Tutorat MAP311 : Feuille d'exercices 1

Nicolas Kielbasiewicz*

15 juin 2007

1 Dénombrement

Exercice 1.1 *On tire au hasard 2 cartes dans un jeu de 52 cartes.*

1. *Quelle est la probabilité pour que la couleur des 2 cartes soit ♠ ?*
2. *Quelle est la probabilité pour que les deux cartes ne soient pas de la même couleur (♠, ♡, ♢, ♣) ?*
3. *Quelle est la probabilité pour que la première carte soit un ♠ et la seconde un ♡ ?*
4. *Quelle est la probabilité pour qu'il y ait un ♠ et un ♡ ?*
5. *Quelle est la probabilité pour qu'il y ait un ♠ et un as ?*

Correction de l'exercice 1.1 *On tire au hasard 2 cartes dans un jeu de 52 cartes.*

1. *Quelle est la probabilité pour que la couleur des 2 cartes soit ♠ ?*
   Puisqu'on tire deux cartes, il s'agit d'un tirage sans remise. Par conséquent, on peut considérer que l'on tire les deux cartes de manière successive. Nous avons donc 13 cartes possibles sur 52 pour tirer un ♠ à la première carte. Une fois cela fait, il reste 12 ♠ dans un jeu de 51 cartes pour la secondes. On en déduit donc que :
   $$\mathbb{P}(\{\spadesuit,\spadesuit\}) = \frac{13}{52}\frac{12}{51} = \frac{1}{17}$$
2. *Quelle est la probabilité pour que les deux cartes ne soient pas de la même couleur (♠, ♡, ♢, ♣) ?*
   On utilise la résultat de la question précédente. Les 4 évènements "avoir 2 ♠", "avoir 2 ♡", "avoir 2 ♢" et "avoir 2 ♣" étant clairement indépendants et équiprobables, on en déduit à travers la formule de l'évènement contraire que :
   $$\mathbb{P}(\text{2 cartes de couleurs différentes}) = 1 - 4\,\mathbb{P}(\{\spadesuit,\spadesuit\}) = \frac{13}{17}$$
3. *Quelle est la probabilité pour que la première carte soit un ♠ et la seconde un ♡ ?*
   On utilise le même raisonnement que la première question. Nous avons 13 ♠ sur le tirage de la première carte sur 52 cartes. Il reste donc 13 ♡ sur 51 cartes pour la deuxième carte. On en déduit donc que :
   $$\mathbb{P}(\{\spadesuit,\heartsuit\}) = \frac{13}{52}\frac{13}{51} = \frac{13}{204}$$
4. *Quelle est la probabilité pour qu'il y ait un ♠ et un ♡ ?*
   On va utiliser une formule de décomposition. Avoir un ♠ et un ♡ signifie ou bien avoir le ♠ en premier et le ♡ en deuxième ou l'inverse. Ces deux évènements sont équiprobables et indépendants. On en déduit donc que :
   $$\mathbb{P}(\{\spadesuit,\heartsuit\},\{\heartsuit,\spadesuit\}) = 2\,\mathbb{P}(\{\spadesuit,\heartsuit\}) = \frac{13}{102}$$

*Unité de Mathématiques Appliquées, École Nationale Supérieure de Techniques Avancées

5. *Quelle est la probabilité pour qu'il y ait un ♠ et un as ?*
On va encore utiliser une décomposition pour calculer la probabilité de cet évènement noté A. La différence essentielle dans cette question est que les deux ensembles valeurs / couleurs ne sont pas disjoints. Notre décomposition devient ou bien avoir l'as de ♠ et une autre carte, ou bien avoir un ♠ qui n'est pas un as et un as qui n'est pas un ♠. Dans les deux cas, l'ordre importe peu, comme dans la question précédente. On en déduit donc que :

$$\mathbb{P}(A) = 2\,\mathbb{P}(1\spadesuit, *) + 2\,\frac{12}{52}\frac{3}{51} = \frac{2}{52} + \frac{6}{13*17} = \frac{29}{26*17}$$

Exercice 1.5 *Une urne contient r boules rouges et b boules bleues.*

1. *On tire avec remise p boules. Calculer la probabilité pour qu'il y ait p_r boules rouges et p_b boules bleues.*
2. *On tire sans remise $p < r + b$ boules. Calculer la probabilité pour qu'il y ait $p_r < r$ boules rouges et $p_b < b$ boules bleues.*
3. *Calculer dans les deux cas les probabilités limites quand $r \longrightarrow \infty$, $b \longrightarrow \infty$ et $\frac{r}{r+b} \longrightarrow \theta$.*

Correction de l'exercice 1.5 *Une urne contient r boules rouges et b boules bleues.*

1. *On tire avec remise p boules. Calculer la probabilité pour qu'il y ait p_r boules rouges et p_b boules bleues.*
Puisqu'on tire avec remise, la probabilité de tirer une boule rouge est indépendante des résultats des tirages antérieurs. On en déduit donc que la probabilité de tirer une boule rouge est $\dfrac{r}{r+b}$. Puisqu'on tire p_r boules rouges et p_b boules bleues, il nous reste à dénombrer les possibilités d'obtenir un tel tirage. Cela revient donc à dénombrer les parties à p_r boules rouges dans un ensemble à p boules. On en déduit donc que :
$$\mathbb{P}((p_r, p_b)) = \binom{p}{p_r}\left(\frac{r}{r+b}\right)^{p_r}\left(\frac{b}{r+b}\right)^{p_b}$$
2. *On tire sans remise $p < r + b$ boules. Calculer la probabilité pour qu'il y ait $p_r < r$ boules rouges et $p_b < b$ boules bleues.*
Puisqu'on tire maintenant sans remise, la probabilité de tirer une boule rouge dépend du résultat des tirages antérieurs. On va donc procéder par dénombrement. Notre univers est l'ensemble des parties à p boules de l'ensemble total de boules (de cardinal $r + b$). Cet univers contient donc $\binom{r+b}{p}$ éléments. Puisqu'on s'intéresse aux éléments contenant p_r boules rouges et p_b boules bleues, on en déduit que le nombre de ces éléments est $\binom{r}{p_r}\binom{b}{p_b}$. On en déduit donc que :
$$\mathbb{P}((p_r, p_b)) = \frac{\binom{r}{p_r}\binom{b}{p_b}}{\binom{r+b}{p}}$$
3. *Calculer dans les deux cas les probabilités limites quand $r \longrightarrow \infty$, $b \longrightarrow \infty$ et $\frac{r}{r+b} \longrightarrow \theta$.*
Le passage à la limite dans le résultat de la première question est immédiat. On obtient :
$$\mathbb{P}((p_r, p_b)) = \binom{p}{p_r}\theta^{p_r}(1-\theta)^{p_b}$$

Pour la résultat de la deuxième question, on développe les coefficients binomiaux :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}((p_r, p_b)) &= \frac{\binom{r}{p_r}\binom{b}{p_b}}{\binom{r+b}{p}} \\
&= \binom{p}{p_r} \frac{\frac{r!}{(r-p_r)!}\frac{b!}{(b-p_b)!}}{\frac{(r+b)!}{(r+b-p_r-p_b)!}} \\
&= \binom{p}{p_r} \frac{r(r-1)\cdots(r-p_r+1)\; b(b-1)\cdots(b-p_b+1)}{(r+b)(r+b-1)\cdots(r+b-p_r-p_b+1)} \\
&\underset{\infty}{\sim} \binom{p}{p_r} \frac{r^{p_r} b^{p_b}}{(r+b)^{p_r+p_b}} \\
&\overset{\infty}{\longmapsto} \binom{p}{p_r} \theta^{p_r}(1-\theta)^{p_b}
\end{aligned}$$

2 Formule du crible et applications

Exercice 2.1 (La formule du crible) *Soit A_1, A_2, $\dots A_n$ des évènements.*

1. *Montrer que $\mathbb{P}(A_1 \bigcup A_2) = \mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_2) - \mathbb{P}(A_1 \bigcap A_2)$.*
2. *Montrer la formule du crible par récurrence.*

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{p=1}^{n} (-1)^{p+1} \sum_{1 \le i_1 < \cdots < i_p \le n} \mathbb{P}(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_p})$$

3. *Montrer par récurrence sur n que pour $1 < m < n$,*

$$\sum_{p=1}^{m} (-1)^{p+1} \sum_{1 \le i_1 < \cdots < i_p \le n} \mathbb{P}(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_p})$$

est une majoration (resp. minoration) de $\mathbb{P}(\cup_{i=1}^{n} A_i)$ lorsque m est impair (resp. pair).

Correction de l'exercice 2.1 *Soit A_1, A_2, $\dots A_n$ des évènements.*

1. *Montrer que $\mathbb{P}(A_1 \bigcup A_2) = \mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_2) - \mathbb{P}(A_1 \bigcap A_2)$.*
On va utiliser une formule de décomposition de l'évènement $A_1 \bigcup A_2$ en éléments disjoints, à savoir A_1 et $A_2 \backslash (A_1 \bigcap A_2)$, autrement dit A_1 et $A_2 \bigcup A_1^c$. On décompose de même A_2 suivant la partition A_1 et A_1^c. On obtient donc :

$$\begin{cases} \mathbb{P}(A_1 \bigcup A_2) = \mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_2 \bigcap A_1^c) \\ \mathbb{P}(A_2) = \mathbb{P}(A_2 \bigcap A_1) + \mathbb{P}(A_2 \bigcap A_1^c) \end{cases}$$

d'où le résultat cherché.

2. *Montrer la formule du crible par récurrence.*

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{p=1}^{n} (-1)^{p+1} \sum_{1 \le i_1 < \cdots < i_p \le n} \mathbb{P}(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_p})$$

On a montré dans la question précédente le résultat pour $n = 2$. Avant de poursuivre la récurrence, regardons ce que donne la formule pour $n = 3$:

$$\mathbb{P}(A \bigcup B \bigcup C) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C) - \mathbb{P}(A \cap B) - \mathbb{P}(A \cap C) - \mathbb{P}(B \cap C) + \mathbb{P}(A \cap B \cap C)$$

On voit dans cette relation les termes issus de l'ordre 2 auquel on a ajouté tous les termes contenant C. On va donc utiliser cette remarque pour la démonstration par récurrence. Supposons donc la propriété vraie à l'ordre n. On a alors en utilisant la propriété à l'ordre 2 :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\bigcup_{i=1}^{n+1} A_i) &= \mathbb{P}(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) + \mathbb{P}(A_{n+1}) - \mathbb{P}(\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \cap A_{n+1}) \\
&= \mathbb{P}(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) + \mathbb{P}(A_{n+1}) - \mathbb{P}(\bigcup_{i=1}^{n} (A_i \cap A_{n+1})) \\
&= \mathbb{P}(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) + \mathbb{P}(A_{n+1}) - \sum_{p=1}^{n} (-1)^{p+1} \sum_{1 \geq i_1 < \cdots < i_p \geq n} \mathbb{P}(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_p} \cap A_{n+1})
\end{aligned}$$

Analysons cette formule. Le premier terme correspond à la propriété d'ordre n. Reste à savoir si les deux termes supplémentaires contiennent tous les termes souhaités. Si on regarde la formule de rang n. On constate que quand on considère l'intersection d'un nombre pair (resp. impair) d'évènements, la probabilité associée est précédée d'un signe - (resp. d'un signe +). Quand seul A_{n+1} est impliqué, on a donc le bon signe. Reste à analyser le dernier terme. La probabilité concerne p+1 évènements dont A_{n+1}. Quand p est pair (resp. impair), on a donc un nombre impair (resp. pair) d'éléments, et on a bien un signe + (resp -) devant la probabilité associée. Ce dernier terme regroupe donc avec le bon signe toutes les intersections à n+1 évènements au plus dont A_{n+1}. On peut donc conclure que la propriété est vraie au rang n+1.