Tutorat MAP311 : Feuille d'exercice 2

Nicolas Kielbasiewicz*

13 juin 2007

6 Lois conditionnelles

Exercice 6.1 *Soit* $(X_1, \ldots, X_n)$ *une suite de variables aléatoires indépendantes de loi de Bernoulli de paramètre* $p \in]0,1[$. *On note* $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$.

1. *Calculer la loi de* $(X_1, \ldots, X_n)$ *conditionnellement à* S_n.
2. *Calculer la loi de* X_i *conditionnellement à* S_n $(n > i)$.
3. *Les variables* X_1 *et* X_2 *sont-elles indépendantes conditionnellement à* S_n *?*

Exercice 6.2 *Soient* X *et* Y *deux variables aléatoires indépendantes de loi géométrique de même paramètre* p.

1. *Calculer les fonctions génératrices de* X *et* Y *et en déduire celle de* $S = X + Y$. *Calculer* $\mathbb{P}(S = n)$
2. *Déterminer la loi de* X *sachant* S. *En déduire* $\mathbb{E}(X|S)$
3. *Vérifier la formule* $\mathbb{E}(\mathbb{E}(X|S)) = \mathbb{E}(X)$

7 Modélisation des v.a.d.

Exercice 7.1 (Optimisation de coût) *Le coût de dépistage d'une maladie* M *à l'aide d'un test sanguin est* c. *La probabilité qu'une personne soit atteinte de la maladie* M *est* p. *Chaque personne est malade indépendamment des autres. Pour effectuer un dépistage parmi* N *personnes, on propose les deux stratégies suivantes :*

Stratégie 1 *Un test par personne*

Stratégie 2 *On suppose que* N/n *est entier et on regroupe mes* N *personnes en* N/n *groupes de* n *personnes. Par groupe, on mélange les prélèvements sanguins des* n *personnes et on effectue le test. Si on détecte la maladie* M *dans le mélange, alors on refait un test sanguin pour chacune des* n *personnes.*

Calculer le coût de la stratégie 1, puis le coût moyen de la stratégie 2. On supposera $np \ll 1$, *et on montrera que* $n \simeq p^{-0.5}$ *est une taille qui minimise correctement le coût moyen de la stratégie 2. Quelle stratégie choisissez-vous ? A.N. : p=1%*

Pour information, cette démarche a été utilisée initialement par R. Dorfman, durant le Seconde Guerre Mondiale, dansd un programme commun avec l'United States Public Health Service et le Selective Service System, afin de réformer les futurs appelés du contingent ayant la syphilis. De nombreuses généralisations ont ensuite été étudiées.

*Unité de Mathématiques Appliquées, École Nationale Supérieure de Techniques Avancées

Exercice 7.2 *On désire modéliser la loi du temps d'attente d'une panne de machine à l'aide d'une loi sans mémoire : la probabilité pour que la machine tombe en panne après la date k+n sachant qu'elle fonctionne à l'instant n est indépendante de n. Plus précisément, on dit qu'une variable aléatoire X à valeurs dans* $\mathbb{N}$ *est de loi sans mémoire si* $\mathbb{P}(X > k+n | X > n)$ *est indépendant de n pour tout k.*

1. *Montrer que la loi géométrique est sans mémoire.*
2. *Caractériser toutes les lois sans mémoire des variables aléatoires X à valeurs dans* $\mathbb{N}^*$. *On pourra calculer* $\mathbb{P}(X > 1+n)$ *en fonction de* $\mathbb{P}(X > 1)$
3. *Caractériser toutes les lois sans mémoire des variables aléatoires X à valeurs dans* $\mathbb{N}$.

8 Variables aléatoires continues

Exercice 8.1 *Soit X une variable aléatoire réelle de densité* $f(x) = xe^{-x^2/2}\mathbb{I}_{x>0}$

1. *Vérifier que f est une densité de probabilité.*
2. *Montrer que* $Y = X^2$ *est une variable aléatoire à densité, dont on précisera la loi.*
3. *Calculer l'espérance et la variance de Y.*

Exercice 8.2 *Soit* (X_n) *une suite de variable aléatoires indépendantes de loi exponentielle de paramètre* $\lambda_n > 0$. *Montrer que les 3 conditions suivantes sont équivalentes :*

1. $\sum_{n\geq 1} \lambda_n^{-1} < \infty$
2. $\mathbb{E}(\sum_{n\geq 1} X_n) < \infty$
3. $\mathbb{P}(\sum_{n\geq 1} X_n) > 0$

Exercice 8.3 *Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes de lois respectives* $\Gamma(\lambda, a)$ *et* $\Gamma(\lambda, b)$. *Rappelons la définition de la* loi gamma $\Gamma(\lambda, a)$ de paramètres $\lambda > 0$ et $a > 0$ *par sa densité :*

$$f(x) = \frac{1}{\Gamma(a)}\lambda^a x^{a-1} e^{-\lambda x}\mathbb{I}_{x>0}$$

1. *Calculer la loi du couple* $(X+Y, \frac{X}{X+Y})$.
2. *Montrer que* $X+Y$ *et* $\frac{X}{X+Y}$ *sont indépendantes et identifier leurs lois.*

Exercice 8.4 *Soit X une* loi de Cauchy de paramètre 1. *On rappelle qu'une* loi de Cauchy de paramètre *a a pour densité :*

$$f(x) = \frac{a}{\pi}\frac{1}{x^2 + a^2}$$

1. *Déterminer la loi de* $\frac{1}{X}$.
2. *Montrer que si Y et Z sont deux variables gaussiennes centrées réduites indépendantes, alors* $\frac{Y}{Z}$ *est une loi de Cauchy.*
3. *Retrouver ainsi le résultat de la question 1.*

Exercice 8.5 *Soit* $n \geq 2$ *et* $X_1, \dots X_n$ *une suite de variables aléatoires indépendantes et de loi uniforme sur* $[0, 1]$. *On note* $Y = \min_i X_i$ *et* $Z = \max_i X_i$.

1. *Calculer la loi de* (Y, Z).
2. *En déduire la loi de* Y *et la loi de* Z. *Reconnaitre ces deux lois.*
3. *Calculer* $\mathbb{E}(Y|Z)$.
4. *Calculer* $\mathbb{E}(g(Y/Z)|Z)$ *pour une fonction* g *mesurable bornée. En déduire puis reconnaitre la loi de* Y/Z. *Retrouver le résultat de la question 3.*
5. *Montrer que* $(1 - Z, 1 - Y)$ *a même loi que* (Y, Z).
6. *En déduire que* $(1 - Z)/(1 - Y)$ *est indépendant de* Y.

9 Modélisation des v.a.c.

Exercice 9.1 *La durée de vie, exprimée en années, d'un circuit électronique est une variable aléatoire* T *dont la fonction de répartition* F *est définie par* $F(t) = (1 - e^{-t^2/2})\mathbb{I}_{t\geq 0}$.

1. *Donner la densité de probabilité* f *de* T.
2. *Sachant que le circuit a déjà fonctionné durant 1 an, quelle est la probabilité qu'il continue de fonctionner durant encore au moins 2 ans ? La loi est-elle sans mémoire ?*

Un équipement électronique E *est composé de 10 circuits identiques et indépendants. Au circuit* i *est associé la variable aléatoire* X_i, *avec* $X_i = 1$ *si la durée de vie du circuit* i *est inférieure à 1 an, 0 sinon.*

3. *Quelle est la loi du nombre* N *de circuits de* E *dont la durée de vie est inférieure à 1 an. ?*
4. *L'équipement* E *est dit en série si la défaillance de l'un de ses circuits entraine sa défaillance. Quelle est alors la probabilité qu'il soit défaillant avant un an ?*
5. *L'équipement* E *est dit en parallèle si sa défaillance ne peut se produire que si tous ses circuits sont défaillants. Quelle est alors la probabilité qu'il soit défaillant avant 1 an ?*

Exercice 9.2 *Les véhicules spatiaux désirant s'arrimer à l'I.S.S. s'appuient sur le système G.P.S. pour la phase d'approche de la station. Cependant, à faible distance de l'I.S.S., les signaux émis par la constellation de satellites qui constituent le G.P.S. sont fortement perturbés par les phénomènes de réflexions multiples sur la structure métallique de la station. L'onde électromagnétique reçue par le récepteur G.P.S. du véhicule spatial se présente donc comme la superposition de deux ondes en quadrature dont les amplitudes* X *et* Y *supposées indépendantes (pour des raisons d'isotropie). L'étude de l'amplitude* $R = \sqrt{X^2 + Y^2}$ *de l'onde reçue est de première importance pour assurer un guidage fiable du vaisseau lors de la manoeuvre d'arrimage.*

1. *Quelle est la loi du couple* (X, Y) *?*
2. *En faisant le changement de variable* $X = R\cos\Theta$, $Y = R\sin\Theta$, *donner la loi du couple* (R, Θ).
3. *Montrer que* R *et* Θ *sont indépendantes. Reconnaitre la loi de* Θ. *Donner la densité de la loi* R. *Cette loi est appelée* Loi de Rayleigh.
4. *Calculer l'espérance et la variance de* R.