Schémas numériques pour les équations hyperboliques non linéaires

Séance 12

21 Février 2006

Exercice 1. Un exemple de schéma non conservatif

On considère le schéma suivant :

$$u_j^{n+1} = \begin{cases} u_j^n - \dfrac{u_j^n \Delta t}{\Delta x}\left(u_j^n - u_{j-1}^n\right) & si \quad u_j^n \geq 0 \\ u_j^n - \dfrac{u_j^n \Delta t}{\Delta x}\left(u_{j+1}^n - u_j^n\right) & si \quad u_j^n \leq 0 \end{cases}$$

pour approcher l'équation de Bürgers.

1.1 - Expliquer pourquoi c'est une généralisation naturelle du schéma décentré au cas non linéaire.

1.2 - Montrer que ce schéma ne peut pas se mettre sous forme conservative.

1.3 - Appliquer le schéma à la condition initiale suivante :

$$u_0(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x \leq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$$

et conclure.

Exercice 2. Le schéma d'Engquist-Osher

On considère le schéma suivant :

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \frac{\alpha}{4}\left(\left(u_{j+1}^n\right)^2 - \left(u_{j-1}^n\right)^2\right) + \frac{\alpha}{2}\left(\int_{u_j^n}^{u_{j+1}^n} |\xi| d\xi - \int_{u_{j-1}^n}^{u_j^n} |\xi| d\xi\right)$$

avec $\alpha = \frac{\Delta t}{\Delta x}$ pour approcher l'équation de Bürgers.

2.1 - Montrer qu'il peut s'écrire sous forme conservative et expliciter son flux numérique $g(u, v)$.

2.2 - Montrer qu'il est consistant avec l'équation de Bürgers.

2.3 - Montrer qu'il est monotone sous la condition C.F.L.

2.4 - Montrer que si la condition initiale $\{u_j^0\}_j$ est positive alors la solution $\{u_j^n\}_j$ l'est aussi pour tout n.

2.5 - Montrer que ce schéma coïncide avec le schéma décentré dans les zones où u_j^n ne change pas de signe.

Exercice 3. Le schéma de Lax-Wendroff

On considère le schéma suivant :

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \frac{\alpha}{2}\left(f_{j+1}^n - f_{j-1}^n\right) + \frac{\alpha^2}{2}\left(a_{j+\frac{1}{2}}^n\left(f_{j+1}^n - f_j^n\right) - a_{j-\frac{1}{2}}^n\left(f_j^n - f_{j-1}^n\right)\right)$$

où $f_j^n = \dfrac{\left(u_j^n\right)^2}{2}$, $a_{j+\frac{1}{2}}^n = \dfrac{u_j^n + u_{j+1}^n}{2}$ et $\alpha = \dfrac{\Delta t}{\Delta x}$.

3.1 - L'écrire sous forme conservative et montrer qu'il est consistant avec l'équation de Bürgers.

3.2 - Montrer qu'il est d'ordre 2 (au moins).

3.3 - En l'appliquant à la donnée initiale suivante :

$$u_j^0 = \begin{cases} w & \text{si } j < 0 \\ -w & \text{si } j \geq 0 \end{cases}$$

montrer qu'il n'est pas entropique.

Exercice 4. Erreur de troncature et schémas monotones

Soit un schéma sous forme conservative :

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \alpha\left(g\left(u_{j+1}^n, u_j^n\right) - g\left(u_j^n, u_{j-1}^n\right)\right), \quad \alpha = \frac{\Delta t}{\Delta x},$$

consistant avec l'équation

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(f(u)) = 0. \tag{1}$$

4.1 - Soit $\bar{u}$ une solution régulière de (1). Montrer que l'erreur de troncature a pour expression :

$$\varepsilon_j^n = \frac{\Delta t}{2}\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial t^2} + \frac{\Delta x}{2}\frac{\partial}{\partial x}\left(\left(\frac{\partial g}{\partial v}(\bar{u},\bar{u}) - \frac{\partial g}{\partial u}(\bar{u},\bar{u})\right)\frac{\partial \bar{u}}{\partial x}\right) + O(\Delta x^2 + \Delta t^2)$$

où toutes les quantités sont évaluées en (x_j, t^n).

4.2 - Montrer que :

$$\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(a(\bar{u})^2\frac{\partial \bar{u}}{\partial x}\right).$$

4.3 - En déduire que :

$$\varepsilon_j^n = \frac{\Delta t}{2}\frac{\partial}{\partial x}\left(\beta(\bar{u},\alpha)\frac{\partial \bar{u}}{\partial x}\right) + O(\Delta x^2 + \Delta t^2)$$

où $\beta(\bar{u},\alpha) = a(\bar{u})^2 - \frac{1}{\alpha}\left(\frac{\partial g}{\partial u}(\bar{u},\bar{u}) - \frac{\partial g}{\partial v}(\bar{u},\bar{u})\right)$.

On suppose maintenant que le schéma est monotone.

4.4 - Montrer que $\beta(u,\alpha) \leq 0$ pour tout $u \in \mathbb{R}$.

4.5 - Montrer que, si $\beta(u,\alpha) = 0$ pour tout u, alors $f(u)$ est linéaire.

4.6 - En déduire que, sauf dans le cas exceptionnel ci-dessus, un schéma monotone est d'ordre 1 (au plus).