Résolution analytique d'équations hyperboliques non linéaires en 1D

Séance 11

14 Février 2006

Exercice 1. Solution classique

On considère l'équation de Bürgers

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} f(u) = 0 \quad x \in \mathbb{R},\ t > 0$$

où $f(u) = \frac{1}{2}u^2$, avec la condition initiale suivante : $u_0(x) = x$.

1.1 - Calculer la solution classique. On tracera les caractéristiques dans le plan (x, t) puis la solution en fonction de x à différents temps.

Exercice 2. Construction de l'onde de détente

On considère l'équation de Bürgers avec la condition initiale suivante :

$$u_0(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \leq 0 \\ x/\alpha & \text{si} \quad 0 \leq x \leq \alpha \\ 1 & \text{si} \quad x \geq \alpha \end{cases}$$

pour $\alpha > 0$.

2.1 - Construire la solution à l'aide des caractéristiques.

2.2 - Est-ce une solution classique ?

2.3 - Que se passe-t-il lorsque $\alpha \longrightarrow 0$?

Exercice 3. Problème de Riemann à 2 et 3 états

On considère le problème suivant :

$$(1) \qquad \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{\partial u}{\partial t} + \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{u^2}{2}\right) = 0 \quad x \in \mathbb{R},\ t > 0 \\ u(x,0) = u_0(x) \end{array} \right.$$

3.1 - On choisit comme condition initiale

$$u_0(x) = \left\{ \begin{array}{lll} u_g & si & x < 0 \\ u_d & si & x > 0 \end{array} \right. .$$

Dans chacun des cas $u_g < u_d$, $u_g = u_d$ et $u_g > u_d$, construire **plusieurs solutions faibles**. On tracera les caractéristiques dans le plan (x,t) et la solution à différents temps.

3.2 - On choisit comme condition initiale $u_0(x) = \left\{ \begin{array}{lll} u_1 & \text{si} & x \leq 0 \\ u_2 & \text{si} & 0 < x \leq 1 \\ u_3 & \text{si} & x > 1 \end{array} \right. .$

3.2-(a) A quelle condition a-t-on une solution continue à $t > 0$?

3.2-(b) Calculer la solution pour $u_1 = 0$, $u_2 = 1$ et $u_3 = 0$. Tracer les caractéristiques dans le plan (x,t) et la solution à différents temps. Montrer que l'amplitude et la vitesse du choc tendent vers 0 quand $t \longrightarrow +\infty$.

3.2-(c) Calculer la solution pour $u_1 = 2$, $u_2 = 1$, $u_3 = 0$, et tracer les caractéristiques dans le plan (x,t) et la solution à différents temps.

Exercice 4. Equation de Bürgers avec terme d'ordre 0

Soit $\alpha > 0$. On s'intéresse à l'équation de Bürgers avec un terme source linéaire :

$$(2) \qquad \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{\partial u}{\partial t} + \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{u^2}{2}\right) = -\alpha u \quad x \in \mathbb{R},\ t > 0 \\ u(x,0) = u_0(x) \end{array} \right. .$$

4.1 - Résoudre explicitement ce problème par la méthode des caractéristiques lorsque u_0 est croissante.

4.2 - Calculer explicitement la solution en prenant comme condition initiale (α est un réel strictement positif donné),

$$u_0(x) = \begin{cases} u_g & si \quad x \leq 0 \\ u_g + \frac{u_d - u_g}{\alpha} x & si \quad 0 < x < \alpha \\ u_d & si \quad x \geq \alpha \end{cases}, \text{ avec } u_d \geq u_g \,.$$

4.3 - Trouver une solution faible du problème de Riemann à deux états,

$$u_0(x) = \begin{cases} u_g & si \quad x \leq 0 \\ u_d & si \quad x > 0 \end{cases}, \text{ avec } u_d \geq u_g \,.$$