

Tutorat MAP311 : Feuille d'exercice 4

Nicolas KIELBASIEWICZ*

27 juin 2007

13 Fonctions caractéristiques

Exercice 13.1

1. Soit X_1, X_2 deux variables aléatoires indépendantes et de loi respective $\Gamma(\lambda, \alpha_1)$ et $\Gamma(\lambda, \alpha_2)$. Montrer que la loi de $X_1 + X_2$ est également une loi gamma de paramètre $(\lambda, \alpha_1 + \alpha_2)$.

2. Soit X_n une suite de variables aléatoires indépendantes de loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$.

Donner la loi de la moyenne empirique $\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$.

Exercice 13.2 Soit Y une variable aléatoire de loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$ et ϵ une variable aléatoire indépendante de Y et telle que $\mathbb{P}(\epsilon = 1) = \mathbb{P}(\epsilon = -1) = \frac{1}{2}$.

1. Calculer la densité et la fonction caractéristique de $Z = \epsilon Y$. La loi de Z est appelée loi exponentielle symétrique.

2. En déduire la fonction caractéristique de la loi de Cauchy.

Exercice 13.3 Soit N une variable aléatoire discrète entière. Soit X_k une suite de variables aléatoires continues indépendantes, de même loi et indépendantes de N . On pose $S_0 = 0$ et $S_N = \sum_{i=1}^N X_i$

1. Calculer $\mathbb{E}(S_N)$ et $\text{var}(S_N)$

2. Calculer la fonction caractéristique de S_n , et retrouver les résultats précédents.

Exercice 13.4 La loi de défaut de forme est utilisée pour la maîtrise statistique des procédés (MSP). Cette loi est décrite dans les normes AFNOR (E60-181) et CNOMO (E 41 32 120 N) et sert à quantifier les défauts géométriques de type planéité, parallélisme, circularité. Il s'agit de la loi de $|X - Y|$ où X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes suivant respectivement les lois gaussiennes $\mathcal{N}(\mu_x, \sigma_x^2)$ et $\mathcal{N}(\mu_y, \sigma_y^2)$.

1. Calculer la loi de $X - Y$.

2. En déduire la loi de $Z = |X - Y|$.

3. Calculer $\mathbb{E}(Z)$ et $\text{var}(Z)$.

*Unité de Mathématiques Appliquées, École Nationale Supérieure de Techniques Avancées