Tutorat MAP311 : Feuille d'exercice 1

Nicolas Kielbasiewicz*

6 juin 2007

1 Dénombrement

Exercice 1.1 *On tire au hasard 2 cartes dans un jeu de 52 cartes.*

1. *Quelle est la probabilité pour que la couleur des 2 cartes soit ♠ ?*
2. *Quelle est la probabilité pour que les deux cartes ne soient pas de la même couleur (♠, ♡, ♢, ♣) ?*
3. *Quelle est la probabilité pour que la première carte soit un ♠ et la seconde un ♡ ?*
4. *Quelle est la probabilité pour qu'il y ait un ♠ et un ♡ ?*
5. *Quelle est la probabilité pour qu'il y ait un ♠ et un as ?*

Exercice 1.2 *Eugène et Diogène ont l'habitude de se retrouver chaque semaine autour d'un verre et de décider à pile ou face qui règle l'addition. Eugène se lamente d'avoir payé les 4 dernières additions et Diogène, pour faire plaisir à son ami, propose de modifier exceptionnellement la règne : «*Eugène, tu vas lancer la pièce 5 fois de suite et tu ne paieras que si on observe une suite d'au moins 3 piles consécutifs ou d'au moins 3 faces consécutives *». Eugène se félicite d'avoir un si bon ami. A tort ou à raison ?*

Exercice 1.3 *Mario possède deux dés à 6 faces et Luigi possède un dé à 12 faces. Le joueur qui fait le plus grand score remporte la mise (match nul si égalité). Le jeu est-il équilibré ? On calculera la probabilité que Mario gagne et la probabilité d'avoir un match nul.*

Exercice 1.4 *On considère une classe de n élèves. On suppose qu'il n'y a pas d'année bissextile.*

1. *Quelle est la probabilité p_n pour que 2 élèves au moins aient la même date d'anniversaire ? Trouver le plus petit entier n_1 pour que $p_{n_1} \geq 0.5$. Calculer p_{366}.*
2. *Quelle est la probabilité q_n pour qu'au moins un élève ait la même date d'anniversaire qu'Albert Einstein ? Calculer q_{n_1} et q_{366}.*

Exercice 1.5 *Une urne contient r boules rouges et b boules bleues.*

1. *On tire avec remise p boules. Calculer la probabilité pour qu'il y ait p_r boules rouges et p_b boules bleues.*
2. *On tire sans remise $p < r + b$ boules. Calculer la probabilité pour qu'il y ait $p_r < r$ boules rouges et $p_b < b$ boules bleues.*
3. *Calculer dans les deux cas les probabilités limites quand $r \longrightarrow \infty$, $b \longrightarrow \infty$ et $\frac{r}{r+b} \longrightarrow \theta$.*

*Unité de Mathématiques Appliquées, École Nationale Supérieure de Techniques Avancées

2 Formule du crible et applications

Exercice 2.1 (La formule du crible) *Soit A_1, A_2, $\dots A_n$ des évènements.*

1. *Montrer que* $\mathbb{P}(A_1 \bigcup A_2) = \mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_2) - \mathbb{P}(A_1 \bigcap A_2)$.
2. *Montrer la formule du crible par récurrence.*

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{p=1}^{n} (-1)^{p+1} \sum_{1 \le i_1 < \cdots < i_p \le n} \mathbb{P}(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_p})$$

3. *Montrer par récurrence sur n que pour $1 < m < n$,*

$$\sum_{p=1}^{m} (-1)^{p+1} \sum_{1 \le i_1 < \cdots < i_p \le n} \mathbb{P}(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_p})$$

est une majoration (resp. minoration) de $\mathbb{P}(\cup_{i=1}^{n} A_i)$ lorsque m est impair (resp. pair).

Exercice 2.2 *Afin de savoir si les élèves travaillent indépendamment ou en groupe, un enseignant donne m exercices à une classe de n élèves. Chaque élève choisit k exercices parmi les m.*

1. *Calculer la probabilité pour que les élèves aient tous choisi la même combinaison fixée de k exercices.*
2. *Calculer la probabilité pour que tous les élèves aient choisi les k mêmes exercices.*
3. *Calculer la probabilité pour qu'une combinaison d'exercices fixée à l'avance n'ait pas été choisie.*
4. *Calculer la probabilité pour qu'il existe au moins une combinaison de k exercices qui n'ait pas été choisie. On utilisera la formule du crible.*
5. *Application numérique : Donner les résultats pour $n = 20$, $m = 4$ et $k = 2$. Comparer les valeurs pour les questions 1 et 2 puis 3 et 4.*

Exercice 2.3 *Soit $1 \le k \le n$.*

1. *Calculer à l'aide de la formule du crible le nombre de surjections de $\{1,\dots,n\}$ dans $\{1,\dots,k\}$.*
2. *En déduire $\left\{ {n \atop k} \right\}$, le nombre de partitions d'un ensemble à n éléments en k sous-ensembles non vides. Les nombres $\left\{ {n \atop k} \right\}$ sont appelés* nombres de Stirling de deuxième espèce.
3. *Montrer que*

$$\left\{ {n \atop k} \right\} = \left\{ {n-1 \atop k-1} \right\} + k \left\{ {n-1 \atop k} \right\}, \qquad \left\{ {n \atop 1} \right\} = 1, \qquad \left\{ {n \atop k} \right\} = 0 \text{ si } k > n$$

Exercice 2.4 *On utilise dans cet exercice la formule du crible.*

1. *Pour fêter leur réussite à un concours, n étudiants se donnent rendez-vous dans un chalet. En entrant, chaque personne dépose sa veste dans un vestiaire. Au petit matin, quand les esprits ne sont plus clairs, chacun prend au hasard une veste. Quelle est la probabilité pour qu'une personne au moins ait sa propre veste ?*
2. *En déduire le nombre de permutations de $\{1,\dots,n\}$ sans point fixe (problème formulé par P. R. de Montmort en 1708)*
3. *En s'inspirant de la question 1, calculer la probabilité $\pi_n(k)$ pour que k personnes exactement aient leur propre veste.*
4. *Calculer la limite $\pi(k)$ de $\pi_n(k)$. Vérifier que la famille $(\pi(k))$ détermine une probabilité sue $\mathbb{N}$. Il s'agit en fait de la loi de Poisson.*

3 Probabilités conditionnelles

Exercice 3.1 *On suppose que l'on a autant de chance d'avoir une fille ou un garçon à la naissance. Votre voisin de palier vous dit qu'il a deux enfants.*

1. *Quelle est la probabilité qu'il ait au moins un garçon ?*
2. *Quelle est la probabilité qu'il ait un garçon, sachant que l'ainée est une fille ?*
3. *Quelle est la probabilité qu'il ait un garçon, sachant qu'il a au moins une fille ?*
4. *Vous téléphonez à votre voisin. Une fille décroche le téléphone. Vous savez que dans une famille avec un garçon et une fille, la fille décroche avec une probabilité p. Quelle est la probabilité que votre voisin ait un garçon ?*
5. *Vous sonnez à la porte de votre voisin. Une fille ouvre la porte. Sachant que l'ainé(e) ouvre la porte avec probabilité p, et ce indépendamment de la répartition de la famille, quelle est la probabilité que votre voisin ait un garçon ?*

Exercice 3.2 *Un laboratoire pharmaceutique vend un test avec lanotice suivante : si vous êtes malade, alors le test est positif avec une probabilité $\alpha = 98\%$ (α est la sensibilité du test), si vous êtes sain, alors le test est positif avec probabilité $\beta = 3\%$ ($1 - \beta$ est la spécificité du test). Sachant qu'en moyenne il y a un malade sur $\tau^{-1} = 1000$ personnes, calculer la probabilité pour que vous soyez un sujet sain alors que votre test est positif. Calculer la probabilité d'être malade alors que le test est négatif. Commentaire.*

Exercice 3.3 *Le gène qui détermine la couleur bleue des yeux est récessif. Pour avoir les yeux bleus, il faut donc avoir le génotype bb. Les génotypes mm et bm donnent des yeux marrons. On suppose que les parents transmettent indifféremment un de leur gènes à leurs enfants. La soeur et la femme d'Adrien ont les yeux bleus, mais ses parents ont les yeux marrons.*

1. *Quelle est la probabilité pour qu'Adrien ait les yeux bleus ?*
2. *Quelle est la probabilité pour que le premier enfant d'Adrien ait les yeux bleus sachant qu'Adrien a les yeux marrons ?*
3. *Quelle est la probabilité pour que le deuxième enfant d'Adrein ait les yeux bleus sachant que le premier a les yeux marrons ?*
4. *Comment expliquez-vous la différence de résultats entre les deux dernières questions ?*

Exercice 3.4 *On considère 3 cartes : une avec les deux faces rouges, une avec les deux faces blanches, et une avec une face rouge et une face blanche. On tire une carte au hasard. On expose une face au hasard. Parieriez-vous que la face cachée est blanche ? Pour vous aider dans votre choix :*

1. *Déterminer l'espace de probabilité.*
2. *Calculer la probabilité pour que la face cachée est blanche sachant que la face visible est rouge.*

Exercice 3.5 *Le jeu télévisé «La Porte de la Fortune » comporte 3 portes A, B et C.Derrière l'une d'entre elle se trouve un cadeau et rien derrière les deux autres. Vous choisissez au hasard une des trois portes sans l'ouvrir, par exemple la porte A. A ce moment-là, le présentateur, qui sait derrière quelle porte se trouve le cadeau, ouvre une porte parmi les deux B et C, derrière laquelle il n'y a évidemment rien. On vous propose alors de changer ou non de porte, le but étant d'ouvrir la porte qui cache le cadeau afin de gagner. L'objectif de cet exercice est de déterminer votre meilleure stratégie.*

1. *On suppose que si le cadeau est derrière la porte A, alors le présentateur choisit au hasard entre les deux autres portes. Calculer la probabilité pour que le cadeau soit derrière la porte B sachant que le présentateur ouvre la porte C. Que faites-vous ?*
2. *On suppose que si le cadeau est derrière la porte A, alors le présentateur choisit systématiquement la porte B. Que faites-vous si le présentateur ouvre la porte B ?, la porte C ?*

3. *Montrer que quelle que soit la valeur de la probabilité pour que le présentateur ouvre la porte B (resp. C) sachant que le cadeau est en A, vous avez intérêt à changer de porte. En déduire que la meilleure stratégie est de changer systématiquement de porte.*
4. *Une fois que le présentateur a ouvert une porte, et quel que soit le mécanisme de son choix, vous tirez à pile ou face pour choisir si vous changez ou non de porte. Quelle est votre probabilité de gagner le cadeau ? Vérifiez que cette stratégie est moins bonne que la précédente.*

4 Variables aléatoires discrètes

Exercice 4.1 *Soit X une variable aléatoire de loi de Poisson de paramètre $\theta > 0$.*

1. *Vérifier que $\dfrac{1}{1+X}$ est une variable aléatoire intégrable. Calculer $\mathbb{E}\left[\dfrac{1}{1+X}\right]$.*
2. *Calculer $\mathbb{E}\left[\dfrac{1}{(1+X)(2+X)}\right]$ et en déduire $\mathbb{E}\left[\dfrac{1}{2+X}\right]$.*

Exercice 4.2 *Un gardien de nuit doit ouvrir une porte dans le noir, avec n clefs dont une seule est la bonne.*

1. *Donner la loi de probabilité du nombre X d'essais nécessaires s'il essaie les clefs une à une sans utiliser deux fois la même. Calculer l'espérance et la variance de X.*
2. *Lorsque le gardien est ivre, il mélange les clefs à chaque tentative. Identifier la loi de X. Rappeler l'espérance et la variance de X.*
3. *Le gardien est ivre un jour sur trois. Sachant qu'un jour n tentatives ont été nécessaires pour ouvrir la porte, quelle ait été la probabilité pour que le gardien ait été ivre ce jour-là ? Calculer la limite quand n tend vers l'infini.*

Exercice 4.3 *On jette 5 dés. Après le premier lancer, on reprend et on lance les dés qui n'ont pas donné de six, jusqu'à ce qu'on obtienne 5 six. Soit X le nombre de lancers nécessaires.*

1. *Calculer $\mathbb{P}(X < k)$ pour $k \in \mathbb{N}$.*
2. *Soit Y une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$. Montrer que $\mathbb{E}(Y) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(Y \geq k)$.*
3. *Combien de lancers sont nécessaires en moyenne pour obtenir les 5 dés ?*

Exercice 4.4 *On pose 20 questions à un candidat. Pour chaque questions, k réponses sont proposées dont une seule est la bonne. Le candidat choisit au hasard une des réponses proposées.*

1. *On lui attribue un point par bonne réponse. Soit X le nombre de points obtenus. Quelle est la loi de X ?*
2. *Lorsque le candidat donne une mauvaise réponse, il peut choisir à nouveau une des autres réponses proposées. On lui attribue alors 0.5 point par bonne réponse. Soit Y le nombre de 0.5 points obtenus lors de ces seconds choix. Quelle est la loi de Y ?*
3. *Soit S le nombre total de points obtenus. Déterminer k pour que le candidat obtienne en moyenne une note de 5/20.*

Exercice 4.5 *Une urne contient N boules numérotées de 1 à N. On tire n boules une à une avec remise. Soit X et Y le plus petit et le plus grand des nombres obtenus.*

1. *Calculer $\mathbb{P}(X \geq x)$ pour tout x. En déduire la loi de X.*
2. *Donner la loi de Y.*
3. *Calculer $\mathbb{P}(X > k, Y \leq y)$ pour tout (x,y). En déduire la loi du couple (X,Y).*

5 Jeux de pile ou face

Exercice 5.1 *Deux joueurs lancent une pièce de monnaie parfaitement équilibrée, n fois chacun. Calculer la probabilité qu'ils obtiennent le même nombre de fois pile.*

Exercice 5.2 (Les boites d'allumettes de Banach) *Un fumeur a dans chacune de ses deux poches une boite d'allumettes qui contient initialement N allumettes. A chaque fois qu'il veut allumer une cigarette, il choisit au hasard une de ses deux poches et prend une allumette dans la boite qui s'y trouve.*

1. *Lorsqu'il ne trouve plus d'allumette dans la boite qu'il a choisi, quelle est la probabilité pour qu'il reste k allumettes dans l'autre boite ?*
2. *Le fumeur cherche alors une allumette dans son autre poche. Quelle est la probabilité pour que l'autre boite soit vide, ce qui suffit à gâcher la journée ? A.N : $N = 20$ (petite boite), $N = 40$ (grande boite).*

Exercice 5.3 *On considère un jeu de pile ou face biaisé : les variables aléatoires X_n sont indépendantes et de même loi de Bernoulli de paramètre p. On note T_k l'instant du k-ième succès.*

1. *Montrer que T_1 et $T_2 - T_1$ sont indépendants.*
2. *On pose $T_0 = 0$. Montrer que les $T_{k+1} - T_k$ sont indépendants et de même loi.*
3. *Calculer l'espérance et la variance de T_k.*
4. *Déterminer $\mathbb{P}(T_k = n)$ directement. Donner la fonction génératrice de T_k. La loi de T_k est appelée* loi binomiale négative de paramètre (k,p).

On possède une autre pièce (paramètre ρ). On note τ l'instant du premier succès avec cette autre pièce. On décide de jouer avec la première pièce jusqu'au τ-ième succès.

1. *Déterminer la loi de T_τ à l'aide des fonctions génératrices. Reconnaitre la loi de T_τ.*
2. *Retrouver ce résultat par un raisonnement probabiliste sur les premiers temps de succès.*