Schémas numériques pour les équations hyperboliques non linéaires

Corrigé de la Séance 12

21 Février 2006

Exercice 1. Un exemple de schéma non conservatif

On considère le schéma suivant :

$$u_j^{n+1} = \begin{cases} u_j^n - \dfrac{u_j^n \Delta t}{\Delta x}\left(u_j^n - u_{j-1}^n\right) & si \quad u_j^n \geq 0 \\ u_j^n - \dfrac{u_j^n \Delta t}{\Delta x}\left(u_{j+1}^n - u_j^n\right) & si \quad u_j^n \leq 0 \end{cases}$$

pour approcher l'équation de Bürgers.

1.1 - Considérons l'équation de transport

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a\frac{\partial u}{\partial x} = 0\,.$$

et les deux schémas explicites décentrés en espace suivant :
– schéma décentré à gauche

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + a\frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{\Delta x} = 0\,;$$

– schéma décentré à droite

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + a\frac{u_{j+1}^n - u_j^n}{\Delta x} = 0\,.$$

Pour $a \geq 0$, le schéma décentré à gauche est stable sous la CFL $a\dfrac{\Delta t}{\Delta x} \geq 1$ et le schéma décentré à droite est instable. Pour $a \leq 0$, le schéma décentré à gauche est instable et le schéma décentré à droite est stable sous la CFL $|a|\dfrac{\Delta t}{\Delta x} \geq 1$.

Par conséquent, pour $a \geq 0$, on choisit le schéma décentré à gauche et pour $a \leq 0$ on choisit le schéma décentré à droite.

En écrivant l'équation de Bürgers sous forme non conservative

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a(u)\frac{\partial u}{\partial x} = 0\,,$$

avec $a(u) = u$, on obtient une équation de type transport avec une vitesse non constante. On généralise le résultat obtenu avec l'équation de transport en prenant comme critère le signe de $(a(u))_j^n = u_j^n$.

1.2 - Supposons par l'absurde qu'il existe une fonction g telle que le schéma se mette sous la forme conservative. La fonction g vérifie donc

$$g(v,w) - g(u,v) = \left\{ \begin{array}{lll} v(v-u) & si & v \geq 0 \\ \\ v(w-v) & si & v \leq 0 \end{array} \right. . \tag{1}$$

Considérons deux cas particuliers :

1. $u = 0$, $w = 0$ et $v = a$ avec $a \neq 0$ quelconque. Nous avons

   $$g(a,0) - g(0,a) = \left\{ \begin{array}{lll} a^2 & si & a \geq 0 \\ \\ -a^2 & si & a \leq 0 \end{array} \right. , \tag{2}$$

   donc $g(a,0) - g(0,a) \neq 0$.
2. $v = 0$ et $u = w = a$. Nous avons

   $$g(0,a) - g(a,0) = 0\,,$$

ce qui est contradictoire.

1.3 - On considère la condition initiale suivante :

$$u_0(x) = \left\{ \begin{array}{lll} 1 & \text{si} & x \leq 0 \\ 0 & \text{si} & x > 0 \end{array} \right. .$$

On peut construire la solution faible entropique exacte en utilisant la méthode des caractéristiques (problème de Riemann à 2 états). La condition de RH nous donne l'équation de la ligne de choc $\sigma(t) = \dfrac{1}{2}t$. La solution est

$$u(x,t) = \left\{ \begin{array}{lll} 1 & \text{si} & x < \frac{1}{2}t \\ 0 & \text{si} & x > \frac{1}{2}t \end{array} \right.$$

Appliquons à présent le schéma à cette condition initiale (notons qu'on n'a pas besoin de la discrétiser). On trouve $u_j^n = u_j^0$ pour tout j. On a donc une ligne de choc d'équation $\sigma(t) = 0$. $\{u_j^n\}_j$ n'est pas une solution faible car ele ne vérifie pas RH au niveau du choc.

Exercice 2. Le schéma d'Engquist-Osher

2.1 - Le schéma peut s'écrire

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \alpha(g(u_j^n, u_j^{n+1}) - g(u_{j-1}^n, u_j^n))\,,$$

avec

$$g(u_j^n, u_j^{n+1}) = \frac{1}{4}((u_j^{n+1})^2 + (u_j^n)^2) - \frac{1}{2}\int_{u_j^n}^{u_{j+1}^n} |\xi| d\xi\,.$$

Le flux numérique g vaut donc

$$g(u,v) = -\frac{1}{2}\int_u^v |\xi| d\xi + \frac{1}{4}(u^2+v^2)\,.$$

2.2 - On a

$$g(u,u) = \frac{1}{2}u^2 = f(u)\,.$$

Le schéma est donc consistant avec l'équation de Bürgers.

2.3 - On écrit le schéma sous la forme

$$u_j^{n+1} = H(u_{j-1}^n, u_j^n, u_{j+1}^n)\,,$$

avec

$$H(u,v,w) = v - \frac{\alpha}{4}(w^2-u^2) + \frac{\alpha}{2}\left(\int_v^w |\xi| d\xi - \int_u^v |\xi| d\xi\right)$$

et montrons que H est croissante par rapport à chacune de ses variables.

$$\frac{\partial H}{\partial u} = \frac{\alpha}{2}u + \frac{\alpha}{2}|u| \tag{3}$$

$$\frac{\partial H}{\partial v} = 1 - \alpha|v| \tag{4}$$

$$\frac{\partial H}{\partial w} = -\frac{\alpha}{2}w + \frac{\alpha}{2}|w| \tag{5}$$

Les expressions (3) et (5) sont toujours positives. $\frac{\partial H}{\partial v}$ est positive sous la condition de CFL $\sup_j |u_j^n|\frac{\Delta t}{\Delta x} \leq 1$.

Finalement le schéma est monotone sous la condition de CFL $\sup_j |u_j^n|\frac{\Delta t}{\Delta x} \leq 1$.

On en déduit que notre schéma est entropique.

2.4 - On travaille par récurrence. On suppose que $u_j^n \geq 0$ pour tout j. u_j^{n+1} est donné par $u_j^{n+1} = H(u_{j-1}^n, u_j^n, u_{j+1}^n)$. La monotonie de H implique $u_j^{n+1} \geq H(0,0,0) = 0$.

2.5 - Plaçons-nous dans une zone où $u_j^n \geq 0$. Dans ce cas $a(u) \geq 0$. Le schéma s'écrit (après un petit calcul)

$$u_{j+1}^n = u_j^n + \frac{\alpha}{2}((u_{j-1}^n)^2 - (u_j^n)^2)\,,$$

ce qui correspond à un schéma décentré à gauche.

De même pour une zone où $u_j^n \leq 0$, on trouve un schéma décentré à droite

$$u_{j+1}^n = u_j^n + \frac{\alpha}{2}((u_j^n)^2 - (u_{j+1}^n)^2)\,.$$

Exercice 3. Le schéma de Lax-Wendroff

On considère le schéma suivant :

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \frac{\alpha}{2}\left(f_{j+1}^n - f_{j-1}^n\right) + \frac{\alpha^2}{2}\left(a_{j+\frac{1}{2}}^n\left(f_{j+1}^n - f_j^n\right) - a_{j-\frac{1}{2}}^n\left(f_j^n - f_{j-1}^n\right)\right)$$

où $f_j^n = \dfrac{\left(u_j^n\right)^2}{2}$, $a_{j+\frac{1}{2}}^n = \dfrac{u_j^n + u_{j+1}^n}{2}$ et $\alpha = \dfrac{\Delta t}{\Delta x}$.

3.1 - Le schéma peut s'écrire sous la forme conservative

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \alpha(g(u_j^n, u_j^{n+1}) - g(u_{j-1}^n, u_j^n))\,,$$

avec $g(u,v) = \dfrac{1}{2}(f(u)+f(v)) - \dfrac{\alpha}{2}\dfrac{u+v}{2}(f(v)-f(u))$.

Le flux numérique g vérifie $g(u,u) = f(u)$. Le schéma est donc consistant avec l'équation de Bürgers et est donc d'ordre 1 au moins..

3.2 - On calcule l'erreur de troncature

$$\epsilon_j^n = \frac{\bar{u}_j^{n+1} - \bar{u}_j^n}{\Delta t} + \frac{g(\bar{u}_j^n, \bar{u}_j^{n+1}) - g(\bar{u}_{j-1}^n, \bar{u}_j^n)}{\Delta x}\,,$$

où $\bar{u}(x,t)$ est solution exacte de l'équation de Bürgers et $\bar{u}_j^n = \bar{u}(x_j, t^n)$.

En faisant un DL on obtient

$$\begin{aligned}
\epsilon_j^n = \quad & \frac{\partial \bar{u}}{\partial t}(x_j,t^n) + \frac{\Delta t}{2}\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial t^2}(x_j,t^n) \\
& + \frac{\partial g}{\partial v}(\bar{u}_j^n,\bar{u}_j^n)\frac{\partial \bar{u}}{\partial x}(x_j,t^n) + \frac{\Delta x}{2}\frac{\partial^2 g}{\partial v^2}(\bar{u}_j^n,\bar{u}_j^n)\left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial x}(x_j,t^n)\right)^2 + \frac{\Delta x}{2}\frac{\partial g}{\partial v}(\bar{u}_j^n,\bar{u}_j^n)\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x^2}(x_j,t^n) \\
& + \frac{\partial g}{\partial u}(\bar{u}_j^n,\bar{u}_j^n)\frac{\partial \bar{u}}{\partial x}(x_j,t^n) - \frac{\Delta x}{2}\frac{\partial^2 g}{\partial u^2}(\bar{u}_j^n,\bar{u}_j^n)\left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial x}(x_j,t^n)\right)^2 - \frac{\Delta x}{2}\frac{\partial g}{\partial u}(\bar{u}_j^n,\bar{u}_j^n)\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x^2}(x_j,t^n) \\
& + \mathcal{O}(\Delta t^2 + \Delta x^2)\,.
\end{aligned}$$

En dérivant la relation de consistance $g(u,u) = f(u)$ on obtient

$$\frac{\partial g}{\partial u}(u,u) + \frac{\partial g}{\partial v}(u,u) = f'(u) = u\,.$$

Par conséquent

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t}(x_j,t^n) + \frac{\partial g}{\partial v}(\bar{u}_j^n,\bar{u}_j^n)\frac{\partial \bar{u}}{\partial x}(x_j,t^n) + \frac{\partial g}{\partial u}(\bar{u}_j^n,\bar{u}_j^n)\frac{\partial \bar{u}}{\partial x}(x_j,t^n) = 0\,.$$

En utilisant l'expression de g et en dérivant on obtient

$$\begin{aligned}
\frac{\partial g}{\partial u}(u,u) &= \frac{1}{2}u + \frac{\alpha}{2}u^2\\
\frac{\partial g}{\partial v}(u,u) &= \frac{1}{2}u - \frac{\alpha}{2}u^2\\
\frac{\partial^2 g}{\partial u^2}(u,u) &= \frac{1}{2} + \alpha u\\
\frac{\partial^2 g}{\partial v^2}(u,u) &= \frac{1}{2} - \alpha u\,,
\end{aligned}$$

ce qui nous donne

$$\begin{aligned}
\frac{\partial g}{\partial v}(u,u) - \frac{\partial g}{\partial u}(u,u) &= -\alpha u^2\\
\frac{\partial^2 g}{\partial v^2}(u,u) - \frac{\partial^2 g}{\partial u^2}(u,u) &= -2\alpha u\,.
\end{aligned}$$

En utilisant tout ce qu'on a fait précédemment, l'erreur de troncature devient

$$\begin{aligned}
\epsilon_j^n = \quad & \frac{\Delta t}{2}\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial t^2}(x_j,t^n)\\
& -\Delta t \bar{u}_j^n \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial x}(x_j,t^n)\right)^2 - \frac{\Delta t}{2}(\bar{u}_j^n)^2 \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x^2}(x_j,t^n)\\
& +\mathcal{O}(\Delta t^2 + \Delta x^2)\,.
\end{aligned}$$

On repart de l'équation de Bürgers qu'on dérive par rapport au temps (la solution est supposée régulière),

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial t^2} + \frac{\partial}{\partial t}\left(\bar{u}\frac{\partial \bar{u}}{\partial x}\right) &= 0\\
\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial t^2} + \frac{\partial \bar{u}}{\partial t}\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{u}\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} &= 0\\
\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial t^2} - \bar{u}\frac{\partial \bar{u}}{\partial x}\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} - \bar{u}\frac{\partial}{\partial x}\left(\bar{u}\frac{\partial \bar{u}}{\partial x}\right) &= 0\\
\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial t^2} - 2\bar{u}\left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial x}\right)^2 - \bar{u}^2\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x^2} &= 0\,.
\end{aligned}$$

En injectant ce résultat dans l'ereur de troncature on obtient finalement

$$\epsilon_j^n = \mathcal{O}(\Delta t^2 + \Delta x^2)\,.$$

Le schéma est donc d'ordre 2 (au moins).

3.3 - En l'appliquant notre schéma à la donnée initiale suivante :

$$u_j^0 = \begin{cases} w & \text{si} \quad j < 0 \\ -w & \text{si} \quad j \geq 0 \end{cases}$$

on obtient $u_j^n = u_j^0$ pour tout j. La solution est stationnaire. La ligne de choc est d'équation $\sigma(t) = 0$, elle vérifie bien RH. Par contre, dans le cas où $w < 0$, on a $u^- < u^+$ au niveau de la ligne de discontinuité ce qui n'est pas entropique.

Exercice 4. Erreur de troncature et schémas monotones

Soit un schéma sous forme conservative :

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \alpha\left(g\left(u_{j+1}^n, u_j^n\right) - g\left(u_j^n, u_{j-1}^n\right)\right), \quad \alpha = \frac{\Delta t}{\Delta x},$$

consistant avec l'équation

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(f(u)) = 0. \tag{6}$$

4.1 - On reprend le résultat établi à l'exercice précédent question 2 et on obtient directement l'erreur de troncature

$$\varepsilon_j^n = \frac{\Delta t}{2}\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial t^2} + \frac{\Delta x}{2}\frac{\partial}{\partial x}\left(\left(\frac{\partial g}{\partial v}(\bar{u},\bar{u}) - \frac{\partial g}{\partial u}(\bar{u},\bar{u})\right)\frac{\partial \bar{u}}{\partial x}\right) + O(\Delta x^2 + \Delta t^2)$$

4.2 - On dérive l'équation (6) par rapport au temps

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial t^2} + \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial}{\partial x}(f(\bar{u})) &= 0 \\
\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial t^2} + \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial t}(f(\bar{u})) &= 0 \\
\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial t^2} + \frac{\partial}{\partial x}\left(a(\bar{u})\frac{\partial \bar{u}}{\partial t}\right) &= 0 \\
\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x}\left(a(\bar{u})\frac{\partial}{\partial x}(f(\bar{u}))\right) &= 0 \\
\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x}\left(a(\bar{u})^2\frac{\partial \bar{u}}{\partial x}\right) &= 0\,.
\end{aligned}$$

4.3 - C'est immédiat en utilisant ce qu'on vient de faire aux 2 questions précédentes.

4.4 - Le schéma étant monotone, on sait que la fonction H définie par $H(u,v,w) = v - \alpha(g(v,w) - g(u,v))$ est croissante par rapport à chacune de ses variables, d'où

$$\begin{aligned}
&(7) && \frac{\partial H}{\partial u}(u,u,u) &=& \alpha\frac{\partial}{\partial u}g(u,u) \geq 0\\
&(8) && \frac{\partial H}{\partial v}(u,u,u) &=& 1-\alpha\left(\frac{\partial}{\partial u}g(u,u) - \frac{\partial}{\partial v}g(u,u)\right) \geq 0\\
&(9) && \frac{\partial H}{\partial w}(u,u,u) &=& -\alpha\frac{\partial}{\partial v}g(u,u) \geq 0\,.
\end{aligned}$$

En utilisant la relation de consistance $g(u,u) = f(u)$ dérivée par rapport à u on obtient

$$\frac{\partial}{\partial u}g(u,u) + \frac{\partial}{\partial v}g(u,u) = a(u)\,.$$

Par conséquent

$$\beta(u,\alpha) = \left(\frac{\partial}{\partial u}g(u,u) + \frac{\partial}{\partial v}g(u,u)\right)^2 - \frac{1}{\alpha}\left(\frac{\partial}{\partial u}g(u,u) - \frac{\partial}{\partial v}g(u,u)\right)\,.$$

L'inégalité (8) nous permet de majorer $\beta(u,\alpha)$

$$\beta(u,\alpha) \leq \left(\frac{\partial}{\partial u}g(u,u) + \frac{\partial}{\partial v}g(u,u)\right)^2 - \left(\frac{\partial}{\partial u}g(u,u) - \frac{\partial}{\partial v}g(u,u)\right)^2\,.$$

Enfin (7) et (9) nous permettent d'écrire

$$\left(\frac{\partial}{\partial u}g(u,u) - \frac{\partial}{\partial v}g(u,u)\right) \geq \left|\frac{\partial}{\partial u}g(u,u) + \frac{\partial}{\partial v}g(u,u)\right|\,.$$

Finalement $\beta(u,\alpha) \leq 0$ pour tout $u \in \mathbb{R}$.

4.5 - Plaçons-nous dans le cas où $\beta(u,\alpha) = 0$ pour tout u. On a donc les deux égalités suivantes (qui étaient des inégalités dans la démonstration précédente)

$$\begin{aligned}
&(10) && \frac{\partial H}{\partial v} &=& 1-\alpha\left(\frac{\partial}{\partial u}g(u,u) - \frac{\partial}{\partial v}g(u,u)\right) = 0\\
&(11) && \beta(u,\alpha) &=& \left(\frac{\partial}{\partial u}g(u,u) + \frac{\partial}{\partial v}g(u,u)\right)^2 - \left(\frac{\partial}{\partial u}g(u,u) - \frac{\partial}{\partial v}g(u,u)\right)^2 = 0,.
\end{aligned}$$

L'égalité (11) nous donne $\frac{\partial}{\partial u}g(u,u) = 0$ ou $\frac{\partial}{\partial v}g(u,u) = 0$. Distinguons les 2 cas :

1. $\dfrac{\partial}{\partial u} g(u,u) = 0$ donc $\dfrac{\partial}{\partial v} g(u,u) = -\dfrac{1}{\alpha}$ et $a(u) = -\dfrac{1}{\alpha}$. La fonction f (définie à une constante près) est donc linéaire,

$$f(u) = -\frac{1}{\alpha} u \,.$$

   L'équation (6) est une équation de transport de vitesse $-\dfrac{1}{\alpha}$.

2. $\dfrac{\partial}{\partial v} g(u,u) = 0$ donc $\dfrac{\partial}{\partial u} g(u,u) = \dfrac{1}{\alpha}$ et $a(u) = \dfrac{1}{\alpha}$. La fonction f (définie à une constante près) est donc linéaire,

$$f(u) = \frac{1}{\alpha} u \,.$$

   L'équation (6) est une équation de transport de vitesse $\dfrac{1}{\alpha}$.

4.6 - Sauf dans le cas exceptionnel ci-dessus où l'on travaille avec l'équation de transport vérifiant $|a|\Delta t/\Delta x = 1$, un schéma monotone est d'ordre 1 (au plus).