Reports of thesis referees

David Lannes, Institut de Mathématiques de Bordeaux

and

Matthias Ehrhardt, Bergische Universität Wuppertal

on thesis of Maria Kazakova, entitled :

"Dispersive models of ocean waves propagation : Numerical issues and modelling"

IMB, Université Bordeaux 1 et CNRS UMR 5251,
351, Cours de la Libération, 33405 Talence Cedex

Bordeaux, 21 août 2018

Rapport sur le mémoire de Maria Kazakova en vue de l'obtention du Doctorat en Mathématiques

Les simulations numériques en océanographie côtière se sont longtemps appuyées sur les équations de Saint-Venant qui ont l'avantage d'être physiquement robustes et mathématiquement simples puisqu'il s'agit d'un système quasilinéaire. Cette simplicité de la structure mathématique permet de répondre à plusieurs besoins des ingénieurs comme par exemple :

- Le besoin de prendre en compte le déferlement des vagues. Il s'agit d'un phénomène physique très complexe si on veut le décrire en détail mais très important. Les équations de Saint-Venant permettent une modélisation simple et relativement bonne de ce phénomène en décrivant les vagues déferlées comme des chocs.

- La nécessité de faire les simulations sur un domaine de calcul plus petit que l'océan et donc le besoin de pouvoir gérer plusieurs types de conditions au bord: transparentes, de génération, etc. La décomposition des équations de Saint-Venant en invariants de Riemann permet une gestion très simple de ces problèmes.

Malheureusement, les équations de Saint-Venant ne sont pas assez précises pour répondre aux besoins en ingénierie côtière. Une de leurs limitations principales est le fait qu'elles négligent les effets dispersifs. En allant un cran plus loin dans l'asymptotique qui permet de trouver les équations de Saint-Venant à partir d'Euler en eau peu profonde, ces effets dispersifs apparaissent, et les équations correspondantes sont celles de Serre-Green-Naghdi (SGN). La structure mathématique de ces équations est bien plus complexe et les problèmes évoqués ci-dessus pour les équations de Saint-Venant deviennent complètement ouverts. Dans son manuscrit de thèse, Maria Kazakova s'attaque à ces difficultés considérables. Elle propose une démarche très complète et stimulante de mathématiques appliquées qui mélange modélisation, analyse mathématique, simulation numériques et validations expérimentales.

Dans le premier chapitre, écrit en collaboration avec Gaël Richard, Maria Kazakova propose une approche permettant de décrire à la fois les effets dispersifs et les effets dissipatifs liés au déferlement. Elle s'appuie pour cela sur une méthode proposée initialement par Gavrilyuk et Richard (JFM 2012,13,15) pour les équations de Saint-Venant afin de pouvoir décrire les vagues déferlées (ou ressauts hydrauliques) de manière plus fine que si l'on utilise les chocs. Maria Kazakova propose une extension de ces travaux aux équations de SGN afin de prendre en compte les effets dispersifs. Pour cela, elle procède tout d'abord au filtrage des équations de Navier-Stokes similaire à celui utilisé dans la méthode LES, en décomposant la vitesse en somme d'une partie "filtrée" et d'un reste, $v = \overline{v} + v^r$. Le filtrage des termes quadratiques fait apparaître le "residual stress tensor" dont l'analyse demande un travail important et délicat de modélisation. Maria Kazakova propose de le court-circuiter partiellement en faisant d'abord une deuxième étape de moyennisation, en l'occurrence, une moyennisation selon la variable verticale. Elle suppose pour cela que l'écoulement est faiblement cisaillé et néglige les termes en $O(\mu^3)$ où $\mu = h_0/L$ est le paramètre de faible profondeur (rapport de la profondeur sur la longueur horizontale caractéristique). En moyennant verticalement les équations précédemennt filtrées, elle obtient un système sur la hauteur d'eau h et la vitesse horizontale moyennée U,

$$\begin{cases} \partial_t h + \partial_x(hU) = 0, \\ \partial_t(hU) + \partial_x\Big(hU^2 + \mu^2 h^3\varphi + \frac{h^2}{2} + \mu^2\frac{h^2\ddot{h}}{3} - 4\nu_T h\partial_x U\Big) = -hb'; \end{cases}$$

sans le terme en φ et celui en ν_T, ces équations sont les équations de SGN usuelles. La quantité ν_T est la viscosité turbulente introduite plus haut, et φ est une "enstrophie" vérifiant l'équation (aux termes $O(\mu^3)$ près)

$$\partial_t(h\varphi) + \partial_x(hU\varphi) = \frac{8\nu_T}{h}(\partial_x U)^2 - \frac{2}{h^2} << \epsilon_f >>,$$

où ν_T est la viscosité turbulente, et $<< \epsilon_f >>$ la moyenne du terme de dissipation visqueux. La présence de l'enstrophie dans l'équation sur la quantité de mouvement permet entre autres de rendre compte des effets de cisaillement. Dans un travail avec Angel Castro (JFM 2014), nous avions étudié en détail ces interactions, et obtenu plusieurs systèmes dont celui-ci, mais sans les termes de dissipation visqueux et turbulents du second membre de l'équation sur l'enstrophie. L'apport de Maria Kazakova est donc de prendre ces termes en considération; pour fermer les équations, il est nécessaire de les relier aux autres quantités. Une analyse dimensionnelle et une analogie avec le modèle de turbulence TKE (turbulent kinetic energy) poussent Maria Kazakova à proposer

$$\nu_T = C_p h^2\sqrt{\varphi} \quad \text{et} \quad << \epsilon_f >>= \frac{C_r}{2}h^2\varphi^{3/2}$$

où C_p et C_r sont des quantités sans dimension. Il en résulte un système fermé de trois équations sur h, U et φ.

Maria Kazakova étudie ensuite ce système numériquement, en se basant sur un article de Le Métayer, Gavrilyuk et Hank (JCP2010) pour les équations de SGN standard. A l'aide de ces simulations, Maria Kazakova propose une analyse extrêmement stimulante du processus de déferlement et explique de manière très convaincante en quoi son modèle peut servir de base à une théorie unifiée qui inclurait les effets dispersifs et le déferlement. Les simulations, très judicieusement choisies, montrent bien le phénomène d'atténuation de la hauteur de la vague en zone de déferlement. Pour la détermination des coefficients C_r et C_p, Maria Kazakova se sert de données expérimentales avec lesquelles elle obtient un très bon accord. Elle propose également des raffinements qui montrent son désir d'obtenir un modèle vraiment opérationnel pour les applications. Je pense qu'il s'agit d'un très joli travail, qui requiert une bonne culture de la modélisation de la turbulence et des vagues en eau peu profonde et qui est extrêmement prometteur. Elle fait le lien entre les travaux de Gavrilyuk-Richard sur les ressauts hydrauliques pour Saint-Venant et nos travaux avec Castro sur les interactions vagues-courant pour Green-Naghdi, et elle servira à coup sûr d'inspiration à de nombreux travaux postérieurs.

Le deuxième chapitre, qu'elle a écrit seule, est consacré à l'étude des écoulements bifluides (ondes internes) où la problématique du déferlement se pose également. L'idée est de généraliser le travail précédent au cas des écoulements à deux couches. Devant l'ampleur de la tâche, Maria Kazakova n'étudie pas ici les mécanismes de création d'enstrophie par viscosité et par turbulence, mais prend en compte les effets de vorticité – c'est donc une généralisation au cas bi-fluide de notre travail avec Castro. Dans le cas irrotationnel, le cas d'un écoulement à deux couches a été assez abondamment étudié sous l'hypothèse de toit rigide, mais très peu sans cette hypothèse, c'est-à-dire, si l'on considère que la surface et l'interface sont libres. On peut citer les travaux de V. Duchêne sur la validité de l'approximation de toit rigide, mais il s'agissait des équations de type Saint-Venant. Pour les équations de type SGN, la complexité des calculs est absolument terrifiante. Inclure de plus la vorticité comme le fait Maria Kazakova est donc un tour de force technique. Elle propose deux méthodes d'obtention du modèle asymptotique, l'une selon les principes du premier chapitre, la seconde par des méthodes variationnelles. Il reste encore des choses à faire, comme par exemple montrer que les deux modèles coïncident, mais il faut être reconnaissant à Maria Kazakova d'avoir mené ces calculs à bien! Ils seront utiles et permettront de pouvoir attaquer certains problèmes ouverts, comme par exemple l'influence de la vorticité sur l'instabilité de Rayleigh-Taylor ou l'étude du déferlement par les techniques du chapitre 1.

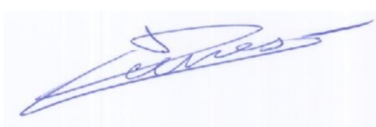
Le chapitre 3, écrit avec Pascal Noble, aborde le problème des conditions au bord pour les équations de Green-Naghdi ou plus exactement pour le linéarisé de ces équations autour de l'état de repos. Les conditions aux limites transparentes se trouvent à l'aide d'une analyse de Fourier-Laplace. Grâce à une formule d'inversion explicite bienvenue, ces conditions peuvent s'exprimer en espace physique à l'aide d'une convolution en temps (elles sont donc non-locales en temps). Maria Kazakova montre que ces conditions transparentes sont stables (ou dissipatives) au sens où elles permettent d'obtenir une propriété de décroissance en temps de l'énergie associée à la solution sur l'intervalle de calcul. Pour les simulations numériques, le caractère non local des conditions transparentes est problématique car elles sont difficiles à discrétiser. Dans la lignée des travaux de Besse, Mésognon-Gireau et Noble (Numerische Math. 2016) et Besse, Noble et Sanchez (JCP 2017), Maria Kazakova propose plutôt d'obtenir des conditions transparentes discrètes en transposant l'analyse du cas continu sur le schéma numérique (l'analogue discret de la transformée de

Laplace étant la transformée $\mathcal{Z}$). Une analyse numérique soigneuse lui permet de montrer que la propriété de stabilité subsiste au niveau discret. Maria Kazakova présente également des simulations numériques qui donnent d'excellents résultats. Après avoir montré ses compétences en modélisation et en analyse asymptotique dans les deux premiers chapitres, Maria Kazakova montre ici d'indéniables compétences en analyse numérique. Encore une fois, il s'agit d'un travail stimulant qui ouvre plusieurs perspectives (nonlinéaires, généralisation au système à deux couches, etc.).

La généralisation des résultats du chapitre 3 au cas nonlinéaire étant très délicate, Maria Kazakova propose dans le chapitre 4 (qu'elle a écrit seule) une autre approche dont le point de départ est un article récent de Favrie et Gavrilyuk (Nonlinearity 2017) où les auteurs proposent une relaxation du système de Green-Naghdi qui prend la forme d'un système hyperbolique. L'idée, très pertinente, de Maria Kazakova est de considérer le problème des conditions aux bords pour ce système relaxé puisque son caractère hyperbolique s'y prête bien. La deuxième idée est d'essayer de trouver des conditions absorbantes en implémentant une stratégie de type Perfectly Matched Layer (PML). L'idée consiste à modifier les équations dans une couche à l'extérieur du domaine de manière à ce que les ondes sortantes soient amorties et qu'il n'y ait pas de réflection. Maria Kazakova fait l'analyse dans le cas linéaire. Les résultats sont bons, surtout quand le paramètre de faible profondeur μ est petit. En modifiant un peu la méthode, elle traite également le cas de conditons au bord génératrices. Un très gros avantage de cette méthode est qu'elle s'adapte sans trop de diffultés au cas faiblement nonlinéaire (systèmes de Boussinesq). Il s'agit d'un bel article qui témoigne d'une bonne culture puisqu'il fait le lien entre une formulation relaxée et la théorie des PML qui ne sont pas des connaissances complètement standards dans le domaine. Et encore une fois, il s'agit d'un travail stimulant qui donne envie de travailler sur le sujet.

En conclusion, le manuscrit de Maria Kazakova constitue une très bonne thèse de mathématiques appliquées et mobilise de manière très pertinente des connaissances en modélisation (écoulements en faible profondeur, turbulence), analyse asymptotique, données expérimentales et analyse numérique. La diversité et l'étendue de cette palette de compétences sont assez remarquables et j'ai également particulièrement apprécié le côté stimulant de ces travaux. Les problèmes abordés sont à la fois très pertinents et très difficiles. Maria Kazakova propose ici plusieurs pistes prometteuse pour les explorer. Ces pistes ne sont pas des impasses et il me semble donc clair que Maria Kazakova a de quoi nourrir un solide programme de recherche pour les années à venir. Je recommande donc bien évidemment la soutenance de cette thèse.

Bordeaux, 21 aôut 2018, David Lannes



BERGISCHE
UNIVERSITÄT
WUPPERTAL

Prof. Dr. Matthias Ehrhardt

Fachbereich C –
Mathematik und Naturwissenschaften
Angewandte Mathematik / Numerische Analysis

Gaußstraße 20, 42119 Wuppertal

ROOM G.14.02/WP 405
PHONE +49 (0)202 439-4784/3361
FAX +49 (0)202 439-4770
MAIL ehrhardt@math.uni-wuppertal.de
WWW www-num.math.uni-wuppertal.de

Bergische Universität Wuppertal, Prof. Dr. Matthias Ehrhardt, Gaußstraße 20, 42119 Wuppertal
Martine Labruyère
ED MITT - ED 475
- Soutenances -
UNIVERSITE DE TOULOUSE
UT3 Paul Sabatier - Bât. 1R1
31062 Toulouse Cedex 9
FRANCE

DATE August 29, 2018

Referee Report for Thesis of Maria Kazakova

Dear Ms. Martine Labruyère,

It is a great pleasure for me being invited to serve as a referee for the thesis of Maria Kazakova (University of Toulouse) at the MITT Doctoral School (Mathematics, Computer Science and Telecommunications of Toulouse) entitled

Dispersive Models of Ocean Waves Propagation:
Numerical Issues and Modelling

Description of the Content
This dissertation consists of 4 chapters. In the first chapter Maria Kazakova discusses the modelling of breaking waves, the wave propagation across a flat bottom, like the beach. Hereby, she addresses effects like dispersion and dynamics of the viscosity. Next in Chapter 2 she derived two models, one modelling the two water layers above and below the thermocline and the second model describing a surf zome phenomenon. In the third chapter she turns to the topic of artificial boundary conditions and describes concisely the construction of so-called discrete transparent boundary conditions for different strategies for the grid generation: staggered and collocated.In Chapter 4 she proposed an alternative strategy for confining the computational domain, the perfectly matched layer technique, and showed how to apply this approach also for nonlinear problems.

Rating of the thesis
This thesis is a very impressing piece of work. Ms. Maria Kazakova establishes a big bridge ranging from mathematical modelling, analysis of PDEs, to numerical analyis and implementation of numerical codes. This reflects the whole range of work of an applied mathematician. The high quality of this submitted thesis was partially proven by an international publication.

- M. Kazakova, P. Noble, Two layer asymptotic model for the wave propagation in the presence of vorticity, Journal of Physics Conference Series 722(1) (2016), 012017

This thesis is outstanding since she worked successfully, both on the theoretical developments using analytical tools, but also on the practical side of numerical aspects, stability proofs and coding. Her scientific style of writing is already very advanced and even after carefully checking i could not locate any serious source of error. What makes this dissertation so special is the fact that Ms. Maria Kazakova raised with her excellent research so many follow-up open questions that needs to be addressed in the near future, e.g. the fast evaluation of the proposed transparent boundary conditions and the related question of the well-posedness / stability of the related approximating initial boundary value problem.

To conclude i strongly support the admission of Ms. Maria Kazakova to the further steps in this thesis procedure and **declare her thesis to be defendable**. Her thesis clearly constitutes an original contribution, worthy of publication in an international peer-reviewed journal.

I deeply wish all the best for her personal future. I would be very happy to invite her in the coming years to the University of Wuppertal as a professional colleague, also to jointly apply for bilateral french-german or even European projects.

If you have further questions, do not hesitate to contact me.

Sincerely yours,

Prof. Dr. Matthias Ehrhardt

BERGISCHE UNIVERSITÄT WUPPERTAL
School of Mathematics and Natural Sciences
Institute of Mathematical Modelling, Analysis and Computational Mathematics (IMACM)
Chair of Applied Mathematics/ Numerical Analysis
Univ.-Prof. Dr. Matthias Ehrhardt
42097 Wuppertal