ENSTA PARIS

AUT202 – AUTOMATIQUE : DYNAMIQUE ET CONTROLE DES SYSTEMES

PETITE CLASSE N°2

15 FEVRIER 2023

INTRODUCTION – Observabilité

Définition – Observabilité

Un système dynamique $\frac{d}{dt}X(t) = f\big(X(t), U(t)\big)$ avec une mesure $Y(t) = h\big(X(t)\big)$ est observable si pour toute commande $U(t)$ définie sur un intervalle de temps fini $T > 0$, la fonction qui à un état initial X_i associe la mesure $y(t)$ sur cet intervalle de temps est injective.

En d'autres termes, si un système est observable, il est possible de retrouver l'état à partir de la connaissance de l'évolution de la commande et de la mesure.

Propriété – Critère d'observabilité de Kalman

Le système dynamique linéaire $\frac{d}{dt}X(t) = A.X(t) + B.U(t)$ avec la mesure $Y(t) = C.X(t)$ est observable si et seulement si la matrice d'observabilité $\mathcal{O}(A, C) = \begin{pmatrix} C \\ C.A \\ \vdots \\ C.A^{n-1} \end{pmatrix}$ est de rang $n = \dim\big(X(t)\big)$.

Propriété – Placement de pôles

Soit un système dynamique linéaire :

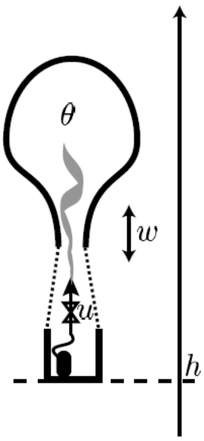
$$(S) \quad \begin{cases} \dfrac{d}{dt}X(t) = A.X(t) + B.U(t) \\ Y(t) = C.X(t) \end{cases} \quad \text{avec} \begin{cases} \dim\big(X(t)\big) = n \\ \dim\big(U(t)\big) = m \\ \dim\big(Y(t)\big) = p \end{cases}$$

Si (S) est observable alors pour tout polynôme unitaire P de degré n, il existe une matrice L de dimension $n \times p$ telle que les valeurs propres de $A - L.C$ soient les racines de P.

En d'autres termes, si un système linéaire est observable, on peut choisir librement les valeurs propres de l'observateur $\frac{d}{dt}\hat{X}(t) = A.\hat{X}(t) + B.U(t) + L.\big(Y(t) - C.\hat{X}(t)\big)$, et en particulier des valeurs propres à partie réelle strictement négative pour que l'erreur d'estimation $\hat{X}(t) - X(t)$ tende vers 0.

EXERCICE – Montgolfière

On cherche à piloter la dynamique verticale d'une montgolfière, la dynamique horizontale étant très peu commandable.



On note $\theta(t)$ l'écart de température par rapport à l'équilibre dans le ballon, $v(t)$ la vitesse ascensionnelle et $h(t)$ l'altitude. Un premier modèle simple est donné par les équations dynamiques suivantes :

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}h(t) = v(t) \\ \dfrac{d}{dt}v(t) = -\dfrac{v(t)}{\tau_v} + c.\theta(t) + \dfrac{w(t)}{\tau_v} \\ \dfrac{d}{dt}\theta(t) = -\dfrac{\theta(t)}{\tau_\theta} + u(t) \end{cases}$$

où :

- $\tau_v > 0$ et $\tau_\theta > 0$ sont des constantes de temps fixes ;
- c est un paramètre de couplage correspondant à la poussée d'Archimède ;
- $w(t)$ est la vitesse verticale du vent, considérée ici comme une perturbation ;
- $u(t)$ est la commande proportionnelle à la chaleur fournie au ballon par le brûleur.

Q1/ On suppose que l'on dispose que d'un seul capteur, un altimètre donnant $h(t)$. Peut-on en déduire $v(t)$, $\theta(t)$ et $w(t)$ en supposant que $w(t)$ varie peu ?

L'hypothèse $w(t)$ varie peu peut s'écrire $\frac{d}{dt}w(t) = 0$.

On construit un modèle d'observation en ajoutant cette équation au modèle dynamique de la montgolfière :

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}h(t) = v(t) \\ \dfrac{d}{dt}v(t) = -\dfrac{v(t)}{\tau_v} + c.\theta(t) + \dfrac{w(t)}{\tau_v} \\ \dfrac{d}{dt}\theta(t) = -\dfrac{\theta(t)}{\tau_\theta} + u(t) \\ \dfrac{d}{dt}w(t) = 0 \end{cases}$$

On considère l'équation de mesure :

$$y(t) = h(t)$$

On met ces équations sous forme d'état :

$$(S_{obs})\quad \begin{cases} \dfrac{d}{dt}\underbrace{\begin{pmatrix} h(t)\\ v(t)\\ \theta(t)\\ w(t)\end{pmatrix}}_{X_o(t)} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & -\dfrac{1}{\tau_v} & c & \dfrac{1}{\tau_v}\\ 0 & 0 & -\dfrac{1}{\tau_\theta} & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}}_{A_o}.\underbrace{\begin{pmatrix} h(t)\\ v(t)\\ \theta(t)\\ w(t)\end{pmatrix}}_{X_o(t)} + \underbrace{\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}}_{B_o}.u(t) \\ y(t) = \underbrace{\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}}_{C_o}.\underbrace{\begin{pmatrix} h(t)\\ v(t)\\ \theta(t)\\ w(t)\end{pmatrix}}_{X_o(t)} \end{cases}$$

On calcule la matrice d'observabilité $\mathcal{O}(A_o, C_o) = \begin{pmatrix} C_o\\ C_o.A_o\\ C_o.{A_o}^2\\ C_o.{A_o}^3\end{pmatrix}$:

$$C_o = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

$$C_o.A_o = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & -\dfrac{1}{\tau_v} & c & \dfrac{1}{\tau_v}\\ 0 & 0 & -\dfrac{1}{\tau_\theta} & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 1 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

$$C_o.{A_o}^2 = (C_o.A_o).A_o = \begin{pmatrix}0 & 1 & 0 & 0\end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & -\dfrac{1}{\tau_v} & c & \dfrac{1}{\tau_v}\\ 0 & 0 & -\dfrac{1}{\tau_\theta} & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & -\dfrac{1}{\tau_v} & c & \dfrac{1}{\tau_v}\end{pmatrix}$$

$$C_o.{A_o}^3 = \left(C_o.{A_o}^2\right).A_o = \begin{pmatrix}0 & -\dfrac{1}{\tau_v} & c & \dfrac{1}{\tau_v}\end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & -\dfrac{1}{\tau_v} & c & \dfrac{1}{\tau_v}\\ 0 & 0 & -\dfrac{1}{\tau_\theta} & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & \dfrac{1}{{\tau_v}^2} & -\dfrac{c}{\tau_v}-\dfrac{c}{\tau_\theta} & -\dfrac{1}{{\tau_v}^2}\end{pmatrix}$$

On a alors :

$$\mathcal{O}(A_o, C_o) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & -\dfrac{1}{\tau_v} & c & \dfrac{1}{\tau_v}\\ 0 & \dfrac{1}{{\tau_v}^2} & -\dfrac{c}{\tau_v}-\dfrac{c}{\tau_\theta} & -\dfrac{1}{{\tau_v}^2}\end{pmatrix}$$

On constate que la dernière ligne peut s'écrire :

$$\underbrace{\begin{pmatrix}0 & \dfrac{1}{{\tau_v}^2} & -\dfrac{c}{\tau_v}-\dfrac{c}{\tau_\theta} & -\dfrac{1}{{\tau_v}^2}\end{pmatrix}}_{C_o.{A_o}^3} = -\frac{1}{\tau_v}.\underbrace{\begin{pmatrix}0 & -\dfrac{1}{\tau_v} & c & \dfrac{1}{\tau_v}\end{pmatrix}}_{C_o.{A_o}^2} - \begin{pmatrix}0 & 0 & \dfrac{c}{\tau_\theta} & 0\end{pmatrix}$$

$\mathcal{O}(A_o, C_o)$ est alors du même rang que la matrice :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\tau_v} & c & \frac{1}{\tau_v} \\ 0 & 0 & -\frac{c}{\tau_\theta} & 0 \end{pmatrix}$$

$\mathcal{O}(A_o, C_o)$ est bien de rang $4 = \dim\big(X_o(t)\big)$ donc le système est observable.

Q2/ Construire un observateur qui permet de reconstruire asymptotiquement $\boldsymbol{\theta(t)}$, $\boldsymbol{v(t)}$, $\boldsymbol{h(t)}$ et $\boldsymbol{w(t)}$.

Le système (S_{obs}) que l'on souhaite observer s'écrit sous forme d'état :

$$(S_{obs}) \quad \begin{cases} \frac{d}{dt} X_o(t) = A_o.X_o(t) + B_o.u(t) \\ y(t) = C_o.X_o(t) \end{cases}$$

On définit l'état estimé :

$$\widehat{X_o}(t) = \begin{pmatrix} \hat{h}(t) \\ \hat{v}(t) \\ \hat{\theta}(t) \\ \hat{w}(t) \end{pmatrix}$$

On construit un observateur avec la dynamique suivante :

$$\frac{d}{dt}\widehat{X_o}(t) = \underbrace{A_o.\widehat{X_o}(t) + B_o.u(t)}_{\text{prédiction}} + \underbrace{L.\big(y(t) - C_o.\widehat{X_o}(t)\big)}_{\text{correction}}$$

Le gain de l'observation $L = \begin{pmatrix} l_h \\ l_v \\ l_\theta \\ l_w \end{pmatrix}$ est à choisir judicieusement.

L'erreur d'estimation $E(t) = \widehat{X_o}(t) - X_o(t)$ a alors la dynamique suivante :

$$\frac{d}{dt}E(t) = \frac{d}{dt}\widehat{X_o}(t) - \frac{d}{dt}X_o(t)$$

$$\frac{d}{dt}E(t) = \left(A_o.\widehat{X_o}(t) + B_o.u(t) + L.\left(\underbrace{y(t)}_{=C_o.X_o(t)} - C_o.\widehat{X_o}(t) \right) \right) - \big(A_o.X_o(t) + B_o.u(t)\big)$$

$$\frac{d}{dt}E(t) = A_o.\big(\widehat{X_o}(t) - X_o(t)\big) + L.C_o.\big(X_o(t) - \widehat{X_o}(t)\big)$$

$$\frac{d}{dt}E(t) = (A_o. - L.C_o).E(t)$$

Comme (S_{obs}) est observable, on peut choisir L de sorte à placer les valeurs propres de $A_o - L.C_o$ comme on veut, et en particulier avec des parties réelles strictement négatives. On a alors $E(t) \underset{t\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

En pratique, on calcule le polynôme caractéristique de $A_o - L.C_o$ que l'on écrit sous la forme :

$$s^4 + a_3(l_h, l_v, l_\theta, l_w).s^3 + a_2(l_h, l_v, l_\theta, l_w).s^2 + a_1(l_h, l_v, l_\theta, l_w).s + a_0(l_h, l_v, l_\theta, l_w)$$

On choisit les valeurs propres souhaitées et on forme le polynôme caractéristique associé $P(s)$. Il n'y a plus qu'à identifier les coefficients a_0 , a_1 , a_2 et a_3 , ce qui donne 4 équations à 4 inconnues. On en déduit les valeurs de l_h , l_v , l_θ et l_w .

Q3/ On suppose ici la perturbation $w(t)$ connue. Montrer que le système est commandable. Quelle est la sortie de Brunovsky $z(t)$? Construire un contrôleur qui permet de suivre une trajectoire régulière $z(t) = z_c(t)$.

On construit un modèle de commande en considérant $w(t)$ comme une perturbation connue (car estimée avec l'observateur) :

$$\frac{d}{dt}\underbrace{\begin{pmatrix} h(t) \\ v(t) \\ \theta(t) \end{pmatrix}}_{X_c(t)} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\tau_v} & c \\ 0 & 0 & -\frac{1}{\tau_\theta} \end{pmatrix}}_{A_c} . \underbrace{\begin{pmatrix} h(t) \\ v(t) \\ \theta(t) \end{pmatrix}}_{X_c(t)} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{B_c} . u(t) + \underbrace{\underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\tau_v} \\ 0 \end{pmatrix}}_{M_c} . w(t)}_{\text{perturbation}}$$

La solution de cette équation différentielle s'écrit :

$$X_c(t) = \underbrace{\exp(A_c . t) . X_c(0)}_{\text{impact de l'état initial}} + \underbrace{\int_0^t \exp\big(A_c(t-s)\big) . B_c . u(s) . ds}_{\text{impact de la commande}} + \underbrace{\int_0^t \exp\big(A_c(t-s)\big) . M_c . w(s) . ds}_{\text{impact de la perturbation}}$$

Si le système est commandable, on peut passer de n'importe quel état initial à n'importe quel état final, cela signifie que le terme $\int_0^t \exp\big(A_c(t-s)\big) . B_c . u(s) . ds$ peut prendre n'importe quelle valeur, les termes $\exp(A_c . t) . X_c(0)$ et $\int_0^t \exp\big(A_c(t-s)\big) . M_c . w(s) . ds$ étant subis. On voit que la commandabilité avec et sans perturbation sont équivalentes.

Le système est donc commandable si et seulement si il est commandable sans perturbation. On peut donc appliquer le critère de commandabilité de Kalman avec les matrices A_c et B_c .

On calcule la matrice de commandabilité $\mathcal{C}(A_c, B_c) = (B_c \quad A_c . B_c \quad {A_c}^2 . B_c)$:

$$B_c = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$A_c . B_c = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\tau_v} & c \\ 0 & 0 & -\frac{1}{\tau_\theta} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ c \\ -\frac{1}{\tau_\theta} \end{pmatrix}$$

$${A_c}^2 . B_c = A_c . (A_c . B_c) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\tau_v} & c \\ 0 & 0 & -\frac{1}{\tau_\theta} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 0 \\ c \\ -\frac{1}{\tau_\theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \\ -\frac{c}{\tau_v} - \frac{c}{\tau_\theta} \\ \frac{1}{{\tau_\theta}^2} \end{pmatrix}$$

On a alors :

$$\mathcal{C}(A_c, B_c) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & c \\ 0 & c & -\frac{c}{\tau_v} - \frac{c}{\tau_\theta} \\ 1 & -\frac{1}{\tau_\theta} & \frac{1}{{\tau_\theta}^2} \end{pmatrix}$$

$\mathcal{C}(A_c, B_c)$ est bien de rang $3 = \dim\big(X_c(t)\big)$ donc le système est commandable.

Le système est commandable (et la commande scalaire) donc il peut s'écrire sous forme de Brunovsky.

On sait que la sortie de Brunovsky $z(t)$ s'écrit comme une combinaison linéaire des composantes de l'état :

$$z(t) = m_h . h(t) + m_v . v(t) + m_\theta . \theta(t)$$

$$\frac{d}{dt}z(t) = m_h.v(t) + m_v\left(.-\frac{v(t)}{\tau_v} + c.\theta(t) + \frac{w(t)}{\tau_v}\right) + m_\theta.\left(-\frac{\theta(t)}{\tau_\theta} + u(t)\right)$$

Comme $z(t)$ est une sortie de Brunovsky, $\frac{d}{dt}z(t)$ ne dépend pas de $u(t)$. On a alors $m_\theta = 0$ et :

$$z(t) = m_h.h(t) + m_v.v(t)$$

$$\frac{d}{dt}z(t) = m_h.v(t) + m_v\left(.-\frac{v(t)}{\tau_v} + c.\theta(t) + \frac{w(t)}{\tau_v}\right)$$

$$\frac{d^2}{dt^2}z(t) = \left(m_h - \frac{m_v}{\tau_v}\right).\left(-\frac{v(t)}{\tau_v} + c.\theta(t) + \frac{w(t)}{\tau_v}\right) + m_v.c.\left(-\frac{\theta(t)}{\tau_\theta} + u(t)\right) + \frac{m_v}{\tau_v}.\frac{d}{dt}w(t)$$

Comme $z(t)$ est une sortie de Brunovsky, $\frac{d^2}{dt^2}z(t)$ ne dépend pas de $u(t)$. On a alors $m_v = 0$ et :

$$z(t) = m_h.h(t)$$

$$\frac{d}{dt}z(t) = m_h.v(t)$$

$$\frac{d^2}{dt^2}z(t) = -\frac{m_h}{\tau_v}.v(t) + m_h.c.\theta(t) + \frac{m_h}{\tau_v}.w(t)$$

$$\frac{d^3}{dt^3}z(t) = -\frac{m_h}{\tau_v}.\left(-\frac{v(t)}{\tau_v} + c.\theta(t) + \frac{w(t)}{\tau_v}\right) + m_h.c.\left(-\frac{\theta(t)}{\tau_\theta} + u(t)\right) + \frac{m_h}{\tau_v}.\frac{d}{dt}w(t)$$

Comme $z(t)$ est une sortie de Brunovsky, $\frac{d^3}{dt^3}z(t)$ dépend « unitairement » de $u(t)$. On a alors $m_h = \frac{1}{c}$ et :

$$z(t) = \frac{1}{c}.h(t)$$

$$\frac{d}{dt}z(t) = \frac{1}{c}.v(t)$$

$$\frac{d^2}{dt^2}z(t) = -\frac{1}{c.\tau_v}.v(t) + \theta(t) + \frac{1}{c.\tau_v}.w(t)$$

$$\frac{d^3}{dt^3}z(t) = \frac{1}{c.\tau_v{}^2}.v(t) - \left(\frac{1}{\tau_v} + \frac{1}{\tau_\theta}\right).\theta(t) - \frac{1}{c.\tau_v{}^2}.w(t) + \frac{1}{c.\tau_v}.\frac{d}{dt}w(t) + u(t)$$

On a alors :

$$\begin{cases} h(t) = c.z(t) \\ v(t) = c.\dfrac{d}{dt}z(t) \\ \theta(t) = \dfrac{d^2}{dt^2}z(t) + \dfrac{1}{\tau_v}.\dfrac{d}{dt}z(t) - \dfrac{1}{c.\tau_v}.w(t) \end{cases}$$

Il vient :

$$\frac{d^3}{dt^3}z(t) = -\frac{1}{\tau_v.\tau_\theta}.\frac{d}{dt}z(t) - \left(\frac{1}{\tau_v} + \frac{1}{\tau_\theta}\right).\frac{d^2}{dt^2}z(t) - \frac{1}{c.\tau_v.\tau_\theta}.w(t) + \frac{1}{c.\tau_v}.\frac{d}{dt}w(t) + u(t)$$

On cherche à suivre une trajectoire régulière $z_c(t)$:

On pose :

$$u_c(t) = \frac{1}{\tau_v.\tau_\theta}.\frac{d}{dt}z_c(t) + \left(\frac{1}{\tau_v} + \frac{1}{\tau_\theta}\right).\frac{d^2}{dt^2}z_c(t) + \frac{d^3}{dt^3}z_c(t) + \frac{1}{c.\tau_v.\tau_\theta}.w(t) - \frac{1}{c.\tau_v}.\frac{d}{dt}w(t)$$

On écrit :

$$\begin{cases} z(t) = z_c(t) + \delta z(t) \\ u(t) = u_c(t) + \delta u(t) \end{cases}$$

On a alors :

$$\frac{d^3}{dt^3}\delta z(t) = -\frac{1}{\tau_v.\tau_\theta}.\frac{d}{dt}\delta z(t) - \left(\frac{1}{\tau_v} + \frac{1}{\tau_\theta}\right).\frac{d^2}{dt^2}\delta z(t) + \delta u(t)$$

On cherche ensuite à écrire $\delta u(t)$ comme une combinaison linéaire de $\delta z(t)$, $\frac{d}{dt}\delta z(t)$ et $\frac{d^2}{dt^2}\delta z(t)$:

$$\delta u(t) = -k_0.\delta z(t) - k_1.\frac{d}{dt}\delta z(t) - k_2.\frac{d^2}{dt^2}\delta z(t)$$

Il vient :

$$\frac{d^3}{dt^3}\delta z(t) + \left(\frac{1}{\tau_v} + \frac{1}{\tau_\theta} + k_2\right).\frac{d^2}{dt^2}\delta z(t) + \left(\frac{1}{\tau_v.\tau_\theta} + k_1\right).\frac{d}{dt}\delta z(t) + k_0.\delta z(t) = 0$$

Par le choix de k_0 , k_1 et k_2 on peut choisir librement le polynôme caractéristique de l'équation dynamique linéaire de $\delta z(t)$ et donc en particulier, peut choisir un polynôme caractéristique avec des racines à partie réelle strictement négative afin de garantir que $\delta z(t) \underset{t\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

Q4/ Donner les équations de l'observateur contrôleur qui permet de suivre la trajectoire $z(t) = z_c(t)$ en ne mesurant que $h(t)$ et avec une perturbation constante inconnue (et donc à estimer).

La perturbation $w(t)$ est supposée constante donc $\frac{d}{dt}w(t) = 0$

Pour construire l'observateur contrôleur, il suffit de remplacer les valeurs de l'état et de la perturbation par leur estimation issue de l'observateur :

$$u_c(t) = \frac{1}{\tau_v.\tau_\theta}.\frac{d}{dt}z_c(t) + \left(\frac{1}{\tau_v} + \frac{1}{\tau_\theta}\right).\frac{d^2}{dt^2}z_c(t) + \frac{d^3}{dt^3}z_c(t) + \frac{1}{c.\tau_v.\tau_\theta}.\widehat{w}(t)$$

$$\delta u(t) = k_0.\left(z_c(t) - \hat{z}(t)\right) + k_1.\left(\frac{d}{dt}z_c(t) - \frac{d}{dt}\hat{z}(t)\right) + k_2.\left(\frac{d^2}{dt^2}z_c(t) - \frac{d^2}{dt^2}\hat{z}(t)\right)$$

avec :

$$\hat{z}(t) = \frac{1}{c}.\hat{h}(t)$$

$$\frac{d}{dt}\hat{z}(t) = \frac{1}{c}.\hat{v}(t)$$

$$\frac{d^2}{dt^2}\hat{z}(t) = -\frac{1}{c.\tau_v}.\hat{v}(t) + \hat{\theta}(t) + \frac{1}{c.\tau_v}.\widehat{w}(t)$$

Q5/ On désire maintenant aller d'une altitude stabilisée h_0 vers une autre altitude stabilisée h_1 . Comment choisir la trajectoire de référence $z_c(t)$, en sachant que la commande doit rester comprise entre deux bornes $-a \le u(t)) \le b$ ($a, b > 0$ donnés) et en supposant $|w(t)|$ assez petit.

On peut commencer par chercher une trajectoire de référence sous la forme d'un polynôme en t de degré supérieur ou égal à 5 :

$$z_c(t) = a_0 + a_1.t + a_2.t^2 + a_3.t^3 + a_4.t^4 + a_5.t^5$$

On note $T > 0$ la date à laquelle la trajectoire se stabilise à l'altitude h_1 (T à choisir judicieusement).

On écrit les conditions initiales et les conditions finales :

$$\begin{cases} z_c(0) = \dfrac{h_0}{c} \\ \dfrac{d}{dt} z_c(0) = 0 \\ \dfrac{d^2}{dt^2} z_c(0) = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} z_c(T) = \dfrac{h_1}{c} \\ \dfrac{d}{dt} z_c(T) = 0 \\ \dfrac{d^2}{dt^2} z_c(T) = 0 \end{cases}$$

On en déduit les coefficients a_i :

$$\begin{cases} z_c(0) = a_0 = \dfrac{h_0}{c} \\ \dfrac{d}{dt} z_c(0) = a_1 = 0 \\ \dfrac{d^2}{dt^2} z_c(0) = a_2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} z_c(T) = \dfrac{h_0}{c} + a_3.T^3 + a_4.T^4 + a_5.T^5 = \dfrac{h_1}{c} \\ \dfrac{d}{dt} z_c(T) = 3.a_3.T^2 + 4.a_4.T^3 + 5.a_5.T^4 = 0 \\ \dfrac{d^2}{dt^2} z_c(T) = 6.a_3.T + 12.a_4.T^2 + 20.a_5.T^3 = 0 \end{cases}$$

Il vient :

$$\begin{cases} a_3.T^3. + a_4.T^4 + a_5.T^5 = \dfrac{h_1 - h_0}{c} \\ 3.a_3.T^3 + 4.a_4.T^4 + 5.a_5.T^5 = 0 \\ 6.a_3.T^3 + 12.a_4.T^4 + 20.a_5.T^5 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 5 \\ 6 & 12 & 20 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} a_3.T^3 \\ a_4.T^4 \\ a_5.T^5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{h_1 - h_0}{c} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

La solution de cette dernière équation peut s'écrire :

$$\begin{pmatrix} a_3.T^3 \\ a_4.T^4 \\ a_5.T^5 \end{pmatrix} = \frac{h_1 - h_0}{c} . \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 5 \\ 6 & 12 & 20 \end{pmatrix}^{-1} . \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{h_1 - h_0}{c} . \begin{pmatrix} b_3 \\ b_4 \\ b_5 \end{pmatrix}$$

On a donc :

$$z_c(t) = \frac{h_0}{c} + \frac{h_1 - h_0}{c} . \left(b_3 . \frac{t^3}{T^3} + b_4 . \frac{t^4}{T^4} + b_5 . \frac{t^5}{T^5} \right)$$

Rappelons l'équation de la commande :

$$u_c(t) = \frac{1}{\tau_v . \tau_\theta} . \frac{d}{dt} z_c(t) + \left(\frac{1}{\tau_v} + \frac{1}{\tau_\theta} \right) . \frac{d^2}{dt^2} z_c(t) + \frac{d^3}{dt^3} z_c(t) + \frac{1}{c . \tau_v . \tau_\theta} . w(t) - \frac{1}{c . \tau_v} . \frac{d}{dt} w(t)$$

Plus T est grand, plus $\frac{d}{dt} z_c(t)$, $\frac{d^2}{dt^2} z_c(t)$ et $\frac{d^3}{dt^3} z_c(t)$ sont petits et, en supposant $w(t)$ suffisamment petit et d'évolution lente, plus $u_c(t)$ est petit. En choisissant T suffisamment grand, on peut donc définir une trajectoire de référence avec une commande aussi petite que l'on veut (en supposant $w(t)$ suffisamment petit et d'évolution lente).