Tutorat MAP311 : Feuille d'exercice 3

Nicolas Kielbasiewicz*

20 juin 2007

10 Quelques convergences

Exercice 10.1 *Soit X_n une suite de variables aléatoires de loi exponentielle de paramètre λ_n. Etudier la convergence en loi dans les 3 cas suivants :*

1. $\lim_{n \longmapsto \infty} \lambda_n = \lambda > 0$.
2. $\lim_{n \longmapsto \infty} \lambda_n = +\infty$.
3. $\lim_{n \longmapsto \infty} \lambda_n = 0$.

Exercice 10.2 *Soit X une variable aléatoire intégrable à valeurs dans $\mathbb{N}$ etX_n une suite de variables aléatoires de même loi que X.*

1. *Montrer que* $\sum_{k=1}^{+\infty} \pm mathbbP(X \geq k) = \mathbb{E}(X)$.
2. *Soit $m \in \mathbb{N}^*$. Montrer que la variable aléatoire* $Y_m = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbf{1}_{\frac{X_n}{n} \geq \frac{1}{m}}$ *est p.s. finie.*
3. *En déduire que* $\frac{X_n}{n}$ *tend p.s. vers 0.*
4. *Montrer que* $\frac{1}{n} \max(X_1, \ldots, X_n)$ *tend p.s. vers 0.*
5. *On suppose que X est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}$, montrer que* $\frac{1}{n} \max(X_1, \ldots, X_n)$ *tend p.s. vers 0.*

Exercice 10.3 *Soit X_n une suite de variables aléatoires indépendantes de loi de Cauchy de paramètre $a > 0$. On note* $S_N = \sum_{i=1}^{n} X_i$. *Etudiez les convergences en loi et en probabilité des suites :*

1. $\frac{S_n}{\sqrt{n}}$
2. $\frac{S_n}{n^2}$
3. $\frac{S_n}{n}$ *. On pourra déterminer la loi de* $\frac{S_{2n}}{2n} - \frac{S_n}{n}$*, et en déduire que cette suite ne converge pas en probabilité vers 0. On montrera alors qu'on ne peut avoir la convergence en probabilité de la suite* $\frac{S_n}{n}$.

*Unité de Mathématiques Appliquées, École Nationale Supérieure de Techniques Avancées

11 Calculs de limites

Exercice 11.1

1. *En considérant une suite de variables aléatoires indépendantes de loi uniforme sur [0,1], calculer à l'aide de la loi faible des grands nombres*

$$\lim_{n\longmapsto\infty}\int_{[0,1]^n} f(\frac{x_1+\ldots x_n}{n}dx_1\ldots dx_n$$

où f est une application continue bornée de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

2. *Soit Y_k une suite de variables aléatoires indépendantes de loi de Poisson de paramètre $\alpha > 0$. Déterminer la loi de $Z_n = \sum_{k=1}^{n} Y_k$*

3. *Montrer que la suite des moyennes empiriques converge en loi vers une limite que l'on précisera. Calculer, en s'inspirant de la question 1,*

$$\lim_{n\longmapsto\infty}\sum_{k\geq 0} e^{-\alpha n}\frac{(\alpha n)^k}{k!}f(\frac{k}{n})$$

Exercice 11.2 *Soit X_n une suite de variables aléatoires indépendantes de loi de Poisson de paramètre 1. On note $S_N = \sum_{i=1}^{n} X_i$.*

1. *Montrer que* $\frac{S_n - n}{\sqrt{n}} \overset{en\ loi}{\longrightarrow} \mathcal{N}(0,1)$

2. *Montrer que* $\lim_{n\longmapsto\infty} e^{-n}(1+n+\frac{n^2}{2!}+\ldots+\frac{n^n}{n!}) = \frac{1}{2}$

Exercice 11.3 *On effectue n séries de 400 tirages de pile ou face avec une pièce équilibrée. On observe les fréquences empiriques de pile. $F_1,\ldots,F_n$ dans ces séries.*

1. *Quelle est (approximativement) la loi de probabilité du nombre N de ces fréquences qui ne vérifient pas la condition $0.45 < F_i < 0.55$, lorsque $n = 20$?*

2. *Est-il plus probable que $N = 0$, que $N = 1$ ou que $N \geq 2$?*

12 Modélisation

Exercice 12.1 *Le paradoxe de Saint-Pétersbourg est d'abord un problème imaginé par Nicolas Bernoulli, qui obtint une solution partielle donnée par Daniel Bernoulli (1738) dans les Commentaires de l'Académie des Sciences de Saint-Pétersbourg. Aujourd'hui encore, ce problème attire l'attention de certaines personnes en mathématiques et en économie.*

Un casino propose le jeu suivant qui consiste à lancer plusieurs fois de suite une pièce équilibrée jusqu'à obtenir pile. Le joueur gagne 2^k €si le premier pile a lieu au k-ième jet. La question est de savoir quel doit être le prix pour participer au jeu.

Soit X_n le gain réalisé lors du n-ième jeu, et $S_n = X_1+\ldots+X_n$ le gain obtenu lors de n jeux successifs.

1. *Peut-on appliquer la loi forte des grands nombres pour donner un prix équitable ?*

   Les fonctions d'utilité qui quantifient l'aversion au risque permettent de proposer des prix pour ce jeu. La suite de l'exercice est consacrée à l'étude de la convergence de la suite S_n convenablement renormalisée.

2. *On pose* $S'_n = \sum_{k=1}^{n} X_k^n$ *où* $X_k^n = X_k \mathbf{1}_{(X_k \leq n \log_2 n)}$
Après avoir vérifié que pour tout $\epsilon > 0$,

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{S'_n}{n \log_2 n} - 1\right| > \epsilon\right) \leq \mathbb{P}\left(\left|\frac{S'_n - \mathbb{E}(S'_n)}{n \log_2 n} - 1\right| > \epsilon/2\right) + \mathbb{P}\left(\left|\frac{\mathbb{E}(S'_n)}{n \log_2 n} - 1\right| > \epsilon/2\right)$$

montrer que la suite $\frac{S'_n}{n \log_2 n}$ *converge en probabilité vers 1.*

3. *Calculer* $\mathbb{P}(S_n \neq S'_n$ *en en déduire sa limite*

4. *En déduire que la limite de la suite* $\frac{S_n}{n \log_2 n}$ *converge en probabilité vers 1.*

Exercice 12.2 (Précision des sondages)

1. *A quelle précision peut prétendre un sondage sur deux candidats effectué sur un échantillon de 1000 personnes ? Est-ce que le résultat dépend de l taille de la population ?*
2. *En Floride, pour l'élection présidentielle américaine 2000, on compte 6 millions de votants. Sachant qu'il y a eu environ 4000 voix d'écart, quel est le nombre de personnes qu'il aurait fallu interroger dans un sondage pour savoir avec 95 % de chance qui allait être le vainqueur ?*