Séance n^{o}5
Pratique des éléments finis
Corrigé

13 Décembre 2005

Exercice 1. Calcul des matrices élémentaires

1.1 - Evaluons l'intégrale à l'aide de la formule de quadrature donnée :

$$\begin{aligned}(M_h^l)_{1,1} &= \int_{T_l} \lambda_1^2 \, dx = \frac{\text{Aire}(T_l)}{3}(\frac{1}{4} + 0 + \frac{1}{4}), \\ &= \frac{\text{Aire}(T_l)}{6}.\end{aligned}$$

Par symétrie nous aurons :

$$(M_h^l)_{2,2} = (M_h^l)_{3,3} = \frac{\text{Aire}(T_l)}{6}.$$

Les termes croisés sont égaux à

$$\int_{T_l} \lambda_1 \, \lambda_2 \, dx = \int_{T_l} \lambda_1 \, \lambda_3 \, dx = \int_{T_l} \lambda_2 \, \lambda_3 \, dx == \frac{\text{Aire}(T_l)}{12},$$

d'où

$$M_h^l = \frac{\text{Aire}(T_l)}{12} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

1.2 - On calcule le gradient des coordonnées barycentriques :

$$\nabla \lambda_1 = \frac{1}{2\text{Aire}(T_l)} \begin{pmatrix} y_2 - y_3 \\ x_3 - x_2 \end{pmatrix}$$

On reconnaît l expression d'une normale non-unitaire de l'arête opposée au sommet 1. On note :

$$\left|\begin{array}{l}\vec{n}_1 = (y_2 - y_3, x_3 - x_2)^t,\\ \vec{n}_1 = (y_3 - y_1, x_1 - x_3)^t,\\ \vec{n}_1 = (y_1 - y_2, x_2 - x_1)^t.\end{array}\right.$$

Ce sont les normales des arêtes opposées aux sommets S_1, S_2 et S_3. Ces normales sont toutes dirigées vers l'intérieur du triangle T_l et de norme la longueur de l'arête. On a :

$$\nabla\lambda_i = \frac{1}{2\text{Aire}(T_l)}\vec{n}_i.$$

Les gradients des fonctions de base sont constants, il suffit donc de multiplier par l'aire du triangle pour calculer les intégrales de la matrice de rigidité.

$$(R_h^l)_{i,j} = \frac{\vec{n}_i \cdot \vec{n}_j}{4\text{Aire}(T_l)}$$

Exercice 2. Application sur maillage régulier

2.1 - $dim\, V_h = 9$, les degrés de liberté sont associés aux sommets du maillage.

2.2 - On note u_i les composantes du vecteur U_h. On a la décomposition :

$$u_h(x,y) = \sum_{i=1}^{9} u_i w_i(x,y).$$

En injectant cette expression dans la formulation variationnelle, on obtient par bilinéarité de a :

$$\sum_{i=1}^{9} u_i\, a(w_i, v_h) = l(v_h) \;\; \forall\, v_h \in V_h.$$

On choisit $v_h = w_j$, on obtient ainsi neuf équation' :

$$\sum_{i=1}^{9} u_i\, a(w_i, w_j) = l(w_j) \;\; j = 1, \cdots, 9.$$

On peut écrire ces équations sous forme matricielle :

$$A\, U_h = F_h.$$

La matrice A s'écrit

$$(A_h)_{i,j} = a(w_i, w_j) = \alpha \int_\Omega w_i\, w_j\, dx + \int_\Omega \nabla w_i \cdot \nabla w_j\, dx.$$

Le second membre :
$$(F_h)_j = l(w_j) = \int_\Omega f\, w_j\, dx.$$
On décompose la matrice sous la forme :
$$A_h = \alpha M_h + R_h$$
où on appelle matrice de masse :
$$M_h = \int_\Omega w_i\, w_j\, dx$$
et matrice de rigidité :
$$R_h = \int_\Omega \nabla w_i \cdot \nabla w_j\, dx.$$

2.3 - sur la ligne 1, 3, 7 et 9, associées aux quatre coins de carré, on a 3 termes non-nuls et 6 zéros. Sur les lignes 2, 4, 6 et 8, associées aux milieux des cotés du carré, on a 6 termes non-nuls et 3 zéros. Sur la ligne 5, associée au centre du carré, on a5 termes non-nuls et 4 zéros.

2.4 - On note h la longueur d'une arête horizontale, On calcule d'abord les matrices élémentaires sur le triangle rectangle isocèle T_1 de sommets (0,0), (h,0) et (0,h). Comme $\text{Aire}(T_1) = \dfrac{h^2}{2}$, on a :
$$M_h^1 = \frac{h^2}{24}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$
On a l'expression des normales :
$$\vec{n}_1 = (-h,-h)^t,\ \vec{n}_2 = (h,0)^t,\ \vec{n}_3 = (0,h)^t.$$
On en déduit la matrice de rigidité élémentaire du triangle T_1 :
$$R_h^1 = \begin{pmatrix} 1 & -1/2 & -1/2 \\ -1/2 & 1/2 & 0 \\ -1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}.$$
L'entrée (5,5) de la matrice M_h s'écrit :
$$\begin{aligned}
(M_h)_{5,5} &= \int_{T_2} w_5\, w_5\, dx + \int_{T_3} w_5\, w_5\, dx + \int_{T_6} w_5\, w_5\, dx + \int_{T_7} w_5\, w_5\, dx, \\
&= 4\int_{T_2} w_5\, w_5\, dx, \\
&= \frac{h^2}{3}.
\end{aligned}$$

L'entrée (5,2) de M_h s'écrit :

$$\begin{aligned}(M_h)_{5,2} &= \int_{T_2} w_5\, w_2\, dx + \int_{T_3} w_5\, w_2\, dx,\\ &= \frac{h^2}{12}.\end{aligned}$$

La cinquième ligne de M_h vaut :

$$M_h(5,:) = \frac{h^2}{12}(0,1,0,1,4,1,0,1,0).$$

On fait le même raisonnement pour obtenir la cinquième ligne de R_h :

$$R_h(5,:) = (0,-1,0,-1,4,-1,0,-1,0).$$

On reconnaît le motif élémentaire du Laplacien en différences finies.

2.5 - $dim\, V_h = 6$ si on élimine les degrés de libertés sur le coté inférieur de Ω. Mais on choisit l'approche de garder ces degrés de liberté et de remplacer chaque équation associée par l'équation

$$u = 0$$

Au niveau matriciel, on remplace la ligne associée par une ligne de zéros avec 1 placé sur la diagonale. les matrices M_h, R_h gardent la même expression. la matrice A_h garde la même expression, excepté pour les trois premières lignes qui sont remplies de zéros avec des un sur la diagonale. La cinquième ligne ne change pas. Il est néanmoins intéressant de mettre un zéros sur la colonne 2, afin de garder la symétrie de A_h.