ENSTA PARIS

AUT202 – AUTOMATIQUE : DYNAMIQUE ET CONTROLE DES SYSTEMES

PETITE CLASSE N°3

22 FEVRIER 2023

INTRODUCTION – Commande optimale

Théorème – Commande optimale (état final contraint)

Soit un système dynamique :

$$\frac{d}{dt}X(t) = f\big(X(t), U(t)\big)$$

On cherche une commande $U(t)$ pour $t \in [O, T]$ qui minimise le critère :

$$J = \int_0^T L\big(X(t), U(t)\big).dt$$

On impose enfin la condition initiale et la condition finale :

$$\begin{cases} X(0) = X_0 \\ X(T) = X_T \end{cases}$$

On introduit le multiplicateur de Lagrange $\lambda(t)$ associé à la contrainte $\frac{d}{dt}X(t) = f\big(X(t), U(t)\big)$.

Les conditions d'optimalités sont alors données par les équations suivantes :

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}X(t) = f\big(X(t), U(t)\big) \\ \frac{d}{dt}\lambda(t) = -\left(\frac{\partial f}{\partial X}\right)^T_{(X(t),U(t))}.\lambda(t) - \left(\frac{\partial L}{\partial X}\right)^T_{(X(t),U(t))} \\ 0 = \left(\frac{\partial L}{\partial U}\right)_{(X(t),U(t))} + \lambda(t)^T.\left(\frac{\partial f}{\partial U}\right)_{(X(t),U(t))} \end{cases}$$

avec comme condition au bord :

$$\begin{cases} X(0) = X_0 \\ X(T) = X_T \end{cases}$$

Théorème – Commande optimale (état final libre)

Soit un système dynamique :

$$\frac{d}{dt}X(t) = f\big(X(t), U(t)\big)$$

On cherche une commande $U(t)$ pour $t \in [O, T]$ qui minimise le critère :

$$J = l\big(X(T)\big) + \int_0^T L\big(X(t), U(t)\big).dt$$

On impose enfin la condition initiale :

$$X(0) = X_0$$

On introduit le multiplicateur de Lagrange $\lambda(t)$ associé à la contrainte $\frac{d}{dt}X(t) = f\big(X(t), U(t)\big)$.

Les conditions d'optimalités sont alors données par les équations suivantes :

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}X(t) = f\big(X(t), U(t)\big) \\ \dfrac{d}{dt}\lambda(t) = -\left(\dfrac{\partial f}{\partial X}\right)^T_{(X(t),U(t))} . \lambda(t) - \left(\dfrac{\partial L}{\partial X}\right)^T_{(X(t),U(t))} \\ 0 = \left(\dfrac{\partial L}{\partial U}\right)_{(X(t),U(t))} + \lambda(t)^T . \left(\dfrac{\partial f}{\partial U}\right)_{(X(t),U(t))} \end{cases}$$

avec comme condition au bord :

$$\begin{cases} X(0) = X_0 \\ \lambda(T) = \left(\dfrac{\partial l}{\partial X}\right)_{X(T)} \end{cases}$$

<u>Théorème – Commande linéaire quadratique</u>

Soit un système dynamique linéaire :

$$\frac{d}{dt}X(t) = A.X(t) + B.U(t)$$

On cherche une commande U(t) qui minimise le critère quadratique :

$$J = \frac{1}{2}.\int_0^\infty \big(X^T(t).R.X(t) + U^T(t).Q.U(t)\big).dt$$

Si les hypothèses suivantes sont vérifiées :

(a) (A, B) est commandable
(b) R est symétrique positive
(c) Q est symétrique définie positive
(d) Il existe une racine de R telle que $(A, \sqrt{R})$ est observable (remarque : cette hypothèse est vérifiée si R est symétrique définie positive)

Alors il existe une commande $U(t)$ qui stabilise le système et minimise le critère quadratique :

$$U(t) = -K.X(t) \quad \text{avec} \quad K = Q^{-1}.B^T.S$$

où S est l'unique solution symétrique définie positive de l'équation de Riccati algébrique :

$$S.A + A^T.S - S.B.Q^{-1}.B^T.S + R = 0$$

La valeur du critère associée est :

$$J = X^T(0).S.X(0)$$

EXERCICE 1 – Stabilisation d'un pendule

On s'intéresse à la stabilisation d'un pendule vertical satisfaisant aux équations (normalisées) :

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} = -x(t) + u(t)$$

où $u(t)$ est une commande librement choisie.

On souhaite qu'en temps infini il rejoigne le point d'équilibre $x^{eq} = 0$. On se propose de calculer une commande réalisant cet objectif par la méthode LQR.

Q1/ Mettre le système sous forme d'état. Quelles sont les valeurs propres du système en boucle ouverte ? Comment se comporte-t-il ?

On pose :

$$X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(t) \\ \dot{x}(t) \end{pmatrix}$$

On a alors :

$$\frac{d}{dt}\underbrace{\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}}_{X(t)} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}}_{A} . \underbrace{\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}}_{X(t)} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{B} . u$$

Les valeurs propres en boucle ouverte sont les racines du polynôme caractéristique de A :

$$P(s) = s^2 - \mathrm{Tr}(A).s + \det(A) = s^2 + 1$$

Le système à deux valeurs propres complexes conjuguées $\pm i$.

Le système est un oscillateur harmonique (stable mais pas asymptotiquement stable).

On cherche la commande u qui minimise le critère quadratique suivant :

$$J = \frac{1}{2}.\int_0^\infty \left(\left(x(t)\right)^2 + \left(\dot{x}(t)\right)^2 + \left(u(t)\right)^2\right).dt$$

Q2/ Former l'équation de Riccati algébrique correspondante.

On rappelle le théorème sur la commande linéaire quadratique :

<u>Théorème – Commande linéaire quadratique</u>

Soit un système dynamique linéaire :

$$\frac{d}{dt}X(t) = A.X(t) + B.U(t)$$

On cherche une commande $U(t)$ qui minimise le critère quadratique :

$$J = \frac{1}{2}.\int_0^\infty \left(X^T(t).R.X(t) + U^T(t).Q.U(t)\right).dt$$

Si les hypothèses suivantes sont vérifiées :

(a) (A, B) est commandable
(b) R est symétrique positive
(c) Q est symétrique définie positive
(d) Il existe une racine de R telle que $(A, \sqrt{R})$ est observable (remarque : cette hypothèse est vérifiée si R est symétrique définie positive)

Alors il existe une commande $U(t)$ qui stabilise le système et minimise le critère quadratique :

$$U(t) = -K.X(t) \quad \text{avec} \quad K = Q^{-1}.B^T.S$$

où S est l'unique solution symétrique définie positive de l'équation de Riccati algébrique :

$$S.A + A^T.S - S.B.Q^{-1}.B^T.S + R = 0$$

La valeur du critère associée est :

$$J = X^T(0).S.X(0)$$

Dans le cas de l'exercice, on a :

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad Q = (1)$$

R et Q sont symétrique définies positives donc on vérifie les hypothèses (b), (c) et (d).

Par ailleurs le système est bien commandable : $\mathcal{C}(A,B) = \left(\underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{B} \quad \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{A.B} \right)$ est bien de rang 2 (on aurait aussi pu remarque que le système est sous forme de Brunovsky donc commandable).

L'équation de Riccati algébrique associée au problème de commande optimale est donc :

$$S.A + A^T.S - S.B.Q^{-1}.B^T.S + R = 0$$

Soit en remplaçant A , B , R et Q par leurs valeurs respectives :

$$S.\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.S - S.\underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.(1)^{-1}.\begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}}_{=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}.S + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 0$$

Le contrôle optimal s'écrit quant à lui :

$$u(t) = -Q^{-1}.B^T.S.X(t) = -\underbrace{(1)^{-1}.\begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}}.S.\begin{pmatrix} x(t) \\ \dot{x}(t) \end{pmatrix}$$

Q3/ Résoudre cette équation. Donner l'expression du contrôle optimal.

On note $S = \begin{pmatrix} s_1 & s_{12} \\ s_{12} & s_2 \end{pmatrix}$. L'équation de Riccati algébrique s'écrit alors :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} s_1 & s_{12} \\ s_{12} & s_2 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} s_1 & s_{12} \\ s_{12} & s_2 \end{pmatrix}}_{S.A+A^T.S} - \underbrace{\begin{pmatrix} s_1 & s_{12} \\ s_{12} & s_2 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} s_1 & s_{12} \\ s_{12} & s_2 \end{pmatrix}}_{S.B.Q^{-1}.B^T.S} + \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{R} = 0$$

$$S.A + A^T.S = \begin{pmatrix} -2.s_{12} & s_1 - s_2 \\ s_1 - s_2 & 2.s_{12} \end{pmatrix}$$

$$S.B.Q^{-1}.B^T.S = \begin{pmatrix} {s_{12}}^2 & s_{12}.s_2 \\ s_{12}.s_2 & {s_2}^2 \end{pmatrix}$$

On en déduit :

$$\begin{cases} -2.s_{12} - {s_{12}}^2 + 1 = 0 & (1) \\ s_1 - s_2 - s_{12}.s_2 = 0 & (2) \\ 2.s_{12} - {s_2}^2 + 1 = 0 & (3) \end{cases}$$

En commence par résoudre (1) :

$${s_{12}}^2 + 2.s_{12} - 1 = 0$$

$$s_{12} = -1 + \varepsilon_{12}.\sqrt{2} \quad \text{avec} \quad \varepsilon_{12} = \pm 1$$

On résout ensuite (3) :

$${s_2}^2 - 2.s_{12} - 1 = 0$$

$${s_2}^2 = 2.s_{12} + 1 = -1 + 2.\varepsilon_{12}.\sqrt{2} \quad \Longrightarrow \quad \varepsilon_{12} = 1$$

$$s_2 = \sqrt{2\sqrt{2} - 1} \quad s_{12} = \sqrt{2} - 1$$

Enfin, on résout (3) :

$$s_1 = s_2 + s_{12}.s_2 = s_2.(1 + s_{12}) = \sqrt{2\sqrt{2} - 1}.\sqrt{2}$$

On en déduit ensuite le contrôle optimal :

$$u(t) = -\underbrace{(0 \quad 1).\begin{pmatrix} s_1 & s_{12} \\ s_{12} & s_2 \end{pmatrix}}_{K=Q^{-1}.B^T.S}.\begin{pmatrix} x(t) \\ \dot{x}(t) \end{pmatrix} = -(s_{12} \quad s_2).\begin{pmatrix} x(t) \\ \dot{x}(t) \end{pmatrix} = -\left(\sqrt{2} - 1 \quad \sqrt{2\sqrt{2} - 1}\right).\begin{pmatrix} x(t) \\ \dot{x}(t) \end{pmatrix}$$

On considère maintenant le problème un peu plus général de minimisation du critère quadratique :

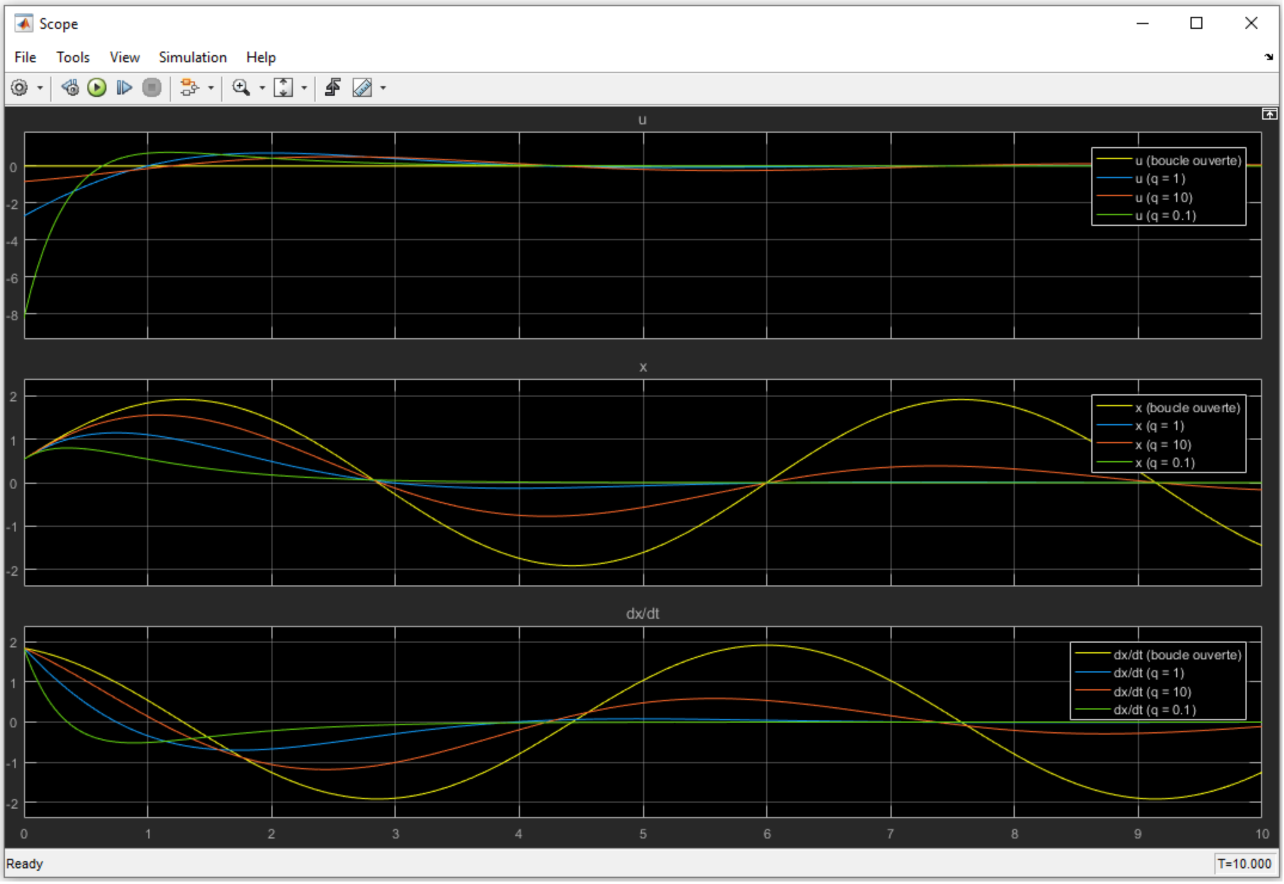
$$J = \frac{1}{2}.\int_0^{\infty} \left((x(t))^2 + (\dot{x}(t))^2 + q.(u(t))^2\right).dt$$

Q4/ Que se passe-t-il si q est grand ? si q est petit ?

Si q est grand, « la commande coûte cher ». La commande optimale va donc avoir tendance à être peu intense, quitte à laisser l'état éloigné de l'équilibre plus longtemps (réponse plutôt lente).

Si q est petit, « la commande ne coûte pas cher ». La commande optimale va donc avoir tendance à être assez intense, pour ramener au plus vite l'état à l'équilibre (réponse plutôt rapide).

Ci-dessous on présente le comportement du système dans différents cas : boucle ouverte, $q = 1$, $q = 10$ et $q = 0{,}1$.



EXERCICE 2 – Placement de pôles

On considère un système dynamique linéaire :

$$\frac{d}{dt}X(t) = A.X(t) + B.U(t)$$

Ce système est supposé commandable. On cherche à placer ses pôles en boucle fermée dans le demi-plan complexe $\mathrm{Re}(z) < -\alpha \leq 0$.

On effectue le changement de variable suivant :

$$\begin{cases} \bar{X}(t) = \exp(\alpha.t).X(t) \\ \bar{U}(t) = \exp(\alpha.t).U(t) \end{cases}$$

Q1/ Quelles sont sous forme d'état les équations satisfaites par $\left(\bar{X}(t), \bar{U}(t)\right)$?

Il suffit de dériver $\bar{X}(t)$:

$$\frac{d}{dt}\bar{X}(t) = \frac{d}{dt}(\exp(\alpha.t).X(t)) = \alpha.\exp(\alpha.t).X(t) + \exp(\alpha.t).\frac{d}{dt}X(t)$$

$$\frac{d}{dt}\bar{X}(t) = \alpha.\exp(\alpha.t).X(t) + \exp(\alpha.t).\mathrm{A.X(t)} + \exp(\alpha.t).\mathrm{B.U(t)}$$

$$\frac{d}{dt}\bar{X}(t) = \alpha.\bar{X}(t) + \mathrm{A}.\bar{X}(t) + \mathrm{B}.\bar{U}(t) = \underbrace{(\alpha.I_d + A)}_{\bar{A}}.\bar{X}(t) + \underbrace{\mathrm{B}}_{\bar{B}}.\bar{U}(t)$$

Q2/ Le système obtenu est-il commandable ?

On cherche à calculer le rang de la matrice de commandabilité $\mathcal{C}(\bar{A}, \bar{B}) = (\bar{B} \quad \bar{A}.\bar{B} \quad \cdots \quad \bar{A}^{n-1}.\bar{B})$ avec $n = \dim\left(\bar{X}(t)\right) = \dim\left(X(t)\right)$.

On constate que :

$$\bar{A}^k.\bar{B} = (\alpha.I_d + A)^k.B = A^k.B + \sum_{i=0}^{k-1} c_i.A^i.B$$

Par récurrence, on montre que :

$$\mathrm{rg}\left(\mathcal{C}(\bar{A}, \bar{B})\right) = \mathrm{rg}(B \quad A.B \quad \cdots \quad A^{n-1}.B) = \mathrm{rg}\left(\mathcal{C}(A, B)\right)$$

(A, B) est commandable donc $(\bar{A}, \bar{B})$ l'est aussi.

Q3/ Proposer une commande stabilisante par la méthode LQR. Quelle est l'équation de Riccati algébrique associée ?

On rappelle le théorème sur la commande linéaire quadratique :

Théorème – Commande linéaire quadratique

Soit un système dynamique linéaire :

$$\frac{d}{dt}X(t) = A.X(t) + B.U(t)$$

On cherche une commande $U(t)$ qui minimise le critère quadratique :

$$J = \frac{1}{2}.\int_0^{\infty} \left(X^T(t).R.X(t) + U^T(t).Q.U(t)\right).dt$$

Si les hypothèses suivantes sont vérifiées :

(a) (A, B) est commandable
(b) R est symétrique positive
(c) Q est symétrique définie positive

(d) Il existe une racine de R telle que $(A, \sqrt{R})$ est observable (remarque : cette hypothèse est vérifiée si R est symétrique définie positive)

Alors il existe une commande $U(t)$ qui stabilise le système et minimise le critère quadratique :

$$U(t) = -K.X(t) \quad \text{avec} \quad K = Q^{-1}.B^T.S$$

où S est l'unique solution symétrique définie positive de l'équation de Riccati algébrique :

$$S.A + A^T.S - S.B.Q^{-1}.B^T.S + R = 0$$

La valeur du critère associée est :

$$J = X^T(0).S.X(0)$$

Ici on applique ce théorème au système $(\bar{X}(t), \bar{U}(t))$ avec le critère :

$$J = \frac{1}{2}.\int_0^{\infty} \left(\bar{X}^T(t).\bar{X}(t) + \bar{U}^T(t).\bar{U}(t)\right).dt$$

On a $R = I_d$ et $Q = I_d$. On vérifie ainsi toutes les hypothèses du théorème.

La commande stabilisante optimale s'écrit $\bar{U}(t) = -K.\bar{X}(t)$ avec $K = \bar{B}^T.S$ où S est l'unique solution symétrique définie positive de l'équation de Riccati algébrique :

$$S.\bar{A} + \bar{A}^T.S - S.\bar{B}.\bar{B}^T.S + I_d = 0$$

$$2.\alpha.S + S.A + A^T.S - S.B.B^T.S + I_d = 0$$

Q4/ En déduire une loi de commande stabilisant le système original $\frac{d}{dt}X(t) = A.X(t) + B.U(t)$ et garantissant que les pôles en boucle fermée sont dans le demi-plan complexe $\mathrm{Re}(z) < -\alpha \leq 0$.

Le gain K permet aussi de calculer le retour d'état du système original :

$$U(t) = \exp(-\alpha.t).\bar{U}(t) = -K.\exp(-\alpha.t).\bar{X}(t) = -K.X(t)$$

Comme le système $(\bar{X}(t), \bar{U}(t))$ est stabilisé avec le gain K, on a $\bar{X}(t) \underset{t\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Il existe donc une constante $M > 0$ telle que $\forall t \geq 0$:

$$|\bar{X}(t)| \leq M$$

$$\exp(\alpha.t).|X(t)| \leq M$$

$$|X(t)| \leq M.\exp(-\alpha.t)$$

Le système original converge donc au moins aussi vite que $\exp(-\alpha.t)$. Les pôles en boucle fermée sont donc dans le demi-plan complexe $\mathrm{Re}(z) < -\alpha \leq 0$.