Séance n^{o}6
Alternative de Fredholm

3 Janvier 2006

Exercice 1. Un exemple en dimension 1

1.1 - Montrer qu'il existe un opérateur linéaire continu K de $H^1(\mathbb{R}^+)$ dans lui-même tel que :

$$(Ku, v)_{H^1(\mathbb{R}^+)} = u(0)v(0), \quad \forall u, v \in H^1(\mathbb{R}^+),$$

et qu'il s'agit d'un opérateur autoadjoint de rang 1.

1.2 - Montrer, sans calcul, que K admet une seule valeur propre λ non nulle, qui est de multiplicité 1. Calculer λ et le vecteur propre associé.

1.3 - En déduire que le problème suivant :

$$\text{Trouver } u \text{ tel que } \begin{cases} -u'' + u = f & \text{dans } \mathbb{R}^+ \\ u'(0) + \alpha u(0) = 0 \end{cases}$$

admet une solution unique $u \in H^1(\mathbb{R}^+)$ pour toute donnée $f \in L^2(\mathbb{R}^+)$ si et seulement si $\alpha \neq 1$.

1.4 - Que peut-on dire de ce problème si $\alpha = 1$?

Exercice 2. Vibrations acoustiques

On considère un réservoir, occupant un domaine borné $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, contenant un fluide compressible. On s'intéresse, en régime harmonique, aux effets produits par les vibrations de la paroi. Autrement dit, pour une donnée $g \in L^2(\partial\Omega)$ et un nombre d'onde $k \in \mathbb{R}^+$, on cherche $p \in H^1(\Omega)$ tel que :

$$(1) \qquad \left\{ \begin{array}{ll} \Delta p + k^2 p = 0 & (\Omega) \\ \\ \dfrac{\partial p}{\partial n} = g & (\partial\Omega) \end{array} \right.$$

2.1 - Ecrire la formulation variationnelle de ce problème. Peut-on appliquer le théorème de Lax-Milgram ?

2.2 - Montrer qu'il existe un opérateur linéaire continu K de $H^1(\Omega)$ dans lui-même tel que :

$$(Ku, v)_{H^1(\Omega)} = \int_\Omega u\, v\, dx, \quad \forall u, v \in H^1(\Omega),$$

et qu'il s'agit d'un opérateur autoadjoint.

2.3 - Montrer que

$$\|Ku\|_{H^1(\Omega)} \leq \|u\|_{L^2(\Omega)} \quad \forall u \in H^1(\Omega).$$

En déduire que K est un opérateur compact. (On rappelle que l'injection de $H^1(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$ est compacte lorsque Ω est un domaine borné.)

2.4 - En déduire que le problème (1) est bien posé si et seulement si $1/(1 + k^2)$ n'est pas une valeur propre de K.

2.5 - Calculer les valeurs propres de K lorsque $\Omega =]0, l[\times]0, L[\times]0, h[$. (On admettra que tous les vecteurs propres sont à variables séparées.)

2.6 - On suppose $k = 0$. Montrer que le problème (1) admet une unique solution u telle que

$$\int_\Omega u\, dx = 0$$

si et seulement si

$$\int_{\partial\Omega} g\, d\gamma = 0.$$

Exercice 3. Un contre-exemple en domaine non borné

3.1 - Montrer que l'injection de $H^1(\mathbb{R}^N)$ dans $L^2(\mathbb{R}^N)$ n'est pas compacte.

3.2 - Montrer qu'il existe un opérateur linéaire continu A de $H^1(\mathbb{R}^N)$ dans lui-même tel que :

$$(Au, v)_{H^1(\mathbb{R}^N)} = \int_{\mathbb{R}^N} u\, v\, dx, \quad \forall u, v \in H^1(\mathbb{R}^N),$$

et qu'il n'est pas compact.

3.3 - En utilisant la transformation de Fourier, montrer que A n'admet aucune valeur propre.

3.4 - Montrer, en utilisant à nouveau la transformation de Fourier, que l'opérateur $A-\lambda I$ n'est pas inversible lorsque $\lambda > 1$. Commenter.