ENSTA PARIS

AUT202 – AUTOMATIQUE : DYNAMIQUE ET CONTROLE DES SYSTEMES

PETITE CLASSE N°1

8 FEVRIER 2023

INTRODUCTION – Commandabilité et forme de Brunovsky

Définition – Commandabilité

Un système dynamique $\frac{d}{dt}X(t) = f\big(X(t), U(t)\big)$ est commandable si pour tout état initial X_i et tout état final X_f, il existe une commande $U(t)$ permettant de passer en temps fini $T > 0$ de l'état initial X_i à l'état final X_f.

Propriété – Critère de commandabilité de Kalman

Le système dynamique linéaire $\frac{d}{dt}X(t) = A.X(t) + B.U(t)$ est commandable si et seulement si la matrice de commandabilité $\mathcal{C}(A,B) = (B \quad A.B \quad \cdots \quad A^{n-1}.B)$ est de rang $n = \dim\big(X(t)\big)$.

Propriété – Placement de pôles

Soit un système dynamique linéaire :

$$(S) \quad \frac{d}{dt}X(t) = A.X(t) + B.U(t) \quad \text{avec} \begin{cases} \dim\big(X(t)\big) = n \\ \dim\big(U(t)\big) = m \end{cases}$$

Si (S) est commandable alors pour tout polynôme unitaire P de degré n, il existe une matrice K de dimension $m \times n$ telle que les valeurs propres de $A - B.K$ soient les racines de P.

En d'autres termes, si un système dynamique linéaire est commandable, avec une commande de la forme $U(t) = -K.X(t)$, on peut choisir librement les valeurs propres en boucle fermée, et en particulier des valeurs propres à partie réelle strictement négative pour que $X(t)$ tende vers 0.

Propriété – Forme de Brunovsky (système linéaire avec une commande scalaire)

Soit un système dynamique linéaire avec une commande scalaire :

$$(S) \quad \frac{d}{dt}X(t) = A.X(t) + B.u(t) \quad \text{avec} \begin{cases} \dim\big(X(t)\big) = n \\ \dim\big(u(t)\big) = 1 \end{cases}$$

(S) est commandable si et seulement si il existe un changement de variable $Z(t) = M.X(t)$ permettant d'écrire la dynamique sous forme de Brunovsky :

$$(S_B) \quad \frac{d}{dt}\underbrace{\begin{pmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \\ \vdots \\ \vdots \\ z_n(t) \end{pmatrix}}_{Z(t)} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \cdots & \cdots & -a_{n-1} \end{pmatrix}}_{A_Z} . \underbrace{\begin{pmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \\ \vdots \\ \vdots \\ z_n(t) \end{pmatrix}}_{Z(t)} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{B_Z} .u(t)$$

$z(t) = z_1(t)$ est la sortie de Brunovsky du système et satisfait la dynamique :

$$\frac{d^n}{dt^n}z(t) = -\sum_{i=0}^{n-1} a_i.\frac{d^i}{dt^i}z(t) + u(t)$$

La sortie de Brunovsky $z(t)$ s'exprime à l'aide de la matrice de commandabilité $\mathcal{C}(A,B)$:

$$z(t) = (0 \quad \cdots \quad 0 \quad 1).\mathcal{C}(A,B)^{-1}.X(t)$$

Les coefficients a_i sont liés au polynôme caractéristique de A :

$$P_A(s) = s^n + \sum_{i=0}^{n-1} a_i.s^i$$

Démonstration – Forme de Brunovsky (système linéaire avec une commande scalaire)

Supposons qu'il existe un changement de variable $Z(t) = M.X(t)$ permettant d'écrire la dynamique sous forme de Brunovsky (S_B). Montrons que :

- (S) est commandable ;
- la sortie de Brunovsky vérifie $\frac{d^n}{dt^n}z(t) = -\sum_{i=0}^{n-1} a_i.\frac{d^i}{dt^i}z(t) + u(t)$;
- la sortie de Brunovsky s'écrit $z(t) = (0 \quad \cdots \quad 0 \quad 1).\mathcal{C}(A,B)^{-1}.X(t)$;
- le polynôme caractéristique de la matrice A s'écrit $P_A(s) = s^n + \sum_{i=0}^{n-1} a_i.s^i$.

Sachant que $Z(t) = M.X(t)$, on peut relier (A,B) et (A_Z,B_Z) de la manière suivante :

$$\frac{d}{dt}Z(t) = M.\frac{d}{dt}X(t) = M.A.X(t) + M.B.u(t) = M.A.M^{-1}.Z(t) + M.B.u(t) \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} A_Z = M.A.M^{-1} \\ B_Z = M.B \end{cases}$$

On a alors :

$$\mathcal{C}(A_Z,B_Z) = (B_Z \quad A_Z.B_Z \quad \cdots \quad {A_Z}^{n-1}.B_Z) = M.(B \quad A.B \quad \cdots \quad A^{n-1}.B) = M.\mathcal{C}(A,B)$$

$\mathcal{C}(A_Z,B_Z)$ et $\mathcal{C}(A,B)$ ont ainsi nécessairement le même rang (car M est inversible).

On montre facilement que $\mathcal{C}(A_Z,B_Z)$ s'écrit sous la forme :

$$\mathcal{C}(A_Z,B_Z) = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ \vdots & & \iddots & 1 & * \\ \vdots & \iddots & \iddots & \iddots & \vdots \\ 0 & 1 & \iddots & & \vdots \\ 1 & * & \cdots & \cdots & * \end{pmatrix}$$

Ainsi, $\mathcal{C}(A_Z,B_Z)$ est inversible, donc $\mathcal{C}(A,B)$ aussi. $\mathcal{C}(A,B)$ est ainsi de rang $n = \dim\big(X(t)\big)$ et (S) est commandable.

Posons maintenant :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} z_1(t) \\ \vdots \\ z_n(t) \end{pmatrix}}_{Z(t)} = \underbrace{\begin{pmatrix} M_1 \\ \vdots \\ M_n \end{pmatrix}}_{M}.X(t)$$

Pour $i = 1..n-1$, on a (récurrence) :

$$\begin{cases} \frac{d^i}{dt^i}z(t) = \frac{d}{dt}\frac{d^{i-1}}{dt^{i-1}}z(t) = M_1.A^{i-1}.\frac{d}{dt}X(t) = M_1.A^i.X(t) + M_1.A^{i-1}.B.u(t) \\ \frac{d^i}{dt^i}z(t) = \frac{d}{dt}\frac{d^{i-1}}{dt^{i-1}}z(t) = \frac{d}{dt}z_i(t) = z_{i+1}(t) = M_{i+1}.X(t) \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} M_1.A^{i-1}.B = 0 \\ \frac{d^i}{dt^i}z(t) = M_1.A^i.X(t) \end{cases}$$

Par ailleurs, on a :

$$\begin{cases} \dfrac{d^n}{dt^n} z(t) = \dfrac{d}{dt}\dfrac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} z(t) = M_1.A^{n-1}.\dfrac{d}{dt}X(t) = M_1.A^n.X(t) + M_1.A^{n-1}.B.u(t) \\ \dfrac{d^n}{dt^n} z(t) = \dfrac{d}{dt}\dfrac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} z(t) = \dfrac{d}{dt} z_n(t) = -\sum_{i=0}^{n-1} a_i.\underbrace{z_{i+1}(t)}_{=\frac{d^i}{dt^i}z(t)} + u(t) \end{cases} \Rightarrow \quad M_1.A^{n-1}.B = 1$$

La sortie de Brunovsky vérifie bien :

$$\frac{d^n}{dt^n} z(t) = -\sum_{i=0}^{n-1} a_i.\frac{d^i}{dt^i} z(t) + u(t)$$

On a par ailleurs :

$$M_1.\underbrace{(B \quad A.B \quad \cdots \quad A^{n-1}.B)}_{=\mathcal{C}(A,B)} = (0 \quad \cdots \quad 0 \quad 1) \quad \Rightarrow \quad M_1 = (0 \quad \cdots \quad 0 \quad 1).\mathcal{C}(A,B)^{-1}$$

Alors la sortie de Brunovsky s'écrit bien :

$$z(t) = z_1(t) = M_1.X(t) = (0 \quad \cdots \quad 0 \quad 1).\mathcal{C}(A,B)^{-1}.X(t)$$

A_Z étant une matrice compagnon, les coefficients a_i sont liés à son polynôme caractéristique :

$$P_{A_Z}(s) = s^n + \sum_{i=0}^{n-1} a_i.s^i$$

Comme $A_Z = M.A.M^{-1}$, on a :

$$P_{A_Z}(s) = \det(I_n - s.A_Z) = \det(I_n - s.M.A.M^{-1}) = \det(M.(I_n - s.A).M^{-1}) = \det(I_n - s.A) = P_A(s)$$

On vérifie bien que :

$$P_A(s) = s^n + \sum_{i=0}^{n-1} a_i.s^i$$

Supposons à l'invserse que (S) soit commandable. Montrons qu'il existe un changement de variable $Z(t) = M.X(t)$ permettant d'écrire la dynamique sous forme de Brunovsky (S_B) .

$\mathcal{C}(\mathrm{A},\mathrm{B})$ est alors de rang $n = \dim\big(X(t)\big)$, donc inversible et on peut définir :

$$M_1 = (0 \quad \cdots \quad 0 \quad 1).\mathcal{C}(A,B)^{-1}$$

On a alors :

$$M_1.\underbrace{(B \quad A.B \quad \cdots \quad A^{n-1}.B)}_{=\mathcal{C}(A,B)} = (0 \quad \cdots \quad 0 \quad 1) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} M_1.A^{i-1}.B = 0 \quad \text{pour } i = 1..n-1 \\ M_1.A^{n-1}.B = 1 \end{cases}$$

Posons :

$$z(t) = z_1(t) = M_1.X(t)$$

Pour $i = 1..n-1$, on a (récurrence) :

$$\frac{d^i}{dt^i} z(t) = \frac{d}{dt}\frac{d^{i-1}}{dt^{i-1}} z(t) = M_1.A^{i-1}.\frac{d}{dt}X(t) = M_1.A^i.X(t) + \underbrace{M_1.A^{i-1}.B}_{=0}.u(t) = M_1.A^i.X(t)$$

Par ailleurs, on a :

$$\frac{d^n}{dt^n} z(t) = \frac{d}{dt}\frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} z(t) = M_1.A^{n-1}.\frac{d}{dt}X(t) = M_1.A^n.X(t) + \underbrace{M_1.A^{n-1}.B}_{=1}.u(t) = M_1.A^n.X(t) + u(t)$$

On pose alors :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \\ \vdots \\ z_n(t) \end{pmatrix}}_{Z(t)} = \underbrace{\begin{pmatrix} M_1 \\ M_1.A \\ \vdots \\ M_1.A^{n-1} \end{pmatrix}}_{M}.X(t) = \begin{pmatrix} M_1.X(t) \\ M_1.A.X(t) \\ \vdots \\ M_1.A^{n-1}.X(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z(t) \\ \frac{d}{dt}z(t) \\ \vdots \\ \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}z(t) \end{pmatrix}$$

On vérifie bien pour $i = 1..n-1$:

$$\frac{d}{dt}z_i(t) = \frac{d}{dt}\frac{d^{i-1}}{dt^{i-1}}z(t) = \frac{d^i}{dt^i}z(t) = z_{i+1}(t)$$

Par ailleurs, on a :

$$\frac{d}{dt}z_n(t) = \frac{d}{dt}\frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}z(t) = \frac{d^n}{dt^n}z(t) = M_1.A^n.X(t) + u(t) = M_1.A^n.M^{-1}.Z(t) + u(t)$$

$M_1.A^n.M^{-1}.Z(t)$ est une combinaison linéaire des états $z_i(t)$ donc peut s'écrire :

$$M_1.A^n.M^{-1}.Z(t) = -\sum_{i=0}^{n-1} a_i.z_{i+1}(t)$$

Il vient :

$$\frac{d}{dt}z_n(t) == -\sum_{i=0}^{n-1} a_i.z_{i+1}(t) + u(t)$$

Alors le changement de variable $Z(t) = M.X(t)$ permet bien d'écrire la dynamique sous forme de Brunovsky (S_B).

Planification de trajectoire – Forme de Brunovsky (système linéaire avec une commande scalaire)

Une fois sous forme de Brunovsky (S_B), on peut trouver une trajectoire permettant de passer en temps fini $T > 0$ d'un état initial $Z_0 = M.X_0$ à un état final $Z_T = M.X_T$.

Il suffit de trouver une fonction $v(t)$ solution de :

$$\frac{d^n}{dt^n}z(t) = v(t)$$

avec les conditions initiales $\begin{pmatrix} z(0) \\ \vdots \\ \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}z(0) \end{pmatrix} = M.X_i$ et les conditions finales $\begin{pmatrix} z(T) \\ \vdots \\ \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}z(T) \end{pmatrix} = M.X_T$.

On peut par exemple chercher $v(t)$ sous la forme d'un polynôme d'ordre supérieur ou égal à $2.n-1$.

La loi de commande correspondante s'écrit alors :

$$u(t) = v(t) + \sum_{i=0}^{n-1} a_i.\frac{d^i}{dt^i}z(t)$$

On rappelle que les coefficients a_i sont liés au polynôme caractéristique de la matrice A :

$$P_A(s) = s^n + \sum_{i=0}^{n-1} a_i.s^i$$

Retour d'état – Forme de Brunovsky (système linéaire avec une commande scalaire)

Une fois sous forme de Brunovsky (S_B), on peut trouver un retour d'état qui stabilise le système sur une trajectoire de référence en plaçant les valeurs propres en boucle fermées où l'on veut.

On note $(X_r(t), u_r(t))$ la trajectoire de référence que l'on souhaite suivre, que l'on suppose solution de (S) (on aura pu la trouver résolvant un problème de planification de trajectoire sous forme de Brunovsky).

On pose :

$$X(t) = X_r(t) + \delta X(t) \quad u(t) = u_r(t) + \delta u(t)$$

On a alors la dynamique suivante autour de la trajectoire de référence :

$$\frac{d}{dt}\delta X(t) = A.\delta X(t) + B.\delta u(t)$$

On note $\delta z(t) = (0 \quad \cdots \quad 0 \quad 1).\underbrace{(B \quad A.B \quad \cdots \quad A^{n-1}.B)}_{=\mathcal{C}(A,B)}{}^{-1}.\delta X(t) = M_1.\delta X(t)$ la sortie de Brunovsky associée à cette dynamique. On a alors :

$$\frac{d^n}{dt^n}\delta z(t) = -\sum_{i=0}^{n-1} a_i.\frac{d^i}{dt^i}\delta z(t) + \delta u(t)$$

On cherche une commande $\delta u(t)$ sous la forme d'une combinaison linéaire des dérivées de $\delta z(t)$:

$$\delta u(t) = -\sum_{i=0}^{n-1} k_i.\frac{d^i}{dt^i}\delta z(t)$$

où les coefficients k_i sont à choisir judicieusement.

La dynamique s'écrit alors :

$$\frac{d^n}{dt^n}\delta z(t) = -\sum_{i=0}^{n-1}(a_i + k_i).\frac{d^i}{dt^i}\delta z(t)$$

Le polynôme caractéristique en boucle fermé est ainsi :

$$P_{BF}(s) = s^n + \sum_{i=0}^{n-1}(a_i + k_i).s^i$$

Le choix des coefficients k_i permet de choisir n'importe quelles racines pour le polynôme caractéristique.

Par exemple, supposons que l'on souhaite placer les valeurs propres en boucle fermée en $\lambda_1..\lambda_n$. Le polynôme caractéristique correspondant doit alors s'écrire :

$$P(s) = \prod_{i=1}^{n} s - \lambda_i = s^n + \sum_{i=0}^{n-1} c_i.s^i$$

Il n'y a plus qu'à identifier les coefficients :

$$k_i = c_i - a_i$$

On rappelle que les coefficients a_i sont liés au polynôme caractéristique de la matrice A :

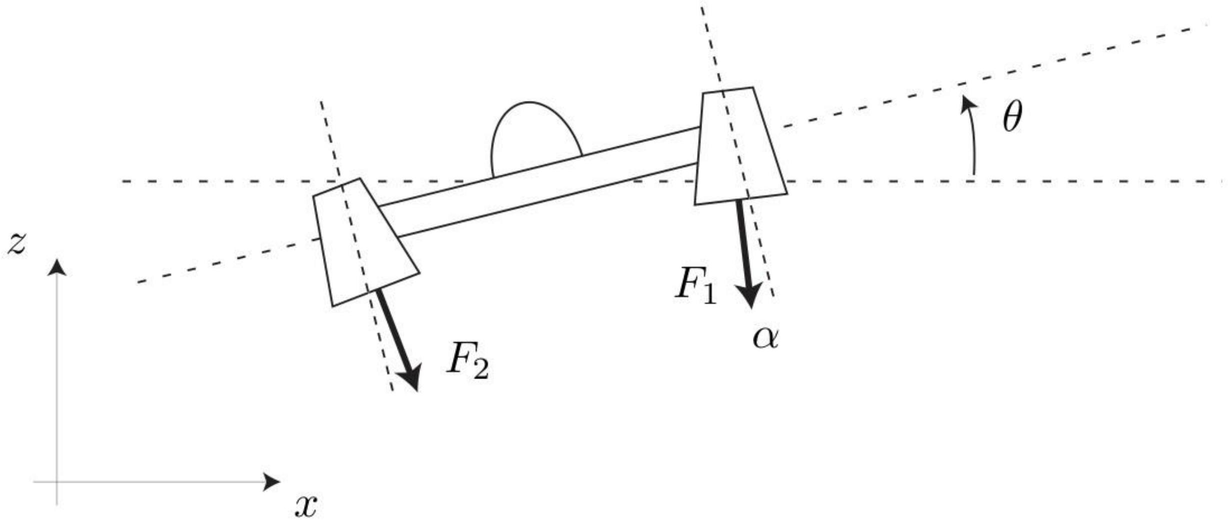
$$P_A(s) = s^n + \sum_{i=0}^{n-1} a_i.s^i$$

La loi de commande correspondante s'écrit alors :

$$u(t) = u_r(t) - \sum_{i=0}^{n-1} k_i.\frac{d^i}{dt^i}\delta z(t) = u_r(t) - \underbrace{\left(M_1.\sum_{i=0}^{n-1} k_i.A^i\right)}_{K}.\left(X(t) - X_r(t)\right)$$

EXERCICE – Engin à poussée vectorisée

On s'intéresse ici au pilotage de systèmes aérospatiaux à poussée vectorisée qui forment une classe de systèmes sous-actionnés : avion à décollage vertical, quadricoptère, lanceur réutilisable, atterrisseur lunaire… On étudie ici plus particulièrement le pilotage d'un drone multirotor dans le plan vertical. On cherche à contrôler son déplacement pour lui faire suivre une trajectoire horizontale ou une trajectoire verticale (décollage, atterrissage).



Le comportement dynamique du drone s'écrit dans le plan vertical :

$$\begin{cases} m.\dfrac{d}{dt}v_x(t) = \big(F_1(t) - F_2(t)\big).\sin(\alpha).\cos\big(\theta(t)\big) - \big(F_1(t) + F_2(t)\big).\cos(\alpha).\sin\big(\theta(t)\big) + f_x \\ m.\dfrac{d}{dt}v_z(t) = \big(F_1(t) - F_2(t)\big).\sin(\alpha).\sin\big(\theta(t)\big) + \big(F_1(t) + F_2(t)\big).\cos(\alpha).\cos\big(\theta(t)\big) - m.g + f_z \\ J.\dfrac{d^2}{dt^2}\theta(t) = \big(F_1(t) - F_2(t)\big).l.\cos(\alpha) + f_\theta \end{cases}$$

où :

- $v_x(t)$ est la composante horizontale de la vitesse du centre de masse ;
- $v_z(t)$ est la composante verticale de la vitesse du centre de masse ;
- $\theta(t)$ est l'angle du drone par rapport à l'horizontale ;
- $F_1(t)$ et $F_2(t)$ sont les poussées des moteurs ;
- l est la distance des moteurs par rapport au centre de masse ;
- α est l'inclinaison des moteurs (quasi-nulle) ;
- m est la masse du drone ;
- J est le moment d'inertie du drone ;
- f_x , f_z et f_θ les efforts aérodynamiques qui s'exercent sur le drone, négligeables à faible vitesse et nuls quand le drone ne bouge pas.

Les poussées $F_1(t)$ et $F_2(t)$ évoluent en fonction des commandes des moteurs $u_1(t)$ et $u_2(t)$ d'après les équations :

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}F_1(t) = K.\big(u_1(t) - F_1(t)\big) \\ \dfrac{d}{dt}F_2(t) = K.\big(u_2(t) - F_2(t)\big) \end{cases}$$

où $K > 0$ est grand.

Q1/ Quels sont, dans le modèle proposé, le nombre de variables d'état et le nombre de commandes ?

On rassemble toutes les équations dynamiques dans un unique système avec une équation dynamique par état :

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}v_x(t) = \left(F_1(t) - F_2(t)\right).\frac{\sin(\alpha)}{m}.\cos\left(\theta(t)\right) - \left(F_1(t) + F_2(t)\right).\frac{\cos(\alpha)}{m}.\sin\left(\theta(t)\right) + \frac{f_x}{m} \\ \frac{d}{dt}v_z(t) = \left(F_1(t) - F_2(t)\right).\frac{\sin(\alpha)}{m}.\sin\left(\theta(t)\right) + \left(F_1(t) + F_2(t)\right).\frac{\cos(\alpha)}{m}.\cos\left(\theta(t)\right) - g + \frac{f_z}{m} \\ \frac{d}{dt}\theta(t) = \omega(t) \\ \frac{d}{dt}\omega(t) = \left(F_1(t) - F_2(t)\right).\frac{l.\cos(\alpha)}{J} + \frac{f_\theta}{J} \\ \frac{d}{dt}F_1(t) = K.\left(u_1(t) - F_1(t)\right) \\ \frac{d}{dt}F_2(t) = K.\left(u_2(t) - F_2(t)\right) \end{cases}$$

Le système possède 6 états : $v_x(t)$, $v_z(t)$, $\theta(t)$, $\omega(t) = \frac{d}{dt}\theta(t)$, $F_1(t)$ et $F_2(t)$.

Le système possède 2 commandes : $u_1(t)$ et $u_2(t)$.

Les efforts aérodynamiques f_x , f_z et f_θ peuvent être considérés comme des perturbations.

Q2/ Simplifier ce modèle en notant que les effets aérodynamiques sont négligeables à basse vitesse et que certaines variables sont très rapides (et asymptotiquement stables) devant d'autres.

La dynamique des moteurs s'écrit :

$$\frac{d}{dt}F_i(t) = K.\left(u_i(t) - F_i(t)\right)$$

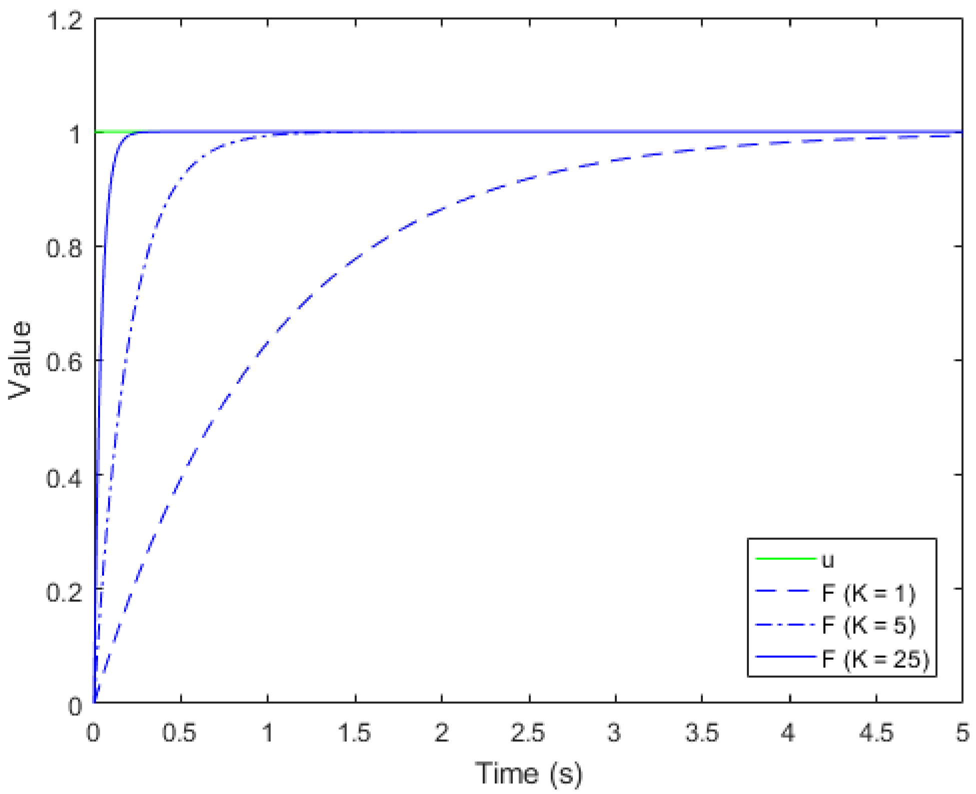
La solution de cette équation est donnée par la formule suivante :

$$F_i(t) = \exp(-K.t).F_i(0) + \int_0^t \exp\left(-K.(t-s)\right).K.u_i(s).ds$$

Pour visualiser l'effet de $K > 0$ grand, considérons la réponse à un échelon de consigne :

$$u_i(t) = U \quad \Longrightarrow \quad F_i(t) = U + \exp(-K.t).(F_i(0) - U)$$

Plus $K > 0$ est grand, plus $F_i(t)$ converge vite vers $u_i(t)$.



On peut donc considérer que lorsque $K > 0$ est grand, l'équilibre est atteint quasi-instantanément, c'est-à-dire :

$$F_i(t) \approx u_i(t)$$

Par ailleurs, les efforts aérodynamiques sont négligeables à basse vitesse.

On peut donc simplifier le modèle en remplaçant les états $F_1(t)$ et $F_2(t)$ par les commandes $u_1(t)$ et $u_2(t)$ et en considérant les efforts aérodynamiques nuls :

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}v_x(t) = \big(u_1(t) - u_2(t)\big).\frac{\sin(\alpha)}{m}.\cos\big(\theta(t)\big) - \big(u_1(t) + u_2(t)\big).\frac{\cos(\alpha)}{m}.\sin\big(\theta(t)\big) \\ \frac{d}{dt}v_z(t) = \big(u_1(t) - u_2(t)\big).\frac{\sin(\alpha)}{m}.\sin\big(\theta(t)\big) + \big(u_1(t) + u_2(t)\big).\frac{\cos(\alpha)}{m}.\cos\big(\theta(t)\big) - g \\ \frac{d}{dt}\theta(t) = \omega(t) \\ \frac{d}{dt}\omega(t) = \big(u_1(t) - u_2(t)\big).\frac{l.\cos(\alpha)}{J} \end{cases}$$

On pose :

$$a = \frac{m}{\cos(\alpha)} \quad b = \frac{J}{l.\cos(\alpha)} \quad c = \frac{J}{m.l}.\tan(\alpha) \quad v_1(t) = \frac{u_1(t) + u_2(t)}{a} \quad v_2(t) = \frac{u_1(t) - u_2(t)}{b}$$

Q3/ Montrer que l'on a :

$$\begin{cases} \boldsymbol{\frac{d}{dt}v_x(t) = c.v_2(t).\cos\big(\theta(t)\big) - v_1(t).\sin\big(\theta(t)\big)} \\ \boldsymbol{\frac{d}{dt}v_z(t) = c.v_2(t).\sin\big(\theta(t)\big) + v_1(t).\cos\big(\theta(t)\big) - g} \\ \boldsymbol{\frac{d^2}{dt^2}\theta(t) = v_2(t)} \end{cases}$$

où $v_1(t)$ et $v_2(t)$ sont les nouvelles commandes.

On a :

$$\begin{cases} \left(u_1(t)+u_2(t)\right).\dfrac{\cos(\alpha)}{m} = a.v_1(t).\dfrac{\cos(\alpha)}{m} = v_1(t) \\ \left(u_1(t)-u_2(t)\right).\dfrac{\sin(\alpha)}{m} = b.v_2(t).\dfrac{\sin(\alpha)}{m} = \dfrac{J}{m.l}.\tan(\alpha).v_2(t) = c.v_2(t) \\ \left(u_1(t)-u_2(t)\right).\dfrac{l.\cos(\alpha)}{J} = b.v_2(t).\dfrac{l.\cos(\alpha)}{J} = v_2(t) \end{cases}$$

Il vient :

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}v_x(t) = c.v_2(t).\cos\left(\theta(t)\right) - v_1(t).\sin\left(\theta(t)\right) \\ \dfrac{d}{dt}v_z(t) = c.v_2(t).\sin\left(\theta(t)\right) + v_1(t).\cos\left(\theta(t)\right) - g \\ \dfrac{d}{dt}\theta(t) = \omega(t) \\ \underbrace{\dfrac{d}{dt}\omega(t)}_{=\frac{d^2}{dt^2}\theta(t)} = v_2(t) \end{cases}$$

Q4/ Quels sont les points d'équilibre de ce modèle ?

L'équilibre s'écrit :

$$\begin{cases} 0 = c.v_{2,eq}.\cos\left(\theta_{eq}\right) - v_{1,eq}.\sin\left(\theta_{eq}\right) \\ 0 = c.v_{2,eq}.\sin\left(\theta_{eq}\right) + v_{1,eq}.\cos\left(\theta_{eq}\right) - g \\ 0 = \omega_{eq} \\ 0 = v_{2,eq} \end{cases}$$

Comme $v_{2,eq} = 0$, on a :

$$\begin{cases} v_{1,eq}.\sin\left(\theta_{eq}\right) = 0 \\ v_{1,eq}.\cos\left(\theta_{eq}\right) = g \end{cases}$$

Il vient alors :

$$\begin{cases} v_{x,eq} = cte \\ v_{z,eq} = cte \\ \theta_{eq} = 0\ [2\pi] \\ \omega_{eq} = 0 \\ v_{1,eq} = g \\ v_{2,eq} = 0 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} v_{x,eq} = cte \\ v_{z,eq} = cte \\ \theta_{eq} = \pi\ [2\pi] \\ \omega_{eq} = 0 \\ v_{1,eq} = -g \\ v_{2,eq} = 0 \end{cases}$$

Dans la suite, on choisit de travail sur l'équilibre « à l'endroit » avec $\theta_{eq} = 0$.

Q5/ Etablir que le linéarisé tangent autour d'un équilibre est donné par :

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\delta v_x(t) = -g.\delta\theta(t) + c.\delta v_2(t) \\ \dfrac{d}{dt}\delta v_z(t) = \delta v_1(t) \\ \dfrac{d^2}{dt^2}\delta\theta(t) = \delta v_2(t) \end{cases}$$

On introduit les variables d'écart :

$$\begin{cases} v_x(t) = v_{x,eq} + \delta v_x(t) \\ v_z(t) = v_{z,eq} + \delta v_z(t) \\ \theta(t) = \theta_{eq} + \delta\theta(t) = \delta\theta(t) \\ \omega(t) = \omega_{eq} + \delta\omega(t) = \delta\omega(t) \end{cases} \qquad \begin{cases} v_1 = v_{1,eq} + \delta v_1(t) = g + \delta v_1(t) \\ v_2 = v_{2,eq} + \delta v_2(t) = \delta v_2(t) \end{cases}$$

On a alors :

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\delta v_x(t) = c.\delta v_2(t).\underbrace{\cos\big(\delta\theta(t)\big)}_{\approx 1} - \big(g + \delta v_1(t)\big).\underbrace{\sin\big(\delta\theta(t)\big)}_{\approx \delta\theta(t)} \approx c.\delta v_2(t) - g.\delta\theta(t) \\ \dfrac{d}{dt}\delta v_z(t) = c.\delta v_2(t).\underbrace{\sin\big(\delta\theta(t)\big)}_{\approx \delta\theta(t)} + \big(g + \delta v_1(t)\big).\underbrace{\cos\big(\delta\theta(t)\big)}_{\approx 1} - g \approx \delta v_1(t) \\ \dfrac{d}{dt}\delta\theta(t) = \delta\omega(t) \\ \underbrace{\dfrac{d}{dt}\delta\omega(t)}_{=\frac{d^2}{dt^2}\delta\theta(t)} = \delta v_2(t) \end{cases}$$

On constate qu'au premier ordre, les équations forment deux systèmes indépendants.

Q6/ Proposer un bouclage d'état qui stabilise la dynamique verticale :

$$\boldsymbol{\frac{d}{dt}\delta v_z(t) = \delta v_1(t)}$$

Pour faire un bouclage d'état, on cherche une commande $\delta v_1(t)$ qui dépend linéairement de l'état $\delta v_z(t)$ et qui garantit que $\delta v_z(t) \xrightarrow[t\to\infty]{} 0$.

$\delta v_1(t)$ s'écrit donc nécessairement de la forme :

$$\delta v_1(t) = -k_z.\delta v_z(t)$$

Où le coefficient k_z est à choisir judicieusement.

La dynamique longitudinale s'écrit avec cette commande :

$$\frac{d}{dt}\delta v_z(t) = -k_z.\delta v_z(t)$$

En choisissant $k_z > 0$, on a $\delta v_z(t) = \delta v_z(0).e^{-k_z.t} \xrightarrow[t\to\infty]{} 0$ et on obtient un bouclage d'état stabilisant la dynamique verticale.

Par exemple, pour avoir comme valeur propre en boucle fermée -1, il faut choisir $k_z = 1$.

Dans le cas général, la loi de commande verticale s'écrit :

$$v_1(t) = g + \delta v_1(t) = g - k_z.\delta v_z(t) = g + k_z.\big(v_{z,eq} - v_z(t)\big)$$

Q7/ Mettre sous forme de Brunovsky le sous-système correspondant à la dynamique latérale :

$$\boldsymbol{\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\delta v_x(t) = -g.\delta\theta(t) + c.\delta v_2(t) \\ \dfrac{d^2}{dt^2}\delta\theta(t) = \delta v_2(t) \end{cases}}$$

Pour pouvoir mettre un système sous forme de Brunovsky, il faut tout d'abord vérifier qu'il est commandable.

Ici la dynamique longitudinale s'écrit sous forme d'état :

$$\frac{d}{dt}\underbrace{\begin{pmatrix}\delta v_x(t)\\ \delta\theta(t)\\ \delta\omega(t)\end{pmatrix}}_{X(t)}=\underbrace{\begin{pmatrix}0 & -g & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}}_{A}.\underbrace{\begin{pmatrix}\delta v_x(t)\\ \delta\theta(t)\\ \delta\omega(t)\end{pmatrix}}_{X(t)}+\underbrace{\begin{pmatrix}c\\ 0\\ 1\end{pmatrix}}_{B}.\delta v_2(t)$$

On calcule la matrice de commandabilité $\mathcal{C}(A,B)=(B\quad A.B\quad A^2.B)$:

$$B=\begin{pmatrix}c\\ 0\\ 1\end{pmatrix}\quad A.B=\underbrace{\begin{pmatrix}0 & -g & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}}_{A}.\underbrace{\begin{pmatrix}c\\ 0\\ 1\end{pmatrix}}_{B}=\begin{pmatrix}0\\ 1\\ 0\end{pmatrix}\quad A^2.B=A.(A.B)=\underbrace{\begin{pmatrix}0 & -g & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}}_{A}.\underbrace{\begin{pmatrix}0\\ 1\\ 0\end{pmatrix}}_{A.B}=\begin{pmatrix}-g\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$$

$\mathcal{C}(A,B)=\begin{pmatrix}c & 0 & -g\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}$ est bien de rang $3=\dim\big(X(t)\big)$ donc la dynamique latérale est commandable.

Il existe donc un changement de variable $Z(t)=M.X(t)$ permettant de mettre la dynamique latérale sous forme de Brunovsky :

$$(S_B)\quad\frac{d}{dt}\underbrace{\begin{pmatrix}z_1(t)\\ z_2(t)\\ z_3(t)\end{pmatrix}}_{Z(t)}=\underbrace{\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ -a_0 & -a_1 & -a_2\end{pmatrix}}_{A_Z}.\underbrace{\begin{pmatrix}z_1(t)\\ z_2(t)\\ z_3(t)\end{pmatrix}}_{Z(t)}+\underbrace{\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 1\end{pmatrix}}_{B_Z}.\delta v_2(t)$$

$z(t)=z_1(t)=(0\quad 0\quad 1).\mathcal{C}(A,B)^{-1}.X(t)$ est la sortie de Brunovsky du système et satisfait la dynamique :

$$\frac{d^n}{dt^n}z(t)=-\sum_{i=0}^{n-1}a_i.\frac{d^i}{dt^i}z(t)+\delta v_2(t)$$

On pose alors $(m_x\quad m_\theta\quad m_\omega)=(0\quad 0\quad 1).\underbrace{(B\quad A.B\quad A^2.B)}_{=\mathcal{C}(A,B)}{}^{-1}$.

On a donc :

$$(m_x\quad m_\theta\quad m_\omega).\begin{pmatrix}c & 0 & -g\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}=(0\quad 0\quad 1)\quad\Leftrightarrow\quad\begin{pmatrix}c & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ -g & 0 & 0\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}m_x\\ m_\theta\\ m_\omega\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 1\end{pmatrix}$$

On résoud le système :

$$\begin{cases}m_x=-\dfrac{1}{g}\\ m_\theta=0\\ m_\omega=\dfrac{c}{g}\end{cases}$$

La sortie de Brunovsky est donc :

$$z(t)=(m_x\quad m_\theta\quad m_\omega).X(t)=-\frac{1}{g}.\delta v_x(t)+\frac{c}{g}.\delta\omega(t)$$

On en déduit, en dérivant successivement $z(t)$:

$$\frac{d}{dt}z(t)=\delta\theta(t)$$

$$\frac{d^2}{dt^2}z(t)=\delta\omega(t)$$

$$\frac{d^3}{dt^3}z(t)=\delta v_2(t)$$

Q8/ Proposer un bouclage d'état qui stabilise la dynamique latérale. Peut-on choisir arbitrairement les valeurs propres en boucle fermée ?

On cherche une loi de commande $\delta v_2(t)$ sous la forme d'une combinaison linéaire des dérivées de $z(t)$:

$$\delta v_2(t) = -k_0.z(t) - k_1.\frac{d}{dt}z(t) - k_2.\frac{d^2}{dt^2}z(t)$$

où les coefficients k_0 , k_1 et k_2 sont à choisir judicieusement.

La dynamique en boucle fermée s'écrit alors :

$$\frac{d^3}{dt^3}z(t) = -k_0.z(t) - k_1.\frac{d}{dt}z(t) - k_2.\frac{d^2}{dt^2}z(t)$$

Le polynôme caractéristique en boucle fermé est ainsi :

$$P_{BF}(s) = s^3 + k_2.s^2 + k_1.s + k_0$$

On souhaite que les valeurs propres en boucle fermée soient λ_1 , λ_2 et λ_3 . Le polynôme caractéristique désiré en boucle fermé s'écrit alors :

$$P(s) = (s-\lambda_1).(s-\lambda_2).(s-\lambda_3) = s^3 - (\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3).s^2 + (\lambda_1.\lambda_2+\lambda_2.\lambda_3+\lambda_3.\lambda_1).s - \lambda_1.\lambda_2.\lambda_3$$

Pour que les valeurs propres en boucle fermée soient λ_1 , λ_2 et λ_3 , il suffit de choisir k_0 , k_1 et k_2 de sorte que $P_{BF}(s) = P(s)$. On a alors :

$$\begin{cases} k_0 = -\lambda_1.\lambda_2.\lambda_3 \\ k_1 = \lambda_1.\lambda_2+\lambda_2.\lambda_3+\lambda_3.\lambda_1 \\ k_2 = -(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3) \end{cases}$$

On peut donc choisir arbitrairement les valeurs propres en boucle fermée.

Par exemple, pour $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = -1$, il faut choisir :

$$\begin{cases} k_0 = 1 \\ k_1 = 3 \\ k_2 = 3 \end{cases}$$

Dans le cas général, la loi de commande latérale s'écrit :

$$v_2(t) = \delta v_2(t) = -k_0.z(t) - k_1.\frac{d}{dt}z(t) - k_2.\frac{d^2}{dt^2}z(t)$$

$$v_2(t) = -k_0.\left(-\frac{1}{g}.\delta v_x(t) + \frac{c}{g}.\delta\omega(t)\right) - k_1.\delta\theta(t) - k_2.\delta\omega(t)$$

$$v_2(t) = \frac{k_0}{g}.\delta v_x(t) - k_1.\delta\theta(t) - \left(k_0.\frac{c}{g} + k_2\right).\delta\omega(t)$$

$$v_2(t) = \frac{k_0}{g}.\left(v_x(t) - v_{x,eq}\right) - k_1.\theta(t) - \left(k_0.\frac{c}{g} + k_2\right).\omega(t)$$

Q9/ Comment effectuer un mouvement vertical ? Comment effectuer un mouvement latéral ?

Pour effectuer un mouvement vertical il suffit d'appliquer une consigne de vitesse verticale $v_{z,eq}$ non nulle :

$$v_1(t) = g + \delta v_1(t) = g - k_z.\delta v_z(t) = g + k_z.\left(v_{z,eq} - v_z(t)\right)$$

La dynamique verticale va alors converger vers la consigne : $v_z(t) \underset{t\to\infty}{\longrightarrow} v_{z,eq}$.

Pour effectuer un mouvement latéral, il suffit d'appliquer une consigne de vitesse latérale $v_{x,eq}$ non nulle :

$$v_2(t) = \frac{k_0}{g} . \left(v_x(t) - v_{x,eq}\right) - k_1 . \theta(t) - \left(k_0 . \frac{c}{g} + k_2\right) . \omega(t)$$

La dynamique verticale va alors converger vers la consigne : $v_x(t) \underset{t \to \infty}{\longrightarrow} v_{x,eq}$.