psi \leq \xi\psi\psi\psi = \xi\psi$

$$\xi\psi\xi = \xi\xi\xi\psi\xi \leq \xi\psi\xi\xi\psi\xi \leq \xi\psi\psi\psi\psi\xi = \xi\psi\xi$$

(2) ordres :

$$\xi = \xi\xi\xi \leq \xi\psi\xi \leq \psi\psi\xi = \psi\xi = \psi\xi\xi \leq \psi\xi\psi \leq \psi\psi\psi = \psi$$

$$\xi\psi\psi = \xi\psi = \xi\xi\psi$$

(3) plus petit majorant :

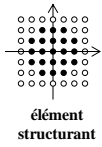
soit  $\zeta$  un filtre tel que  $\zeta \geq \xi\psi$  et  $\zeta \geq \psi\xi$  alors  $\zeta = \zeta\zeta \geq \psi\xi\xi\psi = \psi\xi\psi$

(4) équivalence :  $\xi\psi = \psi\xi\psi \Rightarrow \xi\psi \geq \psi\xi\xi = \psi\xi$

et  $\psi\xi \leq \xi\psi \Rightarrow \psi\xi\psi \leq \xi\psi\psi = \xi\psi = \xi\xi\psi \leq \psi\xi\psi$

## Exemple de filtres alternés

On prend :  $\xi = \gamma$  (ouverture morphologique)     $\psi = \varphi$  (fermeture morphologique)



Antoine MANZANERA - ENSTA/UTIS

69

## Filtres alternés séquentiels

Soit  $(\gamma_\lambda)_{\lambda \geq 0}$  une granulométrie, et  $(\gamma_\lambda^* = \varphi_\lambda)_{\lambda \geq 0}$

l'anti-granulométrie associée

Alors les opérateurs suivants :

$$\Theta_\lambda = \varphi_\lambda \gamma_\lambda \dots \varphi_2 \gamma_2 \varphi_1 \gamma_1$$

$$\Xi_\lambda = \gamma_\lambda \varphi_\lambda \dots \gamma_2 \varphi_2 \gamma_1 \varphi_1$$

sont des filtres, dits *filtres alternés séquentiels* associés à la granulométrie  $(\gamma_\lambda)_{\lambda \geq 0}$

Propriétés d'absorption :

$$\lambda \leq \lambda' \Rightarrow \begin{cases} \Theta_{\lambda'} \Theta_\lambda = \Theta_{\lambda'} & \text{mais } \Theta_\lambda \Theta_{\lambda'} \leq \Theta_{\lambda'} \\ \Xi_\lambda \Xi_{\lambda'} = \Xi_{\lambda'} & \text{mais } \Xi_{\lambda'} \Xi_\lambda \leq \Xi_{\lambda'} \end{cases}$$

Antoine MANZANERA - ENSTA/UTIS

Serra 1988 70

## Filtres alternés séquentiels : démonstration des propriétés

Filtre morphologique (idempotence) :

$$\lambda \leq \lambda' \Rightarrow \gamma_{\lambda'} \leq \gamma_{\lambda} \leq \phi_{\lambda} \leq \phi_{\lambda'} \quad (*)$$

$$(*) \Rightarrow \phi_{\lambda} \gamma_{\lambda} \geq \gamma_{\lambda} \gamma_{\lambda} = \gamma_{\lambda} \geq \gamma_{\lambda'} \Rightarrow \phi_{\lambda'} \gamma_{\lambda'} \phi_{\lambda} \gamma_{\lambda} \geq \phi_{\lambda'} \gamma_{\lambda'} \gamma_{\lambda} = \phi_{\lambda'} \gamma_{\lambda'}$$

et  $(*) \Rightarrow \phi_{\lambda} \gamma_{\lambda} \leq \phi_{\lambda} \phi_{\lambda} = \phi_{\lambda} \leq \phi_{\lambda'} \Rightarrow \phi_{\lambda} \gamma_{\lambda} \phi_{\lambda'} \gamma_{\lambda'} \leq \phi_{\lambda'} \phi_{\lambda'} \gamma_{\lambda'} = \phi_{\lambda'} \gamma_{\lambda'}$

$$\text{donc } \lambda \leq \lambda' \Rightarrow \phi_{\lambda} \gamma_{\lambda} \phi_{\lambda'} \gamma_{\lambda'} \leq \phi_{\lambda'} \gamma_{\lambda'} \leq \phi_{\lambda'} \gamma_{\lambda'} \phi_{\lambda} \gamma_{\lambda}$$

d'où  $\phi_{\lambda} \gamma_{\lambda} \dots \phi_2 \gamma_2 \phi_1 \gamma_1 \phi_{\lambda} \gamma_{\lambda} \dots \phi_2 \gamma_2 \phi_1 \gamma_1 \geq \phi_{\lambda} \gamma_{\lambda} \phi_{\lambda'} \gamma_{\lambda'} \dots \phi_2 \gamma_2 \phi_1 \gamma_1 = \phi_{\lambda} \gamma_{\lambda} \dots \phi_2 \gamma_2 \phi_1 \gamma_1$

et  $\phi_{\lambda} \gamma_{\lambda} \dots \phi_2 \gamma_2 \phi_1 \gamma_1 \phi_{\lambda} \gamma_{\lambda} \dots \phi_2 \gamma_2 \phi_1 \gamma_1 \leq \phi_{\lambda} \gamma_{\lambda} \phi_{\lambda'} \gamma_{\lambda'} \dots \phi_2 \gamma_2 \phi_1 \gamma_1 = \phi_{\lambda} \gamma_{\lambda} \dots \phi_2 \gamma_2 \phi_1 \gamma_1$

Propriétés d'absorption :

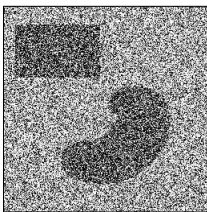
$$\begin{aligned} \Theta_{\lambda} \Theta_{\lambda} &= (\phi_{\lambda} \gamma_{\lambda} \dots \phi_{\lambda+1} \gamma_{\lambda+1}) (\phi_{\lambda} \gamma_{\lambda} \dots \phi_2 \gamma_2 \phi_1 \gamma_1) (\phi_{\lambda} \gamma_{\lambda} \dots \phi_2 \gamma_2 \phi_1 \gamma_1) \\ &= (\phi_{\lambda} \gamma_{\lambda} \dots \phi_{\lambda+1} \gamma_{\lambda+1}) (\phi_{\lambda} \gamma_{\lambda} \dots \phi_2 \gamma_2 \phi_1 \gamma_1) = \Theta_{\lambda} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Theta_{\lambda} \Theta_{\lambda'} &= (\phi_{\lambda} \gamma_{\lambda} \dots \phi_2 \gamma_2 \phi_1 \gamma_1) (\phi_{\lambda} \gamma_{\lambda} \dots \phi_{\lambda+1} \gamma_{\lambda+1}) (\phi_{\lambda} \gamma_{\lambda} \dots \phi_2 \gamma_2 \phi_1 \gamma_1) \\ &\leq \Theta_{\lambda'} \end{aligned}$$

Antoine MANZANERA - ENSTA/UTIS

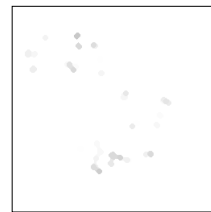
71

## Application à la réduction du bruit

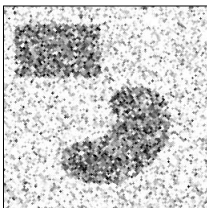


Original

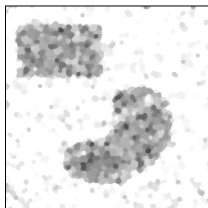
Les filtres alternés séquentiels conduisent à une bonne réduction du bruit grâce à une élimination progressive des pics et des creux de faible surface.



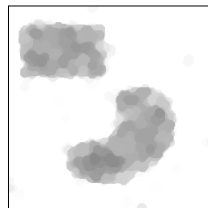
Application directe du filtre alterné  $\gamma_4 \phi_4$



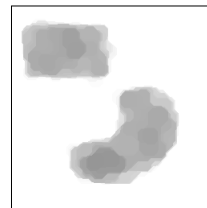
$E_1$



$E_2$



$E_5$

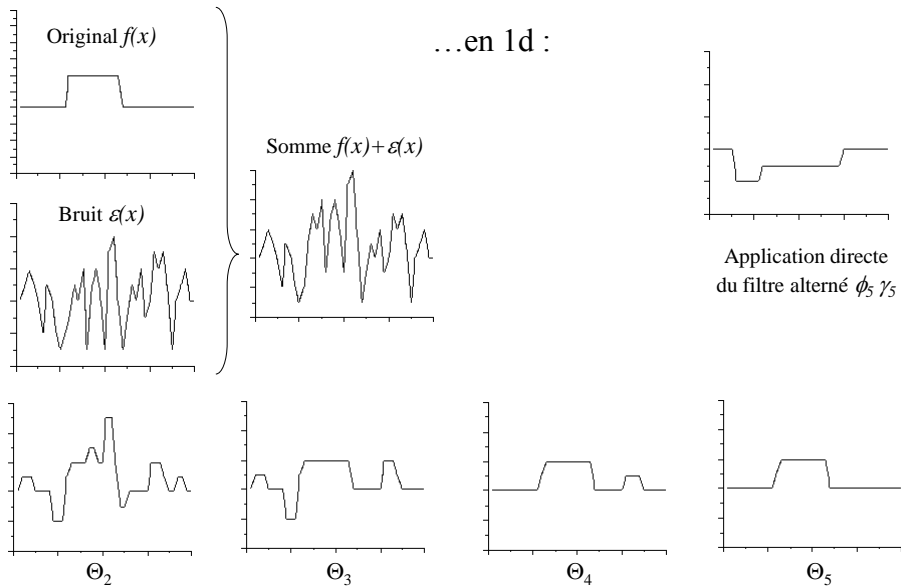


$E_8$

Antoine MANZANERA - ENSTA/UTIS

72

## Application à la réduction du bruit



## Espace d'échelle morphologique

Une granulométrie induit un *espace d'échelle* (scale-space), qui fournit une représentation des images à différents niveaux de détail.



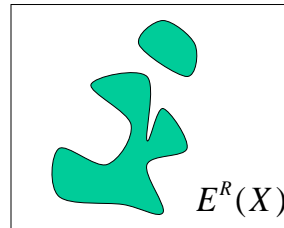
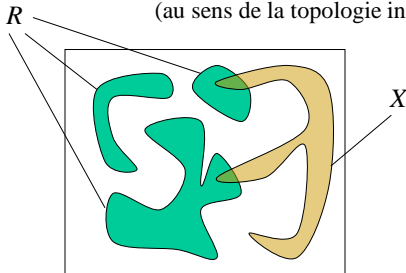
## Retour à la reconstruction géodésique

posons 
$$\begin{cases} (\delta_{B_1}^R)^0(X) = X \\ (\delta_{B_1}^R)^n(X) = \delta_{B_1}^R((\delta_{B_1}^R)^{n-1}(X)) \text{ pour } n > 0 \end{cases}$$

La reconstruction géodésique de  $X$  dans  $R$  est définie par :

$$E_{B_1}^R(X) = \sup_{n \geq 0} \{ (\delta_{B_1}^R)^n(X) \}$$

Dans le cadre ensembliste, c'est l'ensemble des composantes connexes (au sens de la topologie induite par  $B_1$ ) de  $R$  qui intersectent  $X$  :



Antoine MANZANERA - ENSTA/UTIS

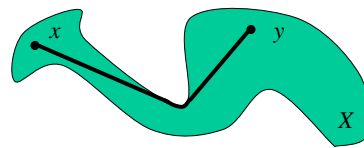
75

## Mesures géodésiques

$x, y \in X$   
La **distance géodésique** entre  $x$  et  $y$  dans  $X$  :

$$d_X(x, y) = \min \{ n \geq 0; x \in (\delta_{B_1}^X)^n(\{y\}) \}$$

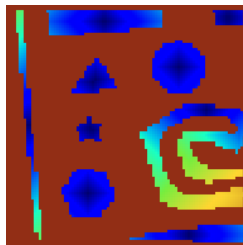
C'est la longueur du (ou des) plus court(s) chemin(s) **dans**  $X$  entre  $x$  et  $y$ .



Soit  $X$  une composante connexe.

La **fonction de propagation** de  $X$  :

$$\begin{aligned} \Pi_X : X &\rightarrow \mathbf{N} \\ x &\mapsto \max \{ d_X(x, y); y \in X \} \end{aligned}$$



Soit  $X$  une composante connexe.

Le **diamètre géodésique** de  $X$  :

$$\begin{aligned} \Delta_X &= \max \{ \Pi_X(x); x \in X \} \\ &= \max \{ d_X(x, y); x, y \in X \} \end{aligned}$$

Antoine MANZANERA - ENSTA/UTIS

76

## Etiquetage des composantes connexes

La première application de la reconstruction géodésique est l'analyse individuelle de particules, qui consiste à extraire les composantes connexes l'une après l'autre par reconstruction du premier pixel rencontré lors d'un balayage vidéo :



Image binaire



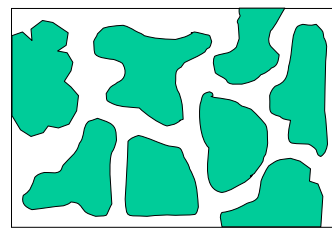
Etiquetage des composantes connexes

Antoine MANANERA - ENSTA/UTIS

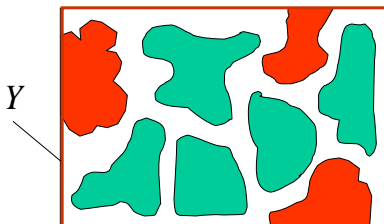
77

## Suppression des objets touchant le bord de l'image

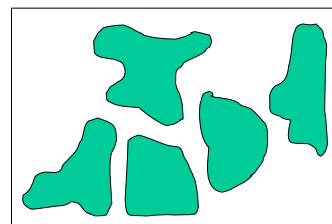
La suppression des objets touchant le bord de l'image binaire  $X$  s'obtient par différence avec la reconstruction du bord dans  $X$  :



$X$



$Y$



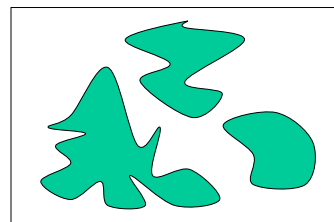
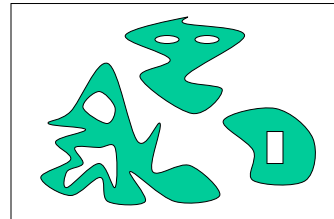
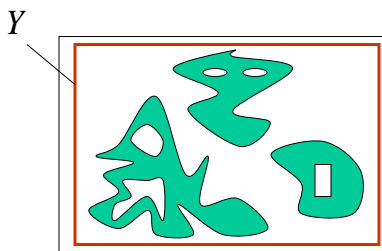
$X \setminus E^X(Y)$

Antoine MANANERA - ENSTA/UTIS

78

## Bouchage de trous

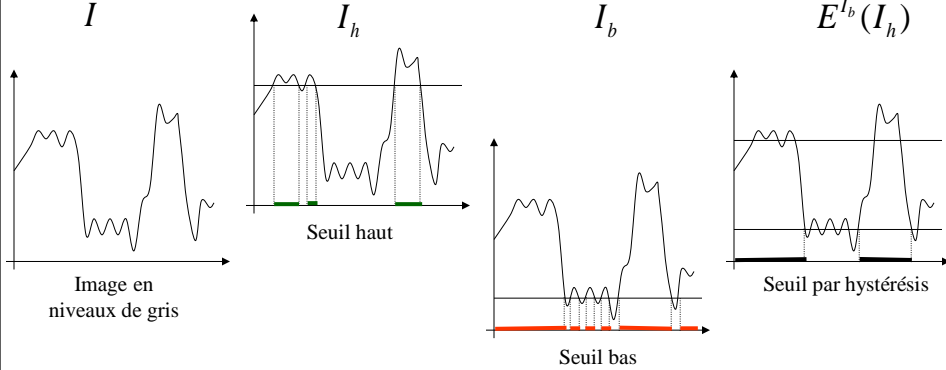
Le bouchage de trous dans l'image binaire (bidimensionnelle !)  $X$  s'obtient par complément de la reconstruction dans  $X^c$  d'un ensemble qui n'intersecte pas  $X$  :



Antoine MANZANERA - ENSTA/UTIS

79

## Seuillage par hystérésis



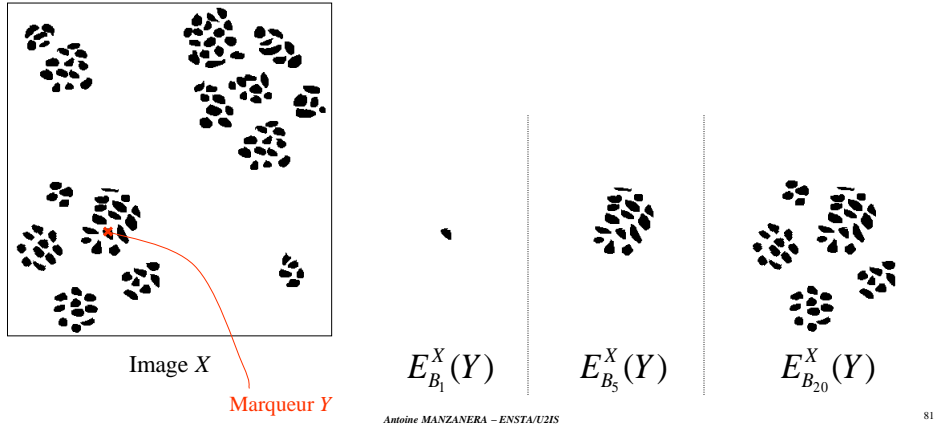
Antoine MANZANERA - ENSTA/UTIS

80



## Connexions généralisées

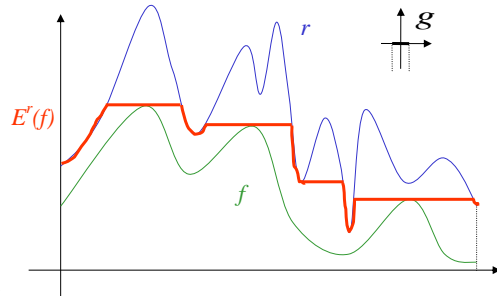
En faisant varier la taille des éléments structurants utilisés dans les reconstructions, on obtient une hiérarchie de voisinages, et donc une topologie à divers degrés de détails :



## Reconstruction fonctionnelle

La dilatation géodésique de  $f$  dans  $r$  :

$$\delta_g^r(f) = \delta_g(f) \wedge r$$



La reconstruction géodésique de  $f$  dans  $r$  :

$$E_g^r(f) = \sup_{n \geq 0} \{ (\delta_g^r)^n(f) \}$$

# Extrema régionaux

La notion d'extremum régional joue un rôle important pour les image numériques, en particulier dans le calcul des opérateurs géodésiques. Il s'agit de « plateaux », au bord desquels on ne peut que descendre (pour les maxima régionaux), ou monter (pour les minima régionaux) strictement.

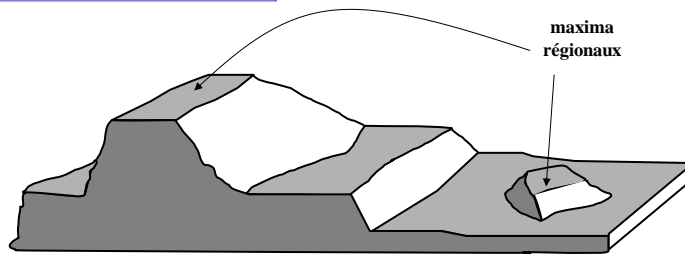
Soit  $f$  une fonction numérique.

$$f : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{N}$$

$$SG_i(f) = \{x \in \mathbf{R}^n / f(x) \geq i\}$$

$$max_f = \bigcup_{i \in \mathbf{N}} \{SG_i(f) \setminus (E^{SG_i(f)}(SG_{i+1}(f)))\}$$

Un point  $x$  appartient à un maximum régional du graphe de  $f$  lorsqu'on ne peut pas atteindre un point  $y$  tel que  $f(y) > f(x)$  sans redescendre strictement :

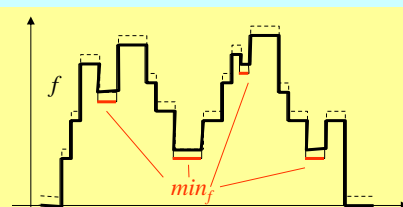
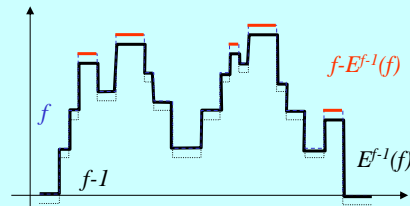
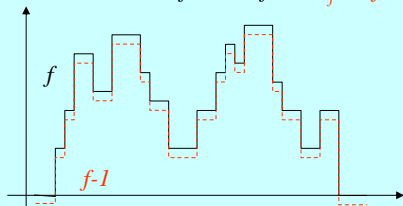


Antoine MANZANERA - ENSTA/UTIS

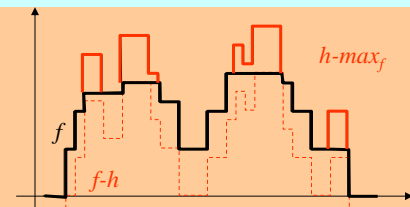
83

# Calcul des maxima régionaux

Les maxima régionaux d'une fonction numérique  $f$  peuvent se calculer à partir de la reconstruction de  $f-1$  sous  $f$  :  $max_f = f - E^{f-1}(f)$



Minima régionaux : par dualité



Généralisation : h-extrema régionaux

Antoine MANZANERA - ENSTA/UTIS

84

## Erodés ultimes

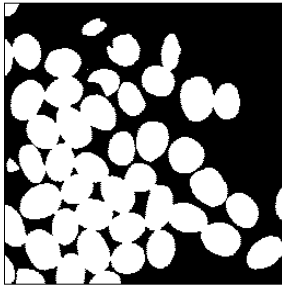
Les maxima régionaux de la transformée en distance correspondent aux composantes connexes qui disparaissent lors d'érosions successives.

$F_X^d$  la transformée en distance d de l'ensemble X.

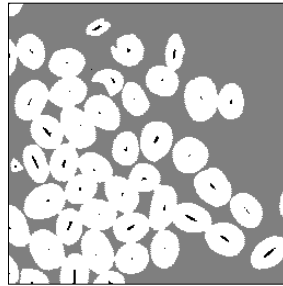
$$\begin{aligned} SG_i(F_X^d) &= \{x \in \mathbf{R}^n / F_X^d(x) \geq i\} \\ &= \{x \in \mathbf{R}^n / d(x, X^c) \geq i\} \\ &= \mathcal{E}_{B_i}(X) \end{aligned}$$

$$\max_{F_X^d} = \bigcup_{i \in \mathbf{N}} \{SG_i(F_X^d) \setminus (E^{SG_i(F_X^d)}(SG_{i+1}(F_X^d)))\} = ERO\_ULT(X) = \bigcup_{i \in \mathbf{N}} \{\mathcal{E}_{B_i}(X) \setminus (E^{\mathcal{E}_{B_i}(X)}(\mathcal{E}_{B_{i+1}}(X)))\}$$

Application : singularisation de particules se recouvrant partiellement :

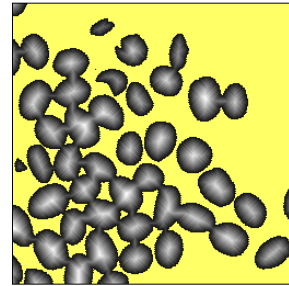


original



érodés ultimes (en noir)

Antoine MANZANERA - ENSTA/UTIS



transformée en distance

85

## Ouvertures et fermetures par reconstruction

La reconstruction géodésique est un filtre morphologique :

$$x \leq y \Rightarrow E^r(x) \leq E^r(y) \qquad E^r(E^r(x)) = E^r(x)$$

Si  $\xi$  (resp.  $\psi$ ) est un opérateur anti-extensif (resp. extensif)

$$\text{alors l'opérateur : } E^x(\xi(x)) \quad (\text{resp. } (E^{x^c}((\psi(x))^c))^c)$$

est une ouverture (resp. fermeture) algébrique.

Cas particulier important :  $\xi = \gamma$  (ouverture) et  $\psi = \phi$  (fermeture) :

ouverture par reconstruction :  $E^x(\gamma(x))$

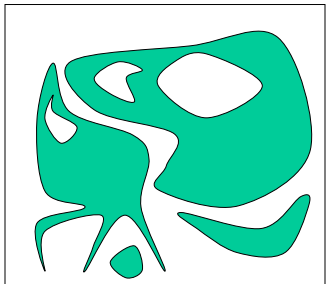
fermeture par reconstruction :  $(E^{x^c}((\phi(x))^c))^c$

Antoine MANZANERA - ENSTA/UTIS

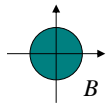
86

## Ouvertures et fermetures par reconstruction

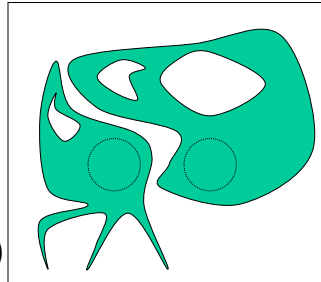
L'ouverture par reconstruction élimine les composantes connexes qui n'appartiennent pas à l'ouvert sans modifier les autres :



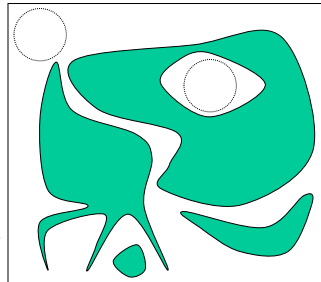
$X$



ouverture par reconstruction  
 $E^X(\gamma_B(X))$



fermeture par reconstruction  
 $(E^{X^c}((\varphi_B(X))^c))^c$



La fermeture par reconstruction est définie par dualité :

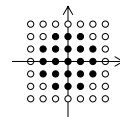
Antoine MANZANERA - ENSTA/UTIS

87

## Ouvertures et fermetures par reconstruction

Par extension, les ouvertures et fermetures par reconstruction élimine les structures en préservant les contours des images numériques :

élément structurant  
 de l'ouverture  
 morphologique :



original



ouverture par reconstruction



fermeture par reconstruction

Antoine MANZANERA - ENSTA/UTIS

88

## Nivellements – Définitions

Soit  $(V, E)$  un graphe avec  $E \subset \wp_2(V)$ .

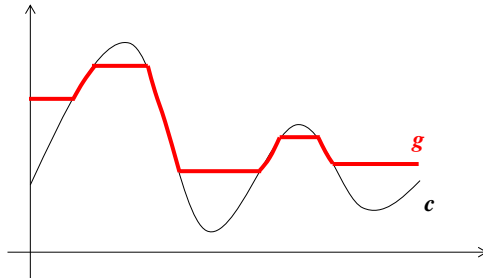
$$c : V \rightarrow \mathbb{N}$$

$$g : V \rightarrow \mathbb{N}$$

$g$  est un **nivellement** de  $c$  pour  $(V, E) \Leftrightarrow \forall \{u, v\} \in E, g(u) < g(v) \Rightarrow \begin{cases} g(u) \geq c(u) \\ \text{et} \\ g(v) \leq c(v) \end{cases}$

Remarque : Il y a de nombreuses exemples de nivellement d'images : seuillage, saturation, clamping,...

[Meyer 98]



Antoine MANZANERA – ENSTA/UTIS

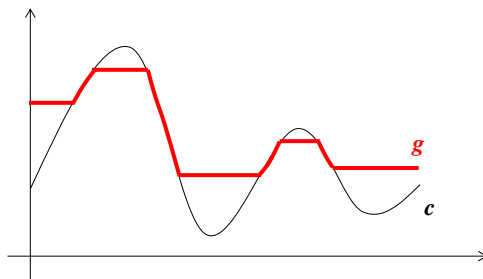
89

## Nivellements – Définitions

(Conséquences)

1.  $g \leq c$  est un **nivellement inférieur** de  $c \Leftrightarrow \forall \{u, v\} \in E, g(u) < g(v) \Rightarrow g(u) = c(u)$

2.  $g \geq c$  est un **nivellement supérieur** de  $c \Leftrightarrow \forall \{u, v\} \in E, g(u) < g(v) \Rightarrow g(v) = c(v)$



Antoine MANZANERA – ENSTA/UTIS

90

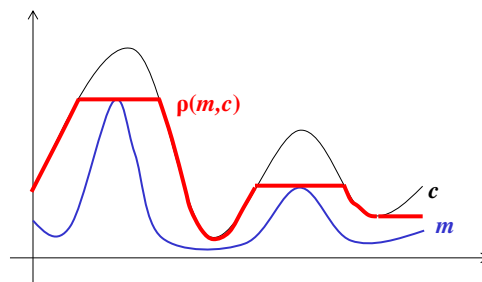
## Nivellements et reconstructions

### Propriété :

$$m : V \rightarrow \mathbb{N}$$

$$c : V \rightarrow \mathbb{N}, m \leq c$$

La **reconstruction** de  $m$  dans  $c$  est le plus petit nivellement (inférieur)  $\rho$  de  $c$  tel que :  
 $m \leq \rho \leq c$



Antoine MANZANERA – ENSTA/UTIS

91

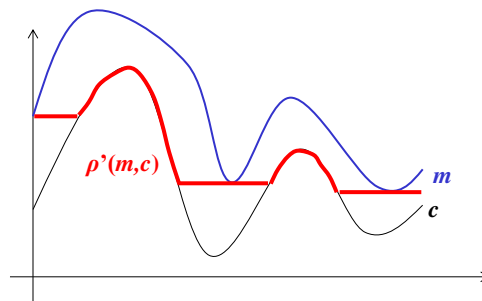
## Nivellements et reconstructions

### Définition :

Si  $m \leq c$ , on peut de même définir la **reconstruction duale** de  $m$  dans  $c$  comme le plus grand nivellement (supérieur)  $\rho'$  de  $c$  tel que :  $c \leq \rho' \leq m$

**Propriété (dualité) :** Si  $g$  est à valeur dans  $[0, M]$ , soit  $\tilde{g} = M - g$  (involution de  $g$ ).

Si  $m$  et  $c$  sont à valeur dans  $[0, M]$ , alors  $\rho'(m, c) = \rho(\tilde{m}, \tilde{c}) = M - g$



Antoine MANZANERA – ENSTA/UTIS

92

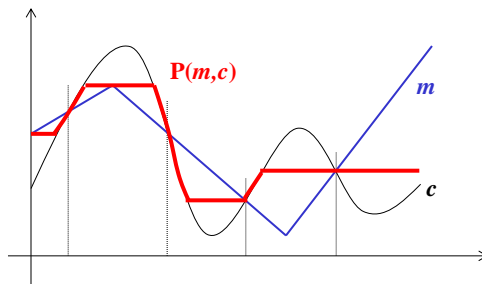
# Nivellements et reconstructions

**Définition :**  $m : V \rightarrow \mathbb{N}, c : V \rightarrow \mathbb{N}$

La **reconstruction mixte** de  $m$  dans  $c$  est définie par :

$$P(m, c) = \rho(m_{\leq}, c_{\leq}) \vee \rho'(m_{\geq}, c_{\geq})$$

avec  $m_{\leq} = m \cdot 1_{\{m \leq c\}}, c_{\leq} = c \cdot 1_{\{m \leq c\}}, m_{\geq} = m \cdot 1_{\{m \geq c\}}, c_{\geq} = c \cdot 1_{\{m \geq c\}}$



Antoine MANZANERA - ENSTA/UTIS

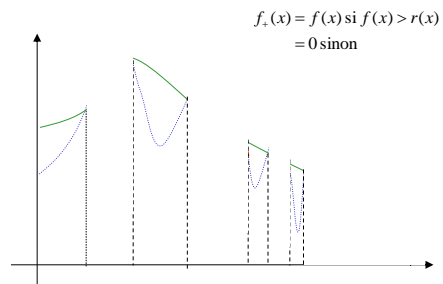
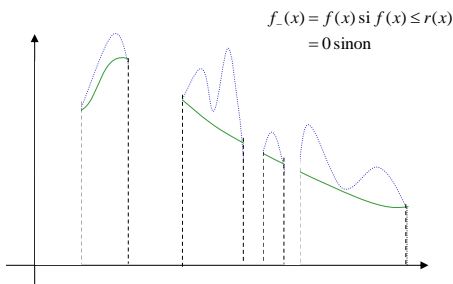
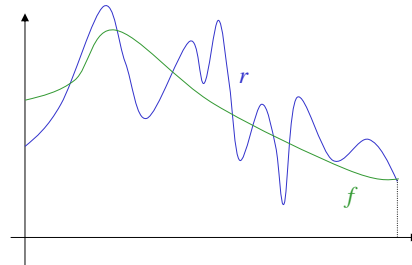
93

# Nivellements : reconstruction mixte

Cas où la fonction marqueur  $f$  et la fonction de référence  $r$  ne sont pas ordonnées

On décompose  $f$  en deux fonctions :

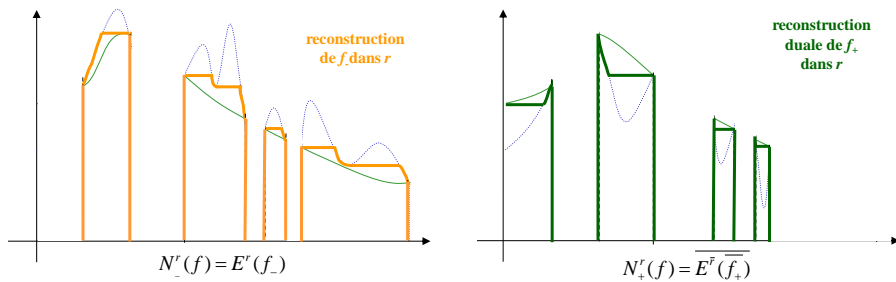
$$\begin{aligned} f &= f_- + f_+ \\ &= f_- \vee f_+ \end{aligned}$$



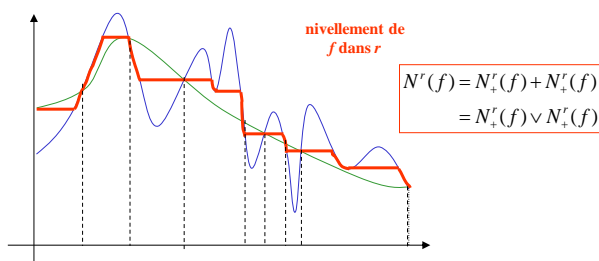
Antoine MANZANERA - ENSTA/UTIS

94

## Nivellements : reconstruction mixte



Les *nivellements* définissent des *opérateurs connexes*, qui simplifient l'image par *sélection* des ensembles de niveaux ou de leurs complémentaires :



Antoine MANZANERA - ENSTA/UTIS

95

## Exemples de reconstructions mixtes



original



filtre gaussien



nivellement



filtre médian



nivellement

Antoine MANZANERA - ENSTA/UTIS

96



## Nouvel espace d'échelles morphologique

Une granulométrie induit un espace d'échelle via les *filtres alternés séquentiels par reconstruction* (i.e. nivellement des filtres alternés séquentiels) :



Antoine MANZANERA - ENSTA/UTIS

97

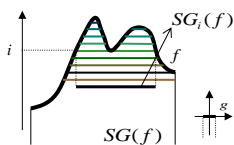
## Opérations sur les ensembles de niveau

Par définition, la dilatation (resp. l'érosion) fonctionnelle par un élément structurant plan  $g$  peut être calculée à partir des dilatations (resp. érosions) des sections du sous-graphe (ensembles de niveau) par le support de  $g$ .



$$f \leftrightarrow SG(f)$$

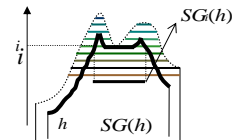
$$SG(f) = \bigcup_{i \in \mathbf{R}} SG_i(f) \times \{i\}$$



$$SG_i(f) = \{x \in \mathbf{R}^n / f(x) \geq i\}$$

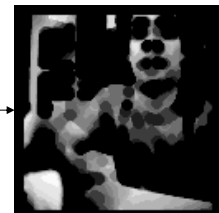


$$SG_i(h) = \mathcal{E}_{\text{supp}(g)}(SG_i(f))$$



$$SG(h) = \bigcup_{i \in \mathbf{R}} SG_i(h) \times \{i\}$$

$$SG(h) \leftrightarrow h = \mathcal{E}_g(f)$$

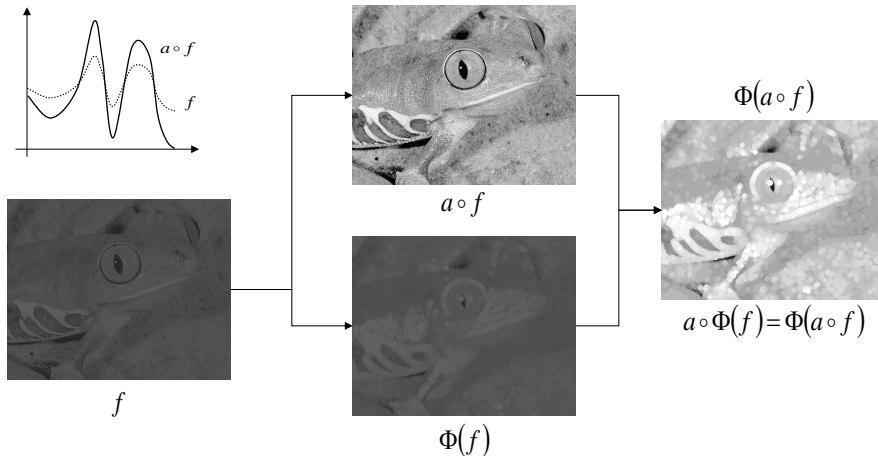


Antoine MANZANERA - ENSTA/UTIS

98

## Invariance par changement de contraste

Une conséquence de la propriété précédente est l'*invariance par changement de contraste* : les opérateurs morphologiques *commutent* avec les *anamorphoses*, c'est-à-dire les transformations croissantes des niveaux de gris :



Antonio MANZANERA - ENSTAUTCIS

99

## Morphologie mathématique et EDP

Une transformation invariante par contraste (i.e. une transformation morphologique) doit respecter les relations d'inclusion (= ordre) des ensembles de niveau. On montre que cela correspond à un déplacement de lignes de niveau (i.e. frontière des ensembles de niveau) dans la direction de leur courbure, et proportionnellement au module du gradient. Exprimé en termes d'équations aux dérivées partielles (EDP), cela se traduit par une équation de la forme :

$$\frac{\partial I}{\partial t} = \|\nabla I\| G(\text{curv}(I), t)$$

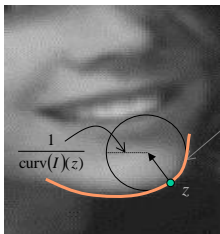
où l'on note  $\begin{cases} I_x = \frac{\partial I}{\partial x} & I_{xx} = \frac{\partial^2 I}{\partial x^2} & I_{xy} = \frac{\partial^2 I}{\partial x \partial y} \\ I_y = \frac{\partial I}{\partial y} & I_{yy} = \frac{\partial^2 I}{\partial y^2} \end{cases}$

Avec :  $\text{curv}(I) = \text{div} \left( \frac{\nabla I}{\|\nabla I\|} \right) = \frac{I_{xx}I_y^2 - 2I_{xy}I_xI_y + I_{yy}I_x^2}{(I_x^2 + I_y^2)^{3/2}}$

et avec  $G(x,y)$  continue et croissante par rapport à  $x$ .

**Dilatation** :  $G(x,y) = I$ ;  $\frac{\partial I}{\partial t} = \|\nabla I\|$

**Erosion** :  $G(x,y) = -I$ ;  $\frac{\partial I}{\partial t} = -\|\nabla I\|$



La courbure de  $I$  au point  $z$  est égale à l'inverse du rayon du cercle osculateur à la courbe isophote en  $z$ , c'est-à-dire à la courbe de niveau :

$$I^{(z)} = \{(x,y) / I(x,y) = I(z)\}$$

courbe isophote de valeur  $I(z)$

L'intérêt du formalisme EDP est de fournir un cadre rigoureux aux transformations utilisant des éléments structurants infinitésimaux, mais également de généraliser les filtres (espaces d'échelles) morphologiques.

[Alvarez et al 92]

Antonio MANZANERA - ENSTAUTCIS

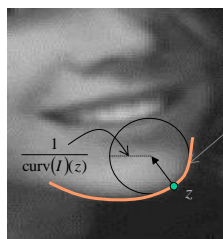
100

## Espace d'échelle, EDP et filtrage morphologique

Le filtrage morphologique peut être exprimé dans le formalisme des Equations aux Dérivées Partielles (EDP). Ici la simplification progressive de l'image se traduit par un phénomène de diffusion. Le respect du principe d'invariance par changement de contraste implique la contrainte suivante sur la forme de l'équation :

$$\frac{\partial I}{\partial t} = \|\nabla I\| G(\text{curv}(I), t)$$

avec  $G(x,y)$  continue et croissante par rapport à  $x$ .

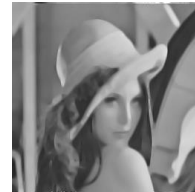


courbe isophote  
de valeur  $I(z)$

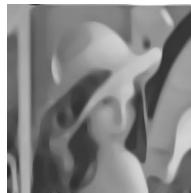
L'une des équations de diffusion invariante par changement de contraste la plus simple dans le formalisme EDP est la diffusion par courbure moyenne : ( $G(x,y) = x$ )



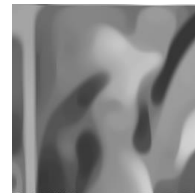
$t = 0$



$t = 5$



$t = 20$



$t = 100$

$$\frac{\partial I}{\partial t} = \|\nabla I\| \text{curv}(I)$$

diffusion par courbure moyenne

Antoine MANZANERA – ENSTA/UTIS

101

## Filtres morphologiques – Conclusion

### A RETENIR POUR CE COURS :

- Concepts de base : Définition d'un filtre morphologique, Principes de construction des différentes familles de filtres morphologiques.
- Ouvertures et Fermetures algébriques.
- Granulométries et analyse quantitative.
- Filtres alternées : limitation des filtres alternées duaux, filtres alternées séquentiels, applications.
- Filtres connexes et autres applications de la reconstruction géodésique.
- Liens entre morphologie et Equations aux Dérivées Partielles : Intérêt et Principe d'unification.

Antoine MANZANERA – ENSTA/UTIS

102

## Chapitre 3 : L'approche morphologique de la segmentation

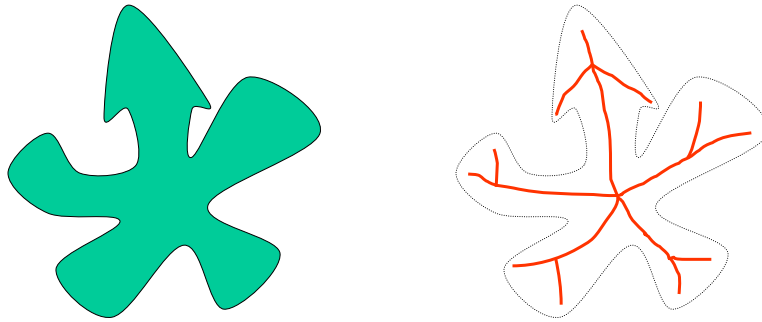
- (1) Squelettes : introduction.
- (2) Squelette morphologique.
- (3) Squelette multi-échelle par fonction de choc géodésique
- (4) Ligne de Partage des Eaux, principe et applications

## Chapitre 3 : L'approche morphologique de la segmentation

- (1) Squelettes : introduction.**
- (2) Squelette morphologique.
- (3) Squelette multi-échelle par fonction de choc géodésique
- (4) Ligne de Partage des Eaux, principe et applications

## Squelettes : motivations

L'objectif de la squelettisation est de représenter un ensemble avec un minimum d'information, sous une forme qui soit à la fois simple à extraire et commode à manipuler.



*Remarque* : Ce cours aborde essentiellement le cas des ensembles bidimensionnels (images binaires 2D), mais la plupart des notions s'appliquent également aux dimensions supérieures.

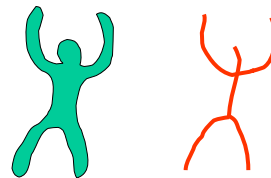
Antoine MANANERA – ENSTA/UTIS

105

## Squelettes : propriétés recherchées (1)

### *Préservation de la géométrie*

Le squelette doit rendre compte des propriétés géométriques de la forme : ramifications, parties allongées...



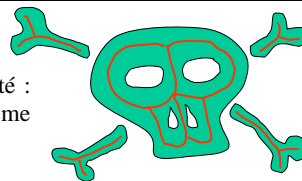
### *Épaisseur nulle*

Le squelette doit être constitué de courbes sans épaisseur.



### *Préservation de la topologie*

Le squelette doit conserver les relations de connexité : même nombre de composantes connexes, même nombre de trous par composante connexe.



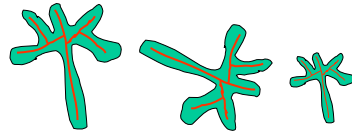
Antoine MANANERA – ENSTA/UTIS

106

## Squelettes : propriétés recherchées (2)

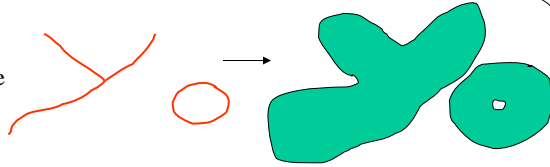
### Invariance aux transformations affines

Le squelette doit commuter avec la translation, la rotation et l'homothétie



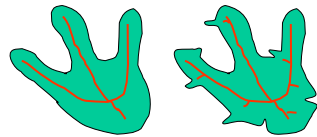
### Réversibilité

Le squelette doit permettre de retrouver la forme originale



### Continuité

Une petite modification de la forme originale doit induire une petite modification du squelette



Antoine MANZANERA - ENSTA/UTIS

107

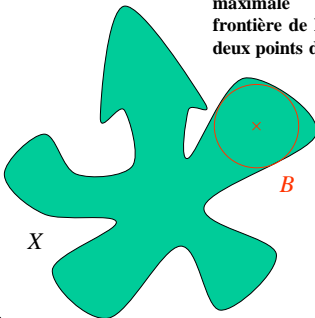
## Squelette morphologique

Le squelette morphologique est fondée sur la notion d'*axe médian* (Blum 67). Il utilise la notion de *boule maximale* :

Une boule  $B$  est dite maximale dans  $X$  si :

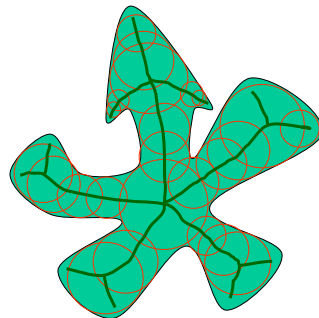
$$B \subset B' \subset X \Rightarrow B' = B$$

Propriété : une boule maximale touche la frontière de  $X$  en au moins deux points distincts



Le squelette morphologique (euclidien) est la réunion des centres de boules (euclidiennes) maximales :

$$S(X) = \bigcup_{\rho \geq 0} \{x \in \mathbf{R}^2; B(x, \rho) \text{ est maximale dans } X\}$$



Antoine MANZANERA - ENSTA/UTIS

108

## Propriétés du squelette morphologique (1)

De par sa définition, le squelette morphologique euclidien respecte la géométrie de la forme originale, et il est invariant par homothétie. Il possède de plus les propriétés suivantes :

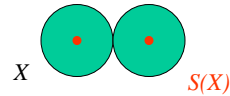
- Il est sans épaisseur (d'intérieur vide).

- Il est anti-extensif et idempotent :

$$S(X) \subset X \qquad S(S(X)) = S(X)$$

- Si  $X$  est ouvert, alors  $X$  et  $S(X)$  ont la même topologie.

Contre-exemple :



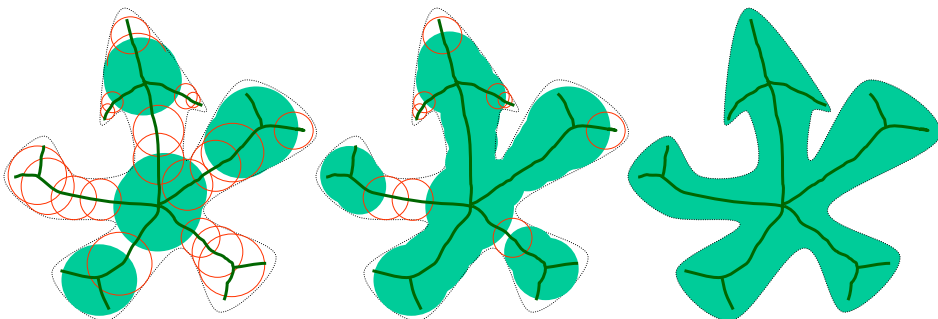
Antoine MANANERA – ENSTA/UTIS

109

## Propriétés du squelette morphologique (2)

### Réversibilité :

La donnée de la transformée en distance euclidienne de  $X$  sur  $S(X)$  permet de reconstruire exactement  $X$  :



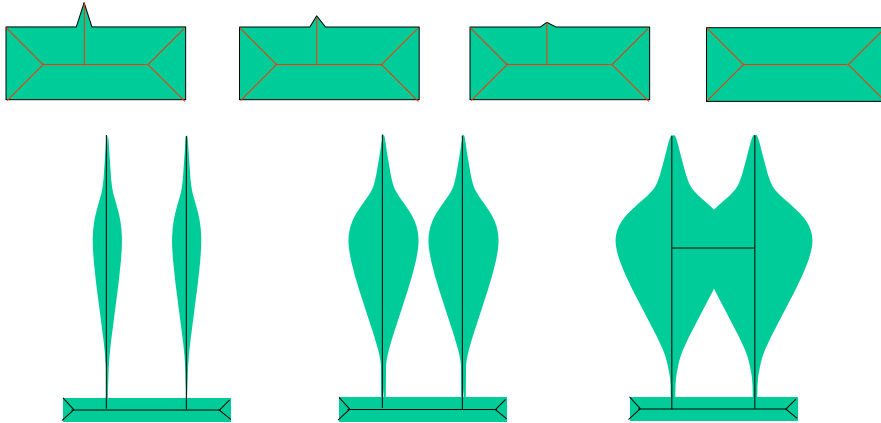
Antoine MANANERA – ENSTA/UTIS

110

## Propriétés du squelette morphologique (3)

### Non-continuité :

Le squelette morphologique euclidien n'est pas une transformation continue :



111

## Chapitre 3 : L'approche morphologique de la segmentation

- (1) Squelettes : introduction.
- (2) Squelette morphologique.**
- (3) Squelette multi-échelle par fonction de choc géodésique
- (4) Ligne de Partage des Eaux, principe et applications

Antoine MANANERA – ENSTA/UTIS

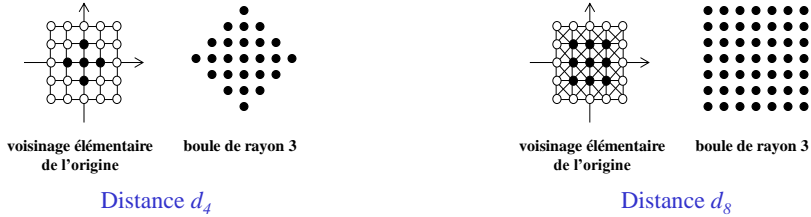
112



## Squelette morphologique : passage au discret

Dans le cas discret, les boules maximales sont les boules d'une distance discrète donnée

Exemples :



Distance  $d_4$

Distance  $d_8$

### PROPRIÉTÉ

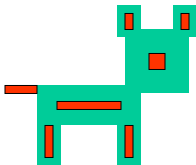
Un point  $x$  est centre d'une boule maximale de rayon  $r$  dans  $X$  si et seulement si il appartient à l'érodé de  $X$  par une boule de taille  $r$ , mais pas à l'ouvert de cet érodé par la boule élémentaire :

$$S_r(X) = \{x \in \mathbf{Z}^2; B(x, r) \text{ est maximale dans } X\}$$

$$= \mathcal{E}_{B(0,r)}(X) \setminus \mathcal{Y}_{B(0,1)}(\mathcal{E}_{B(0,r)}(X))$$

## Squelette morphologique : passage au discret

Par conséquent, le squelette morphologique est égal à l'union des résidus d'ouverture des érodés successifs de la forme originale :

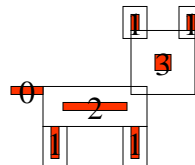


$$S(X) = \bigcup_{r \in \mathbf{N}} S_r(X)$$

$$= \bigcup_{r \in \mathbf{N}} \mathcal{E}_{B(0,r)}(X) \setminus \mathcal{Y}_{B(0,1)}(\mathcal{E}_{B(0,r)}(X)) \quad \text{Lantuéjoul 78}$$

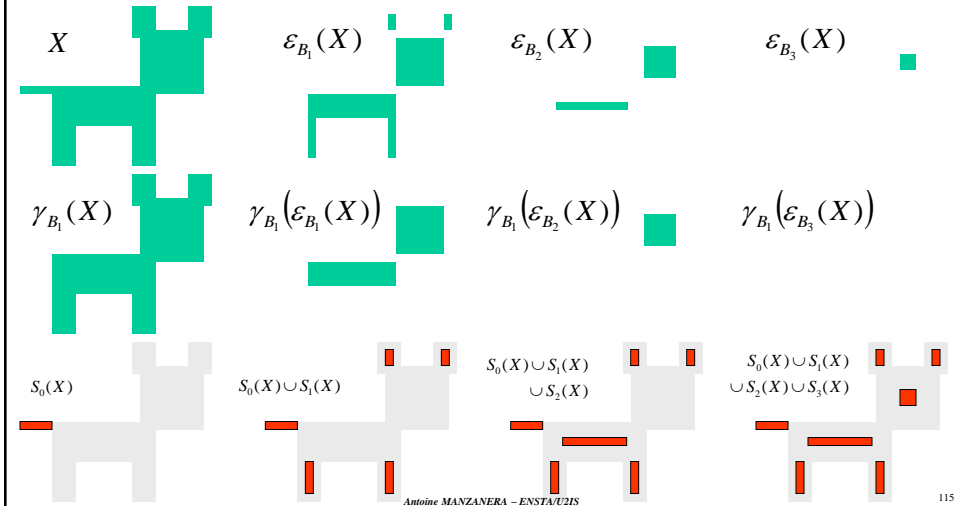
Formule d'inversion du squelette morphologique :

$$X = \bigcup_{r \in \mathbf{N}} \delta_{B(0,r)}(S_r(X))$$



## Squelette morphologique : passage au discret

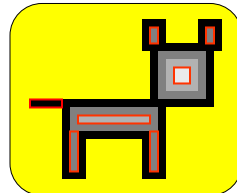
La formule de Lantuéjoul fournit un moyen explicite de calculer le squelette morphologique :



## Squelette morphologique : passage au discret

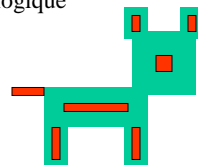
Comme l'ensemble des résidus d'ouverture coïncide avec l'ensemble des maxima locaux de la transformée en distance, le squelette morphologique discret est égal aux maxima locaux de la transformée en distance :

$$S(X) = \{x \in X; \forall y, \delta(x, y) = 1 \Rightarrow \delta(y, X^c) \leq \delta(x, X^c)\}$$



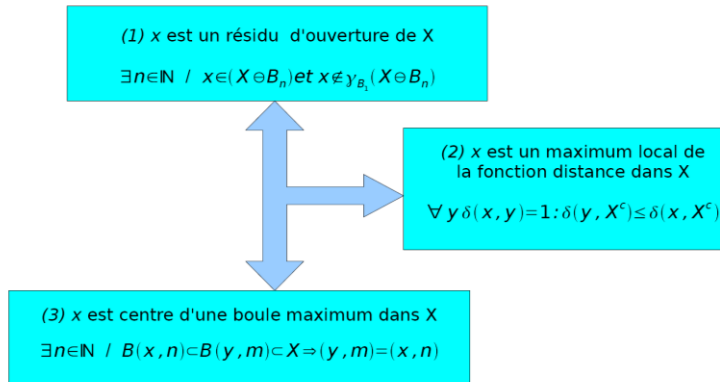
Contrairement au cas continu, le squelette morphologique ne préserve pas la topologie de la forme originale :

Les algorithmes de squelettisation connexe traitent donc le problème de préservation de la topologie directement dans le cadre discret.



## Squelette morphologique : Propriété

Les 3 propriétés suivantes sont équivalentes :



## Squelette morphologique : Propriété

(1)  $\Leftrightarrow$  (2)

$x$  est un résidu d'ouverture de  $X$

$$\Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N} / x \in (X \ominus B_n) \text{ et } x \notin \gamma_{B_1}(X \ominus B_n)$$

$$\Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N} / x \in (X \ominus B_n) \text{ et } x \notin [(X \ominus B_n) \oplus B_1] \oplus B_1$$

$$\Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N} / x \in (X \ominus B_n) \text{ et } x \notin [(X \ominus B_{n+1}) \oplus B_1]$$

$$\Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N} / x \in (X \ominus B_n) \text{ et } \forall y, \delta(x, y) = 1 : y \notin (X \ominus B_{n+1})$$

$$\Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N} / \delta(x, X^c) \geq n \text{ et } \forall y, \delta(x, y) = 1 : \delta(y, X^c) < n + 1$$

soit  $x$  est un maximum local de la fonction distance dans  $X$

## Squelette morphologique : Propriété

(3)  $\Rightarrow$  (2)

$x$  est un centre de boule maximum dans  $X$

alors  $\delta(x, X^c) = n$

Supposons  $\exists y, \delta(x, y) = 1$  et  $\delta(y, X^c) > n$

Mais dans ce cas  $\exists p, B(x, n) \subset B(y, p) \subset X$

ce qui contredit l'hypothèse

donc  $x$  est un maximum local de la fonction distance dans  $X$

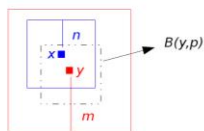
## Squelette morphologique : Propriété

(2)  $\Rightarrow$  (3)

Soit  $x$  un maximum local de la fonction distance dans  $X$

Soit  $B(x, n)$  la plus grosse boule de centre  $x$  contenue dans  $X$

Supposons  $\exists (y, m) / (y, m) \neq (x, n)$  et  $B(x, n) \subset B(y, m) \subset X$  nota :  $m < n$



Considérons alors :  $B(y, p) = B(y, m) \ominus B_n$

$x \in B(y, p)$  puisque  $B(x, n) \subset B(y, m)$

mais :  $x \notin (B(y, p) \ominus B_1)$

car sinon :  $B(x, n+1) \subset B(y, m) \subset X$

...or  $B(x, n)$  est la plus grosse boule de centre  $x$  contenue dans  $X$

Par conséquent :  $\exists z, \delta(x, z) = 1 / z \in (B(y, p) \ominus B_1)$

Mais alors :  $B(z, n+1) \subset B(y, m) \subset X$

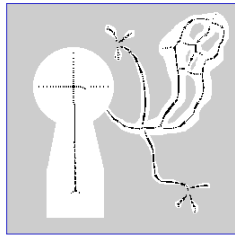
et donc  $\delta(z, X^c) = n+1$

ce qui contredit l'hypothèse.

donc  $x$  est un centre de boule maximum dans  $X$

## Squelette morphologique / Erodés ultimes

REMARQUE : Noter les parallèles entre le squelette morphologique et les érodés ultimes :



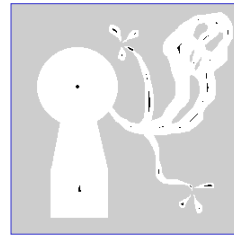
*Squelette morphologique*

||

*Maxima locaux* de la transformée en distance

||

Résidus d'*ouverture*



*Erodés ultimes*

||

*Maxima régionaux* de la transformée en distance

||

Résidus d'*ouverture par reconstruction*

Antoine MANANERA – ENSTA/UTIS

121

## Chapitre 3 : L'approche morphologique de la segmentation

- (1) Squelettes : introduction.
- (2) Squelette morphologique.
- (3) Squelette multi-échelle par fonction de choc géodésique**
- (4) Ligne de Partage des Eaux, principe et applications

Antoine MANANERA – ENSTA/UTIS

122

## Squelettes euclidiens multi-échelles

Nous présentons dans cette partie l'une des techniques les plus élégantes et les plus efficaces de squelettisation : le squelette euclidien multi-échelles.

Son principe de calcul repose sur les 4 étapes suivantes :

- 1- Associer une *étiquette unique* à chaque pixel du contour
- 2- *Propager* les valeurs des étiquettes aux pixels les plus proches
- 3- Calculer une *fonction de choc locale* selon la différence des valeurs des étiquettes entre pixels adjacents
- 4- Le squelette est obtenu par *seuillage* de la fonction de choc.

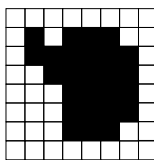
Une propriété remarquable est que, grâce au calcul récursif de la transformée en distance, chacune de ces étapes a un *coût de calcul constant*.

Antoine MANZANERA – ENSTA/UTIS

123

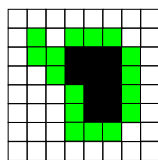
## Etiquetage de contours

Soit  $X$  une image binaire.



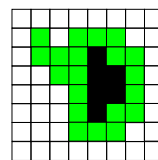
Contour en 4-connexité :

$$\partial_X^4 = \{z \in X; \exists q \notin X : d_4(z, q) = 1\}$$



Contour en 8-connexité :

$$\partial_X^8 = \{z \in X; \exists q \notin X : d_8(z, q) = 1\}$$

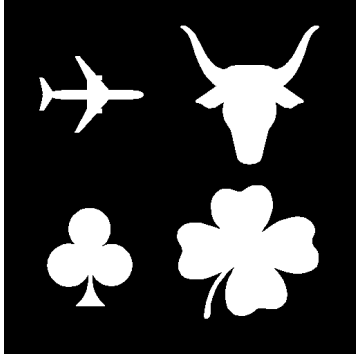


Remarque : le contour en 4-connexité forme une courbe 8-connexe pour chaque composante 8-connexe de  $X$ . Le contour en 8-connexité forme une composante 4-connexe pour chaque composante 4-connexe de  $X$ .

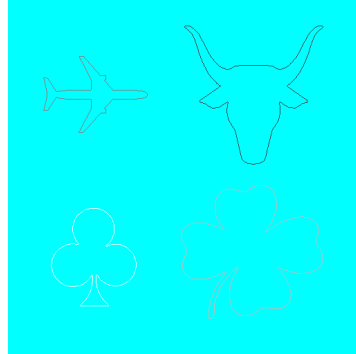
## Etiquetage de contours

L'étiquetage de contours consiste à attribuer à chaque pixel de contour de  $X$  une paire d'étiquettes  $(\Lambda, \lambda)$  tels que :

- 1-  $\Lambda$  identifie chaque composante connexe de  $X$
- 2-  $\lambda$  attribue à chaque pixel de chaque composante un numéro unique selon un certain sens de parcours.



$X$

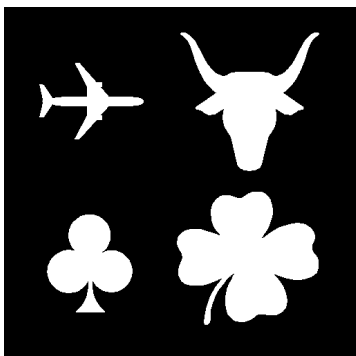


$A_X$

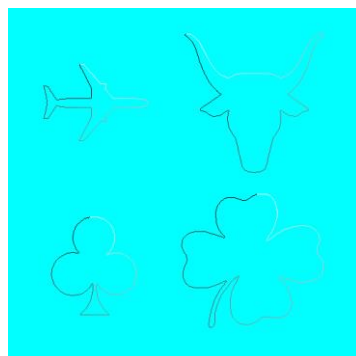
## Etiquetage de contours

L'étiquetage de contours consiste à attribuer à chaque pixel de contour de  $X$  une paire d'étiquettes  $(\Lambda, \lambda)$  tels que :

- 1-  $\Lambda$  identifie chaque composante connexe de  $X$
- 2-  $\lambda$  attribue à chaque pixel de chaque composante un numéro unique selon un certain sens de parcours.



$X$



$\lambda_X$

## Propagation des étiquettes

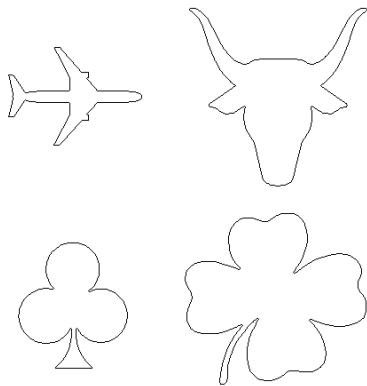
La propagation des étiquettes aux pixels les plus proches se fait simplement en utilisant l'algorithme de calcul de la transformée en distance sur le complémentaire du contour. On associe alors à chaque pixel  $(x,y)$  les coordonnées relatives  $(R_x(x,y), R_y(x,y))$  du pixel de contour le plus proche de  $(x,y)$ .

Si  $L$  est une fonction étiquette sur le contour de  $X$ , la propagation de l'étiquette  $L$  selon la distance  $d$  est la fonction définie sur  $X$  comme suit :

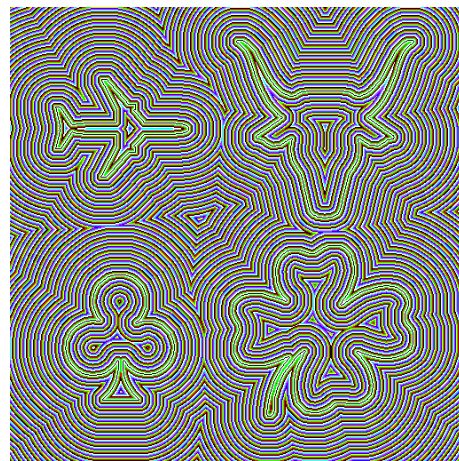
$$\Pi_L^d(x, y) = L(x + R_x, y + R_y)$$

- La propagation des étiquettes  $\Lambda$  (composantes connexes) fournit la partition de  $X$  en zones d'influence (SKIZ).
- La propagation des étiquettes  $\lambda$  (énumération de contours) calcule les zones d'influence de chaque pixel du contours, ce qui, par différenciation, fournira le squelette.

## Propagation des étiquettes



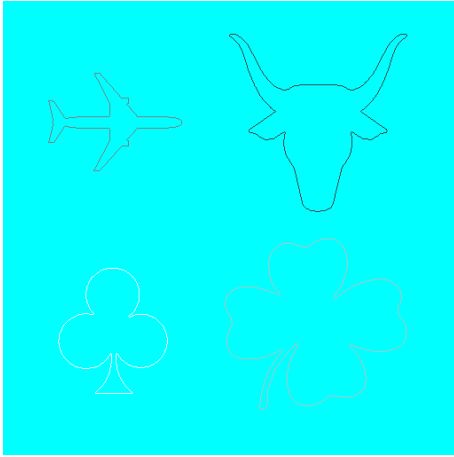
$\partial^4 X$



$F_{(\partial^4 X)^c}^{d_E}$



## Propagation des étiquettes



$\Lambda_X$

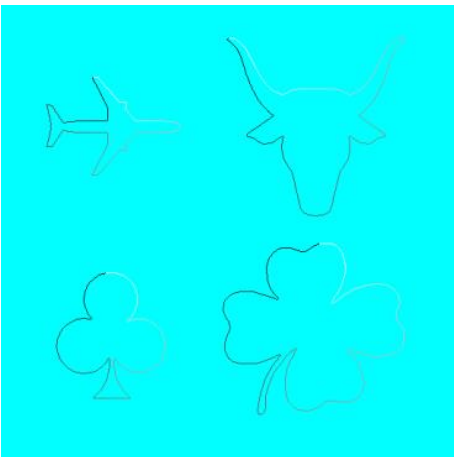


$\Pi_{\Lambda_X}^{d_E}$

Antonio MANZANERA - ENSTAUTZS

129

## Propagation des étiquettes



$\lambda_X$

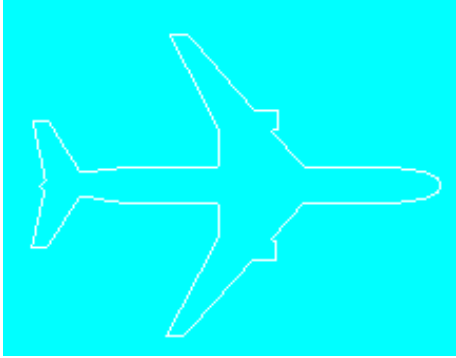


$\Pi_{\lambda_X}^{d_E}$

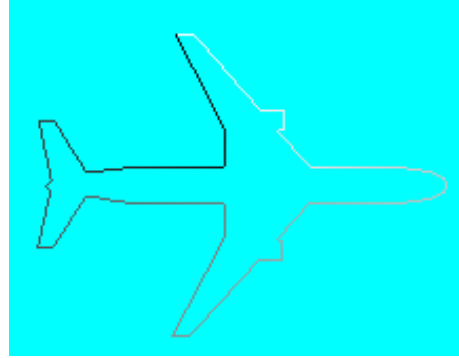
Antonio MANZANERA - ENSTAUTZS

130

## Propagation des étiquettes



$\Lambda_X$  (1 étiquette)

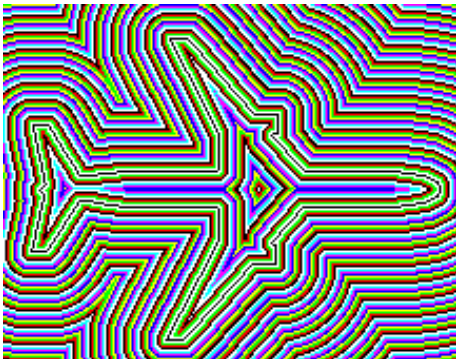


$\lambda_X$  (679 étiquettes)

Antonio MANZANERA - ENSTAUTCIS

131

## Propagation des étiquettes



$F_{(\sigma^4 X)^c}^{d_E}$



$\Pi_{\lambda_X}^{d_E}$

Antonio MANZANERA - ENSTAUTCIS

132

## Fonction de choc

- La fonction de choc associe à chaque pixel  $p$  une valeur proportionnelle à « l'éloignement » maximum entre le pixel du contour correspondant à l'étiquette de  $p$  et ceux qui correspondent à l'étiquette des pixels voisins de  $p$ .
- L'éloignement est associé à une fonction de coût  $\kappa$  définie sur le contour, où chaque pixel est identifié par sa paire d'étiquette  $(\Lambda, \lambda)$ .

On note  $N_X(p)$  le point du contour de  $X$  le plus proche de  $p$  :

$$N_X(p) = (x_p + R_x(p), y_p + R_y(p))$$

Fonction de choc 8-connexes :

$$S_8(p) = \max_{d_4(p,q)=1} \kappa(N_X(p), N_X(q))$$

Fonction de choc 4-connexes :

$$S_4(p) = \max_{d_8(p,q)=1} \kappa(N_X(p), N_X(q))$$

Remarquer la dualité : on calcule la valeur maximale dans le 4-voisinage pour un squelette 4-connexes, et réciproquement.

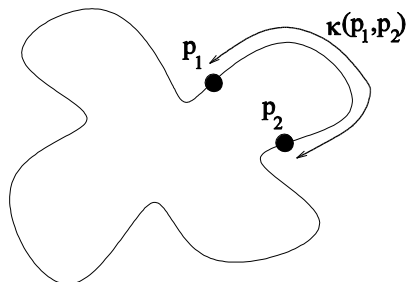
Antonio MANZANERA - ENSTAUTIS

133

## Fonction de choc

La fonction de coût associée à la fonction de choc est la distance géodésique entre 2 points du contour  $p_1 = N_X(p)$  et  $p_2 = N_X(q)$ , le long du contour de  $X$  :

$$\kappa(p_1, p_2) = d_{\partial_X}(p_1, p_2)$$

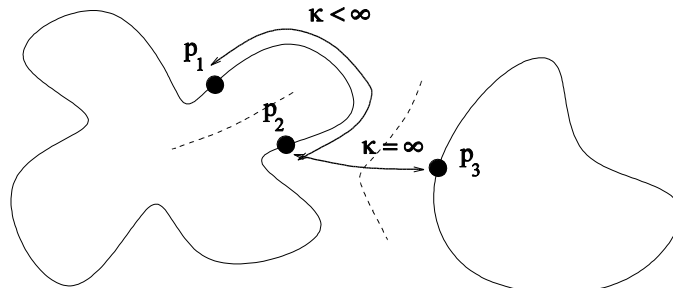


## Fonction de choc

La fonction de choc associée à la distance géodésique se calcule très simplement en comparant les étiquettes  $\Lambda_X$  et  $\lambda_X$  entre 2 pixels  $p$  et  $q$  adjacents :

- (1) Si  $\Lambda_X(p) \neq \Lambda_X(q)$ , alors  $p$  est à la frontière des zones d'influence de plusieurs contours connexes, et donc :

$$\kappa(N_X(p), N_X(q)) = \infty$$



## Fonction de choc

- (2) Si  $\Lambda_X(p) = \Lambda_X(q)$ , alors la fonction de choc est égale à la différence des étiquettes  $\lambda_X$ , modulo le nombre total de pixel du contour contenant  $p$  et  $q$ .

Fonction de choc symétrique

$$\kappa(N_X(p), N_X(q)) = \left| \Pi_{\lambda_X}^d(p) - \Pi_{\lambda_X}^d(q) \right| \bmod \left| \partial_X^p \right|$$

Nombre de pixels de la composante connexe du contour de  $X$  contenant  $p$ .

Fonction de choc asymétrique

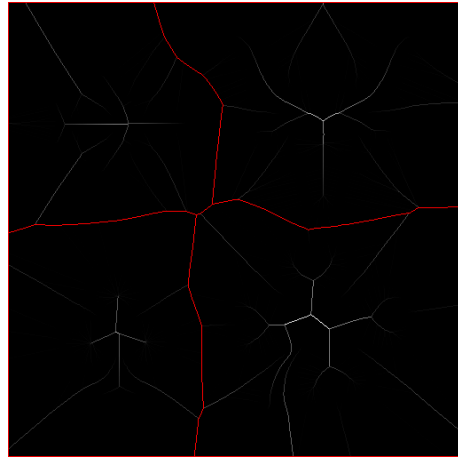
$$\kappa(N_X(p), N_X(q)) = \left( \Pi_{\lambda_X}^d(p) - \Pi_{\lambda_X}^d(q) \right) \bmod \left| \partial_X^p \right|$$

La fonction de choc symétrique produit un squelette centré mais d'épaisseur 2, tandis que la fonction de choc asymétrique produit un squelette d'épaisseur 1, avec une erreur possible de placement d'un demi-pixel.

## Fonction de choc



$$\Pi_{\lambda_X}^{d_E}$$



$$S_8(\Pi_{\lambda_X}^{d_E})$$

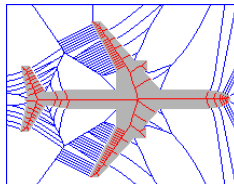
## Squelette multi-échelles

Une fois la fonction de choc  $S$  définie, le squelette à l'échelle  $\sigma$  est simplement défini comme le seuil de niveau  $\sigma$  de la fonction de choc :

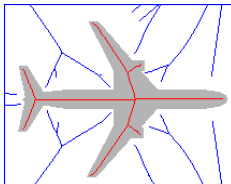
$$Sk_{\sigma}(X) = \{z; S(z) > \sigma\}$$



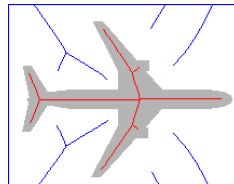
$$S_8(\Pi_{\lambda_X}^{d_E})$$



$$Sk_1(X)$$



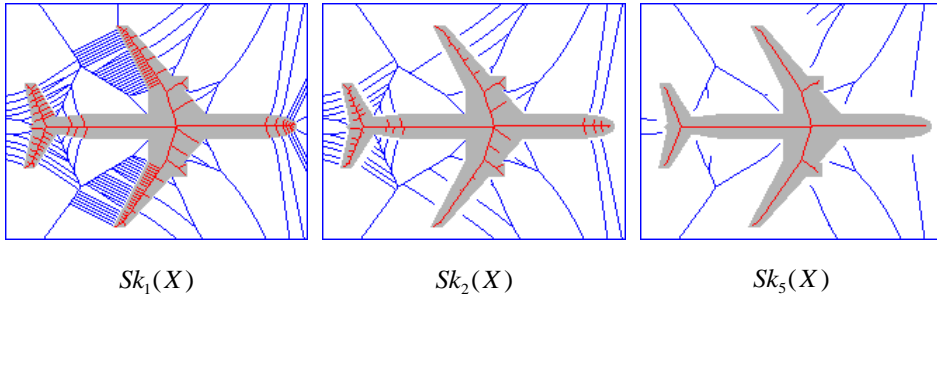
$$Sk_5(X)$$



$$Sk_{20}(X)$$

## Squelette multi-échelles

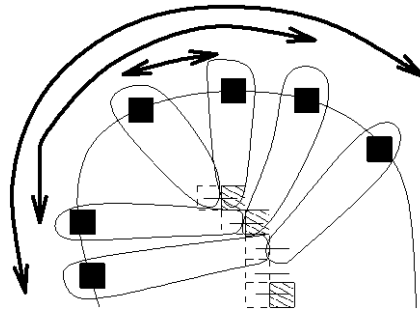
PROPRIETE : La fonction de choc associée à la distance géodésique le long du contour est connexe-monotone : pour tout entier  $n$ , l'ensemble des pixels dont la fonction de choc est supérieure à  $n$  a le même nombre de composantes connexes que l'image initiale :



## Connectivité des squelettes multi-échelles

La propriété de connexe-monotonie de la fonction de choc est due au fait que les zones d'influence des pixels du contour sont connexes :

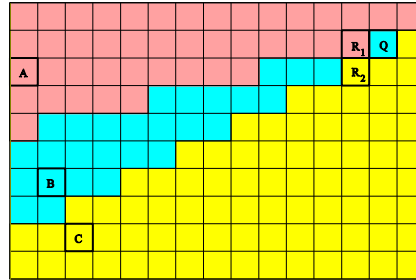
La connectivité des zones d'influence des pixels implique la croissance de la fonction de choc le long du squelette à partir des extrémités :



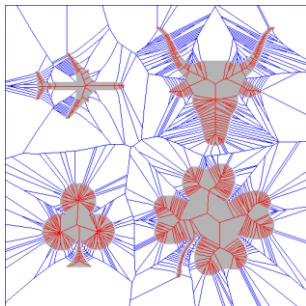
## Connectivité des squelettes multi-échelles

La connectivité des zones d'influence des pixels est aussi une condition nécessaire de connectivité des squelettes multi-échelles. En ce sens l'algorithme de Danielsson-Leymarie pour le calcul de la fonction distance quasi-euclidienne est plus adapté qu'une transformée en distance euclidienne exacte :

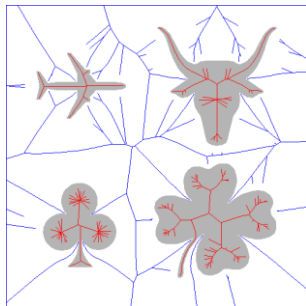
En se basant sur la distance euclidienne exacte, on pourrait construire un chemin connexe reliant A, B et C, qui aurait un (exo-)squelette déconnecté :



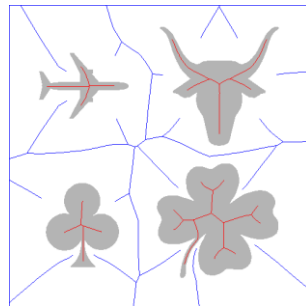
## Squelettes multi-échelles



$Sk_1(X)$



$Sk_5(X)$

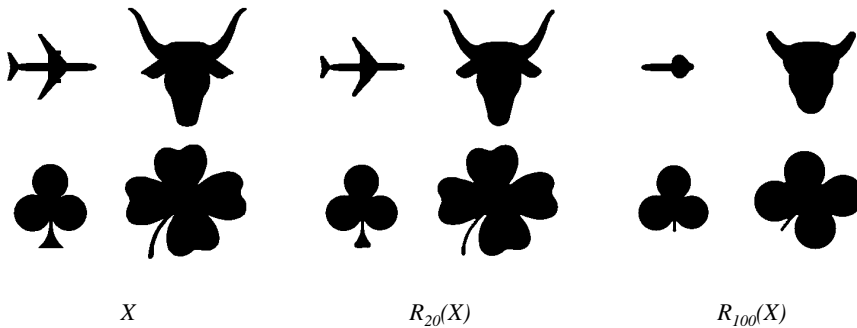


$Sk_{50}(X)$

## Reconstruction multi-échelles

La reconstruction de l'image  $X$  à l'échelle  $\sigma$  s'obtient par la formule d'inversion du squelette :

$$R_{\sigma}(X) = \bigcup_{z \in Sk_{\sigma}(X)} B_z(F_X^d(z))$$



## Carte de reconstruction

Toutes les reconstructions pour l'ensemble des échelles peuvent être obtenues rapidement à partir de la carte de reconstruction définie comme suit :

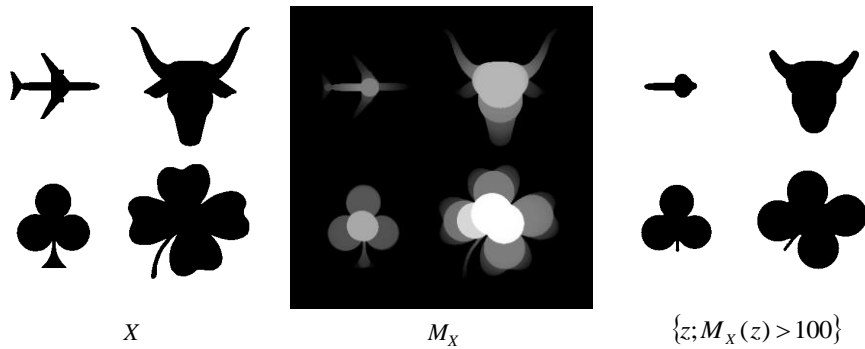
$$M_X(p) = \max_{z \in Sk_1(X); p \in B_z(F_X^d(z))} S_X(z)$$

La reconstruction de l'image  $X$  à l'échelle  $\sigma$  s'obtient ensuite par seuillage de la carte de reconstruction à la valeur  $\sigma$  :

$$R_{\sigma}(X) = \{z; M_X(z) > \sigma\}$$



## Carte de reconstruction

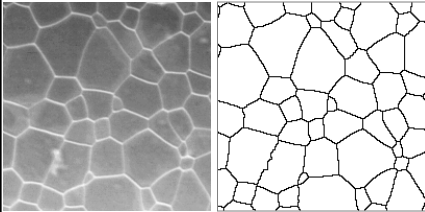


## Chapitre 3 : L'approche morphologique de la segmentation

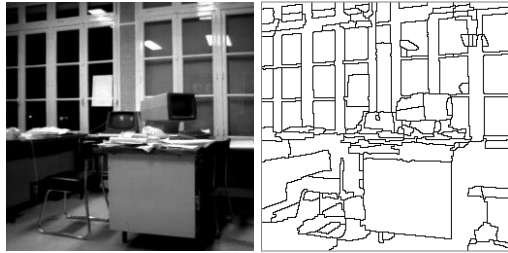
- (1) Squelettes : introduction.
- (2) Squelette morphologique.
- (3) Squelettes par amincissement.
- (4) Ligne de Partage des Eaux, principe et applications**

## LPE : motivation

La *ligne de partage des eaux* (LPE) constitue l'approche morphologique de la segmentation d'une image en niveaux de gris. Le but est d'obtenir une partition de l'image en régions regroupant des pixels jugés équivalents en fonction d'un certain critère.



ex1 : analyse des cristaux de minerai d'uranium



ex2 : détection de contours

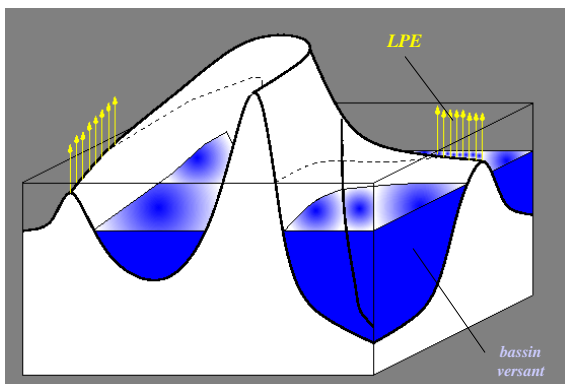
La segmentation est la base de la représentation de l'image qui permettra d'aller vers une description évoluée de la scène.

Antoine MANZANERA - ENSTA/UTIS

147

## LPE par simulation d'immersion

Si l'on considère une image comme une surface topographique, où l'altitude correspond au niveau de gris, le principe de construction de la LPE par immersion est le suivant : en imaginant que tous les minima régionaux sont percés, on immerge progressivement le relief par une montée des eaux.



(1) A chaque fois que la hauteur de l'eau atteint l'altitude d'un minimum régional, un nouveau bassin versant est créé.

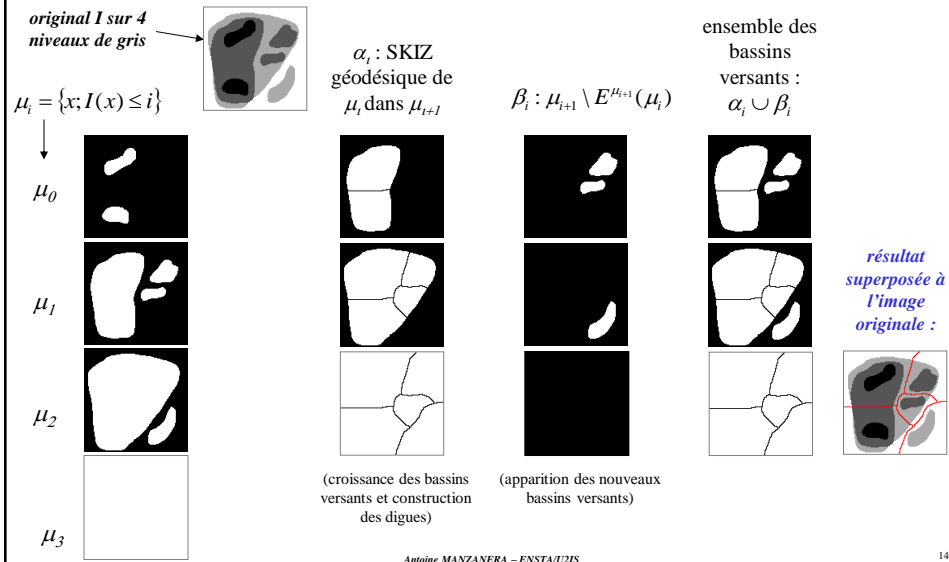
(2) A chaque fois que deux bassins se rencontrent, on empêche leur fusion en construisant une "digue".

***L'ensemble des digues forme la LPE.***

Antoine MANZANERA - ENSTA/UTIS

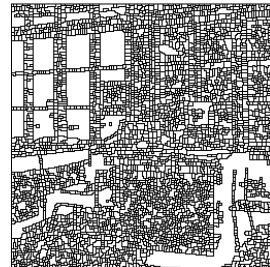
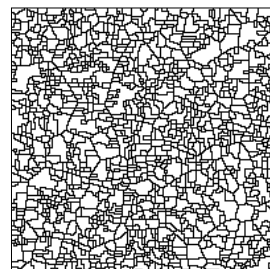
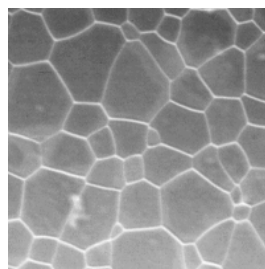
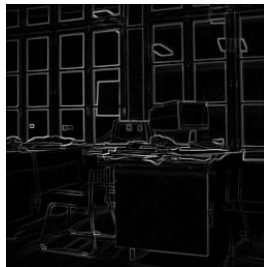
148

## Calcul de la LPE



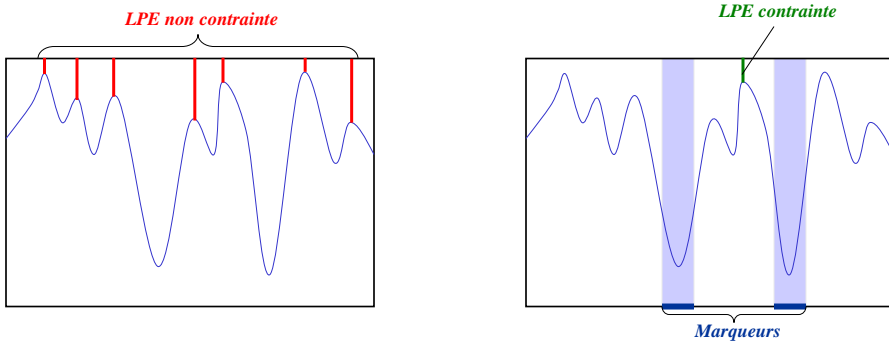
## LPE : problème de la sursegmentation

Dans le cas d'images naturelles, l'application de l'algorithme précédent sur l'image (uranium) ou sur le gradient morphologique de l'image (bureau) produit une sursegmentation très importante.



# LPE avec marqueurs

La première technique pour éviter la sursegmentation est d'utiliser des *marqueurs* qui ont pour rôle d'imposer la présence de certains bassins versants seulement, de manière à contraindre la topologie de la LPE.



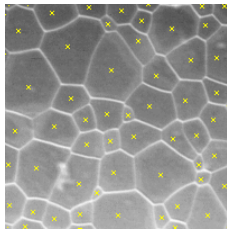
Pratiquement, on impose la présence des marqueurs par un OU logique à chaque étape, et on ne fait pas apparaître de nouveaux bassins versants.

Antoine MANZANERA – ENSTA/U2IS

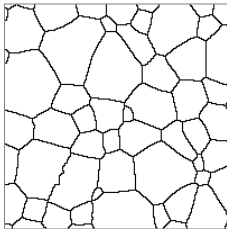
151

# LPE avec marqueurs : applications

exemple 1



marqueurs (en jaune)

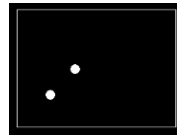


LPE contrainte

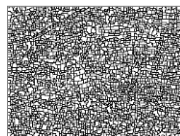
exemple 2



Séquence du Taxi de Hambourg



marqueurs : objets mobiles + fond



LPE brute



LPE contrainte

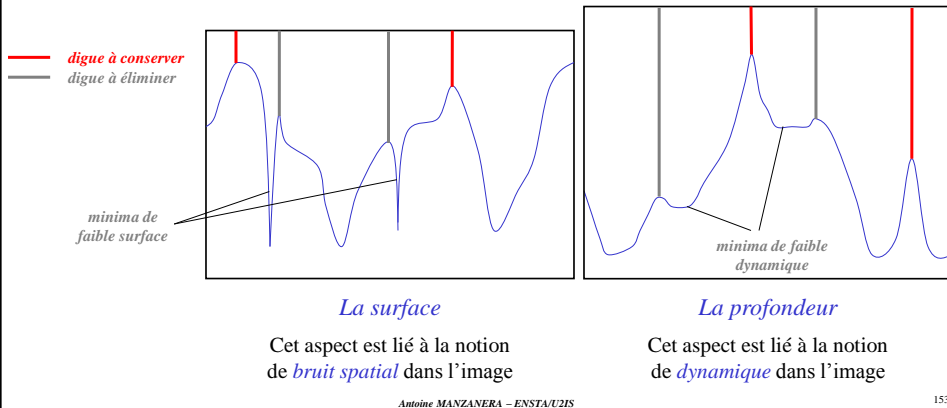
Antoine MANZANERA – ENSTA/U2IS

152

# LPE par filtrage

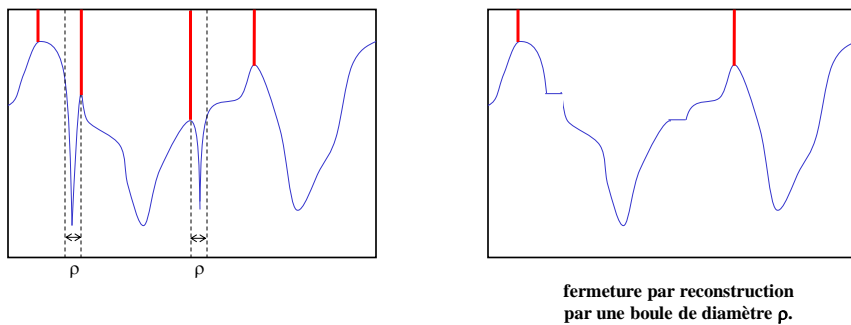
La seconde technique pour éviter la sursegmentation est de sélectionner les bassins versants qui apparaîtront dans la LPE en fonction de leur "importance".

Cette importance revêt deux aspects différents :



# LPE : filtrage spatial

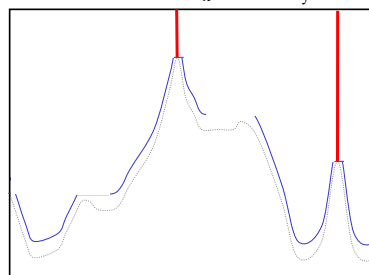
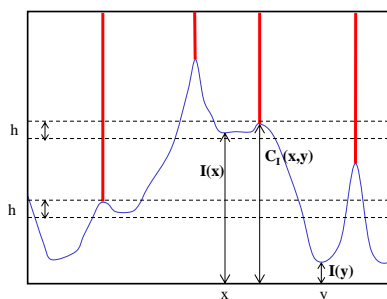
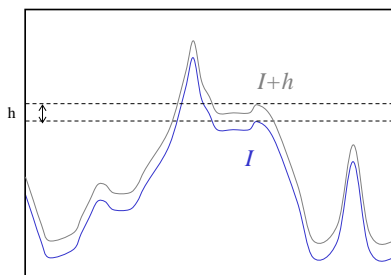
L'élimination des digues produites par des bassins de faible surface peut être obtenue grâce au filtrage morphologique spatial :



## LPE : filtrage de dynamique

L'élimination des digues produites par des bassins de faible dynamique peut être obtenue grâce au filtrage morphologique de dynamique :

La reconstruction de la fonction  $I$  dans la fonction  $I+h$  élimine les minima régionaux de dynamique inférieure à  $h$  :

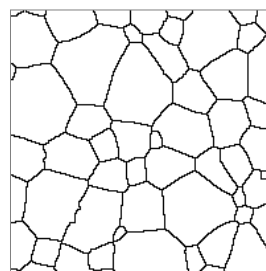
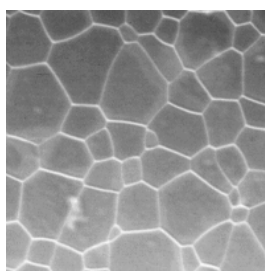


Antoine MANZANERA - ENSTA/UTIS

155

## LPE par filtrage : résultats

En appliquant les deux filtres précédents sur l'image (uranium) ou sur le gradient morphologique de l'image (bureau), on élimine dans la LPE les bassins *non significatifs*.



Antoine MANZANERA - ENSTA/UTIS

156

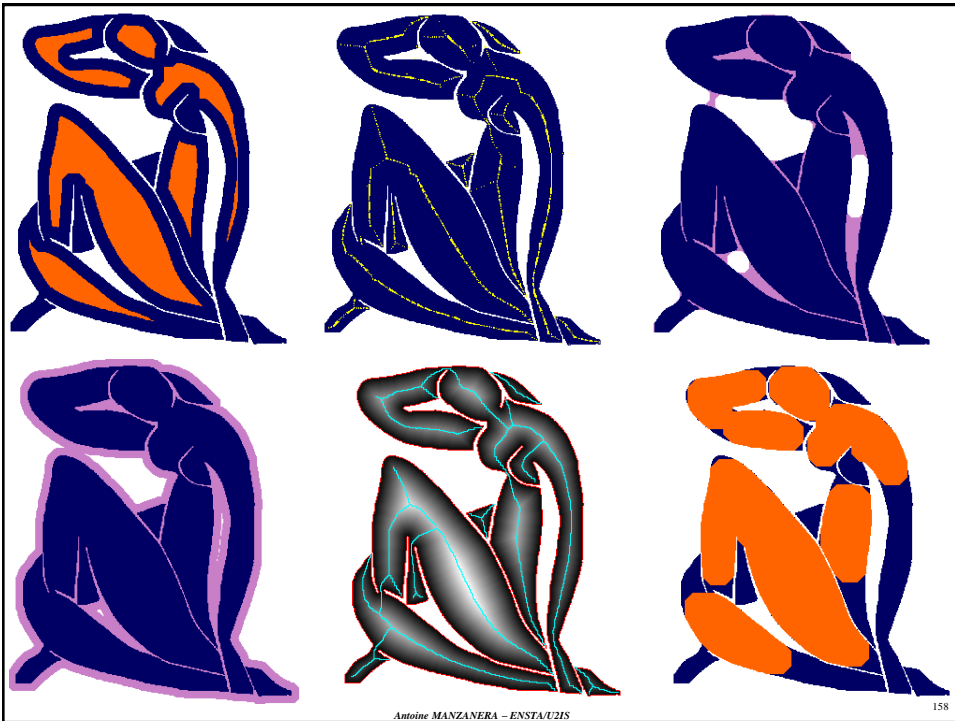
## Squelettes et LPE – Conclusion

### A RETENIR POUR CE COURS :

- Définition du **squelette morphologique discret** : Maxima Locaux de la Transformée en Distance ↔ Centres des Boules Maximales ↔ Résidus d'ouvertures
- **Squelettes connexe par fonctions de choc** : Connexité des zones d'influence associées à une transformée en distance – Squelettes multi-échelles : Seuillage de la fonction de choc et reconstruction à divers degrés de détail
- **Lignes de Partage des Eaux** : Principe du calcul par immersion, Contrainte topologique par marqueurs, Filtrage des minima régionaux : taille vs dynamique.

Antoine MANZANERA – ENSTA/UTIS

157



Antoine MANZANERA – ENSTA/UTIS

158