Tutorat MAP311 : Feuille d'exercice 3

Nicolas Kielbasiewicz*

23 juin 2007

Rappels

Les convergences

Définition 1 (convergence presque-sûre) *On dit que la suite de variables aléatoires X_n converge presque sûrement vers la variable aléatoire X ssi* $\exists \mathcal{N} / \mathbb{P}(\mathcal{N}) = 0$ *et* $\forall \omega \notin \mathcal{N} \lim_{n \longmapsto \infty} X_n(\omega) = X(\omega)$

Définition 2 (convergence en moyenne) *On dit que la suite de variables aléatoires X_n converge en moyenne vers la variable aléatoire X ssi* $\lim_{n \longmapsto \infty} \mathbb{E}(X_n) = \mathbb{E}(X)$*. On parle aussi de convergence L^1.*

Définition 3 (convergence en probabilités) *On dit que la suite de variables aléatoires X_n converge en probabilité vers la variable aléatoire X ssi* $\forall \epsilon > 0, \lim_{n \longmapsto \infty} \mathbb{P}(|X_n - X| > \epsilon) = 0$

Définition 4 (convergence en loi) *On dit que la suite de variables aléatoires X_n converge en loi vers la loi de la variable aléatoire X ssi $\forall g$ continue bornée* $\lim_{n \longmapsto \infty} \mathbb{E}\left[g(X_n)\right] = \mathbb{E}\left[g(X)\right]$

Liens entre les convergences

- convergence p.s. + dominance $\Longrightarrow$ convergence en moyenne
- convergence p.s. $\Longrightarrow$ convergence en probabilité
- convergence en moyenne $\Longrightarrow$ convergence en probabilité
- convergence en probabilité $\Longrightarrow$ convergence en loi

Les fonctions caractéristiques

Définition 5 *Il s'agit de l'extension aux variables aléatoires réelles de la notion de fonction génératrice. On appelle donc fonction caractéristique d'une variable aléatoire réelle X la fonction ψ_X définie par :*

$$\psi_X(u) = \mathbb{E}(e^{iu.X})$$

- La fonction caractéristique d'une variable aléatoire est continue
- $\psi_{aX+b}(u) = e^{iub}\psi_X(au)$
- $X_1, \ldots, X_n$ sont des v.a. indépendantes ssi

$$\psi_{X_1,\ldots,X_n}(u_1, \ldots, u_n) = \prod_{i=1}^{n} \psi_{X_i}(u_i)$$

*Unité de Mathématiques Appliquées, École Nationale Supérieure de Techniques Avancées

10 Quelques convergences

Exercice 10.1 *Soit X_n une suite de variables aléatoires de loi exponentielle de paramètre λ_n. Etudier la convergence en loi dans les 3 cas suivants :*

1. $\lim\limits_{n\longmapsto\infty} \lambda_n = \lambda > 0$.
2. $\lim\limits_{n\longmapsto\infty} \lambda_n = +\infty$.
3. $\lim\limits_{n\longmapsto\infty} \lambda_n = 0$.

Correction de l'exercice 10.1 *Soit X_n une suite de variables aléatoires de loi exponentielle de paramètre λ_n. Etudier la convergence en loi dans les 3 cas suivants :*

1. $\lim\limits_{n\longmapsto\infty} \lambda_n = \lambda > 0$.
   Soit g continue bornée.
   $$\mathbb{E}\left[g(X_n)\right] = \int_0^\infty \lambda_n e^{-\lambda_n x} g(x)dx$$
   La suite λ_n est convergente et strictement positive. $\exists \lambda_-, \lambda_+/0 < \lambda_- \leq \lambda \leq \lambda_+$. Donc :
   $$|\lambda_n e^{-\lambda_n x} g(x)| < ||g||_\infty \lambda_+ e^{-\lambda_- x}$$
   On peut donc appliquer le théorème de convergence dominée, et on obtient :
   $$\lim_{n\longmapsto\infty} \mathbb{E}\left[g(X_n)\right] = \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda x} g(x)dx$$
   On en déduit donc que la suite X_n converge en loi vers la loi exponentielle de paramètre λ
2. $\lim\limits_{n\longmapsto\infty} \lambda_n = +\infty$.
   Cette fois-ci, on n'a plus de majorant pour λ_n. On ne peut donc pas réutiliser exactement le même raisonnement que dans la question précédente, afin d'utiliser le théorème de convergence dominée. On va donc effectuer le changement de variable $y = \lambda_n x$:
   $$\mathbb{E}\left[g(X_n)\right] = \int_0^\infty e^{-\lambda_n y} g(\frac{y}{\lambda_n})dx$$
   Cette fois-ci, il n'y a plus de problèmes pour majorer par $||g||_\infty e^{-x}$. On a donc
   $$\lim_{n\longmapsto\infty} \mathbb{E}\left[g(X_n)\right] = \int_0^\infty e^{-x} g(0)dx = g(0) = \mathbb{E}\left[g(0)\right]$$
   On en déduit donc que la suite X_n converge en loi vers 0.
3. $\lim\limits_{n\longmapsto\infty} \lambda_n = 0$.
   Cette-fois ci, on n'a plus de minorant pour la suite λ_n. Par conséquent, le changement de variable ne fonctionnera pas ici. La seule solution est de faire appel aux fonctions caractéristiques. En effet, si la suite converge en loi vers une variable aléatoire X, alors la fonction caractéristique de X_n converge vers la fonction caractéristique de X.
   $$\psi_{X_n}(u) = \frac{\lambda_n}{\lambda_n - iu} \longmapsto \mathbb{I}_{u=0}$$
   Cette limite n'est pas continue. Il ne peut donc s'agir de la fonction caractéristique d'une variable aléatoire. Par contraposée, la suite X_n ne converge donc pas en loi.

Exercice 10.2 *Soit X une variable aléatoire intégrable à valeurs dans $\mathbb{N}$ etX_n une suite de variables aléatoires de même loi que X.*

1. *Montrer que* $\sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X \geq k) = \mathbb{E}(X)$.

2. *Soit* $m \in \mathbb{N}^*$. *Montrer que la variable aléatoire* $Y_m = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbf{1}_{\frac{X_n}{n} \geq \frac{1}{m}}$ *est p.s. finie.*

3. *En déduire que* $\frac{X_n}{n}$ *tend p.s. vers 0.*

4. *Montrer que* $\frac{1}{n} \max(X_1, \ldots, X_n)$ *tend p.s. vers 0.*

5. *On suppose que* X *est une variable aléatoire à valeurs dans* $\mathbb{R}$, *montrer que* $\frac{1}{n} \max(X_1, \ldots, X_n)$ *tend p.s. vers 0.*

Correction de l'exercice 10.2 *Soit* X *une variable aléatoire intégrable à valeurs dans* $\mathbb{N}$ *et*X_n *une suite de variables aléatoires de même loi que* X.

1. *Montrer que* $\sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X \geq k) = \mathbb{E}(X)$.

   Il existe deux méthodes pour répondre à cette question.

   (a) Utiliser la définition de $\mathbb{P}(X \geq k) = \sum_{i=k}^{\infty} \mathbb{P}(X = i)$ et dénombrer de manière à obtenir la définition de $\mathbb{E}(X)$

   (b) Utiliser l'égalité $X = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{I}_{X \geq k}$ et appliquer l'espérance pour obtenir directement le résultat.

2. *Soit* $m \in \mathbb{N}^*$. *Montrer que la variable aléatoire* $Y_m = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbf{1}_{\frac{X_n}{n} \geq \frac{1}{m}}$ *est p.s. finie.*

   De par la définition de l'espérance, pour montrer que Y_m est p.s. finie, il suffit de montrer que $\mathbb{E}[Y_m]$ est finie :

$$\mathbb{E}[Y_m] = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(\frac{X_n}{n} \geq \frac{1}{m}) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(mX_n \geq n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(mX \geq n) = \mathbb{E}[mX]$$

   d'où le résultat.

3. *En déduire que* $\frac{X_n}{n}$ *tend p.s. vers 0.*

   D'après le résultat de la question précédente, on a montré que $\forall m \in \mathbb{N} Y_m < \infty$. Soit A_m l'événement «$Y_m < \infty$ ». Cet événement est de probabilité 1. Par conséquent, $A = \bigcap_m A_m$ est aussi de probabilité 1. Pour tout $\omega \in A$, on a alors $\frac{X_n}{n} \leq \frac{1}{m}$. On passe à la limite quand $m \longmapsto \infty$. Soit $\epsilon > 0$. En prenant $m = floor(\frac{1}{\epsilon}) + 1$, on a alors $\frac{X_n(\omega)}{n} < \frac{1}{m} < \epsilon$. D'où le résultat.

4. *Montrer que* $\frac{1}{n} \max(X_1, \ldots, X_n)$ *tend p.s. vers 0.*

   D'après la question précédente, on en déduit que la suite $\frac{X_n}{n}$ est positive bornée par une constante M > 0. Utilisons maintenant le fait que $\frac{X_n}{n}$ tend vers 0.

   Soit donc $\epsilon > 0$. $\exists n_0 / \forall n > n_0 \frac{X_n}{n} < \epsilon$. Par ailleurs, $\exists n_1 / \frac{M}{n_1} < \epsilon$. Donc pour $n > \max(n_0, n_1) = n_2$, on a :

$$\frac{1}{n} \max_{1 \leq k \leq n} (X_k) \leq \frac{1}{n} \max_{1 \leq k \leq n_2} (X_k) + \frac{1}{n} \max_{n_2 < k \leq n} (X_k) \leq \frac{1}{n} \max_{1 \leq k \leq n_2} (X_k) + \max_{n_2 < k \leq n} (\frac{X_k}{k}) \leq \frac{M}{n} + \epsilon \leq 2\epsilon$$

   D'où le résultat.

5. *On suppose que X est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}$, montrer que $\frac{1}{n}\max(X_1, \ldots, X_n)$ tend p.s. vers 0.*

   X est une variable aléatoire réelle. On va donc considérer $Y = floor(|X|)$ qui est une variable aléatoire dans $\mathbb{N}$, intégrable. On peut donc appliquer le résultat de la question précédente à Y et par encadrement conclure pour X.