Séance n^{o}10
Correction

31 Janvier 2006

Exercice 1. Schéma saute-mouton pour l'équation de transport

1.1 - Le schéma est d'ordre deux en temps et en espace, comme peut le montrer sa réécriture sous forme de différences centrées

$$\frac{(u_j^{n+1} - u_j^{n-1})}{2\Delta t} + a\frac{(u_{j+1}^n - u_{j-1}^n)}{2\Delta x} = 0\,.$$

1.2 - Une récurrence prouve que u_j^n se met sous la forme demandée avec la relation

$$U_{n+1} = U_{n-1} - \lambda(\exp(i\xi\Delta x) - \exp(-i\xi\Delta x))U_n\,,$$

soit

$$U_{n+1} = -2i\lambda\sin(\xi\Delta x)U_n + U_{n-1}\,.$$

On sait que la solution d'une telle récurrence à trois termes se met sous la forme

$$U_n = A(r_+)^n + B(r_-)^n$$

lorsque les racines r_+ et r_- de l'équation caractéristique

$$r^2 + 2i\lambda\sin(\xi\Delta x)r - 1$$

sont distinctes (ce qui est le cas en général).

Le discriminant réduit de cette équation est

$$\Delta = 1 - \lambda^2\sin^2(\xi\Delta x)\,.$$

Si $\lambda > 1$, alors le discriminant est strictement négatif pour certaines valeurs de ξ. Pour ces valeurs, les deux racines de l'équation sont imaginaires pures et leur produit vaut -1.

L'une des deux racines est donc de module strictement supérieur à un, et le schéma est donc instable.
Si $\lambda \leq 1$, alors le discriminant est toujours positif ou nul et les racines valent

$$r_\pm = -i\lambda \sin(\xi \Delta x) \pm \sqrt{1 - \lambda^2 \sin^2(\xi \Delta x)}$$

et sont de module 1 ; le schéma est alors stable.

1.3 - Dans le cas $\lambda \leq 1$, les racines étant de module unité, on peut écrire

$$r_+ = \exp(-i\omega\Delta t)$$

avec

$$\cos(\omega \Delta t) = \sqrt{1 - \lambda^2 \sin^2(\xi \Delta x)} \ \text{ et } \ \sin(\omega \Delta t) = \lambda \sin(\xi \Delta x)\,.$$

Le produit $r_+ r_-$ valant -1, on a alors

$$r_- = -\exp(i\omega\Delta t)\,.$$

La solution s'exprime alors

$$u_j^n = A \exp[i(\xi\, j\Delta x - \omega\, n\Delta t)] + (-1)^n B \exp[i(\xi\, j\Delta x + \omega\, n\Delta t)]\,.$$

Nous avons donc deux ondes se propageant en sens inverse l'une de l'autre à la vitesse de phase $\pm\frac{\omega}{\xi}$. Pour $\xi\Delta x$ petit, la relation $\sin(\omega\Delta t) = \lambda \sin(\xi \Delta x)$ donne le développement limité suivant

$$\omega \sim \frac{\lambda\xi\Delta x - \lambda(1-\lambda^2)(\xi\Delta x)^3/6}{\Delta t} = a\xi - a\frac{\xi^3}{6}(1-\lambda^2)\Delta x^2\,.$$

La vitesse de phase de l'onde approchant l'onde réelle est donc égale à a plus un terme d'erreur de vitesse de phase de l'ordre de $(\xi\Delta x)^2$.

1.4 - On a les relations

$$U_0 = A + B$$

et

$$U_1 = Ar_+ + Br_- = U_0[1 - \lambda(1 - \exp(-i\xi\Delta x))]$$

La solution de ce système est donnée par

$$A = \frac{U_0}{2\cos(\omega\Delta t)}[1 - \lambda(1 - \exp(-i\xi\Delta x)) + \exp(i\omega\Delta t)]$$

et

$$B = \frac{U_0}{2\cos(\omega\Delta t)}[-1 + \lambda(1 - \exp(-i\xi\Delta x)) + \exp(-i\omega\Delta t)]\,.$$

Pour $\xi\Delta x$ (et donc $\omega\Delta t$) petits, on a alors

$$A \sim U_0$$

et

$$B \sim \frac{\lambda(1-\lambda)}{2}(\xi\Delta x)^2 U_0$$

ce qui est le résultat annoncé.

Exercice 2. Schéma saute-mouton pour l'équation des ondes

2.1 - Il suffit de prendre le produit scalaire $L^2([0,L])$ de l'équation des ondes par $\frac{\partial u}{\partial t}$ et d'écrire d'une part

$$\int_0^L \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\frac{\partial u}{\partial t}(x)\,dx = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^L \left|\frac{\partial u}{\partial t}\right|^2 (x)\,dx$$

et d'autre part, après avoir effecté une intégration par partie (les termes de bord étant nuls grâce aux conditions limites)

$$\int_0^L \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x}\frac{\partial u}{\partial x}(x)\,dx = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^L \left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|^2 (x)\,dx\,.$$

2.2 - Le schéma est d'ordre deux (différences centrées) ; on peut le vérifier par développements limités. Sa stabilité s'étudie par Fourier en supposant

$$u_j^{n-1} = \exp(i\xi j\Delta x)$$

et en cherchant l'équation vérifiée par g défini par $u^{n+1} = gu^n = g^2u^{n-1}$. On pose $\lambda = c\frac{\Delta t}{\Delta x}$

$$g^2 - 2g + 1 - \lambda^2 g\left(\exp(i\xi\Delta x) - 2 + \exp(-i\xi\Delta x)\right) = 0$$

soit

$$g^2 - 2g\left[1 - 2\lambda^2\sin^2\left(\frac{\xi\Delta x}{2}\right)\right] + 1 = 0\,.$$

Le discriminant réduit de cette équation vaut

$$\Delta = \left[1 - 2\lambda^2\sin^2\left(\frac{\xi\Delta x}{2}\right)\right]^2 - 1\,.$$

Si $\lambda \leq 1$ alors pour tout ξ,

$$-1 \leq 1 - 2\lambda^2\sin^2\left(\frac{\xi\Delta x}{2}\right) \leq 1$$

et Δ est donc négatif ou nul. Le polynôme en g étant à coefficients réels, ses racines sont alors complexes conjuguées et leur produit vaut -1. Elles sont donc toutes les deux de module unité, et le schéma est donc stable (l'erreur d'amplitude est même nulle : le schéma n'est pas dissipatif).
Si $\lambda > 1$, pour certaines valeurs de ξ, Δ est strictement positif ; ses racines sont toutes les deux réelles et disctintes ; comme leur produit vaut -1, l'une des deux est de valeur absolue strictement supérieure à 1 ; le schéma est donc instable.

2.3 - Avec les nouvelles notations, le schéma s'écrit

$$\frac{1}{2}\frac{v_j^{n+1/2}-v_j^{n-1/2}}{\Delta t}-\frac{1}{2}c^2\frac{d_{j+1/2}^n-d_{j-1/2}^n}{\Delta x}=0\,.$$

De façon analogue à la méthode utilisé dans le cas continu, nous multiplions cette égalité par $\Delta x\,\frac{v_j^{n+1/2}+v_j^{n-1/2}}{\Delta t}=\Delta x\frac{u_j^{n+1}-u_j^{n-1}}{\Delta t}$ et nous sommons sur $j\in[1,N-1]$. L'égalité demandée est obtenue en remarquant que l'on peut effectuer une "intégration par partie discrète" (dans laquelle les termes de bord sont nuls grâce aux conditions limites) :

$$\sum_{j=1}^{N-1}\left(d_{j+1/2}^n-d_{j-1/2}^n\right)\,u_j^{n+1}=\sum_{j=0}^{N-1}d_{j+1/2}^n(u_j^{n+1}-u_{j+1}^{n+1})=-(d^n,d^{n+1})_h$$

2.4 - On reformule $E^{n+1/2}$

$$E^{n+1/2}=\frac{1}{2}\left\|v^{n+1/2}\right\|_h^2+\frac{1}{2}c^2\left(d^n,d^n\right)_h+\frac{1}{2}c^2\left(d^{n+1}-d^n,d^n\right)_h$$

Or d'après a définition de v et d, on a

$$(d^{n+1}-d^n)_{j+1/2}=\frac{\Delta t}{\Delta x}(v_{j+1}^{n+1/2}-v_j^{n+1/2})\,.$$

On peut donc, par Cauchy-Schwartz discret, minorer $E^{n+1/2}$ de la façon suivante

$$E^{n+1/2}\geq\frac{1}{2}\left\|v^{n+1/2}\right\|_h^2+\frac{1}{2}c^2\left(d^n,d^n\right)_h-c^2\frac{\Delta t}{\Delta x}\left\|v^{n+1/2}\right\|_h\left(d^n,d^n\right)_h^{1/2}\ .$$

En posant $V=\left\|v^{n+1/2}\right\|_h$ et $D=(d^n,d^n)_h^{1/2}$, On a donc

$$2E^{n+1/2}\geq V^2-2c^2\frac{\Delta t}{\Delta x}VD+c^2D^2=\left(V-c^2\frac{\Delta t}{\Delta x}D\right)^2+c^2\left(1-c^2\frac{\Delta t^2}{\Delta x^2}\right)D^2\ .$$

Si la condition $\left(1-c^2\frac{\Delta t^2}{\Delta x^2}\right)>0$ est vérifiée, alors les deux termes de la somme précédente sont positifs et sont donc chacun bornés par $2E^{n+1/2}$ qui est constant au cours du temps. D'où dans un premier temps D est borné, puis, $V-c^2\frac{\Delta t}{\Delta x}D$ étant borné, V l'est aussi.

2.5 - Pour prouver que sous cette condition l'énergie L^2 discrète $\sum \Delta x\,(u_j^n)^2$ est aussi bornée, on écrit que

$$u_j = (u_j - u_{j-1}) + (u_{j-1} - u_{j-2}) + \cdots + (u_2 - u_1) + (u_1 - u_0)\ ,$$

car, grâce aux conditons limites, $u_0 = 0$. L'inégalité de Cauchy-Schwartz donne alors :

$$u_j^2 \leq j\Delta x^2 \sum_{k=1}^{j} \left(\frac{u_k - u_{k-1}}{\Delta x}\right)^2 \leq j\Delta x \sum_{k=1}^{N-1} \Delta x d_{j+1/2}^2 = j\Delta x D^2\ .$$

Par suite, u_N étant nul, on a

$$\sum_{j=0}^{N} \Delta x\, u_j^2 = \sum_{j=0}^{N-1} \Delta x u_j^2 \leq \Delta x^2 D^2 \sum_{j=0}^{N-1} j = \frac{(N-1)\Delta x\, N\Delta x}{2} D^2\ .$$

Or $N\Delta x = L$ d'où :

$$\sum_{j=0}^{N} \Delta x\, u_j^2 \leq \frac{L^2}{2} D^2\ .$$

medskip

Exercice 3. Schéma décentré pour l'équation des ondes

3.1 - Le vecteur $U = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial t} \\ c\dfrac{\partial u}{\partial x} \end{pmatrix}$ répond à la question à condition de poser

$$C = \begin{pmatrix} 0 & c \\ c & 0 \end{pmatrix}$$

et en remarquant que $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial t}$. On pose de plus $U_0 = \begin{pmatrix} u_1 \\ c u_0' \end{pmatrix}$.

3.2 - Les valeurs propres de la matrice C sont évidemment c et $-c$ et des vecteurs propres associés sont donnés par $\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$. En notant P la matrice de passage associée

$$P = P^{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\ ,$$

et en multipliant l'équation vérifiée par U par P, on obtient

$$\frac{\partial PU}{\partial t} - PCP^{-1}\frac{\partial PU}{\partial x} = 0\ .$$

Mais

$$PCP^{-1} = \begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & -c \end{pmatrix}$$

donc en posant $\begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix} = PU$, on obtient deux équations de transport indépendantes qui s'écrivent

$$\frac{\partial v}{\partial t} - c\frac{\partial v}{\partial x} = 0$$

et

$$\frac{\partial w}{\partial t} + c\frac{\partial w}{\partial x} = 0$$

avec $v = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\partial u}{\partial t} + c\frac{\partial u}{\partial x}\right)$ et $w = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\partial u}{\partial t} - c\frac{\partial u}{\partial x}\right)$. On en déduit en particulier que

$$v(x,t) = v(x+ct,0) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[u_1(x+ct) + cu_0'(x+ct)\right]$$

$$w(x,t) = w(x-ct,0) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[u_1(x-ct) - cu_0'(x-ct)\right] \ .$$

On obtient donc

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{\sqrt{2}}(v+w) = \frac{1}{2}\left[u_1(x+ct) + u_1(x-ct) + cu_0'(x+ct) - cu_0'(x-ct)\right]$$

soit, par intégration en temps :

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\int_0^t (u_1(x+cs) + u_1(x-cs))ds + \frac{1}{2}(u_0(x+ct) + u_0(x-ct))$$

Par un changement de variable $y = x+cs$ d'une part et $y = x-cs$ d'autre part, on aboutit à

$$u(x,t) = \frac{1}{2}(u_0(x+ct) + u_0(x-ct)) + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} u_1(y)\, dy \ .$$

3.3 - Le schéma décentré sur les (v_j) s'écrit :

$$v_j^{n+1} = v_j^n + \lambda(v_{j+1}^n - v_j^n) \ ,$$

celui sur les (w_j) :

$$w_j^{n+1} = w_j^n - \lambda(w_j^n - w_{j-1}^n) \ .$$

Ceci permet d'écrire, en notant $U = \begin{pmatrix} u_t \\ u_x \end{pmatrix}$

$$(u_t)_j^{n+1} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(v_j^{n+1} + w_j^{n+1}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[v_j^n + \lambda(v_{j+1}^n - v_j^n) + w_j^n - \lambda(w_j^n - w_{j-1}^n)\right] \ .$$

Soit

$$(u_t)_j^{n+1} = (u_t)_j^n(1-\lambda) + \frac{\lambda}{2}\left((u_t)_{j+1}^n + (u_t)_{j-1}^n + (u_x)_{j+1}^n - (u_x)_{j-1}^n\right) \ .$$

De même

$$(u_x)_j^{n+1} = (u_x)_j^n(1-\lambda) + \frac{\lambda}{2}\left((u_t)_{j+1}^n - (u_t)_{j-1}^n + (u_x)_{j+1}^n + (u_x)_{j-1}^n\right) \ .$$