Séance n°9
Correction

24 Janvier 2006

Exercice 1. Equation de transport scalaire en dimension N

1.1 - Soit $v(t) = u(X(t), t)$. Nous avons

$$\frac{dv}{dt}(t) = \frac{dX}{dt}(t) \cdot \nabla u(X(t), t) + \frac{\partial u}{\partial t}(X(t), t)\,.$$

Pour que v' soit identiquement nulle, compte tenu de l'équation vérifiée par u, il suffit d'avoir le résultat demandé dans la question.

1.2 - La caractéristique en question est par définition $X(s; x, t)$ et nous avons, toujours par définition $x = X(t; x, t)$. Puisque u est constante le long de cette caractéristique, nous avons

$$\begin{aligned} u(x,t) = u(X(t;x,t),t) &= u(X(s;x,t),s) \;\; \forall s \\ &= u(X(0;x,t),0) \\ &= u_0(X(0;x,t))\,. \end{aligned}$$

1.3 - Une solution classique de (2)-(3) vérifie, par intégration de (2) entre t_0 et t,

$$X(t) = X(t_0) + \int_{t_0}^{t} c(X(s), s)\, ds = x_0 + \int_{t_0}^{t} c(X(s), s)\, ds = \Phi(X)(t)$$

et est donc point fixe de Φ. Inversement, si X est un point fixe de Φ, alors c'est une fonction C^1 car c est continue et par dérivation on obtient (2), et (3) est retrouvé car $X(t_0) = \Phi(X)(t_0) = x_0$.

1.4 - On va montrer par récurrence que

$$\left|\left(\Phi^k(v) - \Phi^k(w)\right)(t)\right| \leq \frac{L^k(t-t_0)^k}{k!} \|v-w\| \quad \forall t \in [t_0, t_0+T]\,,$$

ce qui permettra de conclure. La propriété est vraie pour $k=0$; supposons la vraie jusqu'au rang $k-1$, nous avons alors

$$\left(\Phi^k(v) - \Phi^k(w)\right)(t) = \int_{t_0}^{t} \left[c(\Phi^{k-1}(v)(s), s) - c(\Phi^{k-1}(w)(s), s)\right] ds\,.$$

On a donc par hypothèse sur c puis par hypothèse de récurrence

$$\begin{aligned}\left|\left(\Phi^k(v) - \Phi^k(w)\right)(t)\right| &\leq \int_{t_0}^{t} L\left|\Phi^{k-1}(v)(s) - \Phi^{k-1}(w)(s)\right| ds \\ &\leq \int_{t_0}^{t} \frac{L^k(s-t_0)^{k-1}}{(k-1)!} \|v-w\|\, ds\,.\end{aligned}$$

Le calcul de la dernière intégrale prouve le résultat au rang k, ce qui achève la démonstration par récurrence.

1.5 - D'après la question précédente, il existe un rang K pour lequel l'application Φ^K est strictement contractante ; on note pour simplifier $\lambda < 1$ son facteur de contraction. En partant d'un élément X_0 quelconque de $C^0[t_0, t_0+T]$, on définit la suite (X_q) d'éléments de $C^0[t_0, t_0+T]$ par l'égalité $X_{q+1} = \Phi^K(X_q)$. Cette suite est de Cauchy dans $C^0[t_0, t_0+T]$. En effet,

$$\|X_{q+p} - X_q\| \leq \sum_{i=1}^{p} \|X_{q+i} - X_{q+i-1}\| \leq \sum_{i=1}^{p} \lambda^{q+i-1} \|X_1 - X_0\| \leq \lambda^q \frac{\|X_1 - X_0\|}{1-\lambda}$$

qui tend vers 0 lorsque q croît. L'espace $C^0[t_0, t_0+T]$ étant complet pour la norme considérée, la suite (X_q) tend vers une limite notée X appartenant à $C^0[t_0, t_0+T]$. L'application Φ^K étant continue, et par définition de (X_q), on a alors

$$\Phi^K(X) = X\,,$$

ce qui prouve l'existence d'un point fixe de Φ^K. L'unicité de ce point fixe s'obtient en considérant deux points fixes X et Y. L'application Φ^K étant strictement contractante, on a alors

$$\|X - Y\| = \left\|\Phi^K(X) - \Phi^K(Y)\right\| \leq \lambda \|X - Y\| \ \ (\lambda < 1)\,,$$

ce qui n'est possible que si $X = Y$.

On montre alors que $\Phi(X)$ est aussi point fixe de Φ^K en calculant

$$\Phi^K(\Phi(X)) = \Phi(\Phi^K(X)) = \Phi(X)\,.$$

Par unicité du point fixe de Φ^K, on déduit que ses deux points fixes X et $\Phi(X)$ sont égaux et que X est donc point fixe de Φ. Ce point fixe est unique car si Y est point fixe de Φ, alors c'est aussi un point fixe de Φ^K qui n'en possède qu'un.

1.6 - On peut tenir un raisonnement similaire à celui des questions précédentes en travaillant sur $C^0[t_0 - T, t_0]$. On obtient alors l'existence et l'unicité de la solution classique à (2)-(3) sur l'intervalle de temps $[t_0 - T, t_0]$. Le raccord entre la solution sur cet intervalle de temps et la solution sur l'intervalle de temps $[t_0, t_0 + T]$ est bien C^1 en considérant d'une part (3) pris au temps t_0 et ensuite (2) au temps t_0, la fonction c étant continue.

1.7 - Les deux membres de gauche de l'équation (5) vérifient la même équation différentielle (2) en la variable s. Ils vérifient en outre la même condition initiale (3) en $s = t$: par définition, on a

$$X(t; X(t; x_0, t_0), t) = X(t; x_0, t_0)\,.$$

Par unicité de la soltion à (2)-(3), on en déduit l'égalité (5) pour tout s.

On dérive ensuite l'égalité (5) par rapport à t. Cela donne

$$0 = \frac{\partial X}{\partial t}(s; X(t; x_0, t_0), t) + \frac{d}{dt}X(t; x_0, t_0) \cdot \nabla_x X(s; X(t; x_0, t_0), t)\,,$$

soit

$$\frac{\partial X}{\partial t}(s; X(t; x_0, t_0), t) + c(X(t; x_0, t_0), t) \cdot \nabla_x X(s; X(t; x_0, t_0), t) = 0\,.$$

Le résultat est obtenu en appliquant cette relation en prenant $x_0 = x$ et $t_0 = t$; on a alors $X(t; x_0, t_0) = X(t; x, t) = x$.

1.8 - Si u_0 est C^1, alors l'application $(x, t) \longmapsto u_0(X(0; x, t))$ est elle-même C^1 sur $\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^+$ et le théorème de dérivation des applications composées et l'égalité (6) montrent que cette application est solution de l'équation de transport ; d'autre part elle vérifie bien la condition initiale. Inversement pour montrer que cette solution est bien la seule, on commence par montrer que toute solution classique $u(x, t)$ est constante le long des caractéristiques

$$\frac{d}{dt}u(X(t; x_0, t_0), t) = 0$$

grâce à l'équation vérifiée par X. Nous avons donc pour tout (y, t)

$$u(X(t; y, 0), t) = u(X(0; y, 0), 0) = u(y, 0) = u_0(y)\,. \qquad (*)$$

On applique ensuite (5) pour $t = 0$ puis $s = t_0 = t$ et $x_0 = x$, ce qui donne

$$X(t; x, t) = X(t; X(0; x, t), 0)\,.$$

Mais $X(t; x, t)$ vaut aussi bien sûr x. En choisissant $y = X(0; x, t)$ dans $(*)$, on aboutit à

$$u(x, t) = u_0(X(0; x, t))\,.$$

Exercice 2. Schémas d'ordre un

2.1 - Pour étudier la stabilité de ces schémas, considérons pour chacun une solution valant au temps t_n

$$u_j^n = \exp(i\xi j\Delta x)$$

et cherchons à l'instant t_{n+1} la solution sous la forme

$$u_j^{n+1} = g(\xi, \Delta t, \Delta x) u_j^n\,.$$

En reportant dans le schéma explicite centré, on aboutit à l'égalité

$$g = 1 - \frac{\lambda}{2}\left(\exp(i\xi\Delta x) - \exp(-i\xi\Delta x)\right)$$

soit

$$g = 1 - i\lambda\sin(\xi\Delta x)$$

et donc $\sup|g| > 1$ pour toute valeur de λ. Le schéma est donc inconditionnellement instable.

En reportant dans le schéma implicite centré, on aboutit à l'équation

$$g = 1 - \frac{\lambda}{2}\left(g\,\exp(i\xi\Delta x) - g\,\exp(-i\xi\Delta x)\right)$$

soit

$$g = \frac{1}{1 + i\lambda\sin(\xi\Delta x)}$$

et donc $\sup|g| \leq 1$ pour toute valeur de λ. Le schéma est donc inconditionnellement stable.

Pour ce qui est du schéma explicite décentré vers l'amont, on aboutit à l'équation suivante sur g

$$g = 1 - \lambda(1 - \exp(-i\xi\Delta x))$$

et donc

$$|g|^2 = (1 - \lambda + \lambda\cos(\xi\Delta x))^2 + \lambda^2\sin(\xi\Delta x)^2$$

En développant cette expression, on obtient

$$|g|^2 = 1 + 2\lambda^2 - 2\lambda + 2\lambda(1-\lambda)\cos(\xi\Delta x)$$

soit finalement

$$|g|^2 = 1 - 2\lambda(1-\lambda)(1 - \cos(\xi\Delta x))$$

Si $\lambda \leq 1$, le terme $2\lambda(1-\lambda)(1-\cos(\xi\Delta x))$ est toujours positif et donc $\sup|g| = 1$, le schéma est donc stable.
Si $\lambda > 1$, le terme $2\lambda(1-\lambda)(1-\cos(\xi\Delta x))$ est négatif et on a $\sup|g| = \sqrt{1 + 4\lambda(\lambda-1)}$. Le schéma est donc instable.

Pour calculer l'ordre du schéma, on considère $\bar{u}$ une solution régulière de l'équation de transport, et on effectue les développements limités suivants pour le schéma implicite centré (les restes sont tous exprimés en $O(\Delta t)$, car on suppose que l'on travaille avec $\frac{\Delta t}{\Delta x}$ fixé)

$$\bar{u}(x_j, t_{n+1}) = \bar{u}(x_j, t_n) + \Delta t \frac{\partial \bar{u}}{\partial t}(x_j, t_n) + \frac{\Delta t^2}{2}\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial t^2}(x_j, t_n) + O(\Delta t^3)$$

$$\begin{aligned} \bar{u}(x_{j+1}, t_{n+1}) &= \bar{u}(x_j, t_n) + \Delta t \frac{\partial \bar{u}}{\partial t}(x_j, t_n) + \Delta x \frac{\partial \bar{u}}{\partial x}(x_j, t_n) \\ &+ \frac{\Delta t^2}{2}\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial t^2}(x_j, t_n) + \frac{\Delta x^2}{2}\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x^2}(x_j, t_n) \\ &+ \Delta x \, \Delta t \, \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x \partial t}(x_j, t_n) + O(\Delta t^3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{u}(x_{j-1}, t_{n+1}) &= \bar{u}(x_j, t_n) + \Delta t \frac{\partial \bar{u}}{\partial t}(x_j, t_n) - \Delta x \frac{\partial \bar{u}}{\partial x}(x_j, t_n) \\ &+ \frac{\Delta t^2}{2}\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial t^2}(x_j, t_n) + \frac{\Delta x^2}{2}\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x^2}(x_j, t_n) \\ &- \Delta x \, \Delta t \, \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x \partial t}(x_j, t_n) + O(\Delta t^3) \end{aligned}$$

et l'on calcule

$$(r_\Delta)_j^{n+1} = \frac{1}{\Delta t}\left[\bar{u}_j^{n+1} - \left(\bar{u}_j^n - \frac{\lambda}{2}\left(\bar{u}_{j+1}^{n+1} - \bar{u}_{j-1}^{n+1}\right)\right)\right]$$

avec par définition $\bar{u}_j^n = \bar{u}(x_j, t_n)$. On trouve

$$(r_\Delta)_j^{n+1} = \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + a\frac{\partial \bar{u}}{\partial x}\right)(x_j, t_n) + \Delta t \left(\frac{1}{2}\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial t^2} + a\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x \partial t}\right)(x_j, t_n) + O(\Delta t^2)\,.$$

Puisque $\bar{u}$ est solution exacte de l'équation de transport, le premier terme du membre de droite est nul. Le schéma implicite centré est donc d'ordre 1 exactement car le terme $\frac{1}{2}\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial t^2} + a\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x \partial t} = -\frac{1}{2}\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial t^2}$ n'est pas nul.

Pour le schéma décentré vers l'amont, on utilise

$$\bar{u}(x_{j-1}, t_n) = \bar{u}(x_j, t_n) - \Delta x \frac{\partial \bar{u}}{\partial x}(x_j, t_n) + \frac{\Delta x^2}{2}\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x^2}(x_j, t_n) + O(\Delta x^2)$$

et l'on calcule

$$(r_\Delta)_j^{n+1} = \frac{1}{\Delta t}\left[\bar{u}_j^{n+1} - \left(\bar{u}_j^n - \lambda\left(\bar{u}_j^n - \bar{u}_{j-1}^n\right)\right)\right]\,.$$

On trouve

$$(r_\Delta)_j^{n+1} = \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + a\frac{\partial \bar{u}}{\partial x}\right)(x_j, t_n) + \frac{\Delta t}{2}\left(\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial t^2} - \lambda\frac{\Delta x^2}{\Delta t^2}\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x^2}\right)(x_j, t_n) + O(\Delta t^2)$$

Le premier terme du membre de droite est nul. La parenthèse du deuxième terme peut aussi s'écrire

$$\left(\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial t^2} - \frac{a^2}{\lambda}\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x^2}\right)(x_j, t_n)\,.$$

Or la solution de l'équation de transport vérifie aussi l'équation

$$\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial t^2} - a^2\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x^2} = 0\,.$$

Le schéma est donc exactement d'ordre 1 si $\lambda \neq 1$. Si $\lambda = 1$, le schéma devient

$$u_j^{n+1} = u_{j-1}^n$$

équation qui est aussi vérifiée par la solution exacte. Le schéma est donc dans ce cas d'ordre infini.

2.2 - Pour ce qui est de l'erreur d'amplitude du schéma implicite centré, nous avons

$$r_a = \frac{1 - (1 + \lambda^2 \sin^2(\xi \Delta x))^{-1/2}}{\Delta t}\,.$$

Pour $\xi \Delta x$ petit, on a alors $r_a \sim \frac{\lambda^2}{2\Delta t}\xi^2 \Delta x^2$ soit $r_a \sim \frac{1}{2} a\lambda \xi^2 \Delta x$. L'erreur d'amplitude est donc d'ordre un.

Pour ce qui est de l'erreur de phase du schéma centré implicite

$$r_p = \frac{a\Delta t \xi + Arg(g)}{\Delta t} = \frac{a\Delta t \xi + \arctan(-\lambda \sin(\xi \Delta x))}{\Delta t}\,.$$

En utilisant le développement limité de arctan au voisinage de 0 ($\arctan \varepsilon \approx \varepsilon - \varepsilon^3/3$), on aboutit à

$$r_p \sim \frac{a\Delta t \xi - \lambda\left(\xi \Delta x - \frac{\xi^3 \Delta x^3}{6}\right) + \lambda^3 \frac{\xi^3 \Delta x^3}{3}}{\Delta t} = \frac{\lambda(1 + 2\lambda^2)\frac{\xi^3 \Delta x^3}{6}}{\Delta t}\,.$$

En utilisant la définition de λ, il vient $r_p \sim \frac{1}{6} a (1 + 2\lambda^2)\xi^3 \Delta x^2$. L'erreur de phase est donc d'ordre deux.

L'erreur d'amplitude du schéma décentré est approchée par

$$r_a \sim \frac{1 - \left[1 - \lambda\,(1 - \lambda)\,\frac{\xi^2 \Delta x^2}{2}\right]}{\Delta t}$$

soit $r_a \sim \frac{1}{2} a (1 - \lambda)\xi^2 \Delta x$. L'erreur d'amplitude est donc d'ordre un.

L'erreur de phase du schéma décentré est quant à elle calculée par

$$r_p = \frac{a\Delta t \xi + \arctan\left(\frac{-\lambda \sin(\xi \Delta x)}{1 - \lambda(1 - \cos(\xi \Delta x))}\right)}{\Delta t}\,.$$

Le développement limité de l'argument de arctan donne $-\lambda(\xi\Delta x-(\xi\Delta x)^3/6)(1+\lambda(\xi\Delta x)^2/2)$, soit en ne gardant que les termes d'ordre au plus trois $-\lambda[\xi\Delta x+(\xi\Delta x)^3(\lambda/2-1/6)]$. Finalement, nous obtenons

$$r_p \sim \frac{a\Delta t\xi-\lambda[\xi\Delta x+(\xi\Delta x)^3(\lambda/2-1/6)]+\lambda^3(\xi\Delta x)^3/3}{\Delta t}=\frac{\lambda(\xi\Delta x)^3(1/6-\lambda/2+\lambda^2/3)}{\Delta t}.$$

En utilisant la définition de λ, nous avons alors $r_p \sim a\xi^3(1/6-\lambda/2+\lambda^2/3)$, sauf bien sûr pour $\lambda = 1$ et $\lambda = 1/2$, qui sont les racines du polynôme en λ à l'intérieur des parenthèses. Pour $\lambda = 1$, le schéma est exact et pour $\lambda = 1/2$, un petit calcul montre que $g = \cos(\xi\Delta x/2)\exp(-i\xi\Delta x/2)$. Donc lorsque $\xi\Delta x \leq \pi$, l'argument de g vaut $-\xi\Delta x/2$ et l'erreur de phase est nulle.

2.3 - Discussion : le schéma explicite centré est toujours instable et n'est donc jamais utilisé, le schéma implicite centré est toujours stable et peut donc être employé avec de grands pas de temps, mais il nécessite une résolution de système linéaire à chaque pas de temps ; le schéma décentré est explicite mais stable sous une condition qui limite le pas de temps.

Exercice 3. Le schéma de Lax-Wendroff

3.1 - On a

$$\bar{u}(x_j,t_{n+1})=\bar{u}(x_j,t_n)+\Delta t\frac{\partial\bar{u}}{\partial t}(x_j,t_n)+\frac{\Delta t^2}{2}\frac{\partial^2\bar{u}}{\partial t^2}(x_j,t_n)+O(\Delta t^3)\,.$$

Mais $\bar{u}$ étant solution de l'équation de transport, on a

$$\frac{\partial\bar{u}}{\partial t}(x_j,t_n)=-a\frac{\partial\bar{u}}{\partial x}(x_j,t_n)$$

et par dérivation de l'équation de transport

$$\frac{\partial^2\bar{u}}{\partial t^2}(x_j,t_n)=a^2\frac{\partial^2\bar{u}}{\partial x^2}(x_j,t_n)\,,$$

d'où le résultat.

3.2 - A partir de l'égalité proposée, on approche $\frac{\partial\bar{u}}{\partial x}(x_j,t_n)$ et $\frac{\partial^2\bar{u}}{\partial x^2}(x_j,t_n)$ par des différences centrées sur x_j :

$$\frac{\partial\bar{u}}{\partial x}(x_j,t_n)=\frac{\bar{u}_{j+1}^n-\bar{u}_{j-1}^n}{2\Delta x}+O(\Delta x^2)$$
$$\frac{\partial^2\bar{u}}{\partial x^2}(x_j,t_n)=\frac{\bar{u}_{j+1}^n-2\bar{u}_j^n+\bar{u}_{j-1}^n}{\Delta x}+O(\Delta x^2)$$

ce qui permet de construire le schéma de Lax-Wendroff et de déduire qu'il est d'ordre deux si $\lambda \neq 1$.

Pour $\lambda = 1$, le schéma s'écrit

$$u_j^{n+1} = u_{j-1}^n \,,$$

équation qui est aussi vérifiée par la solution exacte ; le schéma est donc d'ordre infini pour $\lambda = 1$.

3.3 - Considérons pour ce schéma une solution valant au temps t_n

$$u_j^n = \exp(i\xi j\Delta x)$$

et cherchons à l'instant t_{n+1} la solution sous la forme

$$u_j^{n+1} = g(\xi, \Delta t, \Delta x)\, u_j^n \,.$$

En reportant dans le schéma de Lax-Wendroff, on aboutit à l'équation

$$g = 1 - \frac{\lambda}{2}\left(\exp(i\xi\Delta x) - \exp(-i\xi\Delta x)\right) + \frac{\lambda^2}{2}\left(\exp(i\xi\Delta x) - 2 + \exp(-i\xi\Delta x)\right)$$

soit

$$g = 1 - i\lambda\sin(\xi\Delta x) - \lambda^2(1-\cos(\xi\Delta x)) \,.$$

Etudions le module de g

$$\begin{aligned}
|g|^2 &= 1 - 2\lambda^2(1-\cos(\xi\Delta x)) + \lambda^4(1-\cos(\xi\Delta x))^2 + \lambda^2\sin^2(\xi\Delta x) \\
&= 1 - \lambda^2(2 - 2\cos(\xi\Delta x) + \cos^2(\xi\Delta x) - 1) + \lambda^4(1-\cos(\xi\Delta x))^2 \\
&= 1 + (\lambda^4 - \lambda^2)(1-\cos(\xi\Delta x))^2 \,.
\end{aligned}$$

Si $\lambda \leq 1$ alors $\lambda^4 - \lambda^2 \leq 0$ et $\sup|g| = 1$; le schéma est donc stable.
Si $\lambda > 1$ alors $\sup|g| = \sqrt{1 + 4(\lambda^4 - \lambda^2)}$ et le schéma est instable.

3.4 - Les erreurs d'amplitude et de phase sont données dans le polycopié (page 60 de l'édition 2005/2006)

$$r_a \sim \frac{a\lambda(1-\lambda^2)}{8}\xi^4\Delta x^3$$

et

$$r_p \sim \frac{a(1-\lambda^2)}{6}\xi^3\Delta x^2$$

Le schéma de Lax-Wendroff est donc très peu dissipatif.