Séance n°8
Approximation des équations paraboliques

2 Novembre 2004

Exercice 1. Analyse de stabilité L^2 du θ-schéma (1)

On s'intéresse à la résolution du problème d'évolution :

$$(1) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0, \\ \\ u(x,0) = u_0(x) \quad x \in \mathbb{R}, \quad (u_0(x) \in L^2(\mathbb{R})). \end{cases}$$

On considère le schéma aux différences finies qui s'écrit, avec les notations habituelles :

$$(2) \qquad \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} - \theta \, \frac{u_{j+1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_{j-1}^{n+1}}{h^2} - (1-\theta) \, \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{h^2} = 0$$

θ désignant un paramètre réel entre 0 et 1.

1) Discuter l'ordre et le caractère explicite du schéma en fonction de θ.

2) Etudier par Fourier la stabilité L^2 du schéma suivant les valeurs de θ.

Exercice 2. Analyse de stabilité L^2 du θ-schéma (2)

Dans ce qui suit, Ω désigne un ouvert polygonal de $\mathbb{R}^2$, $a(x)$ et $q(x)$ deux fonctions définies sur Ω à valeurs réelles positives, bornées avec en outre

$$0 < a_- \leq a(x), \quad \text{p. p. } x \in \Omega.$$

On s'intéresse à la résolution du problème d'évolution

$$(3)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \operatorname{div}(a(x)\nabla u) + q(x)\, u = 0, & x \in \Omega, \quad t > 0, \\ u(x,0) = u_0(x), & x \in \Omega, \quad (u_0(x) \in L^2(\Omega)), \\ \dfrac{\partial u}{\partial n} = 0, & \text{sur } \Gamma = \partial\Omega. \end{cases}$$

1) Ecrire une formulation variationnelle en espace du problème sous la forme :

$$(4)\qquad \begin{cases} \text{Trouver } u(t) : \mathbb{R}^+ \to V \text{ tel que } : \\ \dfrac{d}{dt}(u(t),v) + a(u(t),v) = 0 \end{cases}$$

où on précisera l'espace de Hilbert V, le produit scalaire $(\cdot,\cdot)$ (celui qui intervient dans (4) et non pas celui de V) et la forme bilinéaire $a(\cdot,\cdot)$.

2) On approche (3) par éléments finis en espace (V_h désigne ci-dessous une famille de sous-espaces de dimension finie de V) et par un θ-schéma en temps :

$$(5)\qquad \begin{cases} \text{Trouver } u_h^n \in V_h, n \geq 1 \text{ tel que , pour tout } n \geq 0, : \\ (\dfrac{u_h^{n+1} - u_h^n}{\Delta t}, v_h) + a(\theta\, u_h^{n+1} + (1-\theta)\, u_h^n, v_h) = 0, \quad \forall v_h \in V_h. \end{cases}$$

Démontrer l'existence et l'unicité de la suite u_h^n, étant donné u_h^0, une approximation "convenable" de u_0 dans V_h.

3) On suppose que $\theta \geq 1/2$. Montrer que, $\|\cdot\|$ désignant la norme associée à $(\cdot,\cdot)$:

$$(6)\qquad \|u_h^{n+1}\| \leq \|u_h^n\|.$$

Indication : on prendra $v_h = \theta\, u_h^{n+1} + (1-\theta)u_h^n$.

En déduire que le schéma est inconditionnellement L^2 stable.

4) On suppose que $\theta < 1/2$ et on introduit :

$$\|a_h\| = \sup_{v_h \in V_h} \frac{a(v_h,v_h)}{\|v_h\|^2}.$$

Montrer que l'inégalité (6) reste vraie si $\Delta t\, \|a_h\| \leq \dfrac{2}{1-2\theta}$. Conclure.

5) Facultatif. Montrer que le calcul de $\|a_h\|$ équivaut à la recherche de la plus grande valeur propre d'un problème de valeurs propres généralisé. Effectuer le calcul de $\|a_h\|$ lorsque :

- L'ouvert Ω est un carré et les fonctions $a(x)$ et $q(x)$ sont constantes.
- Le carré est discrétisé à l'aide d'un maillage carré régulier de côté h.
- On utilise les éléments finis P_1 sur le maillage obtenu en découpant chaque petit carré en deux triangles rectangles.

Exercice 3. Analyse L^∞ du schéma explicite

Pour approcher la solution de (1), on considère le schéma numérique suivant :

$$\frac{u_j^{n+1}-u_j^n}{\Delta t} - \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{h^2} = 0 \tag{7}$$

complété par la condition initiale :

$$u_j^0 = u_0(x_j).$$

1) Donner l'algorithme de calcul de la solution (on introduira $\beta = \frac{\Delta t}{h^2}$)). Expliquer pourquoi la solution numérique u_j^n se propage "à vitesse finie".

2) Dans la suite on adoptera la notation :

$$u_h = (u_j), \qquad \|u_h\|_\infty = \sup_j |u_j|$$

Si $\beta = \dfrac{\Delta t}{h^2} \leq \dfrac{1}{2}$, démontrer le principe du maximum discret :

$$a \leq u_j \leq b \Rightarrow a \leq u_j^n \leq b.$$

En particulier $\|u_h^n\|_\infty \leq \|u_h^0\|_\infty$ (on dit que le schéma est donc L^∞ stable).

3) On définit l'erreur de troncature

$$\varepsilon_j^{n+\frac{1}{2}} = \frac{U_j^{n+1}-U_j^n}{\Delta t} - \frac{U_{j+1}^n - 2U_j^n + U_{j-1}^n}{h^2}$$

où par définition $U_j^n = u(x_j, t^n)$. On suppose que u est de classe C^2 en temps et C^4 en espace et que ses dérivées sont uniformément bornées sur $\mathbb{R} \times [0,T]$. A l'aide d'un développement de Taylor, montrer que, pour tout entier n tel que $(n+1)\ \Delta t\ \leq\ T$, on a l'estimation :

$$\|\varepsilon_h^{n+\frac{1}{2}}\|_\infty \leq C\ (\ \Delta t\ \|\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\|_{L^\infty} + h^2\ \|\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}\|_{L^\infty})$$

où par définition :

$$\|f\|_{L^\infty} = \sup_{(x,t)\,\in\,\mathbb{R}\times[0,T]} |f(x,t)|.$$

4) On introduit l'erreur sur la solution :

$$e_j^n = U_j^n - u_j^n \quad \text{(erreur commise)}.$$

Ecrire les équations qui relient e_h^n et $\varepsilon_h^{n+\frac{1}{2}}$. Démontrer l'estimation d'erreur

$$\sup_{(n+1)\Delta t \leq T} \|e_h^n\|_\infty \leq C\ T\ (\ \Delta t\ \|\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\|_{L^\infty} + h^2 \|\frac{\partial^4 u}{\partial t^4}\|_{L^\infty}).$$

Exercice 4. Schéma d'Euler implicite et principe du maximum

1) Question préliminaire. On dit qu'une matrice carrée M (d'ordre N) est une M-matrice si et seulement si :

$$(8) \qquad \begin{cases} M_{ii} > 0, \quad 1 \leq i \leq N, \quad M_{ij} < 0, \quad \text{pour } i \neq j. \\ \\ \inf\limits_{1 \leq i \leq N} \left[M_{ii} - \sum\limits_{j \neq i} |M_{ij}| \right] > 0. \end{cases}$$

Montrer qu'une telle matrice est nécessairement inversible et que, si b est un vecteur dont toutes les composantes sont positives, la solution x du système $Mx = b$ a toutes ses composantes positives (Indication : regarder là ou x_i est minimum).

Dans ce qui suit, Ω désigne un ouvert polygonal de $\mathbb{R}^2$. On s'intéresse à la résolution du problème d'évolution

$$(9) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = 0, & x \in \Omega, \quad t > 0, \\ u(x,0) = u_0(x), & x \in \Omega, \quad (u_0(x) \in L^2(\Omega)) \\ \dfrac{\partial u}{\partial n} = 0, & \text{sur } \Gamma = \partial\Omega. \end{cases}$$

2) Montrer que si u_0 est positive alors

$$\forall\, t \geq 0, \quad u(x,t) \geq 0, \quad \text{p.p. } x \in \Omega.$$

Indication : multiplier l'équation par $u^- = \inf(u, 0)$.

3) On discrétise (9) en espace par éléments finis P^1 (on appelle V_h l'espace d'approximation correspondant). Si on calcule les intégrales exactement, on aboutit au système

linéaire de dimension N_h (U_h désigne ci-dessous le vecteur des degrés de libertés habituels de u_h) :

$$M_h \frac{dU_h}{dt} + A_h\, U_h = 0. \tag{10}$$

Montrer que la matrice de rigidité A_h vérifie :

$$\forall\, 1 \leq i \leq N_h, \quad \sum_{j=1}^{M_h} A_{ij} = 0.$$

Montrer que, si tous les angles du maillage triangulaire de Ω sont strictement inférieurs à $\pi/2$,

$$\forall\, i \neq j, \quad A_{ij} < 0.$$

4) Au lieu de calculer les intégrales sur Ω de façon exacte, on les calcule de façon approchée par la formule :

$$\int_\Omega f(x)dx = \sum_{k \in \mathcal{T}_h} I_K(f), \quad I_K(f) = mes(K) \sum_{j=1}^{3} f(S_j(K)).$$

où les $S_j(K)$ sont les sommets du triangle K. On obtient alors le système différentiel :

$$\widetilde{M_h} \frac{dU_h}{dt} + \widetilde{A}_h\, U_h = 0. \tag{11}$$

Montrer que $I_K(f) = \displaystyle\int_K f(x)\, dx$ pour tout $f \in P_1(K)$.

En déduire que $\widetilde{A}_h = A_h$. Montrer que $\widetilde{M_h}$ est la matrice diagonale définie par (c'est ce qu'on appelle la condensation de masse) :

$$\widetilde{M}_{ii} = \sum_{j=1}^{N_h} M_{ij}$$

5) On approche (11) en temps à l'aide du schéma d'Euler implicite. On désigne par $u_h^n \in V_h$ l'approximation de la solution au temps $t^n = n\Delta t$. Montrer que, si tous les angles du maillage triangulaire de Ω sont strictement inférieurs à $\pi/2$, on a le principe du maximum discret :

$$u_h^0(x) \geq 0 \Rightarrow u_h^n(x) \geq 0, \quad \forall\, n \geq 1.$$

6) Montrer que, si on ne fait pas la condensation de masse, on récupère le principe du maximum discret à condition que le pas de temps soit assez petit.

7) Les raisonnements précédents fonctionnent-t-ils avec un θ schéma quelconque ?

Exercice 5. Schémas de Richardson et de DuFort-Frankel.

On s'intéresse à l'équation de la chaleur en dimension 1 :

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \qquad x \in \mathbb{R}, t > 0 \tag{12}$$

que l'on approche à l'aide du schéma de Richardson :

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^{n-1}}{2\Delta t} - \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{h^2} = 0 \tag{13}$$

1) Quel est a priori l'inconvénient pratique de ce schéma ? Montrer qu'il s'agit d'un schéma du second ordre en espace et en temps mais inconditionnellement instable.

2) Dans (13), on remplace u_j^n par $\frac{u_j^{n+1}+u_j^{n-1}}{2}$. On obtient ainsi le schéma de DuFort-Frankel. Montrer que ce schéma est explicite et inconditionnellement stable.

3) Analyser l'erreur de troncature du schéma de DuFort-Frankel et conclure (le schéma n'est consistant que si $\Delta t/h$ tend vers 0). Ce résultat était-il prévisible ?