ENSTA PARIS

AUT202 – AUTOMATIQUE : DYNAMIQUE ET CONTROLE DES SYSTEMES

PETITE CLASSE N°1

8 FEVRIER 2023

INTRODUCTION – Commandabilité et forme de Brunovsky

Définition – Commandabilité

Un système dynamique $\frac{d}{dt}X(t) = f\big(X(t), U(t)\big)$ est commandable si pour tout état initial X_i et tout état final X_f, il existe une commande $U(t)$ permettant de passer en temps fini $T > 0$ de l'état initial X_i à l'état final X_f.

Propriété – Critère de commandabilité de Kalman

Le système dynamique linéaire $\frac{d}{dt}X(t) = A.X(t) + B.U(t)$ est commandable si et seulement si la matrice de commandabilité $\mathcal{C}(A,B) = (B \quad A.B \quad \cdots \quad A^{n-1}.B)$ est de rang $n = \dim\big(X(t)\big)$.

Propriété – Placement de pôles

Soit un système dynamique linéaire :

$$(S) \quad \frac{d}{dt}X(t) = A.X(t) + B.U(t) \quad \text{avec} \begin{cases} \dim\big(X(t)\big) = n \\ \dim\big(U(t)\big) = m \end{cases}$$

Si (S) est commandable alors pour tout polynôme unitaire P de degré n, il existe une matrice K de dimension $m \times n$ telle que les valeurs propres de $A - B.K$ soient les racines de P.

En d'autres termes, si un système dynamique linéaire est commandable, avec une commande de la forme $U(t) = -K.X(t)$, on peut choisir librement les valeurs propres en boucle fermée, et en particulier des valeurs propres à partie réelle strictement négative pour que $X(t)$ tende vers 0.

Propriété – Forme de Brunovsky (système linéaire avec une commande scalaire)

Soit un système linéaire avec une commande scalaire :

$$(S) \quad \frac{d}{dt}X(t) = A.X(t) + B.u(t) \quad \text{avec} \begin{cases} \dim\big(X(t)\big) = n \\ \dim\big(u(t)\big) = 1 \end{cases}$$

(S) est commandable si et seulement si il existe un changement de variable $Z(t) = M.X(t)$ permettant d'écrire la dynamique sous forme de Brunovsky :

$$(S_B) \quad \frac{d}{dt}\underbrace{\begin{pmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \\ \vdots \\ \vdots \\ z_n(t) \end{pmatrix}}_{Z(t)} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \cdots & \cdots & -a_{n-1} \end{pmatrix}}_{A_Z} . \underbrace{\begin{pmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \\ \vdots \\ \vdots \\ z_n(t) \end{pmatrix}}_{Z(t)} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{B_Z} .u(t)$$

$z(t) = z_1(t)$ est la sortie de Brunovsky du système et satisfait la dynamique :

$$\frac{d^n}{dt^n}z(t) = -\sum_{i=0}^{n-1} a_i.\frac{d^i}{dt^i}z(t) + u(t)$$

La sortie de Brunovsky $z(t)$ s'exprime à l'aide de la matrice de commandabilité $\mathcal{C}(A,B)$:

$$z(t) = (0 \quad \cdots \quad 0 \quad 1).\mathcal{C}(A,B)^{-1}.X(t)$$

Les coefficients a_i sont liés au polynôme caractéristique de A :

$$P_A(s) = s^n + \sum_{i=0}^{n-1} a_i.s^i$$

Démonstration – Forme de Brunovsky (système linéaire avec une commande scalaire)

Supposons qu'il existe un changement de variable $Z(t) = M.X(t)$ permettant d'écrire la dynamique sous forme de Brunovsky (S_B). Montrons que :

- (S) est commandable ;
- la sortie de Brunovsky vérifie $\frac{d^n}{dt^n}z(t) = -\sum_{i=0}^{n-1} a_i.\frac{d^i}{dt^i}z(t) + u(t)$;
- la sortie de Brunovsky s'écrit $z(t) = (0 \quad \cdots \quad 0 \quad 1).\mathcal{C}(A,B)^{-1}.X(t)$;
- le polynôme caractéristique de la matrice A s'écrit $P_A(s) = s^n + \sum_{i=0}^{n-1} a_i.s^i$.

Sachant que $Z(t) = M.X(t)$, on peut relier (A,B) et (A_Z,B_Z) de la manière suivante :

$$\frac{d}{dt}Z(t) = M.\frac{d}{dt}X(t) = M.A.X(t) + M.B.u(t) = M.A.M^{-1}.Z(t) + M.B.u(t) \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} A_Z = M.A.M^{-1} \\ B_Z = M.B \end{cases}$$

On a alors :

$$\mathcal{C}(A_Z,B_Z) = (B_Z \quad A_Z.B_Z \quad \cdots \quad A_Z{}^{n-1}.B_Z) = M.(B \quad A.B \quad \cdots \quad A^{n-1}.B) = M.\mathcal{C}(A,B)$$

$\mathcal{C}(A_Z,B_Z)$ et $\mathcal{C}(A,B)$ ont ainsi nécessairement le même rang (car M est inversible).

On montre facilement que $\mathcal{C}(A_Z,B_Z)$ s'écrit sous la forme :

$$\mathcal{C}(A_Z,B_Z) = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ \vdots & & \iddots & 1 & * \\ \vdots & \iddots & \iddots & \iddots & \vdots \\ 0 & 1 & \iddots & & \vdots \\ 1 & * & \cdots & \cdots & * \end{pmatrix}$$

Ainsi, $\mathcal{C}(A_Z,B_Z)$ est inversible, donc $\mathcal{C}(A,B)$ aussi. $\mathcal{C}(A,B)$ est ainsi de rang $n = \dim\big(X(t)\big)$ et (S) est commandable.

Posons maintenant :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} z_1(t) \\ \vdots \\ z_n(t) \end{pmatrix}}_{Z(t)} = \underbrace{\begin{pmatrix} M_1 \\ \vdots \\ M_n \end{pmatrix}}_{M}.X(t)$$

Pour $i = 1..n-1$, on a (récurrence) :

$$\begin{cases} \frac{d^i}{dt^i}z(t) = \frac{d}{dt}\frac{d^{i-1}}{dt^{i-1}}z(t) = M_1.A^{i-1}.\frac{d}{dt}X(t) = M_1.A^i.X(t) + M_1.A^{i-1}.B.u(t) \\ \frac{d^i}{dt^i}z(t) = \frac{d}{dt}\frac{d^{i-1}}{dt^{i-1}}z(t) = \frac{d}{dt}z_i(t) = z_{i+1}(t) = M_{i+1}.X(t) \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} M_1.A^{i-1}.B = 0 \\ \frac{d^i}{dt^i}z(t) = M_1.A^i.X(t) \end{cases}$$

Par ailleurs, on a :

$$\begin{cases} \dfrac{d^n}{dt^n}z(t) = \dfrac{d}{dt}\dfrac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}z(t) = M_1.A^{n-1}.\dfrac{d}{dt}X(t) = M_1.A^n.X(t) + M_1.A^{n-1}.B.u(t) \\ \dfrac{d^n}{dt^n}z(t) = \dfrac{d}{dt}\dfrac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}z(t) = \dfrac{d}{dt}z_n(t) = -\sum_{i=0}^{n-1} a_i.\underbrace{z_{i+1}(t)}_{=\frac{d^i}{dt^i}z(t)} + u(t) \end{cases} \Rightarrow \quad M_1.A^{n-1}.B = 1$$

La sortie de Brunovsky vérifie bien :

$$\frac{d^n}{dt^n}z(t) = -\sum_{i=0}^{n-1} a_i.\frac{d^i}{dt^i}z(t) + u(t)$$

On a par ailleurs :

$$M_1.\underbrace{(B \quad A.B \quad \cdots \quad A^{n-1}.B)}_{=\mathcal{C}(A,B)} = (0 \quad \cdots \quad 0 \quad 1) \quad \Rightarrow \quad M_1 = (0 \quad \cdots \quad 0 \quad 1).\mathcal{C}(A,B)^{-1}$$

Alors la sortie de Brunovsky s'écrit bien :

$$z(t) = z_1(t) = M_1.X(t) = (0 \quad \cdots \quad 0 \quad 1).\mathcal{C}(A,B)^{-1}.X(t)$$

A_Z étant une matrice compagnon, les coefficients a_i sont liés à son polynôme caractéristique :

$$P_{A_Z}(s) = s^n + \sum_{i=0}^{n-1} a_i.s^i$$

Comme $A_Z = M.A.M^{-1}$, on a :

$$P_{A_Z}(s) = \det(I_n - s.A_Z) = \det(I_n - s.M.A.M^{-1}) = \det(M.(I_n - s.A).M^{-1}) = \det(I_n - s.A) = P_A(s)$$

On vérifie bien que :

$$P_A(s) = s^n + \sum_{i=0}^{n-1} a_i.s^i$$

Supposons à l'inverse que (S) soit commandable. Montrons qu'il existe un changement de variable $Z(t) = M.X(t)$ permettant d'écrire la dynamique sous forme de Brunovsky (S_B) .

$\mathcal{C}(\mathrm{A},\mathrm{B})$ est alors de rang $n = \dim\big(X(t)\big)$, donc inversible et on peut définir :

$$M_1 = (0 \quad \cdots \quad 0 \quad 1).\mathcal{C}(A,B)^{-1}$$

On a alors :

$$M_1.\underbrace{(B \quad A.B \quad \cdots \quad A^{n-1}.B)}_{=\mathcal{C}(A,B)} = (0 \quad \cdots \quad 0 \quad 1) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} M_1.A^{i-1}.B = 0 & \text{pour } i = 1..n-1 \\ M_1.A^{n-1}.B = 1 \end{cases}$$

Posons :

$$z(t) = z_1(t) = M_1.X(t)$$

Pour $i = 1..n-1$, on a (récurrence) :

$$\frac{d^i}{dt^i}z(t) = \frac{d}{dt}\frac{d^{i-1}}{dt^{i-1}}z(t) = M_1.A^{i-1}.\frac{d}{dt}X(t) = M_1.A^i.X(t) + \underbrace{M_1.A^{i-1}.B}_{=0}.u(t) = M_1.A^i.X(t)$$

Par ailleurs, on a :

$$\frac{d^n}{dt^n}z(t) = \frac{d}{dt}\frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}z(t) = M_1.A^{n-1}.\frac{d}{dt}X(t) = M_1.A^n.X(t) + \underbrace{M_1.A^{n-1}.B}_{=1}.u(t) = M_1.A^n.X(t) + u(t)$$

On pose alors :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \\ \vdots \\ z_n(t) \end{pmatrix}}_{Z(t)} = \underbrace{\begin{pmatrix} M_1 \\ M_1.A \\ \vdots \\ M_1.A^{n-1} \end{pmatrix}}_{M} .X(t) = \begin{pmatrix} M_1.X(t) \\ M_1.A.X(t) \\ \vdots \\ M_1.A^{n-1}.X(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z(t) \\ \frac{d}{dt}z(t) \\ \vdots \\ \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}z(t) \end{pmatrix}$$

On vérifie bien pour $i = 1..n-1$:

$$\frac{d}{dt}z_i(t) = \frac{d}{dt}\frac{d^{i-1}}{dt^{i-1}}z(t) = \frac{d^i}{dt^i}z(t) = z_{i+1}(t)$$

Par ailleurs, on a :

$$\frac{d}{dt}z_n(t) = \frac{d}{dt}\frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}z(t) = \frac{d^n}{dt^n}z(t) = M_1.A^n.X(t) + u(t) = M_1.A^n.M^{-1}.Z(t) + u(t)$$

$M_1.A^n.M^{-1}.Z(t)$ est une combinaison linéaire des états $z_i(t)$ donc peut s'écrire :

$$M_1.A^n.M^{-1}.Z(t) = -\sum_{i=0}^{n-1} a_i.z_{i+1}(t)$$

Il vient :

$$\frac{d}{dt}z_n(t) == -\sum_{i=0}^{n-1} a_i.z_{i+1}(t) + u(t)$$

Alors le changement de variable $Z(t) = M.X(t)$ permet bien d'écrire la dynamique sous forme de Brunovsky (S_B) .

Planification de trajectoire – Forme de Brunovsky (système linéaire avec une commande scalaire)

Une fois sous forme de Brunovsky (S_B) , on peut trouver une trajectoire permettant de passer en temps fini $T > 0$ d'un état initial $Z_0 = M.X_0$ à un état final $Z_T = M.X_T$.

Il suffit de trouver une fonction $v(t)$ solution de :

$$\frac{d^n}{dt^n}z(t) = v(t)$$

avec les conditions initiales $\begin{pmatrix} z(0) \\ \vdots \\ \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}z(0) \end{pmatrix} = M.X_i$ et les conditions finales $\begin{pmatrix} z(T) \\ \vdots \\ \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}z(T) \end{pmatrix} = M.X_T$.

On peut par exemple chercher $v(t)$ sous la forme d'un polynôme d'ordre supérieur ou égal à $2.n-1$.

La loi de commande correspondante s'écrit alors :

$$u(t) = v(t) + \sum_{i=0}^{n-1} a_i.\frac{d^i}{dt^i}z(t)$$

On rappelle que les coefficients a_i sont liés au polynôme caractéristique de la matrice A :

$$P_A(s) = s^n + \sum_{i=0}^{n-1} a_i.s^i$$

Retour d'état – Forme de Brunovsky (système linéaire avec une commande scalaire)

Une fois sous forme de Brunovsky (S_B) , on peut trouver un retour d'état qui stabilise le système sur une trajectoire de référence en plaçant les valeurs propres en boucle fermées où l'on veut.

On note $\left(X_r(t), u_r(t)\right)$ la trajectoire de référence que l'on souhaite suivre, que l'on suppose solution de (S) (on aura pu la trouver résolvant un problème de planification de trajectoire sous forme de Brunovsky).

On pose :

$$X(t) = X_r(t) + \delta X(t) \quad u(t) = u_r(t) + \delta u(t)$$

On a alors la dynamique suivante autour de la trajectoire de référence :

$$\frac{d}{dt}\delta X(t) = A.\delta X(t) + B.\delta u(t)$$

On note $\delta z(t) = (0 \quad \cdots \quad 0 \quad 1).\underbrace{(B \quad A.B \quad \cdots \quad A^{n-1}.B)}_{=\mathcal{C}(A,B)}{}^{-1}.\delta X(t) = M_1.\delta X(t)$ la sortie de Brunovsky associée à cette dynamique. On a alors :

$$\frac{d^n}{dt^n}\delta z(t) = -\sum_{i=0}^{n-1} a_i.\frac{d^i}{dt^i}\delta z(t) + \delta u(t)$$

On cherche une commande $\delta u(t)$ sous la forme d'une combinaison linéaire des dérivées de $\delta z(t)$:

$$\delta u(t) = -\sum_{i=0}^{n-1} k_i.\frac{d^i}{dt^i}\delta z(t)$$

où les coefficients k_i sont à choisir judicieusement.

La dynamique s'écrit alors :

$$\frac{d^n}{dt^n}\delta z(t) = -\sum_{i=0}^{n-1}(a_i + k_i).\frac{d^i}{dt^i}\delta z(t)$$

Le polynôme caractéristique en boucle fermé est ainsi :

$$P_{BF}(s) = s^n + \sum_{i=0}^{n-1}(a_i + k_i).s^i$$

Le choix des coefficients k_i permet de choisir n'importe quelles racines pour le polynôme caractéristique.

Par exemple, supposons que l'on souhaite placer les valeurs propres en boucle fermée en $\lambda_1 .. \lambda_n$. Le polynôme caractéristique correspondant doit alors s'écrire :

$$P(s) = \prod_{i=1}^{n} s - \lambda_i = s^n + \sum_{i=0}^{n-1} c_i.s^i$$

Il n'y a plus qu'à identifier les coefficients :

$$k_i = c_i - a_i$$

On rappelle que les coefficients a_i sont liés au polynôme caractéristique de la matrice A :

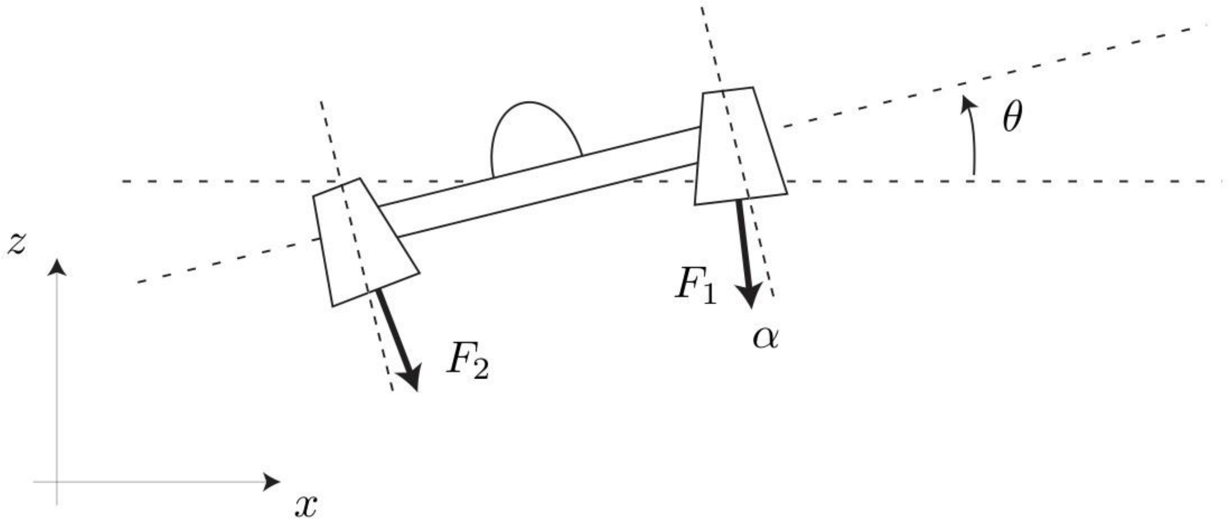
$$P_A(s) = s^n + \sum_{i=0}^{n-1} a_i.s^i$$

La loi de commande correspondante s'écrit alors :

$$u(t) = u_r(t) - \sum_{i=0}^{n-1} k_i.\frac{d^i}{dt^i}\delta z(t) = u_r(t) + \underbrace{\left(M_1.\sum_{i=0}^{n-1} k_i.A^i\right)}_{K}.\left(X_r(t) - X(t)\right)$$

EXERCICE – Engin à poussée vectorisée

On s'intéresse ici au pilotage de systèmes aérospatiaux à poussée vectorisée qui forment une classe de systèmes sous-actionnés : avion à décollage vertical, quadricoptère, lanceur réutilisable, atterrisseur lunaire… On étudie ici plus particulièrement le pilotage d'un drone multirotor dans le plan vertical. On cherche à contrôler son déplacement pour lui faire suivre une trajectoire horizontale ou une trajectoire verticale (décollage, atterrissage).



Le comportement dynamique du drone s'écrit dans le plan vertical :

$$\begin{cases} m.\dfrac{d}{dt}v_x(t) = \big(F_1(t) - F_2(t)\big).\sin(\alpha).\cos\big(\theta(t)\big) - \big(F_1(t) + F_2(t)\big).\cos(\alpha).\sin\big(\theta(t)\big) + f_x \\ m.\dfrac{d}{dt}v_z(t) = \big(F_1(t) - F_2(t)\big).\sin(\alpha).\sin\big(\theta(t)\big) + \big(F_1(t) + F_2(t)\big).\cos(\alpha).\cos\big(\theta(t)\big) - m.g + f_z \\ J.\dfrac{d^2}{dt^2}\theta(t) = \big(F_1(t) - F_2(t)\big).l.\cos(\alpha) + f_\theta \end{cases}$$

où :

- $v_x(t)$ est la composante horizontale de la vitesse du centre de masse ;
- $v_z(t)$ est la composante verticale de la vitesse du centre de masse ;
- $\theta(t)$ est l'angle du drone par rapport à l'horizontale ;
- $F_1(t)$ et $F_2(t)$ sont les poussées des moteurs ;
- l est la distance des moteurs par rapport au centre de masse ;
- α est l'inclinaison des moteurs (quasi-nulle) ;
- m est la masse du drone ;
- J est le moment d'inertie du drone ;
- f_x , f_z et f_θ les efforts aérodynamiques qui s'exercent sur le drone, négligeables à faible vitesse et nuls quand le drone ne bouge pas.

Les poussées $F_1(t)$ et $F_2(t)$ évoluent en fonction des commandes des moteurs $u_1(t)$ et $u_2(t)$ d'après les équations :

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}F_1(t) = K.\big(u_1(t) - F_1(t)\big) \\ \dfrac{d}{dt}F_2(t) = K.\big(u_2(t) - F_2(t)\big) \end{cases}$$

où $K > 0$ est grand.

Q1/ Quels sont, dans le modèle proposé, le nombre de variables d'état et le nombre de commandes ?

Q2/ Simplifier ce modèle en notant que les effets aérodynamiques sont négligeables à basse vitesse et que certaines variables sont très rapides (et asymptotiquement stables) devant d'autres.

On pose :

$$a = \frac{m}{\cos(\alpha)} \quad b = \frac{J}{l.\cos(\alpha)} \quad c = \frac{J}{m.l}.\tan(\alpha) \quad v_1(t) = \frac{u_1(t) + u_2(t)}{a} \quad v_2(t) = \frac{u_1(t) - u_2(t)}{b}$$

Q3/ Montrer que l'on a :

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} v_x(t) = c.v_2(t).\cos(\theta(t)) - v_1(t).\sin(\theta(t)) \\ \frac{d}{dt} v_z(t) = c.v_2(t).\sin(\theta(t)) + v_1(t).\cos(\theta(t)) - g \\ \frac{d^2}{dt^2} \theta(t) = v_2(t) \end{cases}$$

où $v_1(t)$ et $v_2(t)$ sont les nouvelles commandes.

Q4/ Quels sont les points d'équilibre de ce modèle ?

Q5/ Etablir que le linéarisé tangent autour d'un équilibre est donné par :

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \delta v_x(t) = -g.\delta\theta(t) + c.\delta v_2(t) \\ \frac{d}{dt} \delta v_z(t) = \delta v_1(t) \\ \frac{d^2}{dt^2} \delta\theta(t) = \delta v_2(t) \end{cases}$$

On constate qu'au premier ordre, les équations forment deux systèmes indépendants.

Q6/ Proposer un bouclage d'état qui stabilise la dynamique verticale :

$$\frac{d}{dt} \delta v_z(t) = \delta v_1(t)$$

Q7/ Mettre sous forme de Brunovsky le sous-système correspondant à la dynamique latérale :

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \delta v_x(t) = -g.\delta\theta(t) + c.\delta v_2(t) \\ \frac{d^2}{dt^2} \delta\theta(t) = \delta v_2(t) \end{cases}$$

Q8/ Proposer un bouclage d'état qui stabilise la dynamique latérale. Peut-on choisir arbitrairement les valeurs propres en boucle fermée ?

Q9/ Comment effectuer un mouvement vertical ? Comment effectuer un mouvement latéral ?