Séance n°9
Équation de transport, caractéristiques et schémas

24 Janvier 2006

Exercice 1. Equation de transport scalaire en dimension N

Soit c une fonction continue de $\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^N$. On s'intéresse à l'équation de transport linéaire à coefficients variables

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c(x,t) \cdot \nabla u = 0\,,\ x \in \mathbb{R}^N\,,\ t > 0 \tag{1}$$

assortie de la condition initiale

$$u(x,0) = u_0(x)\,.$$

1.1 - Nous cherchons ici formellement les courbes

$$\begin{array}{rccc} X: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^N \\ & t & \longmapsto & X(t) \end{array}$$

le long desquelles la solution de (1) soit constante, c'est-à-dire telles que $u(X(t),t)$ ne dépende pas de t. Montrer que les courbes définies par

$$\frac{dX}{dt}(t) = c(X(t),t) \tag{2}$$

répondent à ce critère.

On notera $X(t;x_0,t_0)$ la courbe caractéristique solution (quand elle existe) de (2) et vérifiant la condition

$$X(t_0) = x_0\,. \tag{3}$$

1.2 - Soit un point (x,t) de $\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^+$. On suppose qu'il existe une unique caractéristique passant par ce point, c'est-à-dire telle que $X(t)=x$. Montrer alors que la solution de (1) vaut nécessairement en ce point

$$u(x,t) = u_0(X(0;x,t))\,. \tag{4}$$

Le reste de cet exercice est consacré à la démonstration de l'existence des courbes caractéristiques sous la condition de Lipschitz uniforme

$$\exists L>0 \,/\, \forall t \geq 0,\ \forall (x,y) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N\,,\ |c(x,t)-c(y,t)| \leq L\,|x-y|$$

et à la résolution de (1).

1.3 - On appelle solution classique de (2)-(3) sur l'intervalle de temps $[t_0, t_0+T]$ une fonction $C^1([t_0,t_0+T])$ vérifiant (2) pour tout $t \in [t_0,t_0+T]$ ainsi que (3).
Montrer que l'existence d'une solution classique (2)-(3) sur $[t_0,t_0+T]$ équivaut à l'existence d'un point fixe de l'application

$$\begin{array}{rcl}
\Phi : C^0([t_0,t_0+T]) & \longrightarrow & C^0([t_0,t_0+T]) \\
v & \longmapsto & \Phi(v) : [t_0,t_0+T] \longrightarrow \mathbb{R}^N \\
& & \qquad\qquad t \longmapsto (\Phi(v))(t)
\end{array}$$

avec

$$(\Phi(v))(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} c(v(s),s)\,ds\,.$$

1.4 - L'espace $C^0([t_0,t_0+T])$ est muni de sa norme habituelle (pour laquelle il est complet)

$$\|v\| = \sup_{t\in[t_0,t_0+T]} |v(t)|\,.$$

Montrer que pour tout entier k, la $k$ième itérée de Φ vérifie

$$\forall (v,w) \in \left(C^0([t_0,t_0+T])\right)^2\,,\ \left\|\Phi^k(v)-\Phi^k(w)\right\| \leq \frac{L^kT^k}{k!}\,\|v-w\|\,.$$

1.5 - En déduire qu'il existe un entier K tel que Φ^K admet un unique point fixe ; montrer alors que ce point fixe est aussi unique point fixe de Φ.

Nous avons donc montré l'existence et l'unicité d'une solution classique au problème (2)-(3) sur l'intervalle de temps $[t_0,t_0+T]$.

1.6 - Montrer que ce résultat d'existence et d'unicité s'étend au cas où l'on intègre l'équation dans le sens rétrograde, c'est-à-dire lorsque l'on cherche la solution sur l'intervalle de temps $[t_0-T,t_0]$, ce qui permet de définir $X(t;x_0,t_0)$ pour tout couple (t,t_0).

1.7 - Prouver que pour tout triplet (t, t_0, s) et tout x_0,

$$X(s; x_0, t_0) = X(s; X(t; x_0, t_0), t) \tag{5}$$

et en déduire que X vérifie l'équation de transport

$$\frac{\partial X}{\partial t}(s; x, t) + c(x, t) \cdot \nabla_x X(s; x, t) = 0\,. \tag{6}$$

1.8 - En déduire que si u_0 est une fonction $C^1(\mathbb{R}^N)$, alors la fonction donnée par (4) est l'unique solution classique de (1) assortie de la condition initiale.

Dans les exercices 2 et 3, on s'intéresse à l'approximation numérique de l'équation de transport

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (a > 0) \tag{7}$$

par des schémas aux différences finies de pas de temps Δt sur une grille spatiale régulière de pas Δx. On pose $\lambda = a\frac{\Delta t}{\Delta x}$.

Exercice 2. Schémas d'ordre un

On considère les trois schémas suivants :
Le schéma explicite centré

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \frac{\lambda}{2}\left(u_{j+1}^n - u_{j-1}^n\right)\,,$$

le schéma implicite centré

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \frac{\lambda}{2}\left(u_{j+1}^{n+1} - u_{j-1}^{n+1}\right)$$

et le schéma explicite décentré vers l'amont

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \lambda\left(u_j^n - u_{j-1}^n\right)\,.$$

2.1 - Dans les trois cas, calculer le coefficient d'amplification et étudier la stabilité du schéma. Pour ceux de ces schémas qui sont stables, étudier l'ordre du schéma.

2.2 - Etudier ensuite les erreurs d'amplitude et de phase de chacun des schémas stables (on obtiendra un équivalent de ces erreurs pour $\xi\Delta x$ petit).

2.3 - Discuter des avantages et inconvénients des différents schémas.

Exercice 3. Le schéma de Lax-Wendroff

Soit $\bar{u}$ une solution régulière de l'équation de transport.

3.1 - Montrer que

$$\bar{u}\left(x_j, t_{n+1}\right) = \bar{u}\left(x_j, t_n\right) - a\Delta t \frac{\partial \bar{u}}{\partial x}\left(x_j, t_n\right) + \frac{a^2 \Delta t^2}{2} \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x^2}\left(x_j, t_n\right) + O(\Delta t^3)\,.$$

3.2 - Indiquer comment, à partir de cette égalité, on peut construire le schéma suivant (Lax-Wendroff)

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \frac{\lambda}{2}\left(u_{j+1}^n - u_{j-1}^n\right) + \frac{\lambda^2}{2}\left(u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n\right)\,,$$

et étudier son ordre en distinguant le cas $\lambda = 1$.

3.3 - Calculer le coefficient d'amplification et en déduire la stabilité du schéma sous condition CFL.

3.4 - Etudier l'erreur de phase et d'amplitude du schéma.