Séance n^{o}10
Schéma saute-mouton - Équation des ondes

31 Janvier 2006

Exercice 1. Schéma saute-mouton pour l'équation de transport

On considère le schéma saute-mouton pour approcher l'équation de transport

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (a > 0)$$

sur une grille spatiale régulière de pas Δx et avec un pas de temps Δt :

$$u_j^{n+1} = u_j^{n-1} - \lambda\left(u_{j+1}^n - u_{j-1}^n\right) ,$$

où $n \geq 1$ et u_j^0 et u_j^1 sont donnés et où on a posé $\lambda = a\frac{\Delta t}{\Delta x}$.

1.1 - Quel est l'ordre de ce schéma ?

1.2 - On suppose que

$$u_j^0 = U_0 \exp(i\xi j\Delta x) \quad \text{et} \quad u_j^1 = U_1 \exp(i\xi j\Delta x) \;\; \forall j\,.$$

Montrer que la solution du schéma peut s'écrire sous la forme

$$u_j^n = U_n \exp(i\xi j\Delta x) \;\; \forall j$$

avec

$$U_n = A\,(r_+)^n + B\,(r_-)^n \; ,$$

avec r_+ et r_- solutions d'une équation que l'on précisera. En déduire une condition nécessaire et suffisante de stabilité du schéma.

1.3 - On suppose $\lambda \leq 1$. Montrer que la solution est la superposition d'une onde se propageant dans le même sens que la solution exacte et d'un onde se propageant en sens inverse (onde "parasite"). Comparer la vitesse de phase de ces ondes avec la vitesse de phase de la solution exacte.

1.4 - On suppose que U_0 est donné et que le schéma décentré amont est utilisé pour calculer U_1. Calculer A et B dans ce cas et montrer que l'onde parasite est de module petit devant celui de l'onde principale lorsque $\xi \Delta x \ll 1$.

Exercice 2. Schéma saute-mouton pour l'équation des ondes

On s'intéresse à l'approximation du problème de Cauchy pour l'équation des ondes en domaine borné $x \in [0, L]$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \ , \ x \in [0, L] \ , \ t > 0 \, , \tag{1}$$

avec pour données initiales

$$u(x, t = 0) = u_0(x) \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, t = 0) = u_1(x) \tag{2}$$

et les conditions limites

$$u(x = 0, t) = u(x = L, t) = 0 \, .$$

2.1 - Montrer que l'énergie

$$\frac{1}{2} \left\| \frac{\partial u}{\partial t} \right\|^2_{L^2([0,L])} + \frac{1}{2} c^2 \left\| \frac{\partial u}{\partial x} \right\|^2_{L^2([0,L])}$$

est conservée au cours du temps (on supposera u suffisamment régulière).

On considère le schéma suivant, sur une grille régulière de pas $\Delta x = \frac{L}{N}$ et Δt

$$\frac{u_j^{n+1} - 2u_j^n + u_j^{n-1}}{\Delta t^2} - c^2 \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{\Delta x^2} = 0 \ \forall j \in [1, N-1] \, .$$

Les conditions aux limites sont prises en compte simplement par

$$u_0^n = u_N^n = 0 \ \forall n \geq 0 \, .$$

2.2 - Quel est l'ordre de ce schéma ? Etudier sa stabilité par Fourier.

2.3 - Etablir la conservation au cours du temps de la quantité

$$E^{n+1/2} = \frac{1}{2}\left\|v^{n+1/2}\right\|_h^2 + \frac{1}{2}c^2\left(d^{n+1}, d^n\right)_h$$

avec par définition

$$v_j^{n+1/2} = \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t}$$

$$d_{j+1/2}^n = \frac{u_{j+1}^n - u_j^n}{\Delta x},$$

$$(a,b)_h = \sum_{j=0}^{N-1} \Delta x\, a_{j+1/2} b_{j+1/2}$$

et

$$\|v\|_h^2 = \sum_{j=1}^{N-1} \Delta x\,(v_j)^2.$$

2.4 - En posant $V = \left\|v^{n+1/2}\right\|_h$ et $D = (d^n, d^n)_h^{1/2}$, prouver que

$$2E^{n+1/2} \geq V^2 - 2c^2\frac{\Delta t}{\Delta x} V D + c^2 D^2$$

En déduire une condition suffisante pour que D et V soient bornés au cours des itérations.

2.5 - En utilisant, après l'avoir prouvée, une inégalité de Poincaré discrète, retrouver alors la condition de stabilité obtenue à la question 2.

Exercice 3. Schéma décentré pour l'équation des ondes

On considère de nouveau l'équation (1) assortie des conditions initiales (2). Pour simplifier, on se place en domaine non-borné et on ne considère donc pas de conditions aux limites.

3.1 - Mettre le problème sous forme d'un système du premier ordre

$$\frac{\partial U}{\partial t} - C\frac{\partial U}{\partial x} = 0 \tag{3}$$

assorti de la condition initiale,

$$U(x, t=0) = U_0(x)$$

où l'on précisera la matrice C, le vecteur U et la condition initiale U_0.

3.2 - En diagonalisant C, mettre le système précédent sous la forme de deux équations de transport indépendantes et en déduire l'expression de la solution $u(x,t)$.

3.3 - En discrétisant chacune de ces équations de transport par le schéma décentré amont, donner l'expression du schéma décentré amont pour le système (3).